UNIVERSITE DE YAHIA FARES DE MEDEA

Faculté de science et de Technologie

Département d'Electronique



MEMOIRE DE MAGISTER

Spécialité : Electronique

Option : Instrumentation et Microélectronique

Fusion de capteurs par algorithmes de Filtre de Kalman Sigma Point SPKF, "UKF" et "CDKF" appliqués à un robot mobile en milieu extérieur. Comparaison avec le Filtre de Kalman Etendu (EKF)

Par

BAYASLI Omar

Devant le jury composé de :

BATEL Noureddine	Maître de conférence A,	U. de Médéa	Président
OULD ZMIRLI Mohamed	Maître de conférence A,	U. de Médéa	Examinateur
SALHI Hassen	Professeur,	U. de Blida	Examinateur
GUESSOUM. Abderrezak	Professeur,	U. de Blida	Promoteur

03 juillet 2012

DEDICACE

Je dédie ce mémoire à tous ceux qui ont cru en mes capacités et n'ont jamais cessé de me soutenir.

RESUME

Dans ce présent mémoire on a étudié la fusion des données obtenues par les capteurs de position et d'orientation pour estimer la localisation du robot en milieu extérieur à l'aide du Filtre de Kalman Sans Parfums (UKF) puis celui à Différence Centrale (CDKF). Une comparaison des résultats obtenus avec ceux du Filtre de Kalman Etendu (EKF) a été réalisée. Nous supposons un mouvement de robot mobile sur un plan en deux dimensions mesuré par le capteur GPS et l'orientation est mesurée par le capteur compas digital.

Divers chemins ont été simulés et les résultats montrent que ces types de filtres de Kalman donnent résultats améliorés par rapport à l'EKF, mais ils nécessitent un réglage fin des matrices d'auto-corrélation des bruits d'état et de mesure.

Mots clés : Filtre de Kalman, système non linéaire, Fusion de capteurs, robot mobile, UKF et CDKF.

ABSTRACT

In this present memory one studied the fusion of sensors by algorithms of Unscented Kalman Filter (UKF) and to central difference (CDKF) applied for the localization of a mobile robot in outside environment, compared to the Extended Kalman Filter (EKF). We suppose a mobile robot movement on a Plan in two measurements measured by the GPS sensor and its orientation measured by the sensor digital compass.

In our work one has a path of robot and one estimated it by the Extended Kalman Filters (EKF), Unscented Kalman Filter (UKF) and to Central Difference Kalman Filter (CDKF). And these kinds of filters of Kalman require a regulation of the matrixes of auto-interrelationship of the noises of state and measure.

Key words: Kalman Filter, non linear system, sensor's Fusion, mobile robot, UKF and CDKF.

ملخص

في هذه المذكرة قمنا بدراسة انصهار الملتقطات بخوارزمية مرشح كالمن(UKF) و مرشح كالمن(CDKF) مطبق في تحكم الربو المتحرك في المجال الخارجي مقارنة بمرشح كالمن الممدد (EKF).

مع فرض حركة الربو في مستوى ذو بعدين و الوضعية مقاسة بملتقط نظام التموضع العالمي(GPS) و ايضا الاتجاه مقاس بالملتقط الرقمي(Compas) .

في عملنا قمنا بتقريب طريق الربو بواسطة مرشح كالمن الممدد(EKF) , مرشح كالمن(UKF) و مرشح كالمن (CDKF) وهذا النوع من مرشحات كالمن تستوجب تعديل لمصفوفات الضجيج للحالة و القياس.

مفتاح الكلمات :

مرشح كالمن , مرشح كالمن (UKF) , مرشح كالمن(CDKF) , نظام غير خطي ,الربو و انصهار الملتقطات.

REMERCIEMENT

Ce travail à été effectué au sein du laboratoire du département d'électronique de l'université de Saad Dahleb de Blida, sous la direction du monsieur Guessoum Abderrezak professeur de l'université Saad Dahleb de Blida département d'électronique.

Je remercie vivement monsieur Batel Nouredinne maître de conférence A université de Yahia Fares de Médéa qui me fait l'honneur présidé le jury.

Je remercie vivement monsieur Ould Zmirli Mohamed maître de conférence A université de Yahia Fares de Médéa, pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je remercie vivement monsieur Salhi Hassen professeur de l'université Saad Dahleb de Blida département d'électronique, pour avoir accepté d'examiner ce travail.

TABLE DES MATIERES

RESUME

REMERCIEMENT

TABLE DES MATIERES

Liste des figures

Liste des tableaux

Acronymes, abréviations et Notations mathématiques

1-Acronymes et abréviations

2-Notations mathématiques

Introduction Générale…… 1

Chapitre 1 : La théorie d'estimation

1.1 Introduction…… 4

1.2 Définition de l'estimateur…….. 4

1.2.1 Procédure d'estimation……..…..... 4

1.3 Estimation des paramètres aléatoires…… 7

1.3.1 Principe et fonctions de coût ……..…… 7

1.3.2 Calcul pour La fonction de coût quadratique…….…… 9

1.3.3 Calcul de la fonction de coût erreur absolue……..…..... 10

1.3.4 Calcul de la fonction de coût uniforme……..…..…..…… 10

1.4 Estimation des paramètres déterministes…….…… 11

1.4.1 Principe et qualité de l'estimation des paramètres déterministes…….…..…… 11

1.4.2 Maximum de vraisemblance……..…… 12

1.4.3 Inégalités de Cramer-Rao…….…… 13

1.4.4 Variance d'un estimateur déterministe non biaisé et efficace……..…..... 15

1.5 Estimation de paramètres multiples……....…… 16

1.5.1 Estimation optimale de vecteurs aléatoires…….…… 16

1.5.2 Estimation de vecteurs déterministes……..…… 22

1.6 Conclusion……....…… 23

CHAPITRE 2 : LE FILTRE DE KALMAN EKF, UKF et CDKF

2.1 Introduction…….……. 24

2.2 Filtrage de Kalman……...…..…….. 24

2.2.1 Définition et propriétés de filtre de Kalman…..…… 24

2.2.2 Principe du Filtre de Kalman ……. 25
2.3 Le Filtre de Kalman Etendu (EKF) ……..……..……... 33
2.3.1 Modèle Générale de Filtre de Kalman Étendu ……..…… 34
2.3.2 Principe du filtre de Kalman Étendu (EKF)……..…… 38
2.4 Filtre de Kalman sans Parfums……..…….. 40
2.4.1 Introduction…….…….. 40
2.4.2 Transformation sans Parfums……..... 40
2.4.3 Transformation sans parfums scalaire (scaled - Unscented)…….…… 44
2.4.4 Construction du modèle de filtrage récursif UKF…….……... 46
2.4.5 Algorithme du filtre de Kalman sans parfums (UKF)……..... 48
2.5 Le filtre de Kalman à différence centrale (CDKF)…….. 50
2.5.1 Formule d'interpolation polynomiale de Stirling …….……..... 50
2.5.2 Estimation de la moyenne et de la covariance d'une variable
aléatoire transformée..... 52
2.5.3 Algorithme de filtre de Kalman à différence centrale (CDKF)…….. 53
2.6 Conclusion…….…….. 55
Chapitre 3 : Robot mobile, Les capteurs de GPS et Compas digital
3.1 Introduction …….…. 56
3.2 Robot mobile……..……...……. 56
3.2.1 Introduction……..…….. 56
3.2.2 Définition de Robot mobile……..…… 56
3.2.3 La modélisation d'un robot mobile…….……...…… 58
3.2.4 Roulement sans glissement et contraintes non holonomes……..…..…… 59
3.2.5 Les grandes classes de robots mobiles et leurs modèles…… 63
3.2.6 Propriétés du modèle cinématique d'un robot…….…….. 72
3.2.7 Comparaison des différents types du robot……..... 73
3.3 Les Capteurs…….…… 73
3.3.1 Les Capteurs en robotique mobile…… 74
3.3.2 Mesure de la rotation des roues…….. 74
3.3.3 Mesure de la position par le GPS……...…… 75
3.3.3 Le GPS en mode différentiel…… ……..……... 76
3.4 Capteur Compas…….…….……. 77
3.4.1 Les propriétés du Capteur compas……. 78

3.5 Conclusion……..……... 78

CHAPITRE 4 : SIMULATION ET RESULTATS

4.1 Introduction……..... 79

4.2 Estimation de la trajectoire du robot mobile…….……... 79

4.3 Réglage des filtres de Kalman EKF, UKF et CDKF……..... 79

4.4 Modèle du Robot mobile……..…….…….……. 79

4.5 Application des filtres de Kalman étendu, sans parfum et le Filtre de Kalman à déférence centrale sur le modèle …….…….…..……. 82

4.5.1 Le filtre de Kalman étendu (EKF)……...…...……. 82

4.5.2 Le filtre de Kalman sans parfums (UKF)…….…….…… 83

4.5.3 Filtre de Kalman à déférence centrale (CDKF)…….…….. 86

4.6 Comparaison entre la trajectoire du robot avec les estimés des filtres EKF, UKF et CDKF et leurs erreurs……. 92

4.7 Comparaison entre les erreurs aux carrés des estimations des filtres…….. 92

4.8 Conclusion……..... 95

Conclusion Générale…… 98

Annexe A:

A.1 Calcul de la moyenne et de la covariance d'une variable aléatoire passée à travers une fonction non linéaire.....……...…….…….. 101

A.2 Définitions préliminaires…….. 101

A.2 .1 Racine carrée d'une matrice, décomposition de Cholesky…… 101

A.2 .2 Découplage stochastique……. 101

A.2 .2 Développement de Taylor multi-variable, jacobien et hessien……..... 101

A.3 Utilisation de développements de Taylor……. 102

A.4 Interpolation de Stirling……... 103

Annexe B:

B.1 Calcul de la moyenne et de la covariance d'une variable aléatoire……..... 106

B.2 Utilisation de la transformation sans parfums (unscented)…….. 106

B.3 Utilisation de simulation de Monte Carlo……..... 106

ANNEXE C :

C.1 Robots Mobiles……..... 111

C.1.1 Classes de robots a roues……. 111

C.1.2 Les représentations de l'environnement du robot……... 111

C.2.1 Cartes topologiques…… 111
C.3 Fusion de capteurs…… 112
REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUE …… 114

Liste des figures :

Figure 1.1- La situation de biais et la variance
Figure 1.2 - coût quadratique
Figure 1.3 - coût valeur absolue
Figure 1.4 - coût uniforme
Figure 1.5 - Fonction convexe
Figure 2.1- schéma de principe d'un estimateur d'état
Figure 2.2- schéma fonctionnel du filtre de Kalman continu
Figure 2.3- schémas fonctionnel du filtre de Kalman discret
Figure 2.4 - Schéma fonctionnel du filtre de Kalman discret étendu
Figure 2.5- Schéma fonctionnel du filtre de Kalman continu étendu
Figure 2.6- Application récursive du filtre de Kalman Étendu
Figure 2.7- Principe de la transformation sans Parfum
Figure (2.8.a) et (2.8.b) - Exemple de distribution de sigma points pour une variable aléatoire gaussienne
Figure 3.1- Illustration des architectures classiques des contrôleurs pour les robots mobiles :
Hiérarchique (A), Réactive (B) et Hybride (C)
Figure 3.2 – Repérage d'un robot mobile
Figure 3.3 – Caractérisation du roulement sans glissement
Figure 3.4 – Les principaux types de roues des robots mobiles
Figure 3.5 – Robot mobile de type unicycle
Figure 3.6 – Centre instantané de rotation d'un robot de type unicycle
Figure 3.7– Robot mobile de type tricycle
Figure 3.8 – Un robot mobile de type voiture et son CIR
Figure 3.9– Représentation d'un robot mobile omnidirectionnel
Figure 3.10– Robot mobile omnidirectionnel
Figure 3.11- Les 24 satellites NAVSTAR
Figure 3.12- Le GPS en mode différentiel
Figure 3.13– Capteur de Compas CMP03
Figure 4.1- Dynamique du robot dans le temps et l'espace.
Figure 4.2- trajectoire du robot et son estimée par le filtre de Kalman étendu
Figure 4.3- trajectoire du robot, son estimée par le filtre de Kalman étendu et l'erreur

de l'estimation
Figure 4.4- trajectoire du robot et son estimée par le filtre de Kalman étendu
Figure 4.5- trajectoire du robot, son estimée par le filtre de Kalman étendu et l'erreur de l'estimation
Figure 4.6- trajectoire du robot et son estimée par le filtre de Kalman étendu
Figure 4.7-trajectoire du robot, son estimée par le filtre de Kalman étendu et l'erreur de l'estimation
Figure 4.8- trajectoire du robot et son estimée par le filtre de Kalman sans parfums
Figure 4.9- trajectoire du robot, son estimée par le filtre de Kalman sans parfums et l'erreur de l'estimation
Figure 4.10- trajectoire du robot et son estimée par le filtre de Kalman sans parfums
Figure 4.11- trajectoire du robot, son estimé par le filtre de Kalman sans parfums et l'erreur de l'estimation
Figure 4.12- trajectoire du robot et son estimée par le filtre de Kalman sans parfums
Figure 4.13- trajectoire du robot, son estimée par le filtre de Kalman sans parfums et l'erreur de l'estimation
Figure 4.14- trajectoire du robot et son estimée par le filtre de Kalman à déférence centrale
Figure 4.15- trajectoire du robot, son estimée par le filtre de Kalman à déférence centrale et l'erreur de l'estimation
Figure 4.16- trajectoire du robot et son estimée par le filtre de Kalman à déférence centrale
Figure 4.17- trajectoire du robot, son estimé par le filtre de Kalman à déférence centrale et l'erreur de l'estimation
Figure 4.18- trajectoire du robot et son estimée par le filtre de Kalman à déférence centrale
Figure 4.19- trajectoire du robot, son estimée par le filtre de Kalman à déférence centrale et l'erreur de l'estimation
Figure 4.20- Comparaison entre la trajectoire du robot et de l'estimation des filtres de EKF, UKF et CDKF pour $\theta = \pi/2$
Figure 4.21- Comparaison entre les erreurs de l'estimation des filtres de EKF, UKF et CDKF pour $\theta = \pi/2$
Figure 4.22- Comparaison entre la trajectoire du robot et de l'estimation des filtres de Kalman EKF, UKF et CDKF pour $\theta = \pi/3$
Figure 4.23- Comparaison entre les erreurs de l'estimation des filtres de Kalman EKF, UKF et CDKF pour $\theta = \pi/3$

Figure 4.24- Comparaison entre la trajectoire du robot et de l'estimation des filtres de Kalman EKF, UKF et CDKF
Figure 4.25- Comparaison entre les erreurs de l'estimation des filtres de Kalman EKF, UKF et CDKF
Figure 4.26- Comparaison entre les carrés des erreurs de l'estimation des filtres EKF, UKF et CDKF pour $\theta = \pi/2$
Figure 4.27- Comparaison entre les erreurs au carrée de l'estimation des filtres EKF, UKF et CDKF pour $\theta = \pi/3$
Figure 4.28- Comparaison entre les erreurs au carré de l'estimation des filtres EKF, UKF et CDKF
Figure B.1.a- Principe de la linéarisation à l'ordre 1(EKF)
Figure B.1.b- Principe de la transformation sans parfums(UKF)
Figure B.2 – Répartition des points pour la transformation sans parfums
Figure C.1- Les cartes utilisées en robotique

Liste des tableaux:

Tableau 1.1- Les différents problèmes d'estimation
Tableau 2.1- Performances des transformations EKF et UKF
Tableau 3.1- Comparaison des différents types du robot
Tableau 4.1- Erreurs en fonction de R et Q

Acronymes, abréviations et Notations mathématiques:

1 Acronymes et abréviations:

RMS : Root Mean Square (racine de la moyenne des carrés)

SPKF : Sigma-Point Kalman Filter (filtre de Kalman utilisant des sigma (σ) points)

EKF : Extended Kalman Filter (filtre de Kalman étendu)

IEKF : Iterated Extended Kalman Filter (filtre de Kalman étendu Itéré)

EnKF : Ensemble Kalman Filter (filtre de Kalman d'ensemble)

UT : Unscented Transformation (Transformation sans parfums)

UKF : Unscented Kalman Filter (filtre de Kalman sans parfums)

CDKF : Central Difference Kalman Filter (filtre de Kalman à différence centrale)

GPS : Global Positioning System

EQM : Erreur Quadratique Moyenne

CR : Cramér-Rao

MS : moyenne au carrée (mean square)

LS : l'estimateur des moindres carrés (least square)

MAP : l'estimateur du maximum a posteriori

ML : l'estimateur de maximum likelihood (maximum de vraisemblence)

v. a : variable aléatoire

r.s.g : roulement sans glissement

CIR : centre instantané de rotation

PPT : points par tour

2 Notations mathématiques :

$X(t)$: L'état de système

$\dot{X}(t) = dX/dt$: Dérivée du vecteur d'état x

$\widehat{X}(t)$: L'état estimé de système

E(X) : espérance du vecteur aléatoire X

E(X/Y = y) : espérance du vecteur aléatoire X sachant que la réalisation de Y est y

Var(X) : variance de la variable aléatoire X

$E[\widehat{X}]$: La moyenne de X estimée

$Var(\widehat{X})$: La variance de X estimée

R_{LS} : Le risque de la fonction de coût quadratique

R_{abs} : Le risque de la fonction de coût erreur absolue

R_{unif} : Le risque de la fonction de coût uniforme

q : puissance d'un bruit blanc

P(X) : probabilité de l'événement X,

p(x/y) : densité de probabilité de x sachant que la réalisation de Y est y

N(m,P) loi normale de moyenne m et de matrice de variance-covariance P

N : nombre de particules

[X] : unité de la variable X

X_k : variable X à l'instant k (la période d'échantillonnage étant implicite)

exp : fonction exponentielle

ln : fonction logarithme népérien (logarithme de base 2)

log : fonction logarithme décimal (logarithme de base 10)

arctg : fonction arc-tangente classique (2 quadrants), définie de $\mathbb{R}$ dans [-π/2 ; + π /2]

$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)$: L'intégrale multiple de f(x) sur l'espace où x prend ses valeurs, à savoir $\mathbb{R}^n$

k : temps discret

X_k : vecteur d'état à l'instant k

Y_k : vecteur de mesure ou d'observation à l'instant k

W_k : bruit d'état ou de dynamique à l'instant k

V_k : bruit de mesure à l'instant k

u_k : vecteur déterministe de commande à l'instant k

$\widehat{X}_{k/k}$: estimée de X_k obtenue à partir des mesures Y_k

$\widehat{X}_{\overline{k+1}/\overline{k+1}}$: estimée de X_{k+1} obtenue à partir des mesures Y_{k+1}

$P_{k/k}$: La variance de l'erreur d'estimation à l'instant k

P_{xx} : Matrice de covariance pour la v.a. x

P_{xy} : Matrice de trans-covariance entre les v.a. x et y

$\hat{Z}_{k+1/k}$: La valeur de mesure prédite de $\hat{Z}_{k+1}$

$\hat{X}_{k+1/k}$: Etat prédit à l'instant k + 1, en sachant la statistique à l'instant k

$P_{k+1/k}$: Covariance des erreurs prédite à l'instant k + 1, en sachant la statistique à l'instant k

$\tilde{X} = X - \hat{X}$ **:** L'erreur de l'estimation X_k par $\hat{X}_{k/k}$

X = diag(. . .) : La matrice diagonale remplie dans l'ordre avec les termes indiqués

Q, R : Matrices des covariances des bruits d'état (processus) et de mesure (d'observation).

$P(k)$: Matrice de covariance de l'erreur d'estimation.

K_f : Gain du filtre de Kalman.

$H_k{}^T$: La matrice transposée de H sachant k

ψ, θ, φ : Cap, tangage, roulis (angles d'Euler)

$\bar{x}$: La moyenne de la variable aléatoire x

$\nabla_x f$: Gradient de la fonction f par rapport au vecteur x

∇_a : représente le vecteur gradient par rapport à a

$x^{(i)}$: Point sigma de rang i (transformation Unscented)

$w^{(i)}$: Pondération associée au point $x^{(i)}$ (transformation Unscented)

$\tilde{D}_{\nabla_z} f$: Opérateur d'accroissement centré de premier ordre associé à la fonction f (z)

$\tilde{D}^2{}_{\nabla_z} f$: Opérateurs d'accroissement centré de deuxième ordre associé à la fonction f (z)

Introduction Générale:

Depuis les travaux pionniers de Karl Friedrich Gauss vers la fin du XVIIIème (18éme) siècle, l'estimation d'état représente une place particulière dans le domaine des sciences physiques, notamment celui des sciences de l'ingénieur. La généralité de sa théorie la rend apte à aborder bon nombre de problèmes tels que ceux du filtrage comme la réception et discrimination de signaux radiophoniques, transmission de données numériques, analyse sismologique, traitement d'images numérisées, examen de signaux issus d'électrocardiogrammes ou électroencéphalogrammes, hybridation d'une navigation inertielle avec des mesures provenant d'un récepteur GPS, prédiction des conditions météorologiques, la démographie, du nombre de représentants d'une espèce animale, de la consommation d'énergie électrique d'un pays, de la valeur d'un titre boursier, de l'orbite d'un corps céleste, et du lissage comme traitement a posteriori de données numériques, augmentation de la résolution d'une image par prises de photographie multiples, amélioration de la qualité d'un signal radiophonique par introduction d'un léger délai entre la réception du signal et son envoi vers l'étage d'amplification, etc...

La méthode dite des moindres carrés est l'outil ainsi introduit permet d'estimer des grandeurs constantes, qualifiées d'état statique, à partir de mesures entachées d'erreurs. Il faudra attendre les années 1940 pour assister à une évolution notable du concept de moindres carrés. Dans un contexte lié à la seconde guerre mondiale, l'ingénieur Norbert Wiener, développa en 1942 un outil mathématique visant à prédire la position d'une escadrille adverse, dans le but de mettre en œuvre une riposte efficace. Celui-ci se base sur une minimisation de l'erreur de prédiction en termes d'auto-corrélations entre le signal et les erreurs des mesures [14]. L'apport majeur du filtre de Wiener en 1949 par rapport à la méthode des moindres carrés est qu'il n'exige pas la constance de l'état à estimer.
ce qui représentait à l'époque une avancée théorique considérable. Une autre évolution de taille fut l'introduction vers la fin des années 1950 du concept de la représentation d'état dans la théorie formulée par Wiener. L'instigateur de cette révolution fut Rudolph Emil Kalman, lequel introduisit en 1960 le filtre portant désormais son nom Kalman constituant l'une des pièces maîtresses de la théorie de l'estimation d'état.
La théorie de l'estimation de l'état d'un système repose donc sur la notion de représentation d'état. La résolution d'un tel problème nécessite en premier lieu de disposer d'un ensemble d'équations régissant l'évolution des variables d'état. Ce premier point est particulièrement délicat pour l'automaticien : il s'agit de décrire de manière suffisamment représentative le comportement du système considéré sans toutefois que les équations développées ne soient

trop complexes. Le modèle résultant de ce compromis n'est généralement qu'une approximation de la réalité, on dit alors qu'il présente des incertitudes. L'estimation d'état dite robuste vise à traiter les connaissances par la quantification de manière fiable de leur impact sur l'estimée d'état fournie.

Un second point indispensable à l'estimation de l'état d'un système est la mesure de manière directe ou indirecte de l'ensemble ou une partie des variables d'état. Cet aspect est essentiel puisque l'information ainsi apportée permet de compenser au moins partiellement les incertitudes propres au modèle régissant l'évolution des variables d'état. Toutefois, il arrive parfois que certaines de ces mesures ne parviennent pas jusqu'à l'estimateur, soit en raison d'une indisponibilité de capteur comme la coupure de signaux en provenance de satellites par exemple, soit parce qu'un module annexe a détecté la défaillance d'un capteur et par conséquent décidé d'empêcher le reconstructeur d'état d'exploiter les informations en provenance de l'élément défaillant. Le nombre d'observations utilisées par l'estimateur s'en trouve donc réduit et par conséquent, la part de l'estimation liée au modèle de dynamique des variables d'état s'en trouve accentuée [43,44]. Le travail exposé dans le présent mémoire est en rapport avec cette problématique.

Le premier chapitre de ce document présente une synthèse de diverses méthodes d'estimation d'état. Les techniques linéaires optimales (vis-à-vis d'un critère de performances donné), parmi lesquelles on recense le filtre de Kalman, les procédures d'estimation qui sont l'estimation d'un signal connu et inconnu, l'estimation d'un signal aléatoire, déterministe et multiples(l'estimation des vecteurs) en présentant un certain nombre de méthodes adaptées aux incertitudes considérées.

Le but du deuxième chapitre est, dans un premier temps, de proposer une méthode expérimentale d'évaluation sur la qualité d'estimation. Cette opération s'effectue dans un cadre très général puisque la technique proposée est destinée à tout système modélisable sous forme de représentation d'état non linéaire, les méconnaissances de modèle considérées se restreignant à des incertitudes de dynamique assimilables à des bruits blancs potentiellement multiplicatifs. Ensuite, cet outil est exploité afin de régler, étudier et comparer entre les algorithmes du filtre de Kalman étendu, sans parfums et à différence centrale pour estimer la trajectoire du robot mobile.

Le troisième chapitre de ce mémoire rassemble une étude générale sur le robot mobile les éléments de la théorie de la navigation nécessaires à la compréhension de capteur GPS et capteur Compas. Le quatrième et le dernier chapitre on donne les résultats et simulation des

filtres de Kalman étendu, sans parfums et à différence centrale pour l'estimation de trois chemins supposée du robot mobile.

CHAPITRE 1

La théorie d'estimation

1.1 Introduction:

Dans ce chapitre on présente une synthèse de diverses méthodes d'estimation d'état. Les techniques linéaires optimales (vis-à-vis d'un critère de performances donné), parmi lesquelles on recense le filtre de Kalman, les procédures d'estimation qui sont l'estimation d'un signal connu et inconnu, l'estimation d'un signal aléatoire, déterministe et multiple.

1.2 Définition de l'estimateur:

L'estimation peut être énoncée de manière mathématique très générale. On considère un vecteur $Z \in RN$ qui est fonction d'un autre vecteur $x_t \in Rp$:

$Z = h(x_t)$ .Si j'observe une réalisation $Z \in RN$ de Z, que puis-je en tirer comme information sur x_t . De manière plus précise, on construit un estimateur de x_t notée x_{t+1}.

On peut également considérer plusieurs niveaux de complexité, similaires, dans les problèmes d'estimation. En détection, il s'agit de décider d'une hypothèse parmi un nombre fini M d'hypothèses possibles. En estimation, il s'agit d'évaluer la valeur d'une quantité continue (au moins par intervalles) et qui peut prendre une infinité de valeurs [1, 4, 14].

Un estimateur x_{t+1} de x_t est une fonction déterministe $g(z)$ qui a toute réalisation z du vecteur Z fait correspondre une valeur particulière x_{t+1} : avec $x_{t+1} = g(z)$

On peut distinguer trois cas suivants :

1- x_t et Z sont des vecteurs aléatoires (v.a) ayant des densités de probabilité :

L'estimateur appartiendra alors à la famille des estimateurs de Bayes.

2- $x_t$est une déterministe, Z est un vecteur aléatoire ayant une densité de probabilité

L'estimateur appartiendra alors à la famille des estimateurs de Fisher.

3- x_t est une déterministe, Z est une fonction bruitée mais non probabiliste de x_t

Dans ce cas on peut encore définir un estimateur en dehors de tout cadre probabiliste.

1.2.1 Procédure d'estimation :

En pratique, l'observation peut être considérée comme la réalisation d'un processus aléatoire, que le signal soit déterministe ou aléatoire.

Les Notions de biais et variance d'un estimateur sont indiquées dans la figure 1.1 suivante :

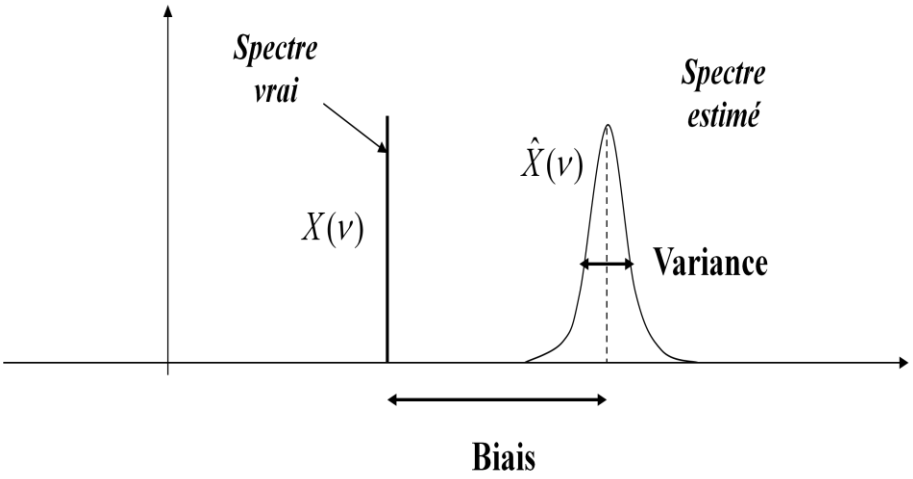


Figure 1.1- La situation de biais et la variance

Les formulations mathématiques des statistiques de l'estimateur

$\widehat{\mathrm{X}}$ est estimé à partir des observations Y

Le Biais : (moment du 1er ordre)

$$\mathrm{E}[\widehat{\mathrm{X}}] = \mathrm{X} + \mathrm{biais}(\widehat{\mathrm{X}}) \tag{1.1}$$

La Variance : (moment du 2ème ordre)

$$\mathrm{Var}(\widehat{\mathrm{X}}) = \mathrm{E}[(\widehat{\mathrm{X}} - \mathrm{E}[\widehat{\mathrm{X}}])^2] \tag{1.2}$$

Erreur entre la grandeur réelle et l'estimée :

$$\mathrm{EQM} = \mathrm{E}[(\mathrm{X} - \widehat{\mathrm{X}})^2] \tag{1.3}$$

$$\mathrm{EQM} = \mathrm{Var}(\widehat{\mathrm{X}}) + \mathrm{biais}(\widehat{\mathrm{X}})^2 \tag{1.4}$$

-Si $\widehat{\mathrm{X}} = 0$ l'estimateur est dit non biaisé

- On a la Borne de Cramér-Rao inférieure de la variance pour un estimateur sans biais

$$\mathrm{Var}(\hat{X}) \geq \frac{1}{-\mathrm{E}\left[\frac{\partial^2 \ln(p_{y,x}(y,x))}{\partial x^2}\right]} \quad (1.5)$$

Si la variance atteint la borne de CR, on dit que l'estimateur est efficace

L'estimateur idéal est non biaisé et efficace mais variance et biais sont liés par l' EQM

$\Longrightarrow$ Antagonisme biais-variance

L'estimateur est dit consistent si le biais et la variance tendent vers 0 quand le nombre d'observations tend vers l'infini et il ya estimation d'un signal connu, estimation d'un signal inconnu et estimation d'un signal aléatoire dans du bruit.

1.2.1.1 Estimation d'un signal connu :

On considère un système de communications, dans lequel la source émet un signal analogique $A(t)$, échantillonné à T_e . A chaque instant kT_e , on mesure l'amplitude $A(kT_e) = A_k$, qui est transmise vers le récepteur et perturbée par les bruits du canal, de l'émetteur et du récepteur. Ainsi, avec un émetteur utilisant une modulation d'amplitude, le signal émis est de la forme :

$$s(t, A_k) = A_k \sin(\omega_c t), t \in [kT_e, (k+1)T_e[\quad (1.6)$$

Dans le cas d'une modulation de fréquence, on aura :

$$s(t, A_k) = \sin(\omega_c t + A_k t), t \in [kT_e, (k+1)T_e[\quad (1.7)$$

Sur le récepteur, en tenant compte des divers bruits, on a :

$$r(t) = s(t, A_k) + n(t), t \in [kT_e, (k+1)T_e[\quad (1.8)$$

Le signal reçu, $r(t)$ dépend donc de l'amplitude A du signal. Si l'on connait parfaitement la modulation type et paramètre (ω_c), et si l'application entre A et $s(t, A)$ est bijective, c'est un problème d'estimation (des paramètres) d'un signal connu dans du bruit.

1.2.1.2 Estimation d'un signal inconnu :

On considère le signal reçu en réponse à une émission radar, pour une cible qui se déplace. Le signal reçu est similaire à l'équation (1.8), mais avec un effet Doppler qui se traduit par une variation de pulsation ω_d:

$$r(t) = \begin{cases} A_r \sin((\omega_0 + \omega_d)(t - \tau) + \theta_r) + n(t), & \text{si } t \in [kT_r + \tau, kT_r + T + \tau[\\ n(t) & , \text{ sinon} \end{cases} \quad (1.9)$$

Ici, on sait qu'il y a une cible et on désire évaluer sa distance et sa vitesse (et même éventuellement sa taille et son type) à partir de l'estimation de τ et ω_d. Dans cet exemple, on remarque qu'il existe, en plus des paramètres utiles, des paramètres supplémentaires inconnus, A_r et θ_r, qui v ont rendre l'estimation difficile. Le problème est donc l'estimation d'un signal inconnu dans du bruit.

1.3 Estimation des paramètres aléatoires :

Le paramètre à estimer est une variable aléatoire notée a. L'observation est un vecteur de dimension k, noté r.

1.3.1 Principe et fonctions de coût :

On essaye d'abord d'étendre l'idée du risque de Bayes au problème d'estimation. Dans le problème de détection M-aire, le risque de Bayes était construit en associant un coût C_{ij} à chaque situation : décider H_i alors que H_i est vraie. Aux M^2 situations possibles, on pouvait donc associer la matrice de coût $C = C_{ij}$.

Dans le problème d'estimation, le paramètre a et son estimée $\hat{a}(r)$ sont des variables continues. Pour chaque paire $(a, \hat{a}(r))$, on peut donc associer un coût $C(a, \hat{a}(r))$, qui est une fonction de deux variables.

Généralement, on considère, et c'est réaliste, que le coût dépend uniquement de l'erreur d'estimation $e(r) = \hat{a}(r) - a$. La fonction de coût se réduit alors à une fonction d'une seule variable, l'erreur $e(r)$. Dans la suite, on supposera que cette fonction est à valeurs positives.

Les types des fonctions de coût classiques sont:

1. La fonction de coût quadratique :

$$C_{ls}(e(r)) = (\hat{a}(r) - a)^2 \quad (1.10)$$

2. La fonction de coût valeur absolue :

$$C_{abs}(e(r)) = |\hat{a}(r) - a| \quad (1.11)$$

3. La fonction de coût uniforme :

$$C_{unif}\,(e(r)) = \begin{cases} 0 \text{ si } e(r) \leq \frac{\Delta}{2} \\ 1 \text{ si } e(r) > \frac{\Delta}{2} \end{cases} \quad (1.12)$$

Le rôle de chaque fonction de coût est :

– de mesurer la qualité de l'estimation,

– d'aboutir à une solution en minimisant la fonction de coût.

Dans le problème de détection, le risque de Bayes permettait de mesurer un coût moyen, à partir des coûts C_{ij} , des probabilités a priori P_i et des densités conditionnelles. Dans le problème d'estimation, on étend cette idée pour mesurer l'erreur moyenne : le coût est remplacé par la fonction et cettes fonctions sont représentés dans les figures suivantes :

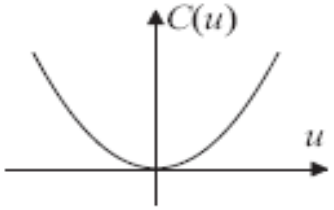


Figure 1.2 - coût quadratique.

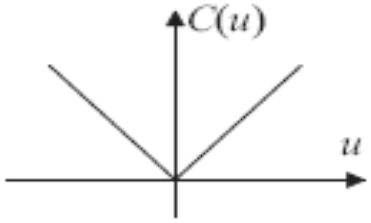


Figure 1.3 - coût valeur absolue.

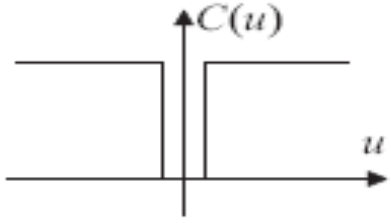


Figure 1.4 - coût uniforme.

de coût $C(e(r))$, la probabilité a priori P_i est remplacé par la densité de probabilité du paramètre (variable aléatoire) a. On a alors :

$$R = E\left[C\left(e(r)\right)\right] = \int_A da = \int_{R^k} (\hat{a}(r) - a)\, p(a, r)\, dr \quad (1.13)$$

Cette équation montre que la moyenne (opérateur E) porte à la fois sur toutes les valeurs

de a (première intégrale, simple) et sur toutes les valeurs r (seconde intégrale, multiple $-$k) de l'espace d'observation.

La densité de probabilité conjointe, $\mathrm{p}(a,\mathrm{r})$, peut être factorisée en appliquant le théorème de Bayes : $\mathrm{p}(a,\mathrm{r}) = \mathrm{p}(\mathrm{r})\mathrm{p}(a/\mathrm{r})$ En supposant la convergence uniforme des intégrales, on peut intervertir les deux intégrales, ce qui conduit à la relation :

$$\mathrm{R} = \int_{\mathrm{R}^k} \mathrm{p}(\mathrm{r}) \left[\int_{\mathrm{A}} \mathrm{C}(\hat{a}(\mathrm{r}) - a)\mathrm{p}(a/\mathrm{r})\mathrm{d}a\right]\mathrm{dr} \qquad (1.14)$$

Dans cette expression, les termes $\mathrm{p}(\mathrm{r})$ et $\mathrm{C}(\hat{a}(\mathrm{r}) - a)\mathrm{p}(a/\mathrm{r})$ étant positifs, la minimisation du risque R sera obtenue en minimisant simplement l'intégrale intérieure. Le meilleur estimateur $\hat{a}(\mathrm{r})$, au sens de la fonction de coût C, est donc obtenu en calculant la valeur de $\hat{a}(\mathrm{r})$ pour laquelle l'intégrale intérieure est minimale.

Dans les paragraphes suivants, nous allons détailler le calcul pour les trois fonctions de coût introduites plus haut.

1.3.2 Calcul pour La fonction de coût quadratique :

Le risque, noté $\mathrm{R_{LS}}$ (LS pour least square), s'écrit :

$$\mathrm{R}_{\mathrm{LS}} = \int_{\mathrm{R}^k} \mathrm{p}(\mathrm{r}) \left[\int_{\mathrm{A}} (\hat{a}(\mathrm{r}) - a)^2 \mathrm{p}(a/\mathrm{r})\mathrm{d}a\right]\mathrm{d} \qquad (1.15)$$

Pour minimiser l'intégrale intérieure, $\mathrm{I_{LS}}(\mathrm{r})$, par rapport $\hat{a}(\mathrm{r})$, nous calculons la dérivée de cette intégrale par rapport à $\hat{a}(\mathrm{r})$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{a}}\mathrm{I_{LS}}(\mathrm{r}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{a}}\int_{\mathrm{A}} (\hat{a}(\mathrm{r}) - a)^2 \mathrm{p}(a/\mathrm{r})\mathrm{d}a \\
&= 2\int_{\mathrm{A}} (\hat{a}(\mathrm{r}) - a)\mathrm{p}(a/\mathrm{r})\mathrm{d}a \\
&= 2\hat{a}(\mathrm{r})\int_{\mathrm{A}} \hat{a}(\mathrm{r})\mathrm{p}(a/\mathrm{r})\mathrm{d}a - 2\int_{\mathrm{A}} a\mathrm{p}(a/\mathrm{r})\mathrm{d}a \\
&= 2\hat{a}(\mathrm{r})\int_{\mathrm{A}} \mathrm{p}(a/\mathrm{r})\mathrm{d}a - 2\int_{\mathrm{A}} a\mathrm{p}(a/\mathrm{r})\mathrm{d}a \\
\Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{a}}\mathrm{I_{LS}}(\mathrm{r}) &= 2\hat{a}(\mathrm{r}) - 2\int_{\mathrm{A}} a\mathrm{p}(a/\mathrm{r})\mathrm{d}a \qquad (1.16)
\end{aligned}$$

En utilisant la dernière relation, on déduit que la valeur $\hat{a}$ qui annule la dérivée vérifie :

$$\hat{a}_{\mathrm{LS}}(\mathrm{r}) = \int_{\mathrm{A}} a\mathrm{p}(a/\mathrm{r})\mathrm{d}a \qquad (1.17)$$

En dérivant une seconde fois I_{LS}, on trouve $\frac{d^2 I_{LS}}{d\hat{a}^2} = 2 > 0$, ce qui montre que la valeur trouvée est un minimum. Cet estimateur, appelé estimateur des moindres carrés (en abrégé : LS pour least square, ou parfois MS pour mean square) est noté $\hat{a}_{LS}(r)$ pour bien montrer qu'il est relatif à la fonction de coût quadratique. On remarque que l'estimateur des moindres carrés est simplement la moyenne conditionnelle ou moyenne a posteriori. Donc R_{LS} est alors la variance conditionnelle ou la variance a posteriori sur l'espace d'observation.

1.3.3 Calcul de la fonction de coût erreur absolue :

Le risque, noté R_{abs}, s'écrit :

$$R_{abs} = \int_{R^k} p(r) \left[\int_A |\hat{a}(r) - a| p(a/r) da\right] dr \qquad (1.18)$$

Pour traiter la valeur absolue, on décompose l'intégrale intérieure $I_{abs}(r)$, en deux intégrales:

$$I_{abs}(r) = \int_{-\infty}^{\hat{a}(r)} (\hat{a}(r) - a) p(a/r)\, da - \int_{\hat{a}(r)}^{+\infty} (\hat{a}(r) - a) p(a/r)\, da \qquad (1.19)$$

En différentiant par rapport à $\hat{a}$, variable qui apparaît dans les bornes des deux intégrales et dans les deux intégrales elles-mêmes, on a :

$$\frac{d}{d\hat{a}} I_{abs}(r) = \int_{-\infty}^{\hat{a}(r)} p(a/r)\, da - \int_{\hat{a}(r)}^{+\infty} p(a/r)\, da \qquad (1.20)$$

La valeur $\hat{a}_{abs}(r)$, qui annule cette expression, vérifie :

$$\int_{-\infty}^{\hat{a}_{abs}(r)} p(a/r)\, da = \int_{\hat{a}_{abs}(r)}^{+\infty} p(a/r)\, da \qquad (1.21)$$

C'est la médiane de la densité a posteriori.

1.3.4 Calcul de la fonction de coût uniforme :

Le risque, noté R_{unif}, s'écrit :

$$R_{unif} = \int_{R^k} p(r) \left[\int_A C_{unif}(\hat{a}(r) - a) p(a/r) da\right] dr \qquad (1.22)$$

que l'on peut écrire, en tenant compte de la définition de la fonction de coût:

$$R_{unif} = \int_{R^k} p(r)\left[1 - \int_{\hat{a}_{unif}(r)-\Delta/2}^{\hat{a}_{unif}(r)+\Delta/2} p(a/r)da\right]dr \quad (1.23)$$

Pour minimiser le risque, on minimise le terme entre crochets, ce qui revient à maximiser l'intégrale $I_{unif}(r)$:

$$I_{unif}(r) = \int_{\hat{a}_{unif}(r)-\Delta/2}^{\hat{a}_{unif}(r)+\Delta/2} p(a/r)da \quad (1.24)$$

Lorsque $\Delta \longrightarrow 0$, $I_{unif}(r)$ est maximale pour la valeur de $a = \hat{a}_{unif}(r)$ telle que $p(a/r)$ est maximale. L'estimateur $\hat{a}_{unif}(r)$ est donc le maximum de la densité a posteriori. On le note généralement $\hat{a}_{map}(r)$, avec MAP pour "maximum a posteriori", notation que nous utiliserons dans la suite.

1.4 Estimation des paramètres déterministes :

Il n'est pas possible de traiter l'estimation des paramètres déterministes comme celle des paramètres aléatoires. En effet, avec des paramètres déterministes, $p(a)$ et $p(a/r)$ n'ont plus de sens. Il faut en particulier trouver une formulation de la mesure de performance des estimateurs.

1.4.1 Principe et qualité de l'estimation des paramètres déterministes:

Puisque a est une variable déterministe, la première idée consisterait à calculer un critère de Bayes sous la forme :

$$R_{Bayes}(a) = \int_{R^k} (\hat{a}(r) - a)^2 p(r/a)dr \quad (1.25)$$

En minimisant le risque par rapport à $\hat{a}(r)$, on obtient $\hat{a}(r) = a$. Mais a étant inconnu, ceci n'est pas applicable. Il faut donc trouver une autre mesure de la qualité de l'estimateur.

Chaque estimateur est réalisé à partir d'un jeu de mesures bruitées, l'observation r. Chaque estimation est donc la réalisation d'une variable aléatoire, l'estimateur [22]. Si on considère un ensemble (virtuel et arbitrairement grand) d'estimations, on peut mesurer :

– La moyenne :

$$E[\hat{a}(r)] = \int_{R^k} \hat{a}(r)p(r/a)dr \quad (1.26)$$

Pour évaluer l'écart (appelé biais) à la valeur vraie a. Si $E[\hat{a}(r)] = a$, le biais est nul et l'estimateur est dit non biaisé. Si $E[\hat{a}(r)] = a + b$ où b est une constante, l'estimation a un

biais fixe. En estimant ce biais, il est facile de corriger l'estimateur. Si $\mathrm{E}[\hat{a}(\mathrm{r})] = a + \mathrm{b}(a)$, où $\mathrm{b}(a)$ est une fonction de a, le biais devient plus complexe à compenser.

– La variance :

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\big(\hat{a}(\mathrm{r})\big) &= \mathrm{E}[(\hat{a}(\mathrm{r}) - \mathrm{E}[\hat{a}(\mathrm{r})])^2] \\ &= \int_{\mathrm{R^k}} (\hat{a}(\mathrm{r}) - \mathrm{E}[\hat{a}(\mathrm{r})])^2 \, \mathrm{p}(\mathrm{r}/a)\mathrm{dr} \\ &= \mathrm{E}[\hat{a}(\mathrm{r})^2] - \mathrm{E}^2[\hat{a}(\mathrm{r})] \end{aligned} \quad (1.27)$$

qui mesure la dispersion des estimations autour de leur moyenne. La variance dépend généralement du nombre N de mesures utilisé pour réaliser une estimation, et décroît fréquemment en $1/\mathrm{N}$. La situation idéale serait d'avoir un biais et une variance nuls.

1.4.2 Maximum de vraisemblance :

On observe une mesure (scalaire) $\mathrm{r} = a + \mathrm{n}$, dans laquelle $\mathrm{n} \sim \mathrm{N}(0, \sigma_\mathrm{n})$ mais a est maintenant déterministe. On peut donc écrire la densité conditionnelle de l'observation r sachant le paramètre a :

$$\mathrm{p}(\mathrm{r}/a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\mathrm{n}} \exp\left(-\frac{(\mathrm{r}-a)^2}{2{\sigma_\mathrm{n}}^2}\right) \quad (1.29)$$

On choisit comme estimation la valeur de a qui entraîne le plus vraisemblablement l'observation r, c'est-à-dire pour laquelle la densité est maximale. Dans l'équation (1.29), le terme exponentiel est maximal pour $\mathrm{r} - a = 0$, c'est-à-dire pour $a = \mathrm{r}$. Autrement dit, dans le cas d'une mesure avec un bruit additif comme c'est le cas ici, on retranche à r la valeur la plus probable du bruit n. C'est bien sûr 0, valeur pour laquelle $\mathrm{p_n}(\mathrm{u})$ est maximale.

Cet estimateur est appelé estimateur du maximum de vraisemblance (en anglais maximum likelihood). Il est noté $\hat{a}_{\mathrm{ml}}(\mathrm{r}) = \mathrm{r}$ La densité $\mathrm{p}(\mathrm{r}/a)$ est appelée fonction de vraisemblance [14, 22]. L'estimateur du maximum de vraisemblance, notée estimateur ML dans la suite, est donc la valeur de a qui maximise $\mathrm{p}(\mathrm{r}/a)$. Si le maximum est intérieur à la gamme de variation de a et si $\ln(\mathrm{p}(\mathrm{r}/a))$ a une dérivée première continue, l'estimateur ML satisfait l'équation :

$$\frac{\partial \ln(\mathrm{p}(\mathrm{r}/a))}{\partial a}\Big|_{a=\hat{a}_{\mathrm{ml}}(\mathrm{r})} = 0 \quad (1.30)$$

On remarque que cet estimateur est similaire à l'estimateur MAP, dans le cas où le terme en $\mathrm{p}(a)$ disparait, c'est-à-dire si la connaissance a priori sur a est nulle : $\mathrm{p}(a)$ est constante.

1.4.3 Inégalités de Cramer-Rao :

Pour mesurer les performances de l'estimateur, on calcule sa moyenne (pour déterminer le biais) et sa variance. La moyenne est généralement facile à calculer, mais la variance requiert souvent des calculs complexes. Les inégalités de Cramer-Rao, que nous allons énoncer ci-dessous, fournissent plus facilement une borne inférieure de la variance.

Nous énonçons ci-dessous les inégalités de Cramer-Rao pour des estimateurs non biaisés. Ce résultat peut être étendu à des estimateurs biaisés. Ces inégalités ont d'abord été proposées par Fisher (1922) et par Dugué (1937). Elles ont été obtenues sous leur forme actuelle par Cramer (1946) et Rao (1945). Tous les estimateurs qui atteignent la borne (la variance est égale à la borne) sont appelés estimateurs efficaces [14, 22].

Soit $\hat{a}(\mathrm{r})$ un estimateur quelconque non biaisé de a, tel que $\mathrm{p}(\mathrm{r}/a)$ possède des dérivées partielles première et seconde par rapport à a absolument intégrables, on a alors :

$$\mathrm{Var}[\hat{a}(\mathrm{r}) - a] \geq \left\{\mathrm{E}\left[\left(\frac{\partial \ln(\mathrm{p}(\mathrm{r}/a))}{\partial a}\right)^2\right]\right\}^{-1} \tag{1.31}$$

Ou bien, ce qui est équivalent :

$$\mathrm{Var}[\hat{a}(\mathrm{r}) - a] \geq -\left\{\mathrm{E}\left[\frac{\partial^2 \ln(\mathrm{p}(\mathrm{r}/a))}{\partial a^2}\right]\right\}^{-1} \tag{1.32}$$

Si l'estimateur $\hat{a}(\mathrm{r})$ est non biaisé, alors $\mathrm{E}[\hat{a}(\mathrm{r})] = a$, et la variable aléatoire $\hat{a}(\mathrm{r}) - a$ est centrée. On a alors simplement :

$$\mathrm{Var}[\hat{a}(\mathrm{r}) - a] = \mathrm{E}[(\hat{a}(\mathrm{r}) - a)2] \tag{1.33}$$

Puisque l'estimateur $\hat{a}(\mathrm{r})$ est non biaisé, on a :

$$\mathrm{E}[\hat{a}(\mathrm{r}) - a] = \int_{\mathrm{R}^k} (\hat{a}(\mathrm{r}) - a)\mathrm{p}(\mathrm{r}/a)\mathrm{dr} \tag{1.34}$$

On a

$$\int \mathrm{A}^2 \mathrm{dx} \int \mathrm{B}^2 \mathrm{dx} \geq [\int \mathrm{AB}\, \mathrm{dx}]^2 \tag{1.35}$$

Alors

$$\left\{\int_{\mathrm{R}^k}\left[\frac{\partial \ln(\mathrm{p}(\mathrm{r}/a))}{\partial a}\sqrt{\mathrm{p}(\mathrm{r}/a)}\right]\left[\sqrt{\mathrm{p}(\mathrm{r}/a)}(\hat{a}(\mathrm{r})-a)\right]\mathrm{dr}\right\}^2 = 1^2$$

$$\int_{\mathrm{R}^k}\left[\frac{\partial \ln(\mathrm{p}(\mathrm{r}/a))}{\partial a}\sqrt{\mathrm{p}(\mathrm{r}/a)}\right]^2\mathrm{dr}\int_{\mathrm{R}^k}\left[\sqrt{\mathrm{p}(\mathrm{r}/a)}(\hat{a}(\mathrm{r})-a)\right]^2\mathrm{dr} \geq 1$$

$$\left[\int_{\mathrm{R}^k}\left(\frac{\partial \ln(\mathrm{p}(\mathrm{r}/a))}{\partial a}\right)^2\mathrm{p}(\mathrm{r}/a)\mathrm{dr}\right]\left[\int_{\mathrm{R}^k}(\hat{a}(\mathrm{r})-a)^2\mathrm{p}(\mathrm{r}/a)\mathrm{dr}\right] \geq 1 \qquad (1.36)$$

La seconde intégrale de cette équation n'est autre que la variance de $(\hat{a}(\mathrm{r})-a)$. On arrive finalement à l'inégalité suivante:

$$\int_{\mathrm{R}^k}(\hat{a}(\mathrm{r})-a)^2\mathrm{p}(\mathrm{r}/a)\mathrm{dr} \geq \left[\int_{\mathrm{R}^k}\left(\frac{\partial \ln(\mathrm{p}(\mathrm{r}/a))}{\partial a}\right)^2\mathrm{p}(\mathrm{r}/a)\mathrm{dr}\right]^{-1} \qquad (1.37)$$

la borne, est atteinte si et seulement si la densité vérifie :

$$\frac{\partial \ln(\mathrm{p}(\mathrm{r}/a))}{\partial a} = (\hat{a}(\mathrm{r})-a)\mathrm{f}(a) \qquad (1.38)$$

Où $\mathrm{f}(a)$ est une fonction qui ne dépend pas des observations r. Un estimateur qui vérifie cette condition est appelé estimateur efficace (en anglais efficient).

On obtient la relation :

$$\mathrm{E}\left[\left(\frac{\partial \ln(\mathrm{p}(\mathrm{r}/a))}{\partial a}\right)^2\right] = -\mathrm{E}\left[\frac{\partial^2 \ln(\mathrm{p}(\mathrm{r}/a))}{\partial a^2}\right] \qquad (1.39)$$

– Toute estimation non biaisée a une variance plus grande qu'une certaine valeur. Malheureusement, dans le cas général, on ne sait pas si la variance est proche ou non de la borne.

– Si (1.42) est vérifiée, l'estimateur $\hat{a}_{\mathrm{ml}}(\mathrm{r})$ atteint la borne, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Var}[\hat{a}(\mathrm{r})-a] = \left\{\mathrm{E}\left[\left(\frac{\partial \ln(\mathrm{p}(\mathrm{r}/a))}{\partial a}\right)^2\right]\right\}^{-1} = -\left\{\mathrm{E}\left[\frac{\partial^2 \ln(\mathrm{p}(\mathrm{r}/a))}{\partial a^2}\right]\right\}^{-1} \qquad (1.40)$$

En effet, l'estimateur ML est solution de l'équation de vraisemblance :

$$\frac{\partial \ln(\mathrm{p}(\mathrm{r}/a))}{\partial a}_{|a=\hat{a}_{\mathrm{ml}}(\mathrm{r})} = \mathrm{f}(a)(\hat{a}(\mathrm{r})-a)_{|a=\hat{a}_{\mathrm{ml}}(\mathrm{r})} = 0 \qquad (1.41)$$

Les solutions sont donc : $\hat{a}(\mathrm{r}) = \hat{a}_{\mathrm{ml}}(\mathrm{r})$ et $\mathrm{f}(\hat{a}_{\mathrm{ml}}) = 0$

Or, la solution doit bien sûr dépendre des observations r. La solution $\mathrm{f}(\hat{a}_{\mathrm{ml}}) = 0$ doit donc être éliminée. Ainsi, s'il existe un estimateur efficace, c'est l'estimateur ML, solution de l'équation de vraisemblance.

– S'il n'y a pas d'estimateur efficace, c'est-à-dire si $\frac{\partial \ln(\mathrm{p}(\mathrm{r}/a))}{\partial a}$ ne peut pas se mettre sous la forme $\mathrm{f}(a)(\hat{a}(\mathrm{r}) - a)$ on ne peut pas conclure sur la qualité de l'estimateur ML. De plus, on ne sait pas comment sa variance s'approche de la borne.

– Avant d'utiliser la borne, il faut d'abord vérifier que l'estimateur est non biaisé. Ces bornes ne sont pas applicables pour des estimateurs biaisés, pour lesquels des bornes similaires peuvent être calculées [14, 22].

1.4.4 Variance d'un estimateur déterministe non biaisé et efficace :

Un estimateur déterministe non biaisé et efficace, c'est-à-dire tel que :

$\frac{\partial \ln(\mathrm{p}(\mathrm{r}/a))}{\partial a} = \mathrm{f}(a)(\hat{a}(\mathrm{r}) - a)$, Calculons l'opposé de la dérivée seconde de $\ln\mathrm{p}(\mathrm{r}/a)$:

$$-\frac{\partial^2 \ln(\mathrm{p}(\mathrm{r}/a))}{\partial a^2} = \mathrm{f}(a) - \frac{\mathrm{df}}{\mathrm{d}a}(a)(\hat{a}(\mathrm{r}) - a) \tag{1.42}$$

En prenant la moyenne :

$$\mathrm{E}_{\mathrm{r}}\left[-\frac{\partial^2 \ln(\mathrm{p}(\mathrm{r}/a))}{\partial a^2}\right] = \mathrm{E}_{\mathrm{r}}[\mathrm{f}(a)] - \frac{\mathrm{df}}{\mathrm{d}a}(a)\mathrm{E}_{\mathrm{r}}[(\hat{a}(\mathrm{r}) - a)] \tag{1.43}$$

Puisque l'estimateur est non biaisé, le dernier terme est nul. De plus, $\mathrm{f}(a)$ ne dépend pas de r donc l'espérance de $\mathrm{f}(a)$ sur r est égale à $\mathrm{f}(a)$. Finalement :

$$\mathrm{E}_{\mathrm{r}}\left[-\frac{\partial^2 \ln(\mathrm{p}(\mathrm{r}/a))}{\partial a^2}\right] = \mathrm{E}_{\mathrm{r}}[\mathrm{f}(a)] \tag{1.44}$$

En utilisant la première borne du théorème de Cramer-Rao, on a simplement :

$$\mathrm{Var}(\hat{a}(\mathrm{r}) - a) = \mathrm{f}(a)^{-1} \tag{1.45}$$

Soit $\hat{\mathrm{a}}(\mathrm{r})$ est un estimateur non biaisé et efficace tel que

$$\frac{\partial \ln(\mathrm{p}(\mathrm{r}/a))}{\partial a} = \mathrm{f}(a)(\hat{a}(\mathrm{r}) - a) \tag{1.46}$$

Alors $\hat{a}(\mathrm{r}) = \hat{a}_{\mathrm{ml}}(\mathrm{r})$ et $\mathrm{Var}(\hat{a}(\mathrm{r}) - a) = \mathrm{f}(a)^{-1}$ Ce résultats est très pratique mais il doit être utilisé rigoureusement. En effet, le terme $\frac{\partial \ln(\mathrm{p}(\mathrm{r}/a))}{\partial a}$ intervient d'abord dans l'équation

de vraisemblance : $\frac{\partial \ln (\mathrm{p}(\mathrm{r}/a))}{\partial a} = 0$ pour laquelle le facteur $\mathrm{f}(a)$ est sans importance. La forme $\mathrm{f}(a)(\hat{a}(\mathrm{r}) - a)$ ne supporte aucune erreur de signe ou de facteur puisque la variance dépend directement du terme $\mathrm{f}(a)$.

1.5 Estimation de paramètres multiples :

Dans ce type d'estimation il est nécessaire d'estimer les vecteurs aléatoires, et déterministes, c.à.d. plusieurs paramètres par exemple le cas d'estimation des paramètres d'une cible radar : position, vitesse, etc. La plupart des idées introduites dans les paragraphes précédentes peuvent être étendues au cas multi variable. Dans ce cadre, on considère l'ensemble des paramètres sous forme d'un vecteur.

1.5.1 Estimation optimale de vecteurs aléatoires :

Ce type d'estimation consiste sur l'estimation optimale d'un vecteur aléatoire statique, et l'estimation optimale d'un vecteur aléatoire dynamique, qui se base sur la méthode des moindres carrés simples et récursifs.

1.5.1.1 Estimation optimale d'un vecteur aléatoire statique :

Soit X un vecteur dont les n_x composantes sont des constantes décrivant l'état d'un système statique. Le but recherché est d'estimer ces n_x grandeurs inconnues. Pour ce faire, un nombre n_y de mesures (également appelées observations) directes ou indirectes des n_x composantes de X. sont effectuées, cette procédure étant réitérée un certain nombre de fois. Les n_y mesures obtenues lors de la $k^{ième}$ campagne d'observation sont regroupées dans le vecteur de mesure Y Y_k^* , lequel est relié au vecteur d'état X au travers d'une équation dite de régression linéaire :

$$Y_k^* = H_k X \tag{1.48}$$

Où H_k est une matrice connue dont les coefficients peuvent varier avec le temps. Généralement, l'observation Y_k^* est imparfaite car entachée d'une erreur additive V_k. Ainsi, la grandeur effectivement mesurée n'est pas Y_k^* mais Y_k, définie comme suit :

$$Y_k = Y_k^* + V_k = H_k X + V_k \tag{1.49}$$

L'application de cette relation pour $k = 1, \ldots, N$ $(N \in N^+)$ conduit au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} Y_1 = H_1 X + V_1 \\ \vdots \\ Y_k = H_k X + V_k \\ \vdots \\ Y_N = H_N X + V_N \end{cases} \quad (1.50)$$

En règle générale, $n_y < n_x$ et les erreurs de mesures ne sont pas connues [14, 43, 44]. Il s'avère donc impossible de calculer de manière exacte l'état X à partir des observations $Y_{1\to N} = \{Y_k\}_{1\le k\le N}$ du fait que (1.50) présente plus d'inconnues (X et $V_{1\to N} = \{V_k\}_{1\le k\le N}$, ce qui représente $Nn_y + n_x$ variables) que d'équations (Nn_y relations) : le système (1.50) est sous-déterminé. Afin d'obtenir une solution explicite du problème formulé, il est nécessaire de disposer d'informations supplémentaires ou de formuler des hypothèses, par exemple en se plaçant dans un cadre stochastique.

Pour ce faire, les erreurs de mesures V_k sont caractérisées de manière statistique. Typiquement, elles sont supposées être des réalisations d'un tirage aléatoire opéré selon une loi normale centrée (c'est-à-dire de moyenne nulle quel que soit k) et de covariance $\sum_k^{vv}$. qui représentent en réalité des variances et les autres termes des covariances Cette hypothèse n'est pas absurde dans ce sens où le théorème de la limite centrale montre que de nombreux phénomènes aléatoires naturels sont modélisables par des variables gaussiennes. De même que V_k, X est lui aussi supposé être un vecteur aléatoire décrit par une loi normale de moyenne x et de covariance $\sum^{xx}$ La gaussianité de X et V_k ainsi que la linéarité de (1.49) entraînent la gaussianité de Y_k quel que soit k.

A partir de l'optimisation d'un critère donné, on fournit une estimée ponctuelle $\hat{x}$ de X dont la densité de probabilité est entièrement définie sur l'espace d'état $\mathbb{R}^{n_x}$ par $\bar{x}$ et $\sum^{xx}$ .Pour ce faire, les informations exploitées proviennent de l'ensemble de mesures :

$Y_{1\to N} = \{Y_1, .. Y_k, .. Y_N\}$, lesquelles sont considérées comme étant les réalisations respectives des variables aléatoires $Y_1, .. Y_k, .. Y_N$. Par conséquent, l'estimée de X obtenue à partir de $Y_{1\to N}$ sera désormais notée $\hat{x}_N$ afin de marquer sa dépendance vis-à-vis du nombre N de mesures effectuées. Le critère d'optimalité choisi définit la nature de l'estimation. On en distingue deux principales :

– l'estimation au sens du maximum a posteriori : $\hat{x}_N$ est alors la valeur qui maximise la densité de probabilité $P(X|\, Y_{1\to N})$ de X laquelle est reconstruite à partir de $Y_{1\to N}$ et des covariances $\sum_k^{vv}(k = 1 \dots, N)$ du bruit de mesure [14].

– l'estimation au sens des moindres carrés : $\hat{x}_N$ est alors calculé de sorte à minimiser le critère suivant :

$$\mathrm{E}(\| \mathrm{X} - \hat{\mathrm{x}}_N \|^2 \, | \mathrm{Y}_{1\to\mathrm{N}} = \mathrm{y}_{1\to\mathrm{N}}) = \mathrm{E}((\mathrm{X} - \hat{\mathrm{x}}_N)^{\mathrm{T}} | \mathrm{Y}_{1\to\mathrm{N}} = \mathrm{y}_{1\to\mathrm{N}}) \quad (1.51)$$

On montre alors que $\hat{\mathrm{x}}_N$ est égal à l'espérance de X, conditionnée par les informations disponibles, à savoir les N mesures réalisées :

$$\hat{\mathrm{x}}_N = \mathrm{E}((\mathrm{X}|\mathrm{Y}_{1\to\mathrm{N}}) = \mathrm{y}_{1\to\mathrm{N}}) \quad (1.52)$$

Une des conséquences de la gaussianité de X est que les deux estimateurs précités donnent le même résultat, du fait que la moyenne (autre nom de l'espérance) d'une variable gaussienne est également la valeur correspondant au maximum de sa densité de probabilité. Par la suite, nous nous intéresserons à l'obtention de $\hat{\mathrm{x}}_N$ via l'optimalité au sens des moindres carrés. $\hat{\mathrm{x}}_N$ est alors dit comme étant obtenu par la méthode des moindres carrés. Selon le type de problème considéré, deux formulations de la méthode des moindres carrés existent : il s'agit de la forme simple et de la forme récursive.

1.5.1.1.1 Méthode des moindres carrés simples :

La méthode des moindres carrés simples calcule directement $\hat{\mathrm{x}}_N$ à partir d'un ensemble de N mesures $\mathrm{y}_{1\to\mathrm{N}}$, N étant fixé. Une telle formulation est en général utilisée dans des applications de traitement a posteriori des informations. Typiquement, il s'agit d'effectuer une campagne de mesures sur le procédé étudié et de relever et enregistrer un nombre N d'observations, $\mathrm{Y_k}$, $(\mathrm{k} = 1 \ldots, \mathrm{N})$. Ensuite, $\hat{\mathrm{x}}_N$ est calculé hors ligne à partir de l'ensemble $\mathrm{y}_{1\to\mathrm{N}}$ des mesures collectées. Du fait de l'équivalence dans un cadre gaussien entre les estimées au sens des moindres carrés et celles au sens du maximum a posteriori, il est possible de montrer que l'obtention de $\hat{\mathrm{x}}_N$ via la minimisation du critère (1.52) est équivalent au calcul suivant :

$$\hat{\mathrm{x}}_N = \arg\{\mathrm{X}_{\in\mathbb{R}^{\mathrm{n_x}}}{}^{\min}(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{N}}(\mathrm{Y_k} - \mathrm{H_k X})^{\mathrm{T}}(\sum_{\mathrm{k}}^{\mathrm{vv}})^{-1}(\mathrm{y_k} - \mathrm{H_k X})\} \quad (1.53)$$

En développant les calculs, il vient le résultat suivant, sous réserve que $\mathcal{H}_{\mathrm{N}}$ soit de plein rang colonne :

$$\hat{\mathrm{x}}_N = (\mathcal{H}_{\mathrm{N}}{}^{\mathrm{T}}\mathrm{S_N}^{-1}\mathcal{H}_{\mathrm{N}})^{-1}\mathcal{H}_{\mathrm{N}}{}^{\mathrm{T}}\mathrm{S_N}^{-1}\mathrm{y}_{1\to\mathrm{N}} \quad (1.54)$$

Où :

$$\mathrm{y}_{1\to\mathrm{N}} = \begin{bmatrix} \mathrm{Y}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{Y_N} \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{H}_{\mathrm{N}} = \begin{bmatrix} \mathrm{H}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{H_N} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{S_N} = \begin{bmatrix} \sum_1^{\mathrm{vv}} & \cdots & 0_{\mathrm{n_y x n_y}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_{\mathrm{n_y x n_y}} & \cdots & \sum_1^{\mathrm{vv}} \end{bmatrix} \quad (1.55)$$

Quelques remarques quant à ce résultat :

– d'après (1.49), en remarquant que $y_{1\to N}$ est la réalisation de $Y_{1\to N}$, il est possible de considérer que $\hat{x}_N$ est la réalisation de la variable aléatoire $\hat{X}_N$ où :

$$\hat{X}_N = (\mathcal{H}_N{}^T S_N{}^{-1} \mathcal{H}_N)^{-1} \mathcal{H}_N{}^T S_N{}^{-1} Y_{1\to N} \tag{1.56}$$

– l'équation (1.49) montre de manière évidente que l'estimateur des moindres carrés est linéaire, du fait que $\hat{X}_N$ dépend linéairement de chaque mesure Y_k, $(k = 1 \dots, N)$

– en insérant les équations du système (1.53) dans (1.59) à l'aide de (1.60), il vient :

$$\hat{X}_N = X + (\mathcal{H}_N{}^T S_N{}^{-1} \mathcal{H}_N)^{-1} \mathcal{H}_N{}^T S_N{}^{-1} V_{1\to N} \tag{1.57}$$

Par conséquent, le fait que $\{V_k\}_{1\le k\le N}$ soit une séquence centrée implique que $E(\hat{X}_N) = E(X)$, l'estimateur des moindres carrés est non biaisé :

– l'équation (1.57) permet de montrer de manière triviale que la matrice de covariance $\sum_N^{xx}$ d'erreur d'estimation de X par $\hat{x}_N$ est $\sum_N^{xx} = (\mathcal{H}_N{}^T S_N{}^{-1} \mathcal{H}_N)^{-1}$ cette grandeur permet de quantifier de manière statistique l'erreur commise en estimant X par $\hat{X}_N$;

– il va de soit que l'estimée de X au sens des moindres carrés n'existe que si la matrice $(\mathcal{H}_N{}^T S_N{}^{-1} \mathcal{H}_N)$ dans (1.54) est régulière. Pour cela, il faut tout d'abord que SN soit régulière, ce qui signifie que toutes les mesures Y_k, $(k = 1 \dots, N)$ doivent être bruitées (c'est-à-dire entachées d'erreur. Par ailleurs, si S_N est de la forme : $S_N = \sigma^2 I_{N_{n_y}}$ (avec $\sigma \in \mathbb{R}^+$ connu), ce qui signifie que les bruits entachant les mesures sont stationnaires, d'écarts-types identiques et mutuellement indépendants, la condition d'existence de l'estimateur des moindres carrés se résume à la régularité de la matrice suivante, appelée matrice de Gram :

$$\mathcal{H}_N{}^T \mathcal{H}_N = \sum_{k=1}^N H_N{}^T H_N \tag{1.58}$$

1.5.1.1.2 Méthode des moindres carrés récursifs :

Les moindres carrés récursifs ne se servent pas de manière directe d'un ensemble de k mesures $y_{1\to N}$ pour calculer $\hat{x}_k$, mais procèdent de manière récursive (d'où la terminologie) : $\hat{x}_k$ est obtenu à l'aide de la dernière observation Y_k et de l'estimée $\hat{x}_{k-1}$, laquelle contient de manière implicite l'apport de l'ensemble des anciennes mesures $y_{1\to k-1}$. Une telle formulation est en général adoptée pour des problèmes d'estimation en ligne, lorsque les mesures y_k parviennent une par une et à intervalle régulier [43, 44].

Le but des moindres carrés récursifs est donc de calculer l'estimée $\hat{x}_k$ de X ainsi que sa covariance d'erreur d'estimation $\sum_k^{xx}$ en fonction de $\hat{x}_k$, $\sum_{k-1}^{xx}$ (moyennant une initialisation de ces grandeurs), de l'observation y_k et de la covariance $\sum_k^{yy}$ de son bruit de mesure. Pour obtenir les équations désirées, une méthode classique réside en le développement du résultat (1.52). Son avantage sur la première méthode est de mettre en évidence certaines propriétés de l'estimateur des moindres carrés, telles que le principe d'orthogonalité. En adoptant les notations suivantes pour $k \in N^*$:

$$\begin{aligned}
\bar{x}_{k-1} &= E((X|Y_{1\to k-1}) = y_{1\to k-1}) \\
\bar{y}_{k-1} &= E((Y_k|Y_{1\to k-1}) = y_{1\to k-1}) \\
\sum_{k-1}^{xx} &= ((X-\bar{x}_{k-1})(X-\bar{x}_{k-1})^T|Y_{1\to k-1} = y_{1\to k-1}) \\
\sum_{k-1}^{yy} &= ((Y_k-\bar{y}_{k-1})(Y_k-\bar{y}_{k-1})^T|Y_{1\to k-1} = y_{1\to k-1}) \\
\sum_{k-1}^{xy} &= ((X-\bar{x}_{k-1})(Y_k-\bar{y}_{k-1})^T|Y_{1\to k-1} = y_{1\to k-1}) = (\sum_{k-1}^{xy})^T
\end{aligned} \tag{1.59}$$

Les équations des moindres carrés récursifs sont :

$$\begin{aligned}
\hat{x}_k &= \hat{x}_{k-1} + \sum_{k-1}^{xy} (\sum_{k-1}^{yy})^{-1}(y_k - \bar{y}_{k-1}) \\
\sum_k^{xx} &= \sum_{k-1}^{xx} - \sum_{k-1}^{xy}(\sum_{k-1}^{yy})^{-1} \sum_{k-1}^{yx}
\end{aligned} \tag{1.60}$$

1.5.1.2 Estimations optimale d'un vecteur aléatoire dynamique :

Dans la partie précédente, une méthode optimale d'estimation d'un vecteur aléatoire statique gaussien, appelée méthode des moindres carrés, a été présentée. Une manière d'adapter cet outil au problème d'estimation d'un vecteur dont les composantes peuvent lentement varier dans le temps a également été évoquée. Cependant, dans le domaine des sciences de l'ingénieur, le problème d'estimation d'un vecteur de dynamique rapide est fréquemment rencontré. L'algorithme des moindres carrés tel que présenté ne constitue alors en aucun cas une solution convenable.

Un autre outil, pouvant être considéré comme une extension directe des moindres carrés, est alors utilisé : il s'agit du filtre de Kalman, du nom de son concepteur, Rudolph Emil Kalman [43,44]. Cet estimateur est dénommé "filtre" car son principe de fonctionnement contribue à atténuer l'effet des différentes sources de bruit.

Considérons que les mesures $\{Y_k\}_{k \in N^*}$ parviennent de manière régulière, l'intervalle de temps entre deux mesures consécutives quelconques étant constant. L'état (dynamique) à l'instant, appelé instant k, où Y_k est disponible est dorénavant représenté par le vecteur

aléatoire X_k. Le problème d'estimation d'un état dynamique consiste à trouver un estimateur ponctuel $\hat{x}_k$de X_k en fonction de l'ensemble de mesures $Y_{1\to n}$. Trois cas de figure sont alors à distinguer :

– si $k > n$, il s'agit d'un problème de prédiction.

– si $k = n$, il s'agit d'un problème de filtrage.

– si $k < n$, il s'agit d'un problème de lissage.

Nous considérons toujours l'estimateur des moindres carrés sous forme récursive, lequel calcule $\hat{x}_k = E(X_k \mid Y_{1\to k} = y_{1\to k})$. Les hypothèses de blancheur du bruit de mesures $\{V_k\}_{k \in N^*}$ et d'indépendance des observations $\{Y_k\}_{k \in N^*}$ sont à nouveau utilisées. Le vecteur d'état évolue selon un processus de Gauss- Markov forcé :

$$X_{k+1} = f_k(X_k, u_k, W_k) \tag{1.61}$$

où f_k est une fonction connue pouvant être linéaire ou non linéaire, $u_k \in \mathbb{R}^{n_u}$ représente un vecteur déterministe commandant l'évolution de X_k et , $W_k \in \mathbb{R}^{n_w}$ est le bruit d'état (également appelé bruit de dynamique), supposé blanc, gaussien, centré et de covariance $\sum_k^{ww}$. La séquence $\{W_k\}_{k \in N}$est supposée indépendante du bruit de mesures $\{V_k\}_{k \in N^*}$. L'état initial X_0 est quant-à-lui supposé gaussien et indépendant de $\{W_k\}_{k \in N}$ et $\{V_k\}_{k \in N^*}$. Compte tenu des hypothèses précédemment formulées, cette dernière condition est suffisante pour assurer que X_k est décorrélé de V_k et W_k quel que soit $k \in N^*$.

De manière analogue à celle utilisée lors de la présentation des moindres carrés, les notations générales suivantes pour deux vecteurs aléatoires quelconques A_n, B_n et $m \in N^*$ sont adoptées :

$$\begin{aligned} \hat{a}_{n/m} &= E(A_n | Y_{1\to m} = y_{1\to m}) \\ \sum\nolimits_{n/m}^{ab} &= ((A_n - \hat{a}_{n/m})(B_n - \hat{b}_{n/m})^T | Y_{1\to m} = y_{1\to m}) \\ \hat{a}_n &= \hat{a}_{n/n} \\ \sum\nolimits_n^{ab} &= \sum\nolimits_{n/n}^{ab} \end{aligned} \tag{1.62}$$

Les équations (1.59) deviennent alors :

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{k/k-1} &= y_k - \hat{y}_{k/k-1} \\ K_k &= \sum\nolimits_{k/k-1}^{xy} (\sum\nolimits_{k/k-1}^{yy})^{-1} \\ \hat{x}_k &= \hat{x}_{k/k-1} + K_k \tilde{y}_{k/k-1} \\ \sum\nolimits_k^{xx} &= \sum\nolimits_{k/k-1}^{xx} - K_k \sum\nolimits_{k/k-1}^{yy} K_k^T \end{aligned} \tag{1.63}$$

Ces équations constituent les relations générales du filtre de Kalman, telles que K_k étant le gain associé au filtre de Kalman, parfois appelé gain de Kalman. Sous une telle forme, ces équations ne sont pas exploitables. Toutefois, dans le cas où la fonction f_k du modèle d'état (1.60) est linéaire, ces relations peuvent être exprimées de manière simple comme rappelé dans la section à venir, ainsi que quelques modifications et extensions de cet algorithme de base [43,44]. La section suivante est quant-à-elle dévouée à la recherche d'une solution approchée de (1.62) dans le cas où f_k est non linéaire et continue.

1.5.2 Estimation de vecteurs déterministes:

Pour un vecteur déterministe, on choisit l'estimateur du maximum de vraisemblance, c'est-à-dire la valeur $a = \hat{a}(\mathrm{r})$ qui maximise la vraisemblance multivariable $\mathrm{p}(a/\mathrm{r})$ Si le maximum est intérieur au domaine de variation de a, et si les dérivées partielles $\partial \ln(\mathrm{p}(\mathrm{r}/a))/\partial a_i$ existent, l'équation du maximum de vraisemblance est constituée de p équations élémentaires:

$$\frac{\partial \ln(\mathrm{p}(\mathrm{r}/a))}{\partial a_i}_{|a=\hat{a}_{\mathrm{ml}}(\mathrm{r})} = 0\,, i = 1, \ldots . \mathrm{p} \tag{1.64}$$

$$\nabla_a \ln(\mathrm{p}(\mathrm{r}/a))_{|a=\hat{a}_{\mathrm{ml}}(\mathrm{r})} = 0 \tag{1.65}$$

Où ∇_a représente le vecteur gradient par rapport à a On doit encore sélectionner parmi les solutions, celle qui correspond au maximum.

1.5.2.1 Les performances de l'Estimation de vecteurs déterministes:

Dans le cas d'estimation de vecteurs déterministes, on mesure les performances en calculant l'écart entre l'estimation et la solution théorique (le biais) et la dispersion des estimations.

1.5.2.1.1 Biais de l'estimateur de vecteurs déterministes:

Dans le cas multi variable, le biais est un vecteur, calculé simplement comme la différence entre l'espérance de l'estimateur et le vecteur théorique :

$$\mathrm{b}(a) = \mathrm{E}[\hat{a}(\mathrm{r})] - a \tag{1.66}$$

L'estimateur est non biaisé, si le biais est le vecteur nul, $\mathrm{b}(a)$ c'est-à-dire si chaque composante est nulle :

$$(\mathrm{b}(a))_{\mathrm{i}} = \mathrm{E}[\hat{a}_{\mathrm{i}}(\mathrm{r})] - a_i = 0\,, \forall\, i = 1, \ldots . \mathrm{p} \tag{1.67}$$

1.5.2.1.2 Dispersion de l'estimateur de vecteurs déterministes:

Dans le cas d'un scalaire, la dispersion était mesurée par la variance de l'écart entre l'estimateur et la valeur théorique. Dans le cas multi variable, la dispersion pourra être mesurée par la matrice de variance-covariance Γ_e de l'erreur $e = \hat{a}(r) - a$:

$$\Gamma_e = E[((\hat{a}(r) - a) - E[\hat{a}(r) - a])((\hat{a}(r) - a) - E[\hat{a}(r) - a])^T] \quad (1.68)$$

Les éléments diagonaux, d'indice $i\ i$, de la matrice donneront la dispersion de chacune des composantes a_i. Les éléments $i\ j$, hors de la diagonale, renseignent sur le couplage des erreurs d'estimation entre a_i et a_j .

1.6 Conclusion :

Dans ce chapitre on a étudiée la théorie d'estimation pour cela on a vue la fonction de vraisemblance de l'estimation des paramètres, le Biais et la Variance de l'estimateur, et pour cela on peut utiliser le théorème des bornes d'un estimateur efficace, pour trouver directement la variance, dans ce chapitre, on a étudiée aussi les deux situations, de vecteurs aléatoires et déterministes et on a définie le filtre de Kalman qui permet d'estimer un vecteur aléatoire dynamique ou un processus aléatoire.

CHAPITRE 2

Le Filtre De Kalman EKF, UKF et CDKF

2.1 Introduction :

Dans ce chapitre on va présenter les filtres utilisés pour l'estimation de la trajectoire du robot mobile, on commence par une définition et calcul du filtre de Kalman suivie par sa version étendu qui est le filtre de Kalman étendu. Puis on passe à une présentation du filtre de Kalman sans parfums, d'où on définie ses propriétés et ses étapes de calcul. Enfin en présente le filtre de Kalman à différence centrale.

2.2 Filtrage de Kalman:

Le filtre de Kalman est un observateur stochastique car on introduit dans son modèle des bruits d'état et de mesure.

2.2.1 Définition et propriétés de filtre de Kalman:

Le problème du filtrage linéaire a été résolu d'une façon élégante par un filtre récursif: c'est le filtre de Kalman-Bucy.

Ce dernier se présente sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles ou récurrentes, cette forme est facile à résoudre sur un calculateur, la réalisation de ce filtre fournie l'estimation optimale, et la variance de l'erreur d'estimation. C'est un reconstructeur d'état dans un environnement stochastique si les variances des bruits sont connues, c'est un estimateur minimisant la variance de l'erreur d'estimation.

Il généralise le filtrage optimal aux systèmes non stationnaire en présence des conditions initiales et d'entrées déterministe. C'est un outil de base dans le domaine aérospatial, ou il a été particulièrement appliqué pour la détermination des orbites et pour la navigation. Rappelons qu'un reconstructeur de l'état (ou d'un estimateur) est un système ayant (une estimation de l'état), comme les entrées et les sorties du processus réel et dont la sortie est estimation de l'état de ce processus.

Notre reconstructeur est un observateur dans le cas d'un modèle déterministe, et c'est un filtre dans le cas stochastique.

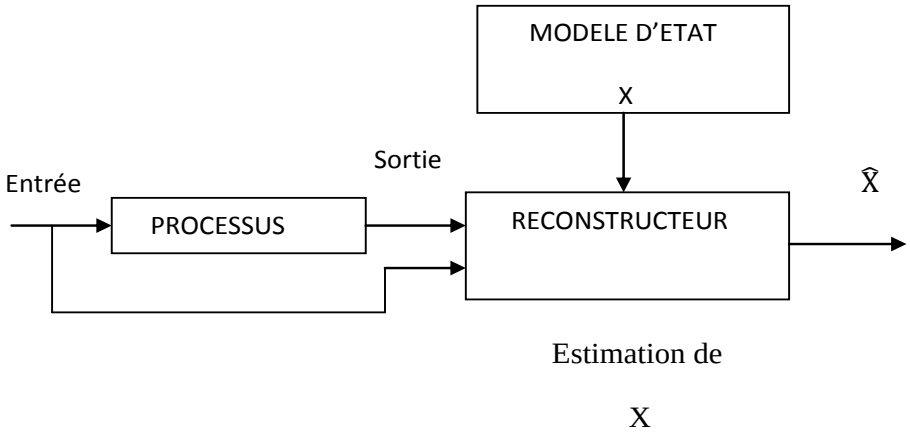


Figure 2.1- schéma de principe d'un estimateur d'état

2.2.2 Principe du Filtre de Kalman :

Le problème de l'estimation de l'état X(t) d'un système dynamique soumis à des entrées déterministes et aléatoires à partir des mesures Z(t) bruité, peut être en trois classes distinctes selon l'intervalle d'observation $[t_0, t_r]$:

Delà on a trois problèmes:

- Un problème de prédiction pour: $t_0 > t_r$
- Un problème de filtrage pour : $t_0 = t_r$
- Un problème de lissage pour : $t_0 < t_r$

Notons que le filtre de Kalman-Bucy permet de résoudre directement la prédiction et le filtrage, et il est à la base de la théorie du lissage.

Le filtre classique s'applique aux systèmes dynamiques linéaires, continus ou discrets dont le bruit de mesure est blanc.

2.2.2.1 Le modèle de Kalman :

- L'évolution de l'état du système est d'écrite par un système d'équations différentielles.
- L'état du système est observé par la mesure Z(t) est liées à l'état X(t) par l'équation d'observation.

$$\dot{X}(t) = A(t).X(t) + B(t).U(t) + W(t) \qquad \text{équation d'état} \qquad (2.1)$$

$$Z(t) = C(t).X(t) + V(t) \qquad \text{équation de mesure} \qquad (2.2)$$

Avec :

$\dot{X}(t)$: Vecteur d'état de dimension(n).

$A(t)$: matrice dynamique de la représentation d'état(n x n).

$B(t)$: vecteur de commande de la représentation de l'état(n).

$C(t)$: matrice d'observation de la représentation d'état.

$W(t)$: un bruit blanc gaussien de moyenne nulle.

$V(t)$: un bruit blanc gaussien de moyenne nulle.

$U(t)$: vecteur d'entrée.

$Q(t)$: matrice définie non négative.

$R(t)$: matrice définie non négative.

$X(t_0)$: état initiale, aléatoire de statique connue gaussien, est de moyenne:

$E[X(t_0)] = m_0$, indépendance de bruit $W(t)$.

2.2.2.2 La Formulation de filtre de Kalman:

Avant d'arriver à la formulation du filtre de Kalman: différentes hypothèses et démonstrations permettent d'aboutir à ce filtre, on peut:

1)- Considérer que les grandeurs aléatoires U, W et $X(t_0)$: sont gaussiennes, et chercher l'estimé (à variance minimale) $\widehat{X}(t)$, qui minimise un critère d'écart quadratique:

$$E[(X(t) - \widehat{X}(t))^T (X(t) - \widehat{X}(t))] \qquad (2.3)$$

2)- Déterminer le maximum à posteriori estimé, c'est à dire l'estime $\widehat{X}(t)$, qui minimise la densité de probabilité de $X(t)$.

3)- Abandonner l'hypothèse gaussienne et chercher l'estime linéaire qui minimise les critères d'écart quadratique.

L'estimé à variance minimale est fournie par la moyenne conditionnelle de $X(t)$, étant donné les observations $Z(t)$, qui dans le cas gaussien est égale au maximum à posteriori et à l'estimé optimal linéaire.

Soit $E(X/Z)$, La moyenne conditionnelle de l'état $X(t)$ étant donné les observations $Z(t)$, l'identité.

$$E[E(X/Z)] = E(X) \tag{2.4}$$

Pour permette d'écrire :

$$E[E(X/Z)] = E[E\big(X - \widehat{X}\big)^{T}.A(X - \widehat{X})/Z] \tag{2.5}$$

Or:

$$E[E\big(X - \widehat{X}\big)^{T}A(X - \widehat{X})/Z] = (\widehat{X} - E(X/Z))^{T}.A(\widehat{X} - E(X/Z)) + E.A(X^{T}.A(X/Z)) - (E(X/Z)^{T}.A.E(X/Z)) \tag{2.6}$$

Pour minimiser le critère, il suffit de minimiser l'expression (2.3) qui est toujours positive. Ce minimum est obtenu pour: $\widehat{X}(t) = E[X(t)/Z(t)]$ (2.7)

Cet estimé n'est pas biaisé car : $E\big[\widehat{X}\big] = E[E(X/Z)] = E(X)$ (2.8)

Alors, la formulation du filtre de Kalman est simplement obtenue par le calcul de la moyenne conditionnelle.

Avec A : matrice de pondération.

2.2.2.3 Détermination de Filtre:

Supposons que l'on connaisse l'état X_k à l'instant k, l'état à l'instant $(k+1)$ est donné par l'équation d'évolution :

$$X_{k+1} = A_k X_k + B_k U_k + W_k \tag{2.9}$$

Le bruit W_k étant blanc à moyenne nulle, indépendant des X_1 précédents, la meilleure prédite du bruit W_k est nulle, et la meilleure prédiction de l'état X_{k+1} est donnée par:

$$\widehat{X}_{k+1} = A_k X_k + B_k U_k \tag{2.10}$$

La variance de prédiction de l'erreur est égale à celle du bruit W_k :

$$E[(X_{k+1/k} - \widehat{X}_{k+1/k})\,(X_{k+1/k} - \widehat{X}_{k+1/k})^T] = E[W_k {W_k}^T] = Q_k \tag{2.11}$$

Si l'on ne dispose que d'une estimation $\widehat{X}_{k/k}$ à l'instant k, ne faisant pas d'observations entre l'instant $k+1$, rien ne permet d'améliorer cette estimation et la meilleure prédiction est donnée par:

$$\widehat{X}_{k+1/k} = A_k \widehat{X}_{k/k} + B_k U_k \tag{2.12}$$

• La variance de l'erreur de prédiction $P_{k+1/k}$ s'en déduit:

$$P_{k+1/k} = E[(X_{k+1} - \widehat{X}_{k+1/k})\,(X_{k+1} - \widehat{X}_{k+1/k})^T] = A_k P_{k/k} A^T + Q_k \tag{2.13}$$

Cette variance dépend de la précision de l'estimation précédente $P_{k/k}$ et de la taille du bruit Q_k.

• La prédiction de l'observation est alors:

$$\hat{Z}_{k+1/k} = C_{k+1}.\widehat{X}_{k+1/k} \tag{2.14}$$

Lorsqu'on effectue la mesure Z_{k+1} à l'instant $k+1$, la différence entre la valeur mesurée Z_{k+1} et la valeur prédite $\hat{Z}_{k+1/k}$ fournit une indication sur l'erreur d'estimation dont on peut tenir compte pour améliorer l'estimation, si on connaît la variance des bruits ainsi :

• Si le bruit de mesure est nul, la meilleur estimé de $C_{k+1}.X_{k+1}$ est fournie par la mesure de Z_{k+1}

• Si la variance $P_{k+1/k}$ de la prédiction $\widehat{X}_{k+1/k}$ est nulle, il n'y a pas d'erreur de prédiction, la meilleur estimé $\widehat{X}_{k+1/k+1}$ est fournie par la prédiction, sans tenir compte de l'observation Z_{k+1} . C'est le cas d'un bruit W_k nul et de conditions initiales nulles.

• Si la variance de bruit est $P_{k+1/k}$ sont différent de zéro, on effectuera une correction proportionnelle à l'écart entre la valeur mesurée $\hat{Z}_{k+1}$ et la valeur prédite $\hat{Z}_{k+1/k}$:

$$\widehat{X}_{k+1/k+1} = \widehat{X}_{k+1/k}.K_{k+1}.(Z_{k+1}.Z_{k+1/k}) \quad (2.15)$$

Avec K_{k+1} est un gain dépendant des variances.

2.2.2.4 Le Filtre de Kalman continu:

Les équations du d'évolution et d'observation sont toutes les deux continues:

$$\dot{X}(t) = A(t).X(t) + B(t).U(t) + W(t) \quad (2.16)$$

$$Z(t) = C(t).X(t) + V(t) \quad (2.17)$$

Avec

$$\begin{Bmatrix} E[W(t).W^T(t+\tau)] = Q(t).\delta(\tau) \\ E[V(t).V^T(t+\tau)] = R(t).\delta(\tau) \\ E[W(t).W^T(t+\tau)] = 0 \\ E[W(t)X^T(t_0)] = E[V(t)X^T(0)] = 0 \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

Les équations du filtre Kalman continu peuvent être obtenues plus simplement en remplaçant l'hypothèse gaussienne par la recherche d'un filtre linéaire non biaisé, à variance minimale et le filtre linéaire est de la forme :

$$\widehat{X}(t) = A_1(t).\widehat{X}(t) + B_1(t).U(t) + K(t).Z(t) \quad (2.19)$$

Avec

$$\begin{Bmatrix} E[\,\widehat{X}(t)\,] = E[X(t)] \\ E = E[\,\dot{X}(t)] \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

Soit en prenant la moyenne des expressions (2.10) et (2.12):

$$A_1(t)E[X(t)] + B_1U(t) + K(t)C(t)E[X(t)] = A(t)\,E[X(t)] \;+\; B(t)\,U(t) \quad (2.21)$$

Avec

$$\begin{Bmatrix} A_1(t) = A(t) - K(t).C(t) \\ B_1(t) = B(t) \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

L'expression du filtre: $X(t)$

$$\dot{X}(t) = A(t).\hat{X}(t) + B(t).U(t) + K(t)[Z(t) - C(t).\hat{X}(t)] \quad (2.23)$$

Dans laquelle la matrice de gain $K(t)$ doit minimiser la variance de l'erreur exprimée par :

$$\tilde{X} = X - \hat{X} \quad (2.24)$$

Cette erreur $\tilde{X}$ vérifie l'équation différentielle suivante obtenue à partir des relations: (2.25), (2.11), (2.13).

$$\dot{\tilde{X}}(t) = [A(t) - K(t).C(t)].\tilde{X}(t) + W(t) - K.V(t) \quad (2.25)$$

Avec $\tilde{X}(t)$: est donc la sortie d'un système linéaire ayant pour entrée le bruit blanc $(W(t) - K(t).V(t))$ qui a comme variance: $(Q + KRK^T)$

La variance P de l'erreur est solution de l'équation différentielle (équation de Riccatti)

$$\dot{P}(t) = (A - K.C)P + P(A - K.C) + Q + KRK^T \quad (2.26)$$

«On peut montrer que pour minimiser la variance de l'erreur, il suffit de minimiser P »

C'est à dire choisir :

$$K(t) = P(t).C^T(t).R^{-1}(t) \quad (2.27)$$

Finalement, les équations du filtre continu sont:

$$\dot{X}(t) = A(t).\hat{X}(t) + B(t).U(t) + K(t).Z(t) - C(t).\hat{X}(t) \quad (2.28)$$

$$\dot{P}(t) = A(t).P(t) + P(t).A(t) - P(t).C^T(t).R_1(t).P(t) + Q(t) \quad (2.29)$$

$$K(t) = P(t).C^T(t).R^{-1}(t) \quad (2.30)$$

2.2.2.4.1 La structure de filtre de Kalman-Bucy continu :

La structure de filtre de Kalman-Bucy continu est représentée par la figure (2.2). On retrouve encore la dynamique du système corrigée par l'erreur d'estimation de la mesure.

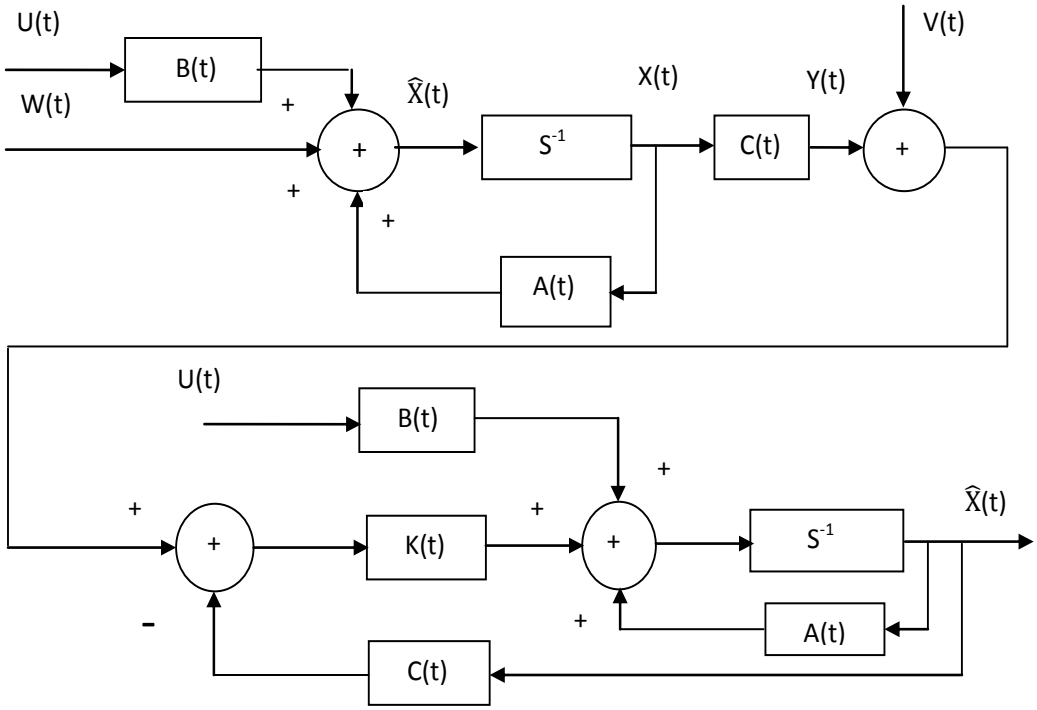


Figure 2.2- schéma fonctionnel du filtre de Kalman continu

2.2.2.5 Filtre de Kalman discret: Les équations du modèle sont:

$$X_{k+1} = A_k X_k + B_k U_k + W_k \tag{2.31}$$

$$Z_k = C_k X_k + V_k \tag{2.32}$$

Avec :

$$\left\{ \begin{array}{c} E(X_0) = m_0 \\ E(W_k) = 0 \\ E\left(W_k W_j^{\,T}\right) = Q_k \delta_{kj} \\ E(V_k) = 0 \\ E\left(V_k V_j^{\,T}\right) = R_k \delta_{kj} \end{array} \right\} \tag{2.33}$$

L'expression du filtre de Kalman peut s'obtenir simplement, de manière itérative en calculant la moyenne conditionnelle:

$$\widehat{X}_{k+1/k+1} = E[X_{k+1}/Z_1 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots Z_{k+1}] \tag{2.34}$$

Comme l'état et les observations sont gaussiens, l'estime est une fonction linéaire des observations, indépendante de l'erreur d'estimation:

$$X_{k+1/k+1} = X_{k+1} - \widehat{X}_{k+1/k+1} \tag{2.35}$$

Avec :

$\widehat{X}_{k/k}$: le meilleur estimé de X_k à partir des observations $Z_1 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots Z_k$

$P_{k/k}$: la variance de l'erreur d'estimation à l'instant k.

$$\widehat{X}_{k+1/k} = E[X_k/Z_1 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots Z_k] \tag{2.36}$$

$$P_{k/k} = E[(X_k - \widehat{X}_{k/k})(X_k - \widehat{X}_{k/k})/Z_1 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots Z_k] \tag{2.37}$$

A l'instant $k+1$, l'estime de X_{k+1} à partir des observations $Z_1 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots Z_k$ est la meilleur prédiction $\widehat{X}_{k+1/k}$ de X_k

$$\widehat{X}_{k+1/k} = E[X_{k+1}/Z_1 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots Z_{k+1}] \tag{2.38}$$

Cette prédiction s'obtient, en prenant la moyenne conditionnelle de l'équation d'évolution (2. 16).

$$X_{k+1/k} = A_k X_{k/k} + B_k U_k \tag{2.39}$$

La variance de l'erreur de prédiction est:

$$P_{k+1/k} = E[(X_{k+1} - X_{k+1/k})(X_{k+1} - X_{k+1/k})^T/Z_1 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots Z_k] \tag{2.40}$$

$$P_{k+1/k+1} = P_{k+1/k} - K_{k+1} C_{k+1} P_{k+1/k} \tag{2.41}$$

$$K_{k+1} = P_{k+1/k} {C_{k+1}}^T (C_{k+1} P_{k+1/k} {C_{k+1}}^T + R_{k+1})^{-1} \tag{2.42}$$

Avec $P_{k+1/k+1}$: Variance de l'erreur d'estimation, c'est une matrice symétrique positive définie

Finalement les équations du filtre de Kalman discret sont :

$$\left\{ \begin{array}{c} \widehat{X}_{k+1/k+1} = \widehat{X}_{k+1/k} + K_{k+1}(Z_{k+1} - C_{k+1}.\widehat{X}_{k+1/k}) \\ K_{k+1} = P_{k+1/k} {C_{k+1}}^T (C_{k+1} P_{k+1/k} {C_{k+1}}^T + R_{k+1})^{-1} \\ P_{k+1/k+1} = (1 - K_{k+1} C_{k+1}) P_{k+1/k} \\ P_{k+1/k} = A_k P_{k/k} {A_k}^T + Q_k \end{array} \right\} \tag{2.43}$$

Le filtre obtenu est linéaire, il peut être schématisé par la figure (2.3), et Il permet un calcule récursive en temps réel de l'estimation, satis stockage des observations et des commandes passées.

2.2.2.5.1 La structure de filtre de Kalman discret:

La structure de filtre de Kalman discret est représentée par la figure (2.3).

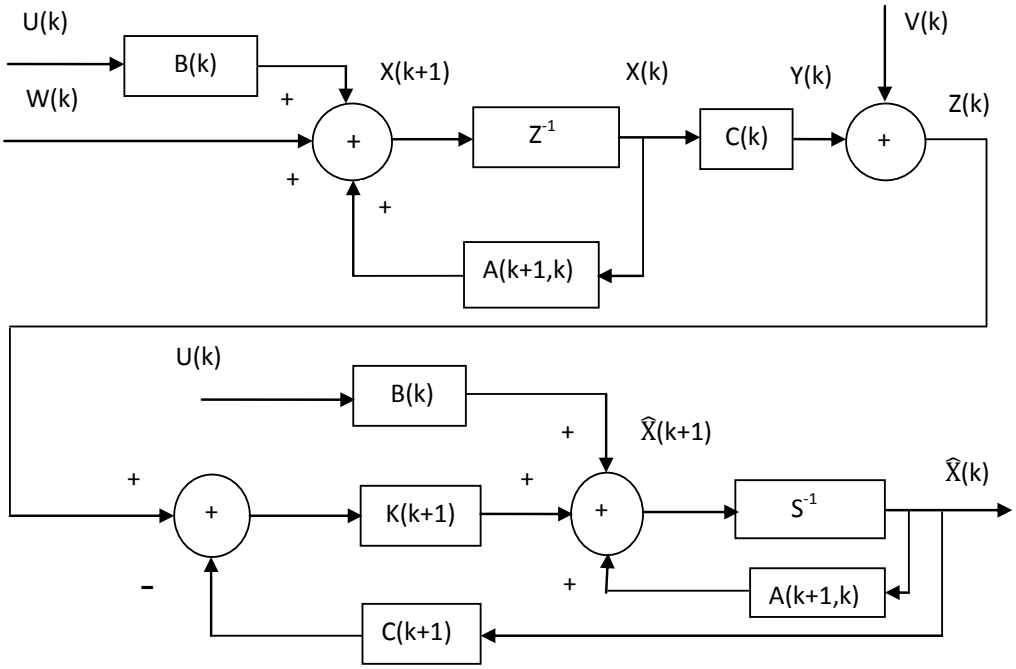


Figure 2.3- schémas fonctionnel du filtre de Kalman discret

2.3 Le Filtre de Kalman Etendu (EKF) :

Le filtre de Kalman étendu est une adaptation du filtre de Kalman aux problèmes non linéaires. Le principe est d'approximer les fonctions non linéaires par linéarisation afin de pouvoir appliquer les équations du filtre de Kalman classique. Bien que couramment utilisé, ce filtre n'est pas idéal car il propage la moyenne à travers les équations non linéaires (fonction f du modèle dynamique) alors que la covariance est calculée avec les matrices linéarisé (matrice de transition Φ calculée à l'aide de la matrice dynamique du système F obtenue par dérivation de la fonction f). Ainsi, en cas de comportement non linéaire durant le pas de temps d'intégration, cette méthode s'avère inexacte car une approximation de premier ordre est effectuée. Dans ce cas, un filtre de Kalman étendu itératif permet de diminuer les erreurs introduites lors de la linéarisation.

On s'ait que le calcul récursif de la statistique d'ordre deux dans le cas d'un modèle linéaire avec des hypothèses de gaussianité des états, a trouvé une solution sous la forme du filtre de Kalman. Son principal intérêt réside dans l'implémentation récursive, qui répartit le coût de calcul sur l'ensemble des observations, réalisant en même temps une minimisation de l'erreur par rapport à un critère d'EQM (Erreur Quadratique Moyenne) [43,44].

La majorité des méthodes d'estimation récursive proposées jusqu'à présent, pour résoudre le problème de filtrage dans le cas non-linéaire, font des approximations du modèle ou au niveau des hypothèses des statistiques initiales. Chronologiquement la première solution proposée a été le Filtre de Kalman Étendu (EKF – Extended Kalman Filter). Cette solution repose sur un développement en série de Taylor des équations de processus et d'observation qui forment le modèle. Ainsi le Filtre de Kalman Étendu est défini en utilisant les deux idées suivantes :

• une linéarisation au premier ordre dans le développement de Taylor pour les non-linéarités correspondantes aux équations de processus et/ou observation

2.3.1 Modèle Générale De Filtre De Kalman Étendu :

2.3.1.1 Filtre De Kalman Étendu Discret :

On considère le modèle d'estimation suivant

$$X_{k+1} = f(X_k) + W_k \tag{2.44}$$

$$Z_k = h(X_k) + V_k \tag{2.45}$$

où $\{ f(X_k) , h(X_k)\}$ désignent des fonctions non-linéaires et où les bruits additifs $\{ W_k, V_k \}$ sont considérés centrés, gaussiens et avec une inter-corrélation nulle :

$$\begin{Bmatrix} E(W_k) = 0 \\ E\left(W_k {W_j}^T\right) = Q_k \delta_{kj} \\ E\left(V_k {V_j}^T\right) = R_k \delta_{kj} \\ E\left(W_k {W_j}^T\right) = 0 \\ E\left(V_k {V_j}^T\right) = 0 \end{Bmatrix} \tag{2.46}$$

Comme dans le cas de filtre de Kalman standard (modèles linéaires) l'estimation à l'instant k sera accomplie par approximation à l'ordre deux de la statistique des états :

• état estimé : $\widehat{X}_{k/k} \approx E[X_k/Z^k]$

• matrice de covariance : $P_{k/k}$

Supposons qu'il est possible de générer une trajectoire de référence x_k On peut donc écrire le système :

$$X_{k+1} = (f(X_k) - f(X_k) + f(X_k) + W_k \quad (2.47)$$

Si la distance entre x_k et l'état réel X_k est suffisamment petite alors il est possible de faire une approximation du système linéaire en utilisant le développement en séries de Taylor

$$f(X_k) - f(x_k) = f_k(X_k - x_k) \quad (2.48)$$

Avec $$(f_k)_{ij} = \{\partial(f_k(X_k))_i / \partial(x_k)_j\} \quad (2.49)$$

Supposons un cas plus général :

$$X_{k+1} = f(X_k + W_{k+1}) \quad (2.50)$$

Avec une équation d'observation non linéaire:

$$Z_k = h(X_k, V_k) \quad (2.51)$$

On fait donc une linéarisation des fonctions non linéaires:

$$F_k = \partial f / \partial x|_{X_{k-1/k-1}} \quad (2.52)$$

$$H_k = \partial h / \partial x|_{X_{k/k-1}} \quad (2.53)$$

Et on donne l'algorithme du filtre de Kalman étendu :

• La prédiction

$$\widehat{X}_{k+1/k} = f(\widehat{X}_{k/k}) \quad (2.54)$$

$$P_{k+1/k} = \Phi_k P_{k/k} {\Phi_k}^T + Q_k \quad (2.55)$$

• Calcul du gain du filtre optimal (qui peut être calculé a priori) :

$$K_{k+1} = P_{k+1/k} {H_k}^T (H_k . P_{k+1/k} {H_k}^T + R)^{-1} \quad (2.56)$$

• Mise à jour de la matrice de covariance de l'état :

$$P_{k+1/k+1} = (I - K_{k+1}H_k)P_{k+1/k} \tag{2.57}$$

• Réactualisation de l'estimation de l'état :

$$\widehat{X}_{k+1/k+1} = \widehat{X}_{k+1/k} + K_k(Z_k - h(\widehat{X}_{k+1/k})) \tag{2.58}$$

2.3.1.2 La Structure De Filtre De Kalman Discret Etendu :

La structure de filtre de Kalman discret étendu est représentée par la figure (2.4)

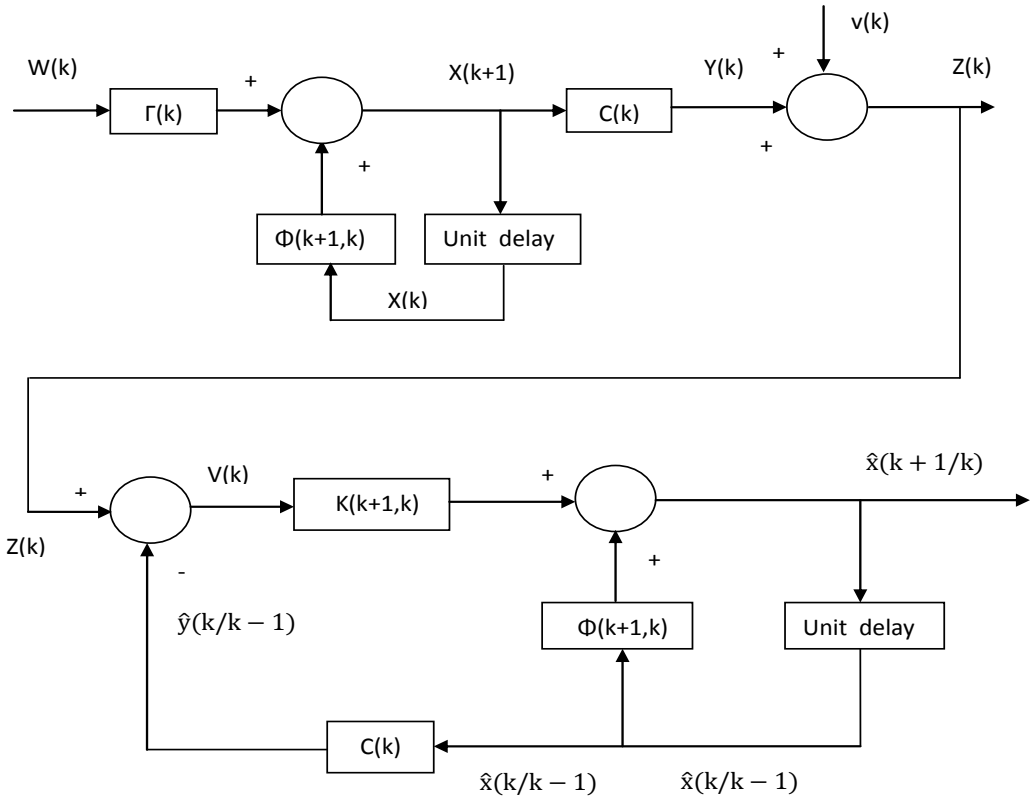


Figure 2.4 - Schéma fonctionnel du filtre de Kalman discret étendu.

2.3.1.3 Filtre De Kalman Étendu Continu :

On considère le modèle suivant :

$$X(t) = A(t).X(t) + B(t).W(t) \tag{2.59}$$

$$Z(t) = C(t).X(t) + V(t) \tag{2.60}$$

Avec :

$$E[W(t)] = E[V(t)] = 0 \quad (2.61)$$

$$E[W(t).W^T(t+\tau)] = Q(t).\delta(\tau) \quad (2.62)$$

$$E[V(t).V^T(t+\tau)] = R(t).\delta(\tau) \quad (2.63)$$

$$E[W(t).V^T(t+\tau)] = E[W(t).X^T(t_0)] = E[V(t).X^T(t_0)] = 0 \quad (2.64)$$

• La prédiction

$$X(t/t) = A(t).X(t/t) + K(t).P(t) \quad (2.65)$$

$$P(t) = Z(t) - C(t).X(t/t) \quad (2.66)$$

• Calcul du gain

$$K(t) = P(t/t).C^T(t).R^{-1}(t) \quad (2.67)$$

• Calcul de la variance

$$P(t/t) = A(t)P(t/t) + P(t/t)A^T(t) + B(t)p(t)B^t(t) - P(t/t)C^T(t)R^{-1}(t)C(t)P(t/t) \quad (2.68)$$

2.3.1.4 La structure de filtre de Kalman continu étendu :

La structure de filtre de Kalman continu étendu est représentée par la figure (2.5)

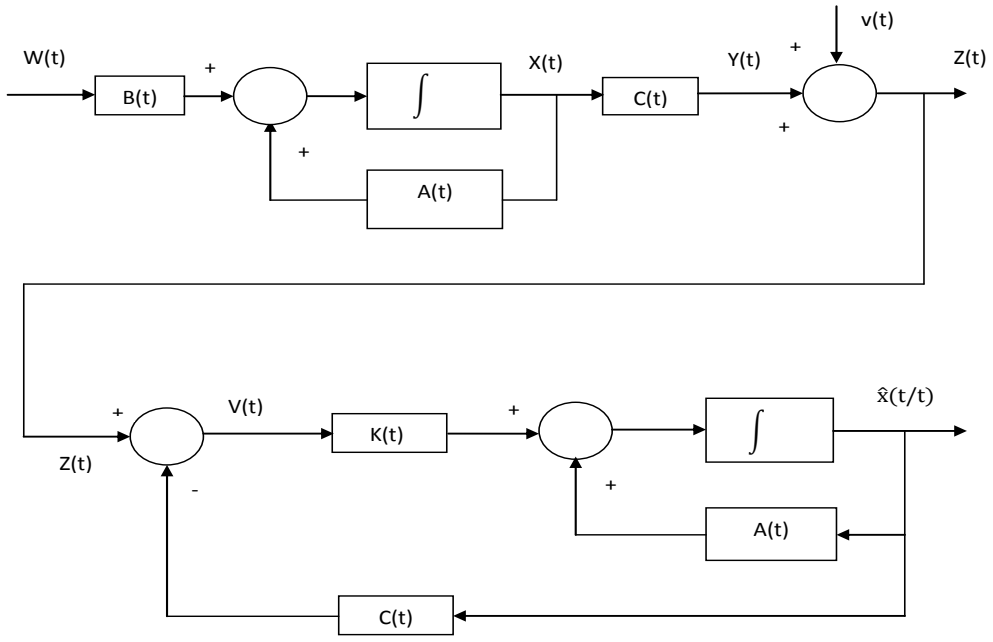


Figure 2.5- Schéma fonctionnel du filtre de Kalman continu étendu

2.3.2 Principe du filtre de Kalman Étendu (EKF) :

Le schéma général qui présente la structure récursive de l'algorithme de Kalman Étendu est proposé en figure (2.6). Ainsi de façon similaire au filtre de Kalman classique le mécanisme d'estimation est divisé en deux parties :

• l'étape de mise à jour temporelle qui réalise l'évaluation de la statistique d'ordre deux de l'état prédit.

• l'étape de mise à jour par des observations qui donne la valeur estimée en utilisant la connaissance de l'état observé

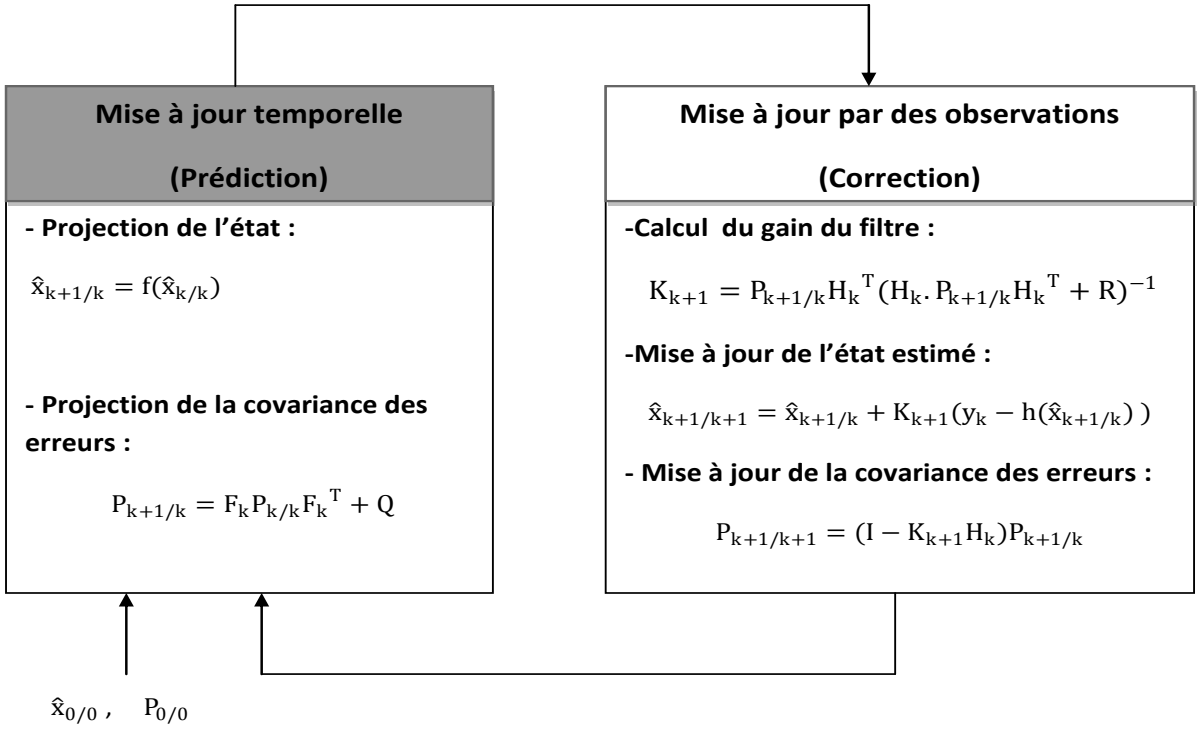


Figure 2.6- Application récursive du filtre de Kalman Étendu

Les équations générales de filtrage seront simplifiées. Toute méthode de filtrage de Kalman peut être écrite comme une application récursive d'une transformation de la statistique de l'état au cours du temps. Ainsi pour une méthode de filtrage quelconque l'algorithme est écrit sous la forme de deux transformations successives, l'une pour implémenter les équations de mise à jour temporelle et l'autre pour la propagation de la statistique de l'état prédit à travers le modèle d'observation [45, 46, 47].

En utilisant l'observation courante on peut calculer le vecteur d'innovation et estimer la nouvelle statistique de l'état. La transformation non-linéaire est définie comme une

application destinée au calcul de la statistique d'une variable aléatoire x qui subit une transformation à travers la fonction f :

$$y = f(x) \tag{2.69}$$

On va juste présenter la transformation non-linéaire considérée par l'EKF pour mettre en place le mécanisme de filtrage. Ainsi, en utilisant le modèle de propagation donné par l'équation (2.20), la linéarisation effectuée dans la série de Taylor va mener aux expressions suivantes des moments d'ordre un et deux :

$$F_k = \partial f / \partial x|_{X_{k-1/k-1}} \tag{2.70}$$

$$H_k = \partial h / \partial x|_{X_{k/k-1}} \tag{2.71}$$

2.3.2.1 Cas d'un Filtre de type IEKF :

Une méthode permettant d'améliorer le processus d'estimation correspond au calcul successif des états prédits $\widehat{X}_{k+1/k+1}$, K_{k+1} et $P_{k+1/k+1}$, en effectuant chaque fois une linéarisation autour de l'état le plus récent. Pour développer l'algorithme on va utiliser les notations : $\widehat{X}_{k+1/k+1}^{\{i\}}$, $K_{k+1}^{\{i\}}$,et $P_{k+1/k+1}^{\{i\}}$, $i = 0, 1, \ldots\ldots\ldots$ [9, 10]

Pour désigner les paramètres estimés à la i-ème étape. En appliquant le même principe que dans le filtre de Kalman Étendu, et les équations récursives pour le filtre IEKF (iterated extended Kalman filter) sont :

1-Initialisation du filtre :

$$\widehat{X}_{k+1/k+1}^{\{0\}} = \widehat{X}_{k+1/k} \tag{2.72}$$

$$P_{k+1/k+1}^{\{0\}} = P_{k+1/k} \tag{2.73}$$

2-Calcul récursif :

$$\widehat{X}_{k+1/k+1}^{\{i+1\}} = \widehat{X}_{k+1/k} + K_{k+1}^{\{i\}}(y_k - h\left(\widehat{X}_{k+1/k+1}^{\{i\}}\right) - H_{k+1,i}(\widehat{X}_{k+1/k} - \widehat{X}_{k+1/k+1}^{\{i\}})) \tag{2.74}$$

$$K_{k+1}^{\{i\}} = P_{k+1/k} H_{k+1,i}^{T} (H_{k+1,i} P_{k+1/k} H_{k+1,i}^{T} + R)^{-1} \tag{2.75}$$

$$P_{k+1/k+1}^{\{i\}} = (I - K_{k+1}^{\{i\}} H_{k+1,i}) P_{k+1/k} \tag{2.76}$$

-Récupération des états estimés, après la i-ème itération :

$$\hat{X}_{k+1/k+1} = \hat{X}_{k+1/k+1}^{\{i\}} \tag{2.77}$$

$$P_{k+1/k+1} = P_{k+1/k+1}^{\{i\}} \tag{2.78}$$

Le nombre des i étapes successives à effectuer dépend du critère d'optimisation considéré. Ainsi par exemple une solution est représentée par l'application de l'algorithme jusqu'à la détection d'un changement minimal par rapport à l'étape précédente. Par contre il faut bien préciser que chaque itération joue sur le coût total de calcul nécessaire à la mise en œuvre du filtre.

Si les équations récursives des filtres EKF et IEKF sont obtenues avec la prise en compte des premiers termes dans la série de Taylor, ce principe peut être étendu pour le traitement des problèmes où les non-linéarités sont plus importantes.

2.4 Filtre de Kalman sans Parfums :

2.4.1 Introduction :

Le filtre de Kalman sans parfums, appelé dans la littérature « Unscented Kalman Filtre» (UKF) ce filtre est une autre extension du filtre de Kalman aux systèmes non-linéaires.

Comme pour l'EKF la densité conditionnelle est supposée être une gaussienne qui sera maintenant caractérisée par un ensemble de $(2q + 1)$ points : (sigma points). Ils sont alors propages grâce a la vraie équation dynamique non-linéaires du système. Ils permettent d'évaluer précisément la moyenne et la matrice de covariance de l'état prédit (avec une précision d'ordre 3 de Taylor). Contrairement à l'EKF, l'algorithme de l'UKF n'utilise pas explicitement le calcul du gradient des équations du système. Les approximations sont basées sur les interpolations des équations du système avec les sigma-points [45, 46, 47].

2.4.2 Transformation sans Parfums :

Le filtre de Kalman sans Parfums est défini de même que l'EKF à l'aide d'une transformation non-linéaire. La transformation sans parfums a été introduite par Julier, dans l'idée d'estimer la distribution de probabilité de la statistique transformée en évitant d'approximer la fonction non-linéaire, dont la linéarisation au premier ordre fait partie. Ainsi cette approche se base sur une constellation de points appelés (sigma points) et

respectivement leurs pondérations, distribués dans l'espace d'état de la variable aléatoire initiale pour approximer sa statistique. Comme on peut l'observer sur la figure (2.7)

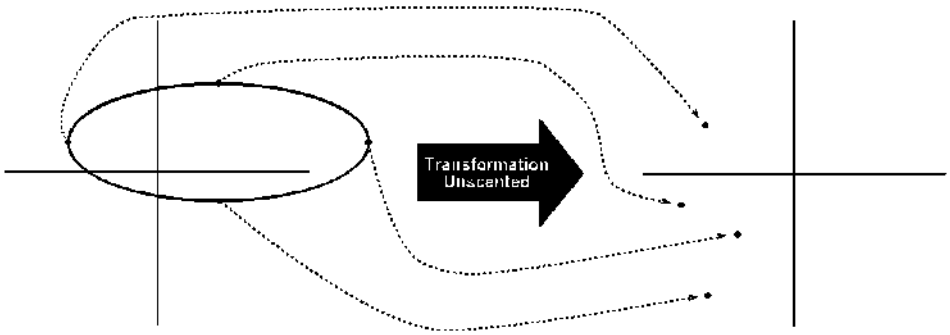


Figure 2.7- Principe de la transformation sans Parfums

Ces points sont choisis de telle manière que leur moyenne et covariance représentent exactement la statistique initiale.

L'ensemble de points choisi $X^{(i)}$, auquel on associe les coefficients de pondération $W^{(i)}$ calculés d'une manière déterministe forme l'ensemble de sigma points.

$S = \{X^{(i)}, W^{(i)}\}$, qui caractérise complètement les vraies moyennes et covariances. Cet ensemble de points subit ensuite la propagation à travers la fonction non-linéaire Cette méthode de propagation de points à une ressemblance avec le filtrage particulaire. Mais à la différence de celui-ci, le choix de points est déterministe et les pondérations associées sont choisies d'une autre manière, sans se baser sur la distribution [45, 46, 47].

Julier démontre qu'un tel ensemble de points, permettant le calcul de la moyenne et la covariance de la variable aléatoire. Transformée, est donné par un nombre de 2q points, où q est la dimension du vecteur d'état x. Les points sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} X^{(i)} &= \overline{X} + \sqrt{q.P_{xx}} \\ X^{(i+q)} &= \overline{X} - \sqrt{q.P_{xx}} \\ W^{(i)} &= 1/2q \\ W^{(i+q)} &= 1/2q \end{aligned} \tag{2.79}$$

Où $i = 1 \ldots \ldots . q$, représente la $i^{-ème}$ ligne ou colonne de la matrice $\sqrt{q.Pxx}$ et où $W^{(i)}$ est la pondération associée.

Dans les figures (2.8.a) et (2.8.b) on donne un exemple pour le choix de points sigma avec l'hypothèse d'une distribution initiale gaussienne bidimensionnelle. Les points sont situés par rapport à la surface gaussienne à une distance égale au coefficient de pondération.

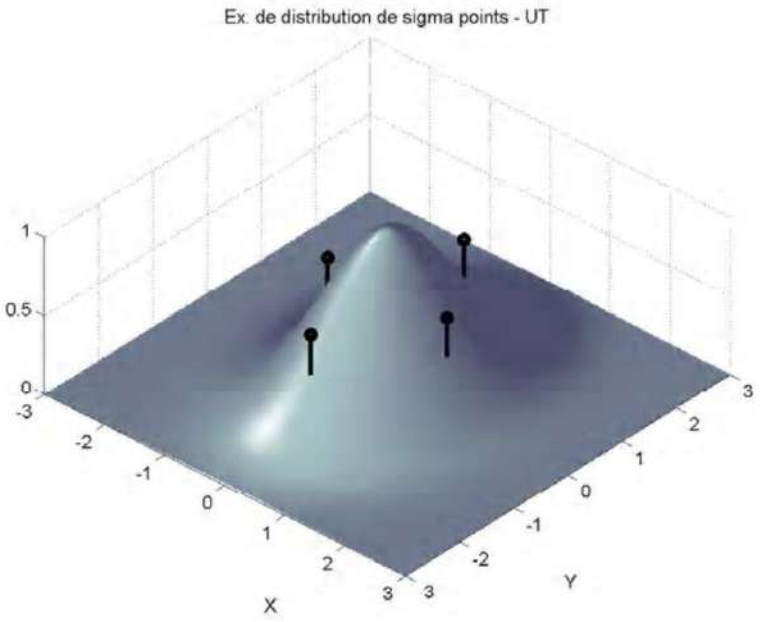


Figure (2.8.a) - Exemple de distribution de sigma points pour une variable aléatoire gaussienne

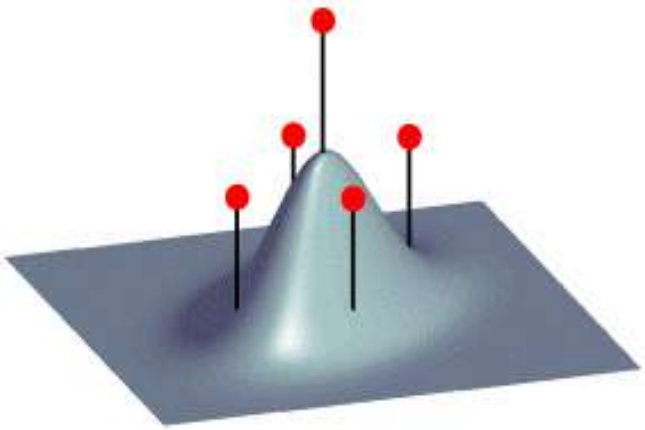


Figure (2.8.b) - Exemple de distribution de sigma points pour une variable aléatoire gaussienne

-dans la Figure (2.8.b) le Sigma points chargés d'un poids pour deux Gaussiennes dimensionnels au variable aléatoire. Ce sigma-points mensonge le long des haches majeures de la matrice de la covariance du variable aléatoire (Radom Variable RV) et captures complètes [45, 46, 47].

- La hauteur de chaque sigma point indique son poids relatif.

- les premières et deuxièmes statistiques de l'ordre de la variable aléatoire.

Étant donné cet ensemble de points, la moyenne et la variance sont calculées de la manière suivante :

1. par propagation par la fonction non-linéaire on obtient l'ensemble de points transformés :

$$Z^{(i)} = f[X^{(i)}] \tag{2.80}$$

2. la moyenne est calculée par la somme des points transformés, pondérés par les coefficients :

$$\bar{Z} = \sum_{i=1}^{2q} W^{(i)} Z^{(i)} \tag{2.81}$$

3. la covariance est alors calculée comme :

$$P_{zz} \approx \sum_{i=1}^{2q} W^{(i)} (Z^{(i)} - \bar{Z})(Z^{(i)} - \bar{Z})^T \tag{2.82}$$

L'ensemble de points ainsi défini, permet d'approximer la valeur moyenne de la vraie distribution jusqu'au deuxième ordre dans le développement de Taylor mais par contre offre une estimation biaisée au niveau de la covariance. Ce biais découle de l'impossibilité de l'ensemble de points à traduire l'influence des moments supérieurs de la statistique. Pour corriger ce problème la solution la plus simple est de compléter l'ensemble de points choisi avec un où plusieurs points. Ont alors proposé d'ajouter un point correspondant à la moyenne et avec son coefficient de pondération de permettre le réglage de l'influence des moments supérieurs. Ainsi le nouvel ensemble de sigma points proposé est défini de la manière suivante :

$$\begin{gathered} X^{(0)} = \bar{X} \\ X^{(i)} = \bar{X} + (\sqrt{(q+k)P_{xx}})_i \\ X^{(i+q)} = \bar{X} - (\sqrt{(q+k)P_{xx}})_i \\ W^{(0)} = k/(q+k) \\ W^{(i)} = 1/2(q+k) \\ W^{(i+q)} = 1/2(q+k) \end{gathered} \tag{2.83}$$

Où i = 1...q. Le choix original des points sigma, défini par les équations (2.72), a la propriété que l'ellipsoïde qui limite le positionnement des points augmente avec la dimension

q de l'espace d'état. Ainsi le choix du nouveau paramètre introduit k, en plus de capturer l'influence des moments supérieurs, doit être utilisé aussi pour limiter la dispersion des points dans l'espace d'état en présence de forte non-linéarité.

Avec la définition du nouvel ensemble de points sigma on observe que la distance du $i^{\text{ème}}$ point par rapport à $\overline{X}$ est proportionnelle à la valeur $\sqrt{(q+k)}$. Ainsi le choix du paramètre $k = 0$, on place dans le cas des équations (2.72), tandis qu'une valeur $k > 3$ éloigne les points de la moyenne, et avec une valeur négative de k, on trouve l'effet inverse avec un rapprochement des points. Il existe un cas spécial avec la solution de $k = 3 - q$, correspondant à l'annulation de la dimension q sur la distribution de points. Par contre avec le choix $k = 3 - q < 0$ on va se retrouver dans un cas où le coefficient de pondération du point situé sur la moyenne est négatif et la covariance obtenue après propagation peut devenir semi-définie négative.

2.4.3 Transformation sans parfums scalaire (scaled - Unscented) :

Enfin il existe un nouvel ensemble de points est proposé avec un paramètre de décalage:

$$X^{(i)} = X^{(0)} + \alpha\left(X^{(i)} - X^{(0)}\right),\ i = 1 \ldots\ldots 2q\ ,\ 0 < \alpha < 1 \qquad (2.84)$$

Cette nouvelle transformation porte le nom de transformation sans parfums scalaire (scaled-Unscented). Les auteurs ont démontré que le nouveau paramètre de décalage α introduit ne va pas influencer de manière négative l'estimation de la statistique de la variable transformée ($\overline{Z}$, P_{zz}), avec une expression exacte jusqu'au deuxième ordre des moments de la variable aléatoire initiale, et une pondération des autres moments supérieurs grâce à α. Enfin on a un ensemble de points qui intègre ce décalage ainsi que les nouvelles pondérations associées :

$$\begin{aligned}
X^{(0)} &= \overline{X} \\
X^{(i)} &= \overline{X} + (\sqrt{(q+\lambda)Pxx}\,)_i, \qquad i = 1 \ldots\ldots q \\
X^{(i)} &= \overline{X} - (\sqrt{(q+\lambda)Pxx}\,)_i, \qquad i = q+1 \ldots\ldots 2q \\
W_{(m)}{}^{(0)} &= \frac{\lambda}{q+\lambda} \\
W_{(c)}{}^{(0)} &= [1/2(q+\lambda)] + 1 - \alpha^2 + \beta \\
W_{(m)}{}^{(i)} &= W_{(c)}{}^{(i)} = 1/2(q+\lambda)
\end{aligned} \qquad (2.85)$$

Où $\lambda = \alpha^2(q + k) - q$ et les pondérations désignées par $W_{(m)}^{(i)}$ et $W_{(c)}^{(i)}$ sont associées au calcul de la moyenne et de la covariance, respectivement.

L'expression du point central $X^{(0)}$ garantit une matrice de covariance définie semi-positive. Le choix des paramètres qui apparaissent dans le calcul de l'ensemble de points se fait de la manière suivante :

• afin d'avoir une matrice de covariance définie semi-positive, on prendra $k \geq 0$. Il s'avère que la valeur de k n'est pas critique, de telle sorte que $k = 0$ correspond généralement à tous les cas d'estimation.

• le paramètre $0 < \alpha < 1$ considéré antérieurement va jouer directement sur la dimension de l'ellipsoïde de distribution des sigmas points. Ainsi de façon idéale sa valeur doit être petite.

Pour limiter l'influence de certains effets de non-linéarité dans les régions éloignées de la valeur estimée.

• le dernier paramètre introduit β, est choisi positif pour avoir une certaine connaissance des moments d'ordre supérieur de la statistique initiale dans le modèle. Par exemple pour une hypothèse de distribution initiale gaussienne nous prendrons $\beta = 2$ et le Tableau (2.1) montre les performances des transformations de l'EKF et UKF.

Fonction non linéaire	x=N(μ , σ^2)		Y=F(x) /EKF		Y=F(x) /UKF	
	μ	σ^2	μ	σ^2	μ	σ^2
F(x)=cos(x)	-0.7	0.0125	0.76	0.0051	0.76	0.0052
F(x)=cos(x)	-0.6	0.0250	0.82	0.0079	0.81	0.0081
F(x)=cos(x)	-0.5	0.0500	0.87	0.0110	0.61	0.0124

Tableau 2.1- Performances des transformations EKF et UKF

2.4.4 Construction du modèle de filtrage récursif UKF :

Avec la définition de la transformation sans parfums (Unscented) donnée ci-dessus la forme récursive du filtrage de Kalman peut être facilement déduite. On propose une formulation générale dont le vecteur d'état est modifié en ajoutant à l'état original les vecteurs associés aux bruits de processus et d'observation.

Le modèle de filtrage :

$$X_{k+1} = f(x_k) \tag{2.86}$$

$$Z_k = h(x_k) \tag{2.87}$$

Le vecteur final obtenu, en utilisant un modèle de filtrage :

$$X_k = \begin{bmatrix} X_k \\ V_k \\ W_k \end{bmatrix} \tag{2.88}$$

La dimension du nouveau vecteur d'état augmenté est $N_a = N_x + N_v + N_w$, Où N_x , N_v et N_w représentent les dimensions des vecteurs X_k , V_k et W_k respectivement. Étant données les nouvelles notations, le modèle d'estimation récursif peut être écrit sous la forme générale suivante :

$${X_{k+1}}^a = f^a({X_k}^a) \tag{2.89}$$

$$Z_k = h^a({X_k}^a) \tag{2.90}$$

Avec la transformation sans parfums (Unscented) qui calcule les points sigma à partir des expressions suivantes des moments :

$${\mu_k}^a = \begin{bmatrix} \mu_k \\ 0_{N_v * 1} \\ 0_{N_w * 1} \end{bmatrix} \tag{2.91}$$

$${P_{k/k}}^a = \begin{bmatrix} P_{k/k} & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & 0 \\ 0 & 0 & R_k \end{bmatrix} \tag{2.92}$$

Bien sûr un modèle plus général peut être écrit avec la prise en compte de certaines corrélations entre les bruits et les états ou entre les bruits eux-mêmes, mais pour tous les cas considérés par la suite un tel développement n'est pas nécessaire. Finalement les notations

introduites nous permettent d'écrire l'algorithme récursif de filtrage pour un instant k quelconque, en utilisant la succession d'étapes suivantes :

Construction de l'ensemble de points sigma en utilisant les relations (2.83) :

$$\{X_{k/k}{}^{(i)}, W^{(i)}\}_{i=0.....N_a} \tag{2.93}$$

- Propagation de l'ensemble des points construit à travers la fonction de processus :

$$X_{k+1/k}{}^{(i)} = f^a(X_{k/k}{}^{(i)}), i = 0 \dots \dots . Na \tag{2.94}$$

- Calcul de la valeur estimée et de la covariance des erreurs prédites :

$$\widehat{X}_{k+1/k} = \sum_{i=1}^{N_a} W_{(m)}{}^{(i)} . X_{k+1/k}{}^{(i)} \tag{2.95}$$

$$P_{x_{k+1/k}{}^{x_{k+1/k}}} = \sum_{i=1}^{N_a} W_{(c)}{}^{(i)} . \{X_{k+1/k}{}^{(i)} - \widehat{X}_{k+1/k}\} \{X_{k+1/k}{}^{(i)} - \widehat{X}_{k+1/k}\}^T \tag{2.96}$$

- Propagation des points sigma à travers le modèle d'observation :

$$Z_{k+1/k}{}^{(i)} = h^{(i)}\{X_{k+1/k}{}^{(i)}\}, i = 0 \ \dots \dots Na \tag{2.97}$$

- Calcul de l'observation prédite, de la covariance de l'innovation et de la matrice de covariance :

$$\hat{Z}_{k+1} = \sum_{i=1}^{Na} W_{(m)}{}^{(i)} * Z_{k+1/k}{}^{(i)} \tag{2.98}$$

$$P_{z_{k+1/k}{}^{z_{k+1/k}}} = \sum_{i=1}^{Na} W_{(c)}{}^{(i)}\{Z_{k+1/k}{}^{(i)} - \hat{Z}_{k+1/k}\} \{Z_{k+1/k}{}^{(i)} - \hat{Z}_{k+1/k}\}^T \tag{2.99}$$

$$P_{x_{k+1/k}{}^{z_{k+1/k}}} = \sum_{i=1}^{Na} W_{(c)}{}^{(i)}\{X_{k+1/k}{}^{(i)} - \widehat{X}_{k+1/k}\} \{Z_{k+1/k}{}^{(i)} - \hat{Z}_{k+1/k}\}^T \tag{2.100}$$

- Expression du gain de Kalman et calcul final de l'état estimé et de la covariance des erreurs :

$$K_{k+1} = (P_{x_{k+1/k}{}^{z_{k+1/k}}})(P_{z_{k+1/k}{}^{z_{k+1/k}}})^{-1} \tag{2.101}$$

$$\widehat{X}_{k+1/k+1} = \widehat{X}_{k+1/k} + K_{k+1}(Z_{k+1} - \hat{Z}_{k+1/k}) \tag{2.102}$$

$$P_{k+1/k+1} = (P_{x_{k+1/k}{}^{z_{k+1/k}}}) - K_{k+1}(P_{z_{k+1/k}{}^{z_{k+1/k}}})K_{k+1}{}^{T} \tag{2.103}$$

Avec les expressions qui caractérisent l'implémentation récursive du filtrage de Kalman, le développement de la structure classique du filtrage de type sans parfums scalaire (scaled-Unscented) est accompli. On not que la solution choisie pour former l'ensemble de points sigma n'est pas unique [45, 46, 47].

2.4.5 Algorithme du filtre de Kalman sans parfums (UKF):

1-Initialisation :

$$\widehat{X}_0 = E[X_0] \quad , P_{X_0} = E[(X_0 - \widehat{X}_0)(X_0 - \widehat{X}_0)^T] \tag{2.104}$$

$$\widehat{X}_0{}^a = E[X_0{}^a] = [\widehat{X}_0{}^T \quad \bar{v}_0{}^T \quad \bar{n}_0{}^T]^T \tag{2.105}$$

$$P_0{}^a = E[(X_0{}^a - \widehat{X}_0{}^a)(X_0{}^a - \widehat{X}_0{}^a)^T] \tag{2.106}$$

$$P_0{}^a = \begin{bmatrix} P_{x_0} & 0 & 0 \\ 0 & R_v & 0 \\ 0 & 0 & R_n \end{bmatrix} \tag{2.107}$$

2-Calcul de sigma-points :

$$S_k{}^a = \left[\widehat{X}_k{}^a \quad \widehat{X}_k{}^a + \gamma\sqrt{P_k{}^a} \quad \widehat{X}_k{}^a - \gamma\sqrt{P_k{}^a}\right] \tag{2.108}$$

3-Les équations de la mise à jour du temps :

$$S_{k+1/k}{}^x = f(S_k{}^x, S_k{}^v, u_k) \tag{2.109}$$

$$\widehat{X}_{\overline{k+1}} = \sum_{i=0}^{2L} W_i{}^m S_{i,k+1/k}{}^x \tag{2.110}$$

$$P_{\bar{x}_{k+1}} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{m} (S_{i,k+1/k}{}^{x} - \widehat{X}_{\overline{k+1}})(S_{i,k+1/k}{}^{x} - \widehat{X}_{\overline{k+1}})^{T} \quad (2.111)$$

4- Les équations de la mise à jour de mesure :

$$Y_{k+1/k} = h(S_{k+1/k}{}^{x}, S_{k+1/k}{}^{n}) \quad (2.112)$$

$$\widehat{Y}_{\overline{k+1}} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{m} Y_{i,k+1/k} \quad (2.113)$$

$$P_{\widetilde{Y}_{k+1}} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{c} (Y_{i,k+1/k} - \widehat{Y}_{\overline{k+1}}) (Y_{i,k+1/k} - \widehat{Y}_{\overline{k+1}})^{T} \quad (2.114)$$

$$P_{X_{k+1}Y_{k+1}} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{c} (S_{i,k+1/k}{}^{x} - \widehat{X}_{\overline{k+1}}) (Y_{i,k+1/k} - \widehat{Y}_{\overline{k+1}})^{T} \quad (2.115)$$

$$K_{k+1} = P_{X_{k+1}Y_{k+1}} P_{\widetilde{Y}_{k+1}}{}^{-1} \quad (2.116)$$

$$\widehat{X}_{k+1} = \widehat{X}_{\overline{k+1}} + K_{k+1}(Y_{k+1} - \widehat{Y}_{\overline{k+1}}) \quad (2.117)$$

$$P_{X_{k+1}} = P_{\bar{X}_{k+1}} - K_{k+1} P_{\widetilde{Y}_{k+1}} K_{k+1}{}^{T} \quad (2.118)$$

•les paramètres sont:

$\gamma = \sqrt{L + \lambda}$, $W_0{}^{m} = \lambda/(L + \lambda)$, $W_0{}^{c} = W_0{}^{m} + (1 - \propto^2 + \beta)$, $W_i{}^{c} = W_i{}^{m} = 1/2(L + \lambda)$ pour $i = 1, \ldots \ldots \ldots, 2L$.

$\lambda = \propto^2 (L + k) - L$ est un paramètre de l'écaillage composé, L est la dimension de vecteur de l'état augmenté, $0 < \alpha \leq 1$ est le facteur de l'écaillage fondamental qui détermine l'ampleur de l'étendue des sigma points autour de la moyenne antérieure.

et la gamme typique pour α est $-3 < \alpha \leq 1$. β est un facteur de l'écaillage secondaire accentuait le peser sur le point du sigma du zéros pour le calcul du covariance postérieur. β Peut être utilisé pour minimiser des certains termes de l'erreur de plus haut ordre basé sur les moments connus du (Radom Variable) RV antérieur. Pour l'antérieur Gaussien, $\beta = 2$ sont optimaux. k est un facteur de l'écaillage tertiaire et habituellement est égal à 0. En général, les valeurs optimales de ceux-ci qui pèsent des paramètres seront problème spécifique. Pour plus de détail sur comment les choisir, voir Julier & Uhlmann.

• Notes générale: Le vecteur de l'état augmenté et le vecteur de sigma-point est donné par :

$X^{a} = [X^{T} \quad v^{T} \quad n^{T}]^{T}$, $S^{a} = [(S^{x})^{T} \quad (S^{v})^{T} \quad (S^{n})^{T}]$.

R_v et R_n sont respectivement la matrice de covariance du bruit de processus et du bruit de l'observation.

• Opérateurs d'algèbre linéaire :

$\sqrt{P_k^{\,a}}$: La racine carrée de la matrice qui utilise la décomposition Cholesky triangulaire inférieure

2.5 Le filtre de Kalman à différence centrale (CDKF):

De façon parallèle avec le développement de structures UKF présentées auparavant, d'autres solutions ont été proposées pour contourner le problème du calcul de dérivés partielles et de stabilité rencontrés dans le cas de filtrage étendu. Ainsi le Divided Difference Filter proposé par Norgaard et le Filtre de Kalman à Différence Centrale proposé par Ito et Xiong utilisent la formule d'interpolation polynomiale de Stirling pour approximer la non-linéarité présente dans le modèle, interpolation qui permet par la suite le calcul de moments de la statistique transformée. Comme le fait remarquer Van Der Merwe, ces deux structures sont presque identiques et peuvent être désignées simplement sous le nom de Central Difference Kalman Filter (CDKF). Cette méthode de filtrage sera exploitée juste pour donner les aspects généraux de la formule de Stirling et le calcul des moments en utilisant la transformation associée [45, 46, 47].

2.5.1 Formule d'interpolation polynomiale de Stirling :

Comme dans les développements en série de Taylor, l'interpolation avec la formule de Stirling est donnée pour une approximation au deuxième ordre, avec une hypothèse de fonction mono - dimensionnelle, par la relation :

$$f(x) = f(\tilde{x}) + \widetilde{D}_{\Delta_z} f + \frac{1}{2!}\widetilde{D}_{\Delta_x}{}^2\, \tilde{f} \tag{2.119}$$

Où $f(x)$ est la fonction non-linéaire à approximer et où $\widetilde{D}_{\Delta_z} f$, $\widetilde{D}_{\Delta_x}{}^2\, \tilde{f}$ représentent les opérateurs d'accroissement centré du premier et deuxième ordre respectivement, appliqués à la fonction $f(x)$. Dans le cas scalaire, ils sont donnés par :

$$\widetilde{D}_{\Delta_z} f = (x - \bar{x})\frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}-h)}{2h} \tag{2.120}$$

$$\widetilde{D}_{\Delta_x}{}^2\, \tilde{f} = (x - \bar{x})^2 \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}-h) - 2f(\bar{x})}{h^2} \tag{2.121}$$

Où h est la longueur de l'intervalle choisi, pour accomplir l'approximation. Pour étendre ces résultats aux cas multi - dimensionnel, la solution proposée est de découpler statistiquement la variable aléatoire x initiale en utilisant la transformation linéaire suivante :

$$z = S_x{}^{-1}x \tag{2.122}$$

$$\tilde{f}(z) = f(S_x z) = f(x) \tag{2.123}$$

Où S_x représente la matrice obtenue par la factorisation Cholesky de la matrice de covariance P_x :

$$P_x = S_x S_x{}^{T} \tag{2.124}$$

Ces décompositions permettent l'application de l'approximation réalisée antérieurement, dans le cas multidimensionnel, indépendamment pour chaque composante de la fonction $\tilde{f}(z)$:

$$\widetilde{D}_{\Delta_z}\tilde{f} = (\sum_{i=1}^{N_x} \Delta_{z_i}\, m_i d_i)\tilde{f}(\bar{z}) \tag{2.125}$$

$$\widetilde{D}_{\Delta_x}{}^{2}\,\tilde{f} = (\sum_{i=1}^{N_x} \Delta_{z_i}{}^{2}\, d_i{}^{2} + \sum_{j=1}^{N_x}\sum_{q=1,j\neq q}^{N_x} \Delta_{z_j}\,\Delta_{z_q}(m_j d_j)\,(m_q d_q))\tilde{f}(\bar{z}) \tag{2.126}$$

Où $\Delta_{z_i} = (z - \bar{z})_i$ est la i$^{\text{- ème}}$ composante du vecteur $z - \bar{z}$, N_x est la dimension de l'espace d'état et m_i, $d_i{}^{2}$, représentent la différence partielle au premier ordre, la moyenne et la différence partielle au deuxième ordre, respectivement :

$$d_i\tilde{f}(\bar{z}) = \frac{1}{2h}[\tilde{f}(\bar{z} + he_i) - \tilde{f}(\bar{z} - he_i)] \tag{2.127}$$

$$m_i\tilde{f}(\bar{z}) = \frac{1}{2}[\tilde{f}(\bar{z} + he_i) + \tilde{f}(\bar{z} - he_i)] \tag{2.128}$$

$$d_i{}^{2}\,\tilde{f}(\bar{z}) = \frac{1}{2h^2}[\tilde{f}(\bar{z} + he_i) - \tilde{f}(\bar{z} - he_i) - 2\tilde{f}(\bar{z})] \tag{2.129}$$

e_i : étant le i$^{\text{- ème}}$ vecteur unité.

La mise en forme de l'approximation ci-dessus, pour la fonction multidimensionnelle $\tilde{f}(z)$, va nous permettre par la suite l'implémentation d'une solution similaire à la transformation sans parfums pour le calcul de la statistique d'une variable aléatoire transformée. D'ailleurs si on revient au développement initial, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\bar{z} \pm he_i) &= f\big(S_x(\bar{z} \pm he_i)\big)\\ &= f\big(S_x(S_x\bar{z} \pm hS_x e_i)\big)\\ &= f\big(c \pm hs_{x_i}\big)\end{aligned} \tag{2.130}$$

Où S_{x_i} représente la i-ème colonne de la matrice Cholesky obtenue par la décomposition de p_x Avec cette observation on voit bien qu'on tombe facilement sur l'ensemble de points proposé par la transformation sans parfums (Unscented), bien sûr avec d'autres coefficients de pondération.

2.5.2 Estimation de la moyenne et de la covariance d'une variable aléatoire transformée:

Comme dans le cas des autres transformations on considère la propagation d'une variable aléatoire x de moyenne $\bar{x}$ et covariance p_x à travers une fonction non-linéaire quelconque. Norgaard propose ainsi deux solutions de filtrage basées sur une approximation d'ordre un et d'ordre deux. Comme le cas à l'ordre un peut être déduit directement de celui à l'ordre deux, seul le cas le plus général est présenté. En utilisant la même notation pour la variable aléatoire transformée $y = f(x)$, on obtient l'approximation suivante [45, 46, 47]:

$$\begin{aligned}y &= f(x)\\ &\approx \tilde{f}(\bar{z}) + \widetilde{D}_{\Delta_z}\tilde{f} + \frac{1}{2!}\widetilde{D}_{\Delta_x}{}^2\,\tilde{f}\end{aligned} \tag{2.131}$$

Où $z = S_x{}^{-1}x$, la matrice S_x étant définie antérieurement (2.109). En appliquant ce modèle d'approximation, on obtient les relations suivantes pour les deux premiers moments de la statistique de la variable aléatoire transformée :

a– moyenne $\bar{y}$:

$$\begin{aligned}\bar{y} &= E[y]\\ &\approx E[\tilde{f}(\bar{z}) + \widetilde{D}_{\Delta_z}\tilde{f} + \frac{1}{2!}\widetilde{D}_{\Delta_x}{}^2\,\tilde{f}]\\ &\approx \frac{h^2 - N_x}{h^2}\tilde{f}(\bar{z}) + \frac{1}{2h^2}\sum_{i=1}^{N_x}[\tilde{f}(\bar{z} + he_i) + \tilde{f}(\bar{z} - he_i)]\\ &\approx \frac{h^2 - N_x}{h^2}\tilde{f}(\bar{z}) + \frac{1}{2h^2}\sum_{i=1}^{N_x}[f\big(\bar{x} + hS_{x_i}\big) + f\big(\bar{x} - hS_{x_i}\big)]\end{aligned} \tag{2.132}$$

b-variance P_{yy}:

$$\begin{aligned}P_{yy} &= E[(y - \bar{y})(y - \bar{y})^T]\\ &= E\left[\big(y - f(\bar{x})\big)\big(y - f(\bar{x})\big)^T\right] - E[y - f(\bar{x})]E[y - f(\bar{x})]^T\\ &\approx E\left[\left(\widetilde{D}_{\Delta_z}\tilde{f} + \frac{1}{2!}\widetilde{D}_{\Delta_x}{}^2\,\tilde{f}\right)\left(\widetilde{D}_{\Delta_z}\tilde{f} + \frac{1}{2!}\widetilde{D}_{\Delta_x}{}^2\,\tilde{f}\right)^T\right] - E\left[\widetilde{D}_{\Delta_z}\tilde{f} + \frac{1}{2!}\widetilde{D}_{\Delta_x}{}^2\tilde{f}\right] - E\left[\widetilde{D}_{\Delta_z}\tilde{f} + \frac{1}{2!}\widetilde{D}_{\Delta_x}{}^2\tilde{f}\right]^T\end{aligned} \tag{2.133}$$

En développant les espérances mathématiques, la relation (2.119) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$P_{yy} \approx \frac{1}{4h^2}\sum_{i=1}^{N_x}\left[f\left(\bar{x}+hS_{x_i}\right)+f\left(\bar{x}-hS_{x_i}\right)\right]\left[f\left(\bar{x}+hS_{x_i}\right)+f\left(\bar{x}-hS_{x_i}\right)\right]^T + \frac{h^2-1}{4h^2}\sum_{i=1}^{N_x}\left[f\left(\bar{x}+hS_{x_i}\right)+f\left(\bar{x}-hS_{x_i}\right)-2f(\bar{x})\right]*\left[f\left(\bar{x}+hS_{x_i}\right)+f\left(\bar{x}-hS_{x_i}\right)-2f(\bar{x})\right]^T \quad (2.134)$$

c- cross-covariance P_{xy}:

$$\begin{aligned} P_{xy} &= E[(x-\bar{x})(y-\bar{y})^T] \\ &\approx E[(S_x(z-\bar{z}))(\tilde{D}_{\Delta_z}\tilde{f}+\frac{1}{2}\tilde{D}_{\Delta_x}{}^2\tilde{f}-E[\frac{1}{2}\tilde{D}_{\Delta_x}{}^2\tilde{f}])^T \\ &\approx \frac{1}{2h^2}\sum_{i=1}^{N_x}S_{x_i}[f\left(\bar{x}+hS_{x_i}\right)+f\left(\bar{x}-hS_{x_i}\right)]^T \end{aligned} \quad (2.135)$$

Avec les expressions des moments calculées, l'implémentation de l'algorithme de filtrage est immédiate avec des équations similaires à celles développées pour le filtre sans parfums (Unscented) (2.75) et (2.83). Comme ce type de filtrage n'a pas fait l'objet d'une implémentation dans la suite de notre étude, on se limite à cet ensemble de relations pour montrer que le filtrage CDKF peut offrir une solution plus générale que le filtrage UKF mais par contre à un coût de calcul plus important [45, 46, 47].

2.5.3 Algorithme de filtre de Kalman à différence centrale (CDKF):

1-Initialisation :

$$\hat{X}_0 = E[X_0] \quad , P_{X_0} = E[(X_0-\hat{X}_0)(X_0-\hat{X}_0)^T] \quad (2.136)$$

2-Calcul de sigma-points pour la mise à jour du temps:

$$\hat{X}_k{}^{a_v} = [\hat{X}_k \ \bar{v}] \quad (2.137)$$

$$P_k{}^{a_v} = \begin{bmatrix} P_{X_{k-1}} & 0 \\ 0 & R_v \end{bmatrix} \quad (2.138)$$

$$S_k{}^{a_v} = \left[\hat{X}_k{}^{a_v} \quad \hat{X}_k{}^{a_v}+h\sqrt{P_k{}^{a_v}} \quad \hat{X}_k{}^{a_v}-h\sqrt{P_k{}^{a_v}}\right] \quad (2.139)$$

3-Les équations de la mise à jour du temps :

$$S_{k+1/k}{}^x = f(S_k{}^x, S_k{}^v, u_k) \quad (2.140)$$

$$\hat{X}_{\overline{k+1}} = \sum_{i=0}^{2L} W_i{}^m S_{i,k+1/k}{}^x \quad (2.141)$$

$$P_{\bar{x}_{k+1}} = \sum_{i=1}^{L}\left[W_i^{c1}(S_{i,k+1/k}{}^{x} - S_{L+i,k+1/k}{}^{x})^2 + W_i^{c2}(S_{i,k+1/k}{}^{x} + S_{L+i,k+1/k}{}^{x} - 2S_{0,k+1/k}{}^{x})^2\right] \quad (2.142)$$

4- Calcul de sigma points pour la mise à jour de mesure :

$$\hat{X}_{k+1/k}{}^{a_n} = [\hat{X}_{\overline{k+1}} \quad \bar{n}] \quad (2.143)$$

$$P_{k+1/k}{}^{a_n} = \begin{bmatrix} P_{\bar{X}_k} & 0 \\ 0 & R_n \end{bmatrix} \quad (2.144)$$

$$S_{k+1/k}{}^{a_n} = \left[\hat{X}_{k+1/k}{}^{a_n} \quad \hat{X}_{k+1/k}{}^{a_n} + h\sqrt{P_{k+1/k}{}^{a_n}} \quad \hat{X}_{k+1/k}{}^{a_n} - h\sqrt{P_{k+1/k}{}^{a_n}}\right] \quad (2.145)$$

5- Les équations de la mise à jour de mesure :

$$Y_{k+1/k} = h(S_{k+1/k}{}^{x}, S_{k+1/k}{}^{n}) \quad (2.146)$$

$$\hat{Y}_{\overline{k+1}} = \sum_{i=0}^{2L} W_i{}^{m} Y_{i,k+1/k} \quad (2.147)$$

$$P_{\tilde{Y}_{k+1}} = \sum_{i=1}^{L}\left[W_i^{c1}(Y_{i,k+1/k} - Y_{L+i,k+1/k})^2 + W_i{}^{c2}(Y_{i,k+1/k} + Y_{L+i,k+1/k} - 2Y_{0,k+1/k})^2\right] \quad (2.148)$$

$$P_{X_{k+1}Y_{k+1}} = \sqrt{W_i^{c1}P_{\bar{X}_k}}\left[Y_{1:L,k+1/k} - Y_{L+1:2L,K+1/k}\right]^T \quad (2.149)$$

$$K_{k+1} = P_{X_{k+1}Y_{k+1}} P_{\tilde{Y}_{k+1}}{}^{-1} \quad (2.150)$$

$$\hat{X}_{k+1} = \hat{X}_{\overline{k+1}} + K_{k+1}(Y_{k+1} - \hat{Y}_{\overline{k+1}}) \quad (2.151)$$

$$P_{X_{k+1}} = P_{\bar{X}_{k+1}} - K_{k+1}P_{\tilde{Y}_{k+1}}K_{k+1}{}^{T} \quad (2.152)$$

Et les paramètres sont:

• le poids:

$W_0{}^{m} = (h^2 - L)/h^2$, $W_i{}^{m} = 1/(2h^2)$, $W_i{}^{c1} = 1/(4h^2)$,et $W_i{}^{c2} = (h^2 - 1)/(4h^2)$ pour $i = 1, \ldots\ldots\ldots, 2L$ où $h \geq 1$ est la dimension de l'intervalle de la différence centrale scalaire qui est mise optimalement égal à la racine carré du kurtosis du variable aléatoire.2 antérieur Pour Gaussien (Radom variable) RV antérieur, la valeur optimale est $h = \sqrt{3}$. Le facteur de l'écaillage h dans le CDKF joue le même rôle de α dans l'UKF, c.-à-d., il détermine l'étendue des sigmas points autour de la moyenne antérieure. L est la dimension du vecteur de l'état augmenté.

• Note générale:

Ici nous augmentons encore l'état du système avec le bruit du processus et vecteurs du bruit de l'observation (v_k et n_k) comme nous avons fait pour l'UKF. Pour le CDKF, cependant, nous avons fendu cette augmentation entre la mise à jour de temps et la mise à jour de mesure, c.-à-d, pour la mise à jour de temps le vecteur de l'état augmenté et la matrice de covariance augmentée est donnée par :

$$X_{k+1}{}^{a_v} = [X_k{}^T \quad V_k{}^T]^T \quad , \quad P_{k+1}{}^{a_v} = \begin{bmatrix} P_{X_{k+1}} & 0 \\ 0 & R_V \end{bmatrix}$$

Et par :

$$X_{k+1}{}^{a_n} = [X_k{}^T \quad V_k{}^T]^T \quad , \quad P_{k+1}{}^{a_n} = \begin{bmatrix} P_{X_{k+1}} & 0 \\ 0 & R_V \end{bmatrix}$$

pour la mise à jour de mesure. En conséquence les vecteurs de sigma-points sont donnés par :

$S^{a_v} = [(S^x)^T \quad (S^v)^T]^T$, et $S^{a_n} = [(S^x)^T \quad (S^n)^T]^T$ et $a^2 = aa^T$.

2.6 Conclusion:

Dans ce chapitre on a étudiée le Filtre de Kalman étendu (EKF) qu'est le meilleure filtre, car il donne de très bons résultats dans le cadre des systèmes faiblement non linéaires. Mais lorsque les systèmes sont fortement non linaires, les performances du filtre de Kalman étendu sont mauvaises. Et on a présenté le filtre de Kalman sans parfums (UKF) comme une nouvelle variante attractive du filtre de Kalman étendu (EKF). Lorsque les modèles utilisés sont fortement non linéaires, le filtre de Kalman sans parfums (UKF) permet d'aboutir à de meilleurs résultats. L'utilisation d'un jeu de «sigma points» et on a présentée le filtrage de Kalman à différence centrale (CDKF) qui peut offrir une solution plus générale que le filtre de Kalman sans parfums (UKF) mais par contre à un coût de calcul plus important. Avec L'utilisation de même jeu de «sigma points».

CHAPITRE 3

Robot mobile, Les capteurs de GPS et Compas digital

3.1 Introduction :

Dans ce chapitre on va présenter le robot mobile dans un premier temps, ensuite la technique de localisation à base de GPS (Global positioning system) puis on passe à une briefe de capteur compas après on termine par une conclusion de chapitre.

3.2 Robot mobile :

3.2.1 Introduction :

La recherche en robotique mobile à l'heure actuelle est de parvenir à créer des machines de plus en plus autonomes. Nombre de chercheurs à travers le monde travaillent sur la réalisation et l'étude d'algorithmes de contrôle pour la robotique. Il est possible de distinguer depuis quelques années des approches originales, s'écartant des modèles mathématiques classiques, basées sur de nouvelles sources d'inspiration comme par exemple l'étude du vivant. Les travaux de Rodney Brooks (Brooks 1991) inspirés par l'éthologie et l'étude des insectes ont permis de mettre en avant le concept de décomposition en « behavior based modules ». Ce concept sera la base de nombreux travaux futurs (Ferber 1995) et sera combiné avec d'autres méthodes, elles aussi inspirées du vivant. La transposition de ces méthodes aux systèmes robotisés a d'abord un lieu en simulation. Mais rapidement, la nécessité d'expérimenter les méthodes proposées sur de véritables robots mobiles s'est fait ressentir. En effet, les simulations ne permettent pas de modéliser le monde réel avec exactitude. Les simulateurs ne prennent généralement pas en compte les changements d'éclairage, la poussière ou les frottements qui viennent perturber les capteurs.

3.2.2 Définition de Robot mobile :

Un robot est une machine équipée de capacités de perception, de décision et d'action qui lui permettent d'agir de manière autonome dans son environnement en fonction de la perception qu'il en a. Bien que dans cette définition une architecture soit conçue pour un robot précis, ces architectures peuvent néanmoins être classées en trois grandes catégories que nous détaillerons par la suite : les contrôleurs hiérarchiques, les contrôleurs réactifs et les contrôleurs hybrides (Figure 3.1). Comme le précise cette définition, par contre, toutes ces architectures ne diffèrent pas forcement par les méthodes élémentaires employées mais plutôt par leur agencement et leurs relations [24, 28].

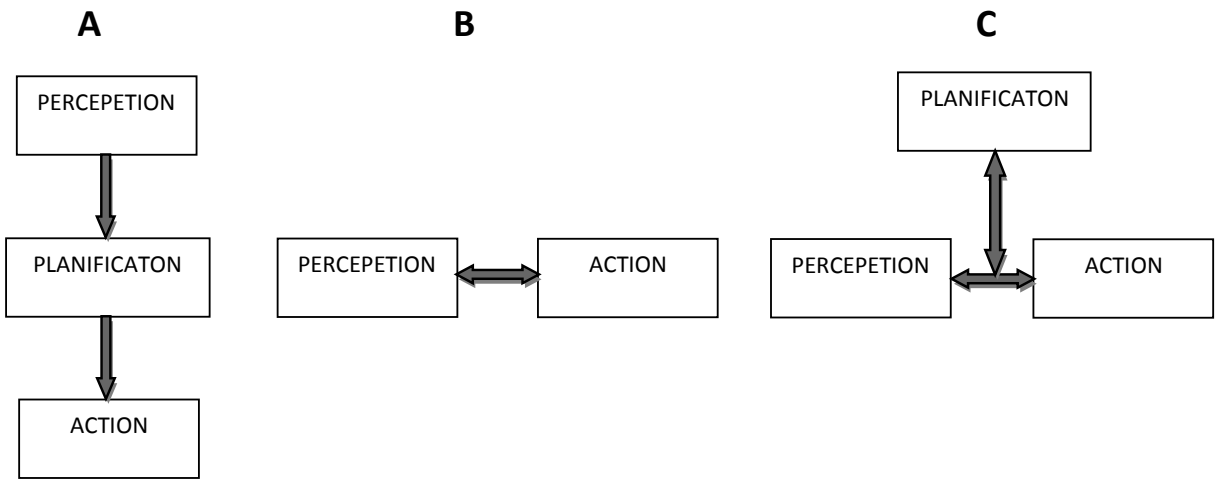


Figure 3.1- Illustration des architectures classiques des contrôleurs pour les robots mobiles : Hiérarchique (A), Réactive (B) et Hybride (C)

3.2.2.1 Contrôleurs Hiérarchiques :

Les premiers robots mobiles dérivés des recherches en intelligence artificielle utilisent des contrôleurs hiérarchiques (figure 3.1) dont le fonctionnement repose essentiellement sur la capacité de décision travaillant sur un modèle du monde supposé quasiment-parfait [24,28]. Ces architectures fonctionnent selon un cycle rigide de modélisation de l'environnement, planification des actions au sein de cette représentation, puis exécution du plan.

3.2.2.2 Contrôleurs réactifs :

Dans cette architecture, un ensemble de comportements réactifs, fonctionnant en parallèle, contrôle le robot sans utiliser de modèle du monde. Cette architecture supprime évidemment les problèmes dû aux différences entre la réalité, d'une part, et le modèle de l'environnement du robot, d'autre part, mais limite clairement les tâches que peut effectuer le robot.

La solution proposée par Rodney Brooks, l'architecture de subsomption est devenue un classique et utilise une hiérarchie des comportements qui se déclenchent donc selon un ordre de priorité en fonction des perceptions du robot [24,28].

3.2.2.3 Contrôleurs hybrides :

La plupart des contrôleurs actuellement utilisés choisissent une solution intermédiaire entre ces deux approches sous la forme d'une architecture hybride Cette architecture se compose de deux niveaux. Le premier est chargé des tâches de navigation de haut niveau, telles que la localisation, la cartographie et la planification. Pour cela, il s'appuie sur un second niveau

réactif qui est chargé d'exécuter les commandes avec le plus de précision possible et de gérer les éléments non modélisés de l'environnement tels que les obstacles inconnus ou dynamiques. L'action conjointe de ces deux niveaux permet de réagir rapidement face aux variations imprévues de l'environnement, tout en permettant la réalisation d'actions planifiées à plus long terme. Le bas niveau de ces architectures peut être réalisé sous forme de comportements, tels que ceux utilisés dans les architectures réactives. Ces comportements sont des boucles sensorimotrices qui relient les actions aux perceptions avec une phase de décision très courte, qui assure la réactivité. Dans le même temps, les informations sensorielles sont utilisées par le haut niveau dans une boucle sensorimotrice à une échelle de temps beaucoup plus longue. C'est la mise en parallèles de ces deux échelles de temps qui fait la force de ces architectures [24,28].

3.2.3 La modélisation d'un robot mobile :

3 .2.3.1 Définition :

On note $\mathcal{R} = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère fixe quelconque, dont l'axe $\vec{z}$ est vertical et $\mathcal{R}' = (O', \overrightarrow{x'}, \vec{y}', \vec{z}')$ un repère mobile lié au robot. On choisit généralement pour O' un point remarquable de la plate-forme, typiquement le centre de l'axe des roues motrices s'il existe, comme illustré à la figure 3.2. Par analogie avec la manipulation, on appelle situation ou souvent posture du robot le vecteur :

$$\xi = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Ou x et y sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point O' dans $\mathcal{R}$ et θ l'angle de $(\vec{x}, \vec{y})$ .La situation du robot est donc définie sur un espace $\mathcal{M}$ de dimension $m = 3$ comparable a l'espace opérationnel d'un manipulateur plan.

La configuration d'un système mécanique est connue quand la position de tous ses points dans un repère donne est connue. Alors que pour un bras manipulateur cette notion est définie sans ambiguïté par les positions angulaires des différentes articulations, on peut, dans le cas d'un robot mobile, donner une vision plus ou moins fine de la configuration, comme on le verra par la suite. Dans tous les cas, on définira la configuration du robot mobile par un vecteur :

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

de n coordonnées appelées coordonnées généralisées. La configuration est ainsi définie sur un espace N de dimension n, appelée l'espace des configurations.

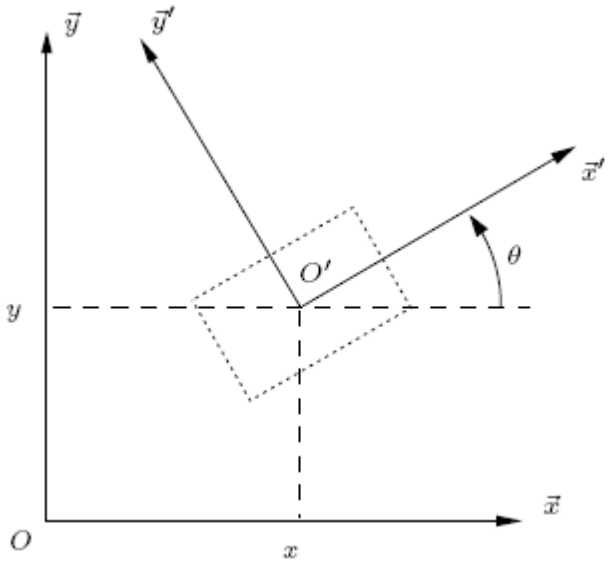


Figure 3.2 – Repérage d'un robot mobile

3.2.4 Roulement sans glissement et contraintes non holonomes :

3.2.4.1 Roulement sans glissement :

La locomotion à l'aide de roues exploite la friction au contact entre roue et sol. Pour cela, la nature du contact (régularité, matériaux en contact) a une forte influence sur les propriétés du mouvement relatif de la roue par rapport au sol. Dans de bonnes conditions, il y a roulement sans glissement (r.s.g.) de la roue sur le sol, c'est-à-dire que la vitesse relative de la roue par rapport au sol au point de contact est nulle. Théoriquement, pour vérifier cette condition, il faut réunir les hypothèses suivantes :

– le contact entre la roue et le sol est ponctuel

– les roues sont indéformables, de rayon r

En pratique le contact se fait sur une surface, ce qui engendre bien évidemment de légers glissements. De même, alors qu'il est raisonnable de dire que des roues pleines sont indéformables, cette hypothèse est largement fausse avec des roues équipées de pneus.
Malgré cela, on supposera toujours qu'il y a roulement sans glissement (r.s.g.), et, par ailleurs, que le sol est parfaitement plan 1.

Mathématiquement, on peut traduire la condition de roulement sans glissement (r.s.g.), sur une roue. Soit P le centre de la roue, Q le point de contact de la roue avec le sol, φ l'angle de rotation propre de la roue et θ l'angle entre le plan de la roue et le plan $(O, \vec{x}, \vec{z})$ comme indique a la figure 3.3. La nullité de la vitesse relative $\vec{v}Q$ roue/sol au point de contact permet d'obtenir une relation vectorielle entre la vitesse $\vec{v}P$ du centre P de la roue et le vecteur de vitesse de rotation $\overrightarrow{\omega}$ de la roue :

$$\vec{v}Q = \vec{v}P + \vec{\omega} \wedge \vec{v}Q = \vec{0}$$

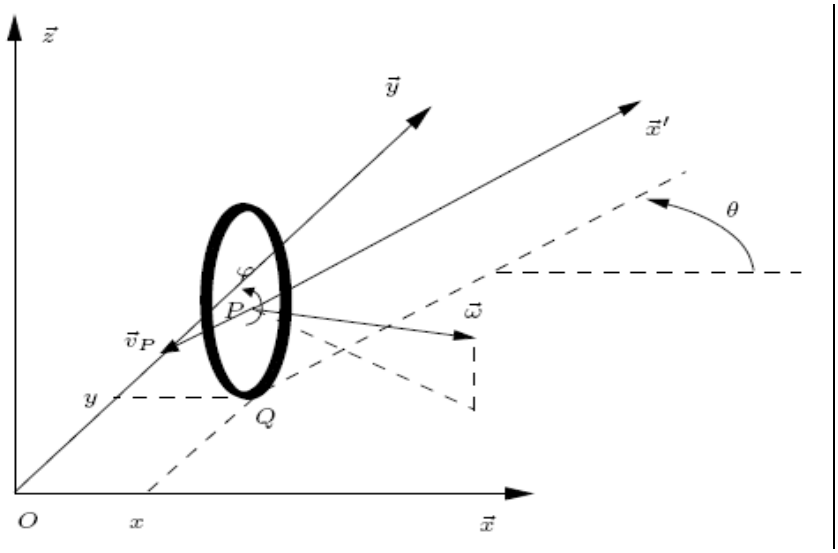


Figure 3.3 – Caractérisation du roulement sans glissement

Les points P et Q ont pour coordonnées respectives $(x, y, r)^T$ et $(x, y, 0)^T$ .Il vient alors :

$$\dot{x}\,\vec{x} + \dot{y}\,\vec{y} + \left(\dot{\theta}\,\vec{z} + \dot{\varphi}\left(sin\dot{\theta}\,\vec{x} - cos\dot{\theta}\,\vec{y}\right)\right) \wedge (-r\vec{z}) = \vec{0}$$

$$(\dot{x} + r\dot{\varphi}\cos\theta)\vec{x} + (\dot{y} + r\dot{\varphi}\cos\theta)\vec{y} = \vec{0}$$

Ceci nous donne le système de contraintes scalaires :

$$\dot{x} + r\dot{\varphi}\cos\theta = 0 \tag{3.3}$$

$$\dot{y} + r\dot{\varphi}\cos\theta = 0 \tag{3.4}$$

Que l'on peut transformer pour faire apparaître les composantes de vitesse dans le plan de la roue d'une part et perpendiculairement à la roue d'autre part :

$$-\dot{x}sin\theta + \dot{y}\cos\theta = 0 \tag{3.5}$$

$$\dot{x}cos\theta + \dot{y}\sin\theta = -r\dot{\varphi} \tag{3.6}$$

Ces contraintes traduisent le fait que le vecteur $\vec{v}P$ soit dans le plan de la roue et ait pour module $r\dot{\varphi}$.

3.2.4.2 Contraintes non holonomes :

Les équations précédentes, caractérisant le roulement sans glissement (r.s.g).d'une roue sur le sol, sont des contraintes non holonomes. Ce que recouvre ce terme et de caractériser les systèmes non holonomes [25].

Soit un système de configuration q soumis à des contraintes indépendantes sur les vitesses, regroupées sous la forme $A^T(q)\dot{q} = 0$. S'il n'est pas possible d'intégrer l'une de ces contraintes, elle est dite non intégrable ou non holonome. De manière concrète l'existence de contraintes non holonomes implique que le système ne peut pas effectuer certains mouvements instantanément. Par exemple, dans le cas de la roue, il ne peut y avoir de translation instantanée parallèlement à l'axe de la roue. Un tel déplacement nécessitera des manœuvres. De même, comme on le sait bien, une voiture ne peut se garer facilement sans effectuer de créneaux.

Il n'est pas évident de dire a priori si une contrainte est intégrable ou non. Pour cela, on a recours à l'application du théorème de Frobenius, et pour deux vecteurs $b_i(q)$ et $b_j(q)$ cet opérateur est défini par :

$$[b_i(q),\ b_j(q)] = \frac{\partial b_j}{\partial q} b_i - \frac{\partial b_i}{\partial q} b_j \tag{3.7}$$

3.2.4.3 Modèle du robot :

Soit un système de configuration q, de dimension n, soumis à un ensemble de contraintes indépendantes s'écrivant sous la forme $A^T(q)\dot{q} = 0$.

Soit $B(q) = (b1(q)b2(q) \dots bm(q))$ une matrice de rang plein m, orthogonale à $A(q)$sur tout l'espace des configurations. Soit enfin l'algèbre de Lie de dimension p, avec $m \leq p \leq n$, engendrée par l'ensemble des colonnes de $B(q)$, auxquelles s'ajoutent les crochets de Lie successifs formes à partir de ces colonnes, à condition qu'ils augmentent la dimension de l'algèbre. Alors, parmi les contraintes auxquelles est soumis le système, $p - n$ sont intégrables. Prenons l'exemple de la roue dont on a écrit le modèle précédemment. Sa configuration est entièrement définie par sa configuration. D'après (3.5) et (3.6)

$$q = (x\ y\ \theta\ \varphi)^T \tag{3.8}$$

On peut déterminer :

$$A(q) = \begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

Et en déduire :

$$B(q) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \\ -1/r & 0 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

Matrice formée par les colonnes indépendantes $b_1(q) = (\cos\theta\ \sin\theta\ 0 - \frac{1}{r})^{\mathrm{T}}$ et

$\mathrm{b}_2(q) = (0\ 0\ 1\ 0)^{\mathrm{T}}$ et qui vérifie bien $A^T(q)B(q) = 0$ pour tout q. On calcule alors les crochets de Lie successifs à partir de $b_1(q)$ et $b_2(q)$:

$$[\ b_1(q),\ \ b_2(q)] = (\sin\theta\ -\cos\theta\ 0\ 0)^T \tag{3.11}$$

$$[\ b_1(q),\ [\ b_1(q),\ \ b_2(q)]] = 0$$

$$[\ b_2(q),\ [\ b_1(q),\ \ b_2(q)]] = (\cos\theta\ \sin\theta\ 0\ 0)^{\mathrm{T}} \tag{3.12}$$

On constate que $b_1(q)$, $b_2(q)$, $[\ b_1(q),\ \ b_2(q)]$ et $[b_2(q),[\ b_1(q),\ \ b_2(q)]]$

Engendrent une algèbre de Lie de dimension 4, égale à celle de q. On arrête donc le calcul des crochets et on peut conclure qu'il n'existe pas de contrainte intégrable. Les contraintes (3.5) et (3.6) sont donc des contraintes non holonomes.

3.2.5 Les grandes classes de robots mobiles et leurs modèles :

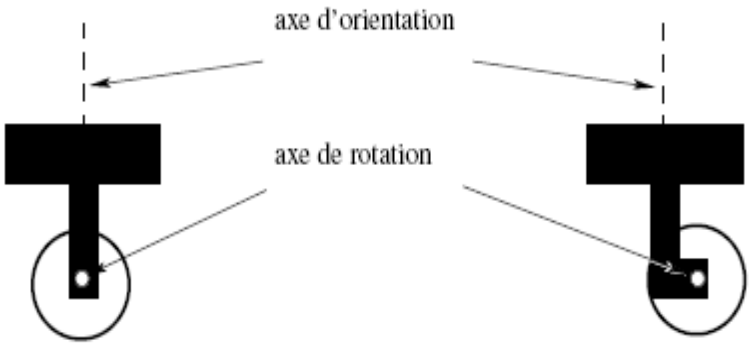
3.2.5.1 Disposition des roues et centre instantané de rotation :

C'est la combinaison du choix des roues et de leur disposition qui confère à un robot son mode de locomotion propre. Sur les robots mobiles, on rencontre principalement trois types de roues (voir figure 3.4) :

– les roues fixes dont l'axe de rotation, de direction constante, passe par le centre de la roue.

– les roues centrées orientables, dont l'axe d'orientation passe par le centre de la roue.

– les roues décentrées orientables, souvent appelées roues folles, pour lesquelles l'axe d'orientation ne passe pas par le centre de la roue.



(a) Roues fixes (axe d'orientation fixe) et roues centrées orientables (b) Roues décentrées orientables

Figure 3.4 – Les principaux types de roues des robots mobiles

De manière anecdotique on rencontrera aussi des systèmes particuliers, tels que les roues suédoises, les roues à plusieurs directions de roulement, etc. Bien évidemment, pour un ensemble de roues donné, toute disposition ne conduit pas à une solution viable. Un mauvais choix peut limiter la mobilité du robot ou occasionner d'éventuels blocages. Par exemple, un robot équipé de deux roues fixes non parallèles ne pourrait pas aller en ligne droite. Pour

qu'une disposition de roues soit viable et n'entraîne pas de glissement des roues sur le sol, il faut qu'il existe pour toutes ces roues un unique point de vitesse nulle autour duquel tourne le robot de façon instantanée. Ce point, lorsqu'il existe, est appelé centre instantané de rotation (CIR). Les points de vitesse nulle liés aux roues se trouvant sur leur axe de rotation, il est donc nécessaire que le point d'intersection des axes de rotation des différentes roues soit unique. Pour cette raison, il existe en pratique trois principales catégories de robots mobiles à roues, que l'on va présenter maintenant.

3.2.5.1.1 Robots mobiles de type unicycle :

On désigne par unicycle un robot actionné par deux roues indépendantes et possédant éventuellement un certain nombre de roues folles assurant sa stabilité. Le schéma des robots de type unicycle est donné à la figure 3.5. On y a omis les roues folles, qui n'interviennent pas dans la cinématique, dans la mesure où elles ont été judicieusement placées [25].

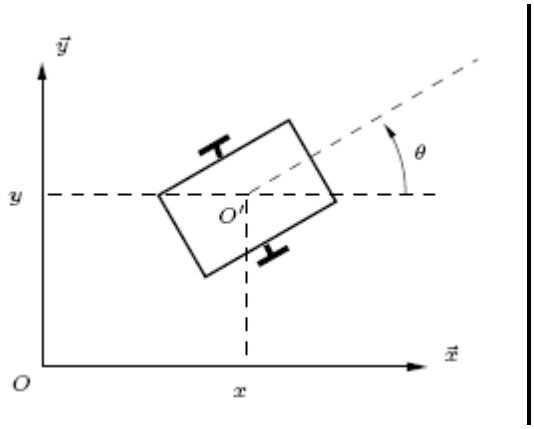


Figure 3.5 – Robot mobile de type unicycle

Ce type de robot est très répandu en raison de sa simplicité de construction et de propriétés cinématiques intéressantes. Le robot de type unicycle, depuis Hilare, en 1977, jusqu'aux modèles actuels, qui, à l'instar du robot Khepera, tendent parfois vers l'extrême miniaturisation.

3.2.5.1.2 Centre instantané de rotation :

Les roues motrices ayant même axe de rotation, le CIR du robot est un point de cet axe. Soit ρ le rayon de courbure de la trajectoire du robot, c'est-à-dire la distance du CIR au point O' (voir figure 3.6). Soit L entre l'axe et ω la vitesse de rotation du robot autour du CIR. Alors

les vitesses des roues droite et gauche, respectivement notées v_d et v_g et définies à la figure 3.6, vérifient :

$$v_d = -r\dot{\varphi}_d = (\rho + L)\omega \tag{3.13}$$

$$v_g = r\dot{\varphi}_g = (\rho - L)\omega \tag{3.14}$$

ce qui permet de déterminer ρ et ω à partir des vitesses des roues :

$$\rho = L\frac{\dot{\varphi}_d - \dot{\varphi}_g}{\dot{\varphi}_d + \dot{\varphi}_g} \tag{3.15}$$

$$\omega = \frac{-r(\dot{\varphi}_d + \dot{\varphi}_g)}{2L} \tag{3.16}$$

L'´equation (3.15) permet de situer le CIR sur l'axe des roues. Par ailleurs ces équations expliquent deux propriétés particulières du mouvement des robots de type unicycle : si $\dot{\varphi}_d = -\dot{\varphi}_g$, le robot se de´place en ligne droite ; si $\dot{\varphi}_d = \dot{\varphi}_g$, alors le robot effectue un rotation sur lui-même. L'utilisation de ces deux seuls modes de locomotion, bien que limitée, permet de découpler les mouvements et de fournir une solution simple pour amener le robot d'une posture `a une autre. C'est sans doute l`a une des raisons du succès de ce type de robots. Pour élaborer une stratégie plus fine de déplacement, il est cependant intéressant de savoir comment la posture du robot est reliée à la commande de ses roues. En ce qui concerne la commande, si l'on se contente de traiter le cas cinématique, on peut considérer que celle-ci est donnée, au plus bas niveau, par les vitesses de rotation des roues. Ceci étant, on préfère généralement exprimer cette commande par la vitesse longitudinale du robot, notée v en O' et sa vitesse de rotation $\dot{\theta}$ (autour de O'). Il y a en effet équivalence entre les deux représentations.

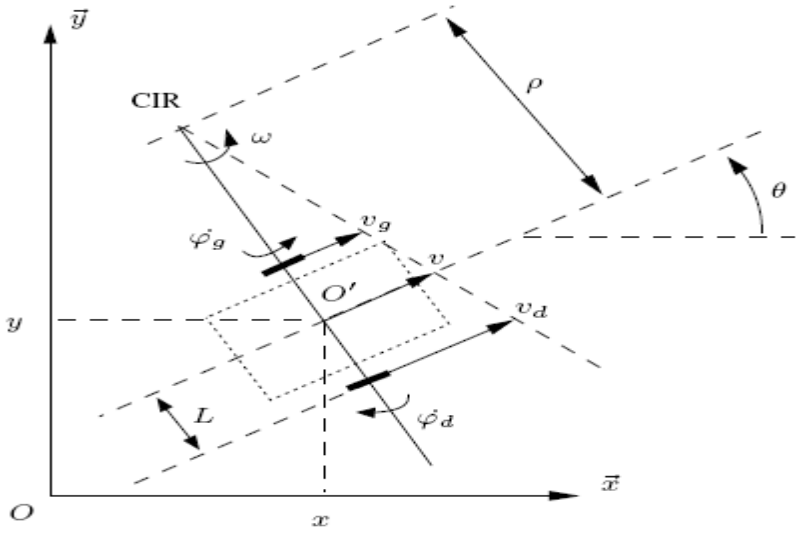


Figure 3.6 – Centre instantané de rotation d'un robot de type unicycle

D'une part, on a : $v = \frac{v_d + v_g}{2} = \frac{r(\dot{\varphi}_g - \dot{\varphi}_d)}{2}$ et d'autre part, la vitesse de rotation du robot est égale à la vitesse de rotation autour du CIR $\omega = \dot{\theta} = \frac{-r(\dot{\varphi}_d + \dot{\varphi}_g)}{2L}$ conformément à l'équation (3.16). On montre que ces relations sont parfaitement inversibles et qu'il y a ainsi équivalence entre les couples $(\dot{\varphi}_d, \dot{\varphi}_g)$ et (v, ω) Désormais, on utilise plutôt ce dernier couple de grandeurs, plus parlantes, quitte à calculer ensuite les angles ou vitesses de consigne des asservissements des roues.

3.2.5.1.3 Modèle cinématique en posture :

Relier la dérivée de la posture à la commande $u = (v, \omega)^T$ est facile. Une simple considération géométrique donne :

$$\begin{cases} \dot{x} = v\, cos\theta \\ \dot{y} = v\, sin\theta \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \tag{3.17}$$

ce qui s'écrit, sous forme matricielle :

$$\xi = C(q)u \tag{3.18}$$

Avec

$$C(q) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

Et ce modèle est appelé modèle cinématique en posture du robot.

3.2.5.1.4 Modèle cinématique en configuration :

Considérons maintenant l'expression des conditions de (r.s.g). Des deux roues. On transpose les équations (3.5) et (3.6) aux deux roues de l'unicycle

$$\begin{cases} \dot{x} + L\,\dot{\theta}\,cos\theta + r\dot{\varphi}_d cos\theta = 0 \\ \dot{y} + L\,\dot{\theta}\,sin\theta + r\dot{\varphi}_d sin\theta = 0 \\ \dot{x} - L\,\dot{\theta}\,cos\theta - r\dot{\varphi}_d cos\theta = 0 \\ \dot{y} - L\,\dot{\theta}\,sin\theta - r\dot{\varphi}_d sin\theta = 0 \end{cases} \tag{3.20}$$

En choisissant $q = (x\ \ y\ \ \theta\ \ \varphi_d\ \varphi_g)^{\mathrm{T}}$ comme vecteur de configuration, ces contraintes se regroupent sous la forme matricielle $A^T(q)\dot{q} = 0$ avec :

$$A^T(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & Lcos\theta & rcos\theta & 0 \\ 0 & 1 & Lsin\theta & rsin\theta & 0 \\ 1 & 0 & -Lcos\theta & 0 & -rcos\theta \\ 0 & 0 & -Lsin\theta & 0 & -rsin\theta \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

On constate que $A(q)$ n'est pas de rang plein. On peut donc, sans perte d'information, supprimer la dernière ligne et réécrire les contraintes avec :

$$A^T(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & Lcos\theta & rcos\theta & 0 \\ 0 & 1 & Lsin\theta & rsin\theta & 0 \\ 1 & 0 & -Lcos\theta & 0 & -rcos\theta \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

Par ailleurs il résulte de relation (3.16) la contrainte :

$\dot{\theta} = \frac{-r(\dot{\varphi}_d + \dot{\varphi}_g)}{2L}$ qui s'intègre en $\theta = \frac{-r(\varphi_d + \varphi_g)}{2L} + \theta_0$

Ou θ_0 est la valeur de θ à l'initialisation (les angles des roues, généralement mesurés par des codeurs incrémentaux, étant alors choisis nuls). Cette contrainte intégrable est donc en fait une contrainte holonome On peut donc éliminer une des quatre variables constituant le vecteur q choisi initialement, qui n'′etait donc pas constitué de grandeurs indépendantes (et n'était donc pas un vecteur de configuration au sens strict. . .). En prenant maintenant $q = (x\ \ y\ \ \theta\ \ \varphi_d\ )^{\mathrm{T}}$ on trouve :

$$A^T(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & Lcos\theta & rcos\theta \\ 0 & 1 & Lsin\theta & rsin\theta \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

$$B(q) = \begin{pmatrix} cos\theta & 0 \\ cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \\ -1/r & -L/r \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

En remarquant, d'après ce qui précède, que :

$$\begin{cases} \dot{x} = v\,cos\theta \\ \dot{y} = v\,sin\theta \\ \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\varphi}_d = -\frac{v}{r} - \frac{L\omega}{r} \end{cases} \quad (3.25)$$

on constate que, sous forme vectorielle, la dérivée du vecteur de configuration s'écrit :

$$\dot{q} = B(q)u \quad (3.26)$$

Avec pour vecteur de commande cinématique $u = (v\omega)^T$. La matrice $B(q)$ représente donc le modèle cinématique (en configuration) du robot mobile, ce résultat pouvant se généraliser .On notera que la connaissance de ce modèle n'est pas toujours utile du point de vue pratique. Dans le cas de l'unicycle, étant donné que l'on cherche essentiellement à contrôler la posture du robot et que la variable φ_d n'apparait pas dans les équations régissant la dérivée de la posture, on se contentera généralement du modèle simplifié (3.17).

On remarque que dans ce cas précis, le modèle simplifié est le modèle cinématique en posture. Ce n'est cependant pas le cas pour tous les robots mobiles.

3.2.5.2 Robots mobiles de type tricycle et de type voiture :

Considérons tout d'abord le cas du tricycle, représenté à la figure de la figure 3.7. Ce robot est constitué de deux roues fixes de même axe et d'une roue centrée orientable placée sur l'axe longitudinal du robot. Le mouvement est conféré au robot par deux actions : la vitesse longitudinale et l'orientation de la roue orientable. De ce point de vue, il est donc très proche d'une voiture. C'est d'ailleurs pour cela que l'on étudie le tricycle, l'intérêt pratique de ce type de robot (peu stable) restant limité [24, 25,28].

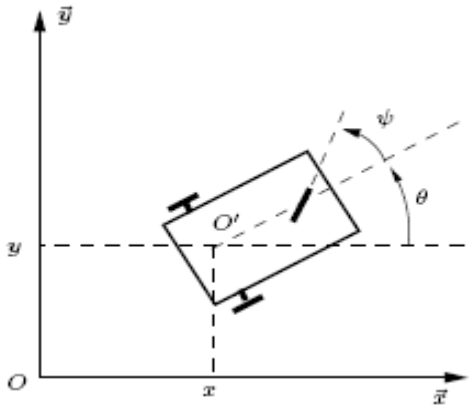


Figure 3.7– Robot mobile de type tricycle

Considérons tout d'abord le tricycle. Le CIR du robot se situe à la rencontre des axes des roues fixes et de la roue orientable, comme cela est représenté à la figure 3.8. On peut déterminer ρ de manière géométrique à partir de l'angle d'orientation de la roue avant et ω à partir de la vitesse linéaire v du véhicule (vitesse en O') et de ρ :

$$\rho = \mathrm{D}/\tan\psi \tag{3.27}$$

$$\omega = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{D}}\tan\psi \tag{3.28}$$

Ce type de robot peut se diriger en ligne droite pour $\psi = 0$ et théoriquement tourner autour du point O' (on pourrait dire sur place) pour $\psi = \pi/2$. Néanmoins, le rayon de braquage de la roue orientable, généralement limité, impose le plus souvent des valeurs de telles que $-\pi/2 < \psi < \pi/2$, interdisant cette rotation du robot sur lui-même.

L'écriture des contraintes sur chacune des roues et un raisonnement similaire à celui suivi dans le cas de l'unicycle permettent de déterminer les modèles cinématiques des robots de type tricycle. Toutefois, par un simple raisonnement géométrique, on établit les équations :

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathrm{v}\cos\theta \\ \dot{y} = \mathrm{v}\sin\theta \\ \dot{\theta} = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{D}}\tan\psi \\ \dot{\psi} = \eta \end{cases} \tag{3.29}$$

Ou $u = (\mathrm{v}\ \eta)^T$ est le vecteur de commande cinématique, η représentant la vitesse d'orientation imposée à la roue orientable. Ces équations sont celles du modèle cinématique

en configuration simplifié, la configuration associée $q = (x\ y\ \theta\ \psi)^T$ ne décrivant pas les rotations propres des différentes roues [24, 25,28].

Comme on l'a vu précédemment, l'existence d'un CIR unique n'impose que les axes des roues du robot soient concourants. Dans le cas du robot de type voiture, cela impose aux roues du train avant de n'avoir pas la même orientation, comme illustré à la figure 3.8. Ainsi, les roues avant d'un robot de type voiture (et a fortiori d'une voiture) ne sont pas parallèles. Le roulement idéal, assurant que le CIR est bien unique, est réalisé sur une voiture par un système de braquage différentiel (dit d'Ackerman). Par ailleurs, les trajectoires des roues n'ayant pas même rayon de courbure, leurs vitesses sont également différentes (et liées évidemment).

L'équivalence entre tricycle et voiture est facile à montrer. Il suffit pour cela de figurer une roue virtuelle qui transformerait un robot de type voiture en tricycle en plaçant la roue orientable du tricycle au centre de l'axe des roues avant de la voiture, orientée de sorte que le CIR reste inchangé, conformément à la figure 3.8.

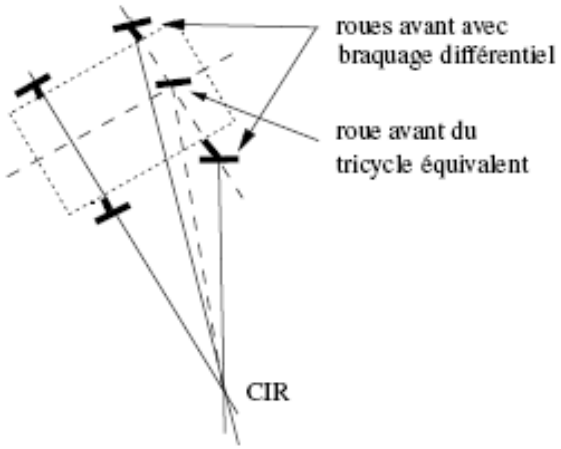


Figure 3.8 – Un robot mobile de type voiture et son CIR

3.2.5.3 Robots mobiles omnidirectionnels :

Un robot mobile est dit omnidirectionnel [24, 25,28] si l'on peut agir indépendamment sur les vitesses : vitesse de translation selon les axes $\vec{x}$ et $\vec{y}$ et vitesse de rotation autour de $\vec{z}$. D'un point de vue cinématique on montre que cela n'est pas possible avec des roues fixes ou des roues centrées orientables. On peut en revanche réaliser un robot omnidirectionnel en ayant recours à un ensemble de trois roues décentrées orientables ou de trois roues suédoises

disposées aux sommets d'un triangle équilatéral (voir figure 3.9). Du point de vue de la transmission du mouvement, ceci ne va pas sans poser de problème.

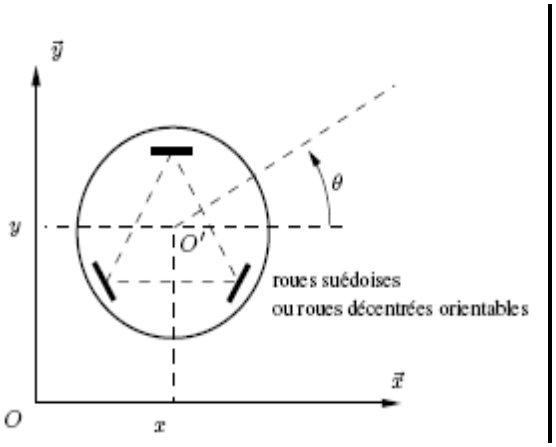


Figure 3.9– Représentation d'un robot mobile omnidirectionnel

Dans ce cas on peut considérer qu'il est possible de commander directement la posture et le modèle cinématique en posture est donc :

$$\begin{cases} \dot{x} = u1 \\ \dot{y} = u2 \\ \dot{\theta} = u3 \end{cases} \tag{3.30}$$

Ou $u = (u1\ u2\ u3)^T$ représente le vecteur de commande. On choisit ainsi généralement ce type de robot pour se dispenser des problèmes de planification et de commande liés à la non-holonomie. L'avantage d'une cinématique extrêmement simple est cependant à mettre en balance avec les inconvénients liés à une localisation odométrique déficiente et à une plus grande complexité mécanique, généralement responsable d'un surcoût. On cite pour cela le cas du Robot mobile omnidirectionnel représenté à la figure 3.10.



Figure 3.10– Robot mobile omnidirectionnel

3.2.6 Propriétés du modèle cinématique d'un robot :

3.2.6.1 Représentation d'état :

De la modélisation que nous avons exposée dans ce chapitre il résulte, dans tous les cas, un modèle dynamique (au sens de l'Automatique) sous la forme (3.26).Si l'on considère que la configuration (réduite) q fait office de variable d'´etat du système on a :

$$\dot{x} = B(x)u \tag{3.31}$$

Avec $B(x)$ de dimension n x m. Il s'agit d'une représentation non linéaire sans terme de dérive, en comparaison de la représentation d'état classique d'un système linéaire invariant $\dot{x} = Ax + Bu$.

C'est le cas des robots mobiles de type unicycle ou voiture, qui par ailleurs font partie d'une classe de système non linéaires particuliers dites systèmes chaînés, comme on le précisera au paragraphe consacré à la commande des robots.

3.2.6.2 Commandabilité des robots mobiles à roues :

Pour qu'un robot mobile soit utile (ou utilisable) il faut en premier lieu s'assurer de sa commandabilité. Cette propriété signifie qu'il existe toujours une loi de commande $u(t)$ amenant le robot d'un état initial à un état final quelconque.

Pour caractériser la commandabilité d'un système non linéaire, on peut tout d'abord se demander si son linéarisé autour de tout point d'équilibre est commandable. En x_0 quelconque, le modèle linéarisé issu de (3.31) s'écrit :

$$\dot{x} = B(x_0)u \tag{3.32}$$

Avec $B(x_0) \in \mathbb{R}^{n.m}$. Pour les robots de type unicycle et voiture, la non-holonomie va de pair avec une forme de sous-actionnement qui se traduit par le fait que $n > m$. Appliquée à un tel système, la condition de rang (critère de commandabilité de Kalman) :

$$\text{Rang}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$$

Se résume à :

$$\text{Rang}B(x_0) = n$$

Cette condition n'est jamais remplie puisque $n > m$. Le linéarisé du système n'est donc pas commandable autour d'un point d'équilibre quelconque. Il faut alors, pour statuer sur la

commandabilité du système, utiliser le théorème de Chow. On donne ici (sans preuve) son interprétation pour un système dont le modèle cinématique est donnée par (3.30) [24, 25,28].

3.2.7 Comparaison des différents types du robot :

Nous pouvons observer dans le tableau ci-dessous un récapitulatif des avantages et des inconvénients des différents types de robots à roues [24, 28].

Robot unicycle	non-holonome, stable, rotation sur soi-même et complexité mécanique faible.
Robot tricycle	non-holonome, peu stable, pas de rotation sur soi-même et complexité mécanique modéré.
Robot voiture	non-holonome, stable, pas de rotation sur soi-même et complexité mécanique modéré.
Robot omnidirectionnel	holonome, stable, rotation sur soi-même et complexité mécanique importante.

Tableau 3.1- Comparaison des différents types du robot.

3.3 Les Capteurs :

La notion de perception en robotique mobile est relative à la capacité du système à recueillir, traiter et mettre en forme des informations utiles au robot pour agir et réagir dans le monde qui l'entoure. Alors que pour des taches de manipulation on peut considérer que l'environnement du robot est relativement structuré, ce n'est plus le cas lorsqu'il s'agit de naviguer de manière autonome dans des lieux très partiellement connus. Aussi, pour extraire les informations utiles à l'accomplissement de sa tache, il est nécessaire que le robot dispose de nombreux capteurs mesurant aussi bien son état interne que l'environnement dans lequel il évolue. Le choix des capteurs dépend bien évidemment de l'application envisagée. Pour se focaliser sur le problème de navigation, nous allons nous restreindre dans cette partie de ce chapitre aux capteurs utiles à cette tache. Dans un second temps, nous expliquerons comment

utiliser les données issues de ces capteurs pour obtenir une représentation fiable de l'état du système et de l'environnement.

3.3.1 Les Capteurs en robotique mobile :

En robotique mobile, on classe traditionnellement les capteurs en deux catégories selon qu'ils mesurent l'état du robot lui-même ou l'état de son environnement. Dans le premier cas, à l'image de la perception chez les êtres vivants, on parle de proprioception et donc de capteurs proprioceptifs. On trouve par exemple dans cette catégorie les capteurs de position ou de vitesse des roues et les capteurs de charge de la batterie. Les capteurs renseignant sur l'état de l'environnement, donc de ce qui est extérieur au robot lui-même, sont eux appelés capteurs extéroceptifs. Il s'agit de capteurs donnant la distance du robot à l'environnement, la température, signalant la mise en contact du robot avec l'environnement, etc.

L'étude détaillée des capteurs, qui relève à la fois de la physique, de l'électronique et du traitement du signal, ne sera pas vue ici. Nous nous concentrerons d'expliquer les principes de fonctionnement des capteurs présentés. On tachera simplement de garder à l'esprit que les défauts inhérents aux différents systèmes de mesure utilisés (bruit, erreurs ou échecs de mesures, difficulté de modélisation) influent fortement sur la perception que le robot a de l'environnement.

3.3.2 Mesure de la rotation des roues :

Chaque roue motrice d'un robot mobile est généralement associée à un servomoteur. Celui-ci est équipé d'un dispositif de mesure de rotation à l'aide d'un capteur disposé sur l'axe lui-même. Il s'agit d'un capteur proprioceptif, car il renseigne sur la position, c'est-à-dire sur l'état interne du système. Les capteurs utilisés en robotique mobile ne se différencient pas de ceux rencontrés en commande d'axe de manière plus générale. On notera cependant qu'il n'est pas utile de disposer de codeur absolu les roues d'un robot mobile, la position initiale du robot ne pouvant être donnée simplement par une valeur codeur : il suffit pour s'en persuader de soulever le robot et de le poser ailleurs.

On notera ensuite que dans le cas des robots mobiles la mesure utile est généralement la vitesse de rotation et non la position angulaire. Cette mesure de vitesse peut être obtenue par une mesure directe, à l'aide d'une génératrice tachymétrique notamment. Cependant, pour des raisons évidentes (moindre cout, moindre encombrement, moindre entretien), elle est le plus souvent réalisée de manière indirecte. La technologie la plus classique consiste à utiliser

des codeurs optiques, délivrant des impulsions carrées lorsque l'arbre tourne. On peut estimer que le comptage de ces impulsions suffit à déterminer la vitesse de rotation des roues, qui découle de la fréquence des impulsions. Cette mesure est nécessairement entachée d'un bruit de quantification, qui peut être important, notamment aux basses vitesses. Pour réduire ce bruit, on choisit des codeurs de meilleure résolution, possédant un nombre élevé de points par tour (PPT), c'est-à-dire mesurant des incréments angulaires très petits (typiquement 2000 PPT). Une alternative est d'utiliser des synchrorésolveurs, qui utilisent des signaux sinusoïdaux et dont la précision est bien meilleure. Une plus vaste gamme de capteurs (potentiomètres, capteurs inductifs, capacitifs, magnétiques) est par ailleurs à la disposition du roboticien aventureux.

3.3.3 Mesure de la position par le GPS :

Il existe très peu de systèmes donnant la position absolue d'un point dans un repère fixe donné. Le GPS (Global Positioning System) [25], initialement développé pour les applications militaires américaines est actuellement à la disposition du grand public. On peut cependant considérer que son utilisation dans ce cadre n'est pas garantie. La mise en place du projet civil européen Galileo devrait offrir une alternative au GPS.

Le GPS fonctionne avec un ensemble de satellites, qui effectuent des émissions synchronisées dans le temps. Par recoupement des instants d'arrivée des signaux et de la position des satellites émetteurs, les récepteurs peuvent calculer leur position. Le principe de calcul de la position est basé sur une triangulation, à l'aide de quatre signaux reçus simultanément (le quatrième signal assure la robustesse de la mesure).

En termes de précision, la localisation ainsi obtenue est entachée d'une erreur de l'ordre de la quinzaine de mètres, ce qui n'est bien évidemment pas suffisant pour permettre à un robot de naviguer de manière robuste. Ainsi, on a systématiquement recours à une méthode différentielle pour obtenir des résultats plus satisfaisants. La localisation se fait à l'aide de deux récepteurs, dont l'un est statique et positionné avec précision dans l'environnement. On peut alors obtenir une précision de l'ordre du centimètre. Pour capter les signaux émis par des satellites, ce type de dispositif est donc plutôt destiné au positionnement en extérieur. Par ailleurs sa faible précision et son prix élevé le réservent plutôt à des systèmes multirobots, associant par exemple des robots mobiles à des engins volants et sous-marins, comme cela est à l'´etude dans les applications militaires les plus récentes. Enfin, ce système de mesure, autorisant des rafraîchissements à des fréquences de l'ordre de seulement 5 Hz, n'est pas

utilisable pour une commande en temps-réel. Il est donc principalement utile pour des recalages ponctuels.

3.3.3.1 Description du système GPS:

Le système GPS comprend trois composantes principales :

- la composante spatiale constituée de 24 satellites en orbite autour de la Terre (Space segment)
- la composante de contrôle formée de stations de poursuite au sol (Control segment)
- la composante utilisateur qui comprend les récepteurs (User segment), comme montrée dans la figure 3.11 suivante.

Les 24 satellites NAVSTAR sont répartis sur 6 plans orbitaux (4 par plan) dont l'inclinaison est de 55^{o} par rapport à l'équateur terrestre Comme montrée dans la figure suivante.



Figure 3.11- Les 24 satellites NAVSTAR

3.3.4 Le GPS en mode différentiel :

Un moyen efficace permettant de réduire l'effet des erreurs inhérentes au GPS est le positionnement relatif. Le principe consiste à recueillir simultanément les observations d'un récepteur localisé et d'une station de référence dont les coordonnées sont connues. Les mesures de distance sont comparées aux distances théoriques calculées à partir des coordonnées connues de la station et des satellites. Ces différences de distance représentent les erreurs de mesure et sont calculées pour chaque satellite à chaque époque d'observations. Par la suite, ces différences de distance deviennent des termes correctifs – aussi appelés

corrections différentielles qui sont appliqués aux mesures de distance recueillies par le récepteur mobile. De cette façon, les erreurs d'observations communes de la station de référence et du récepteur mobile sont éliminées. Les erreurs sont d'autant plus identiques lorsque les 2 récepteurs sont plus rapprochés. La précision du positionnement relatif (avec des mesures de pseudo distance) est de l'ordre de 1 à 5 m. Cette précision est fonction de la précision des mesures de pseudo distance, de la géométrie, de la configuration des satellites et de l'espacement entre les récepteurs qui peut facilement aller jusqu'à quelques centaines de kilomètres. Il est important de mentionner que les corrections différentielles ne doivent pas être appliquées au niveau des coordonnées, sauf si les mêmes satellites sont observés par les 2 récepteurs. Les corrections différentielles peuvent être appliquées à plus d'un récepteur mobile et l'inter visibilité entre les récepteurs n'est pas requis. Comme montrée dans la figure 3.12 suivante.

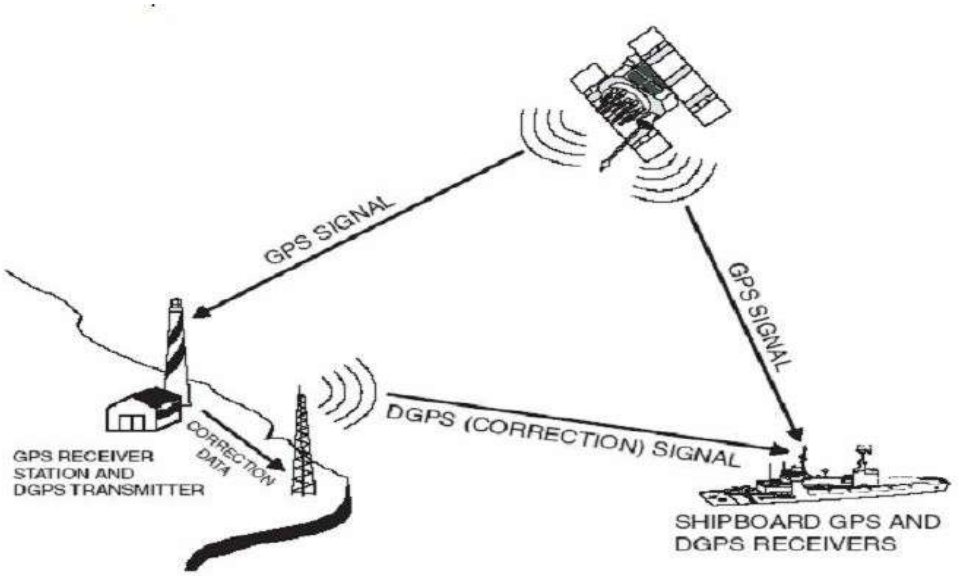


Figure 3.12- Le GPS en mode différentiel

3.4 Capteur Compas:

Les compas et les boussoles fournissent une information d'orientation par rapport à une référence fixe (nord magnétique typiquement). Ils sont donc extéroceptifs. Les modules présentés à la figure 3.13 sont des compas électroniques capables de détecter le nord. Par déduction, un module comme le CMP03 indiquera son orientation avec une résolution de 3 à 4 degrés environ, ce qui reste acceptable en complément de l'odométrie. Un tel composant, de très faible encombrement [25].

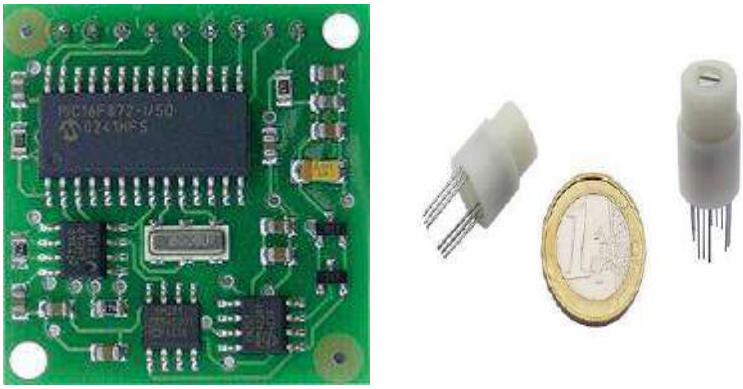


Figure 3.13– Capteur de Compas CMP03

3.4.1 les propriétés du Capteur compas:

-Information d'orientation par rapport à une référence fixe (nord magnétique typiquement).

-Compas électroniques capables de détecter le nord

-CMP03 : résolution de 3 à 4^{o} environ, 32 x 35 mm.

3.5 Conclusion :

Dans ce chapitre on a présenté une définition du robot mobile et son modèle mathématique de sa position sur l'axe des ordonnés et des abscisses et son angle de rotation puis on a passé à la technique de localisation à base de GPS (Global positioning system) et en fin on a passé à une briefe définition de capteur compas.

CHAPITRE 4 SIMULATION ET RESULTATS

4.1 Introduction :

La méthode de l'estimation est une des méthodes importantes dans le domaine de traitement de signal. L'approche à base d'observateur est utilisée. Le filtrage de Kalman étendu, sans parfums et le filtre de Kalman à différence centrale sont appliqués pour la poursuite de la trajectoire du robot mobile. Et ces types d'algorithmes de filtre de Kalman sont calculés à partir des modèles vus dans le chapitre 2. Ce chapitre est consacré à la présentation des résultats de simulation et de faire comparer les trois algorithmes. Le filtrage de Kalman étendu, sans parfums et le filtre de Kalman à différence centrale sont utilisés pour l'estimation des variables d'état.

4.2 Estimation de la trajectoire du robot mobile :

Le filtrage de Kalman étendu, sans parfum et le filtre de Kalman à différence centrale sont calculés par les trois algorithmes donnés par des équations indiqueés au chapitre 2 ces algorithmes sont appliqués aux modèle de robot mobile donné par l'équation d'état (4.4) utilisée pour l'estimation de la trajectoire. les figures 4.1, 4.3 et 4.5 montrent les differentes trajectoires de robot mobile et leurs estimés par Le filtre de Kalman étendu dans le cas avec rotation de $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi/3$ et une combinaison de deux angles. les figures 4.7 , 4.9 et 4.11 montrent les differentes trajectoires de robot mobile et leurs estimés par Le filtre de Kalman sans parfums avec les même trajectoires vus dans le cas précédent. Et de même les figures 4.13 , 4.15, 4.17 montrent les differentes trajectoires de robot mobile et leurs estimés par Le filtre de Kalman à différence centrale.

4.3 Réglage des filtres de Kalman EKF, UKF et CDKF :

Le choix des paramètres de référence du modèle de Robot mobile et le réglage des matrices de covariance des bruits d'état Q et de mesure R sont des étapes importantes dans la mise en œuvre du Filtre de Kalman étendu, sans parfums et le filtre de Kalman à différence centrale.

La bonne estimation des différentes grandeurs dépend du bon choix des matrices initiales de covariances des bruits utilisées dans les trois algorithmes. Dans la littérature, il

n’existe pas de méthodes exactes pour ce choix. Dans notre travail, on présente la méthode d’essai-erreur.

Essai-erreur :

En premier temps ; Dans cette méthode on suppose que les deux matrices de covariances des bruits d’états Q et celle des bruits de mesure R sont des matrices diagonales, on prend alors deux valeurs pour les matrices Q et R de telle façon à prendre en considération les confiances associées à chacune d’elles (c.à.d. confiance dans le modèle et dans les mesures). On effectue une première simulation, puis on change ces valeurs et on compare. Si le résultat est acceptable on garde les valeurs de Q et R. si ce n’est pas le cas, on change de valeurs de Q ou de R ou des deux une autre fois, puis on examine leurs influences sur l’estimation des variables d’état. Les matrices adéquates sont obtenues après plusieurs tests en simulation ; Cette méthode est fastidieuse et nécessite un temps de simulation et de calcul important, sans garantie d’obtenir un résultat exacte.

La méthode essai-erreur se faite de la manière suivantes : on choisi les matrice R et Q de façon aléatoire et on simule le système. L’erreur entre les variables estimées et mesurées est utilisée comme indicateur de la bonne estimation du filtre. Si cette erreur est faible, on garde les valeurs précédentes de R et Q ; sinon on change ces valeurs et on refait la simulation. Pour la premiere simulation on trouve une certaine valeur de l’erreur. Pour la deuxième simulation on trouve une autre valeur de l’erreur. Pour la troisième simulation, le choix de R et Q se fait en tenant compte des deux simulation précédentes. En effet ; la valeur de l’erreur en fonction de R et Q suit une certaine direction. La même méthode est appliqués pour d’autres simulations ; jusqu’à obtention d’une valeur satisfaisante de l’erreur.

Ou mieux de remplir un tableau pour mieux voire la zone de variation des deux valeurs. Le tableau suivant montre l’erreur quadratique entre la trajectoire mesurés et les la trajectoire estimés en fonction des matrices diagonales R et Q.

Q \ R	10^2	10	10^-1	10^-5
10^6	0.0267	0.0264	0.0039	0.0053
10^2	0.0257	0.0267	0.0037	0.0052
10	0.0255	0.0267	0.0037	0.0051
10^-1	0.0252	0.0247	0.0038	0.0053

Tableau 4.1- Erreurs en fonction de R et Q

L'application de la méthode essai-erreur est longue. Elle peut, néanmoins mener à des bon résultats.

4.4 Modèle du Robot mobile :

Le robot prend deux positions différentes entre deux instants d'échantillonnage avec deux variations dans la position et dans la direction comme montré dans la figure ci-dessous (figure 4.1).

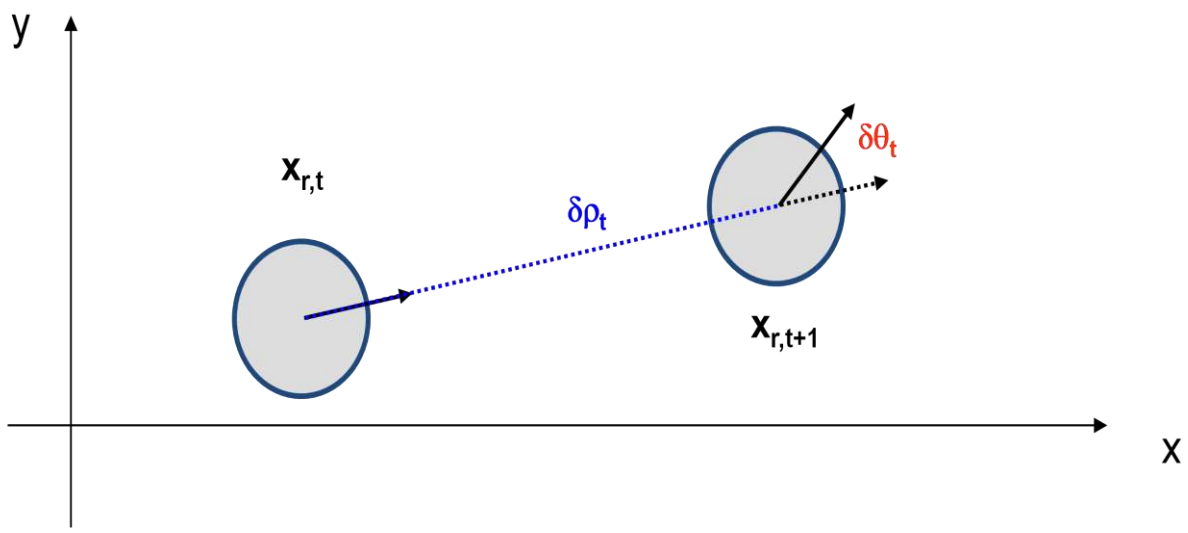


Figure 4.1- Dynamique du robot dans le temps et l'espace.

On applique les filtres de Kalman étendu et sans parfum, et le filtre de Kalman à différence centrale sur le modèle de Robot mobile suivant :

$$\dot{X} = x_{k+1} = x(1) + u(1).\cos\,(x(3)) \tag{4.1}$$

$$\dot{y} = y_{k+1} = x(2) + u(2).\sin\,(x(3)) \tag{4.2}$$

$$\dot{\theta} = \theta_{k+1} = x(3) + u(3) \tag{4.3}$$

u: La commande du robot dans l'intervalle du temps $[k, k+1]$

θ : La rotation du robot dans l'intervalle du temps $[k, k+1]$

La représentation matricielle du modèle d'état est comme suit :

$$\begin{bmatrix} x(1) = x \\ x(2) = y \\ x(3) = \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(1) + u(1).\cos\,(x(3)) \\ x(2) + u(2).\sin\,(x(3)) \\ x(3) + u(3) \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

L'équation de mesure du robot est la suivante :

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

Les deux équations (4.4 et 4.5) représentent le modèle du robot, ce dernier n'est pas linéaire car l'angle θ s'incluse dans la matrice de commande du robot de manière non linéaire, et b_1, b_2 et b_3 sont des bruits on les a supposées connues.

4.5 Application des filtres de Kalman étendu, sans parfum et le Filtre de Kalman à déférence centrale sur le modèle :

Les différents filtres vus dans le chapitre deux sont appliqués pour l'estimation des positions du robot mobile dans divers trajectoires. Dans ce qui suit, on montre les résultats obtenus à l'aide du filtre de Kalman étendu (EKF), le filtre de Kalman sans parfums (UKF) et le filtre de Kalman à différence centrale (CDKF).

4.5.1 Le filtre de Kalman étendu (EKF) :

Dans ce cas on applique le filtre de Kalman étendu pour l'estimation de la position du robot dans différent trajectoires.

- pour $\theta = \pi/2$: le robot fait rotation verticale.

Les figures (4.2 et 4.3) montrent l'évolution de la trajectoire avec son estimé et l'erreur d'estimation respectivement.

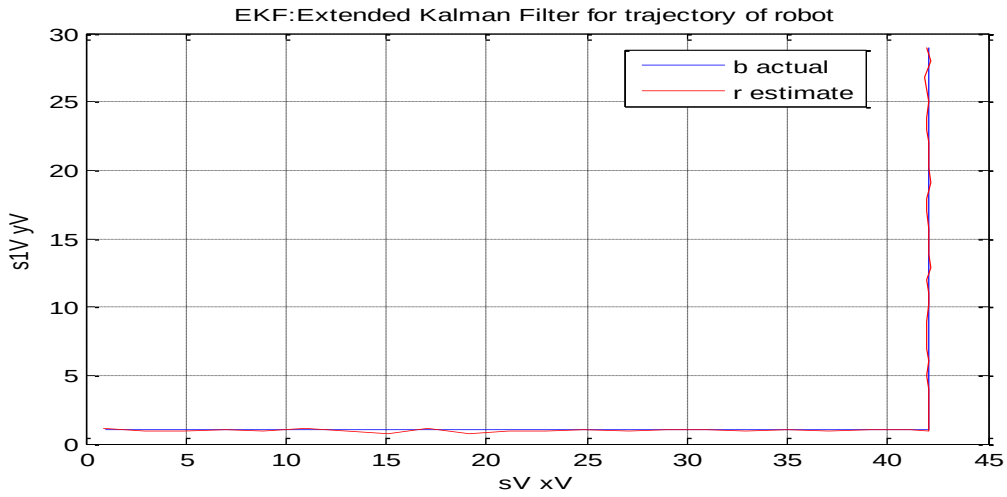


Figure 4.2- trajectoire du robot et son estimée par le filtre de Kalman étendu

La trajectoire du robot pour $\theta = \pi/2$ (rotation verticale) est bien estimée avec le filtre de Kalman étendu. Le résultat est illustrés dans la figure 4.2 qui montrent la supperposition entre La trajectoire du robot mesuré avec son estimé.

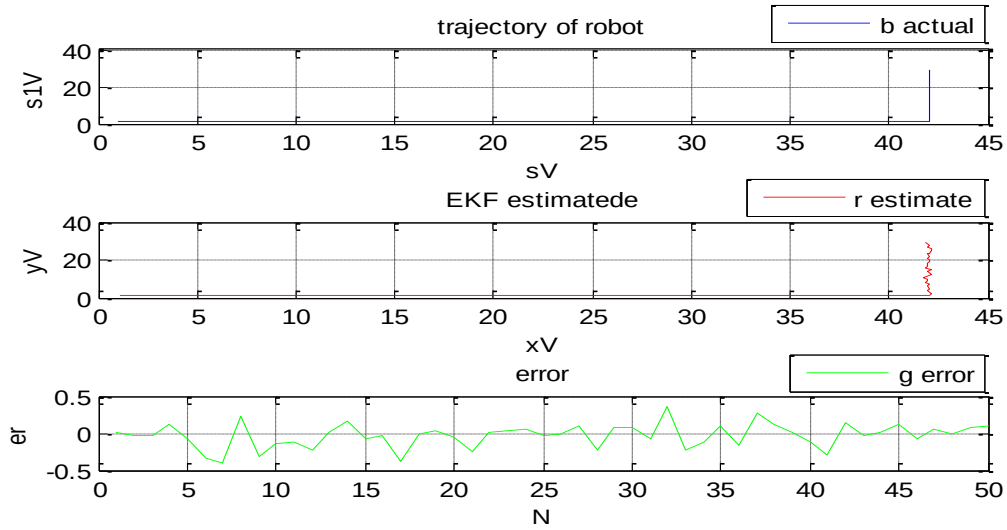


Figure 4.3- trajectoire du robot, son estimée par le filtre de Kalman étendu et l'erreur de l'estimation

La trajectoire du robot pour $\theta = \pi/2$ (rotation verticale) et son estimée par le filtre de Kalman étendu. L'erreur de l'estimation tend vers zéro. Le résultat est illustrés dans la figure 4.2.

- pour $\theta = \pi/3$: le robot fait rotation verticale.

Les figures (4.4 et 4.5) montrent l'évolution de la trajectoire avec son estimé et l'erreur d'estimation respectivement.

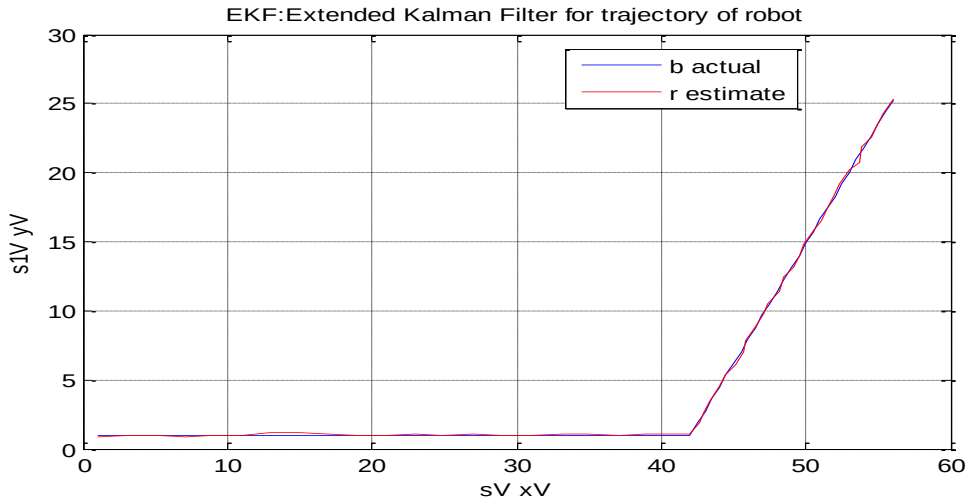


Figure 4.4- trajectoire du robot et son estimée par le filtre de Kalman étendu

La trajectoire du robot pour $\theta = \pi/3$ (rotation inclinée) est bien estimée avec le filtre de Kalman étendu. Le résultat est illustrés dans la figure 4.4 qui montre la supperposition entre La trajectoire mesurée et son estimé malgré la direction incliné.

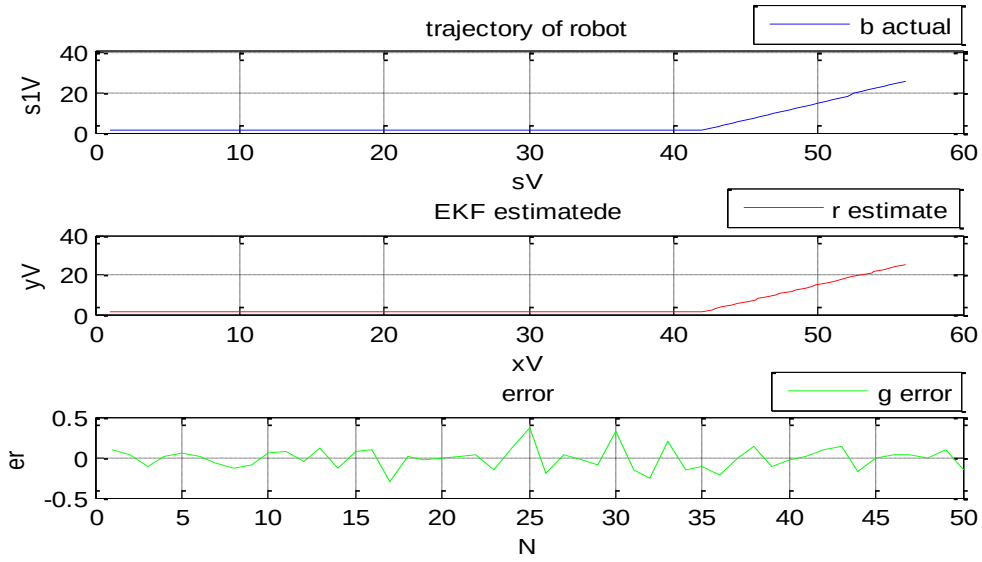


Figure 4.5- trajectoire du robot, son estimée par le filtre de Kalman étendu et l'erreur de l'estimation

La trajectoire du robot pour $\theta = \pi/3$ (rotation inclinée) et son estimée par le filtre de Kalman étendu et l'erreur de l'estimation tend vers zéros. Le résultat est illustrés dans la figure 4.5.

- pour $\theta_1 = \pi/2$ et $\theta_2 = \pi/2$: le robot fait deux rotations successives.

Les figures (4.6 et 4.7) montrent l'évolution de la trajectoire avec son estimé et l'erreur d'estimation respectivement.

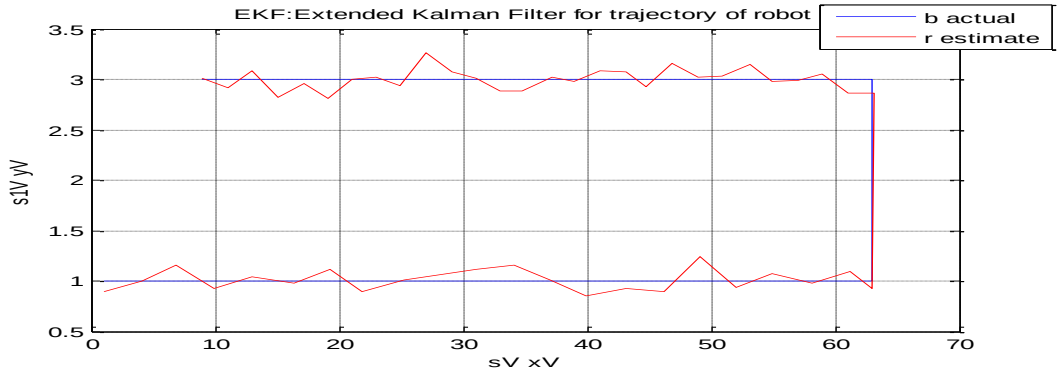


Figure 4.6- trajectoire du robot et son estimée par le filtre de Kalman étendu

La trajectoire du robot pour deux rotations successives $\theta_1 = \pi/2$ et $\theta_2 = \pi/2$ est bien estimée avec le filtre de Kalman étendu Le résultat est illustrés dans la figure 4.6 qui montrent la supperposition entre La trajectoire du robot mesuré et l'estimé.

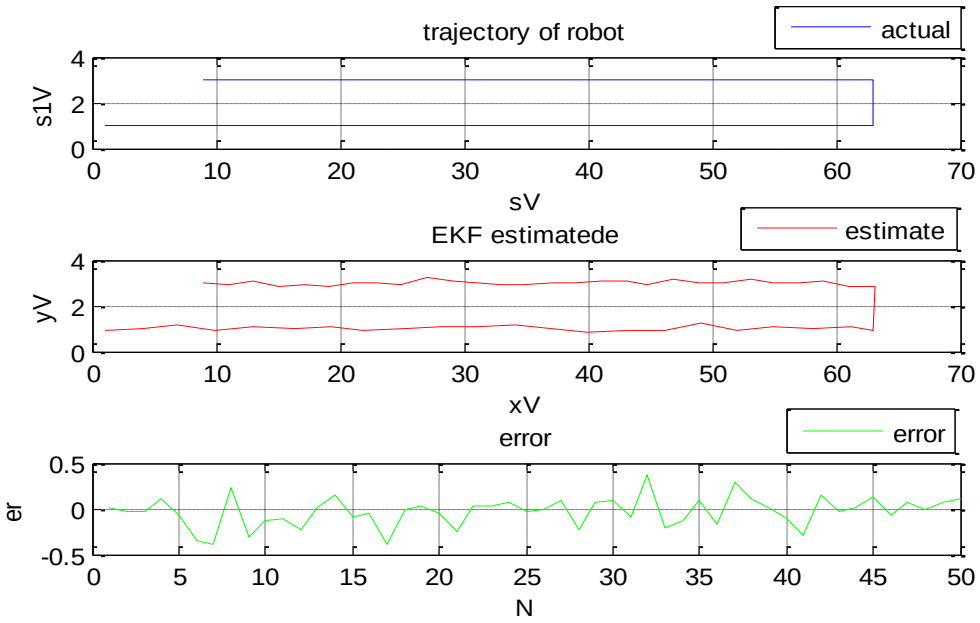


Figure 4.7-trajectoire du robot, son estimée par le filtre de Kalman étendu et l'erreur de l'estimation

La trajectoire du robot pour deux rotations $\theta_1 = \pi/2$ et $\theta_2 = \pi/2$ et son estimée par le filtre de Kalman étendu et l'erreur de l'estimation tend vers zéro. Le résultat est illustrés dans la figure 4.7.

4.5.2 Le filtre de Kalman sans parfums (UKF) :

Dans ce cas on applique le filtre de Kalman sans parfums pour l'estimation de la position du robot dans différent trajectoires.

- pour $\theta = \pi/2$: le robot fait rotation verticale.

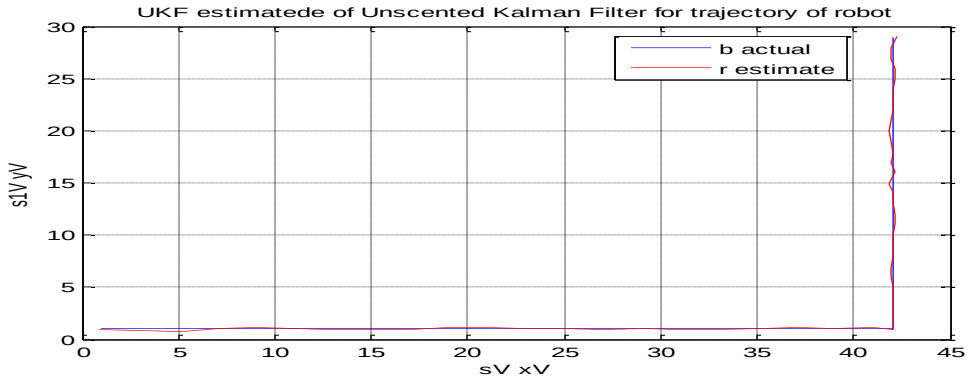


Figure 4.8- trajectoire du robot et son estimée par le filtre de Kalman sans parfums

La trajectoire du robot pour $\theta = \pi/2$ (rotation verticale) est bien estimée avec le filtre de Kalman sans parfums. Le résultat est illustrés dans la figure 4.8 qui montre la supperposition entre la trajectoire mesuré du robot et son estimé.

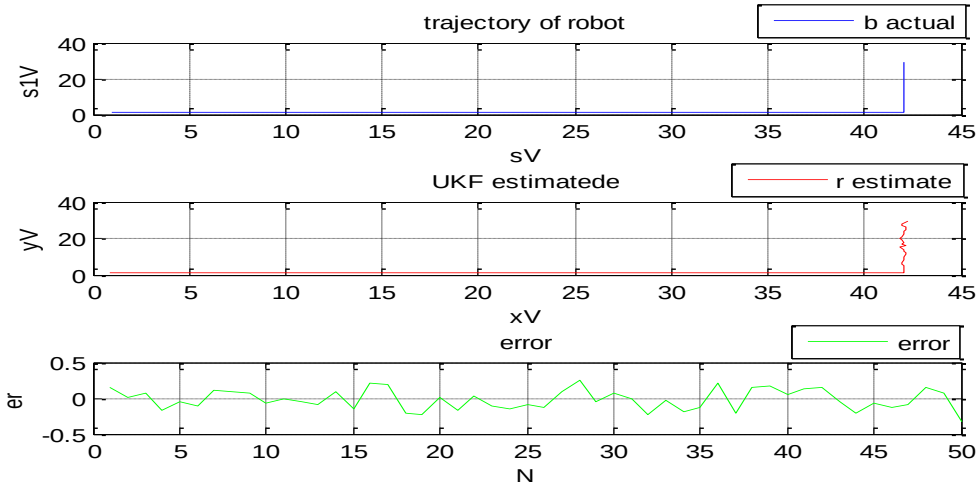


Figure 4.9- trajectoire du robot, son estimée par le filtre de Kalman sans parfums et l'erreur de l'estimation

La figure 4.9 montre la trajectoire du robot pour $\theta = \pi/2$ (rotation verticale) et son estimé par le filtre de Kalman sans parfums et l'erreur de l'estimation qui tend vers zéro.

- pour $\theta = \pi/3$: le robot fait rotation inclinée

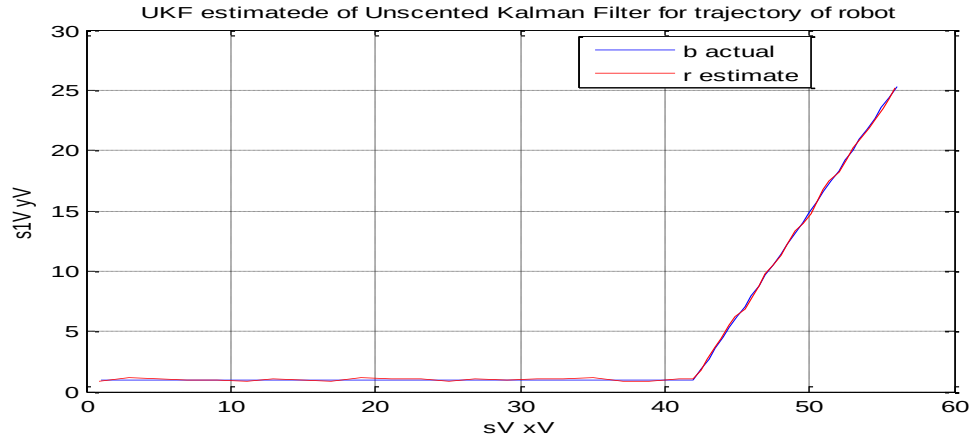


Figure 4.10- trajectoire du robot et son estimée par le filtre de Kalman sans parfums

La trajectoire du robot pour $\theta = \pi/3$ (rotation inclinée) est bien estimée avec le filtre de Kalman sans parfums. Le résultat est illustrés dans la figure 4.10 qui montrent la supperposition des deux trajectoires.

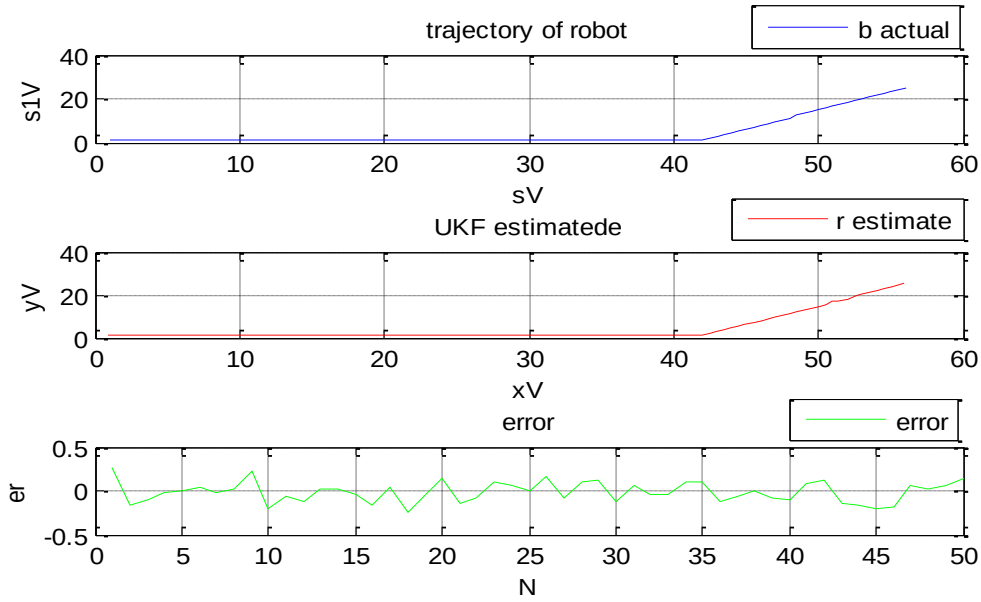


Figure 4.11- trajectoire du robot, son estimé par le filtre de Kalman sans parfums et l'erreur de l'estimation

La trajectoire du robot pour $\theta = \pi/3$ (rotation inclinée) et son estimée par le filtre de Kalman sans parfums l'erreur de l'estimation qui tend vers zéro sont illustrées dans la figure 4.11.

- pour $\theta_1 = \pi/2$ et $\theta_2 = \pi/2$: le robot fait deux rotations :

Les résultats obtenus sont montrées dans les figures (4.12 et 4.13).

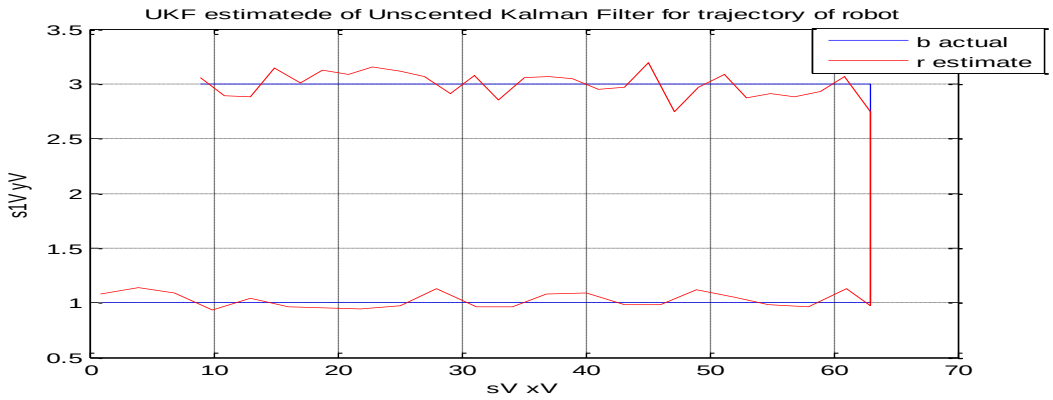


Figure 4.12- trajectoire du robot et son estimée par le filtre de Kalman sans parfums

La trajectoire de robot pour deux rotations successives $\theta_1 = \pi/2$ et $\theta_2 = \pi/2$ est bien estimée avec le filtre de Kalman sans parfums. Le résultat est illustrés dans la figure 4.12 qui montrent la supperposition entre La trajectoire du robot mesuré et l'estimé.

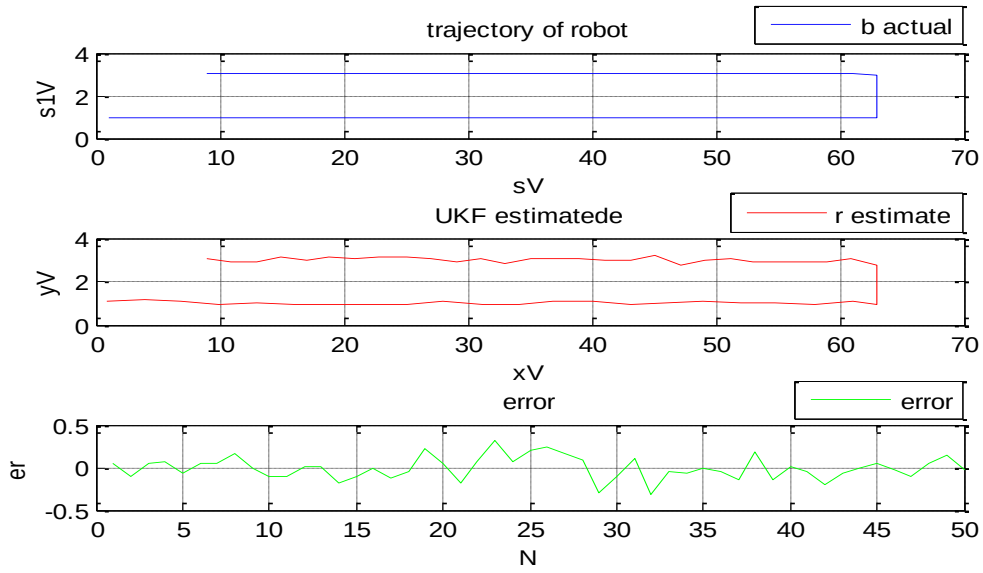


Figure 4.13- trajectoire du robot, son estimée par le filtre de Kalman sans parfums et l'erreur de l'estimation

La figure 4.13 illustré la trajectoire du robot pour deux rotations successives $\theta_1 = \pi/2$ et $\theta_2 = \pi/2$, son estimée par le filtre de Kalman sans parfums et l'erreur de l'estimation. L'erreur d'estimation tend vers zéro.

4.5.3 Filtre de Kalman à déférence centrale (CDKF):

Dans ce cas on applique le Filtre de Kalman à déférence centrale (CDKF) pour l'estimation des positions du robot dans différents cas de trajectoires avec différents angles de rotation.

- pour $\theta = \pi/2$: le robot fait rotation verticale

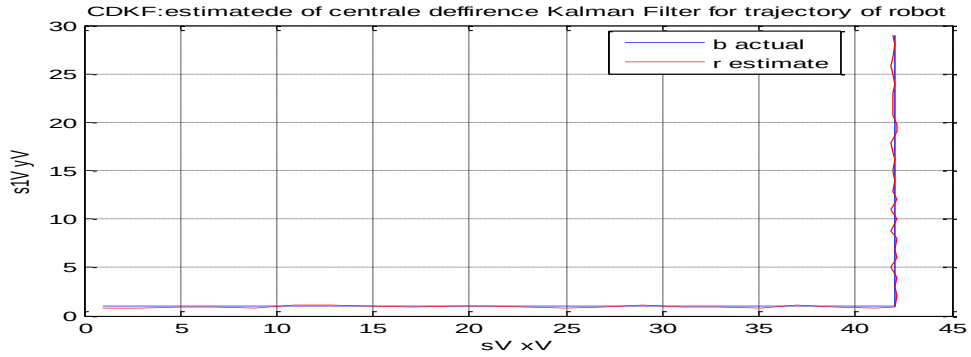


Figure 4.14- trajectoire du robot et son estimée par le filtre de Kalman à déférence centrale

La trajectoire du robot pour $\theta = \pi/2$ (rotation verticale) est bien estimée avec le filtre de Kalman à déférence centrale. Le résultat est illustrés dans la figure 4.14 qui montre la supperposition entre La trajectoire mesuré du robot et son estimé.

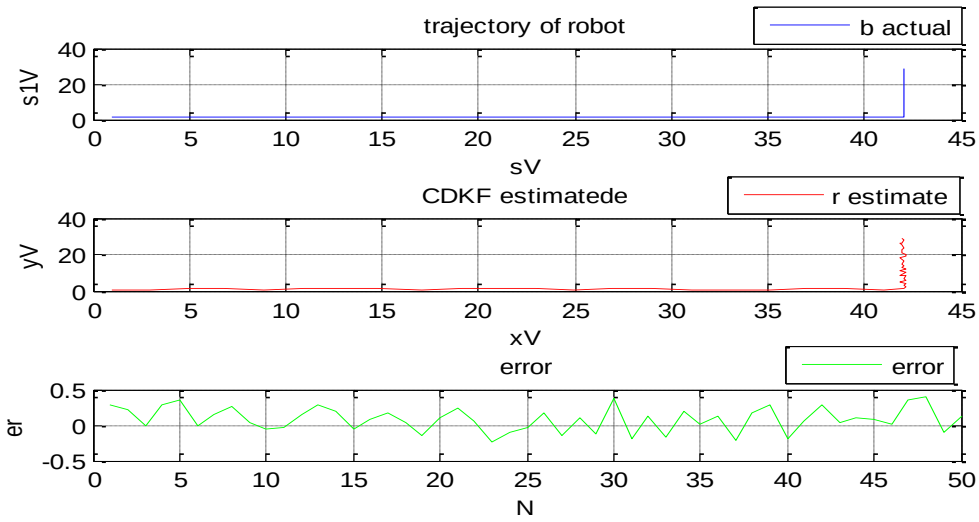


Figure 4.15- trajectoire du robot, son estimée par le filtre de Kalman à déférence centrale et l'erreur de l'estimation

La figure 4.15 montre la trajectoire du robot pour $\theta = \pi/2$ (rotation verticale) et son estimée par le filtre de Kalman à déférence centrale et l'erreur de l'estimation qui est presque nulle.

- Pour $\theta = \pi/3$: le robot fait rotation inclinée :

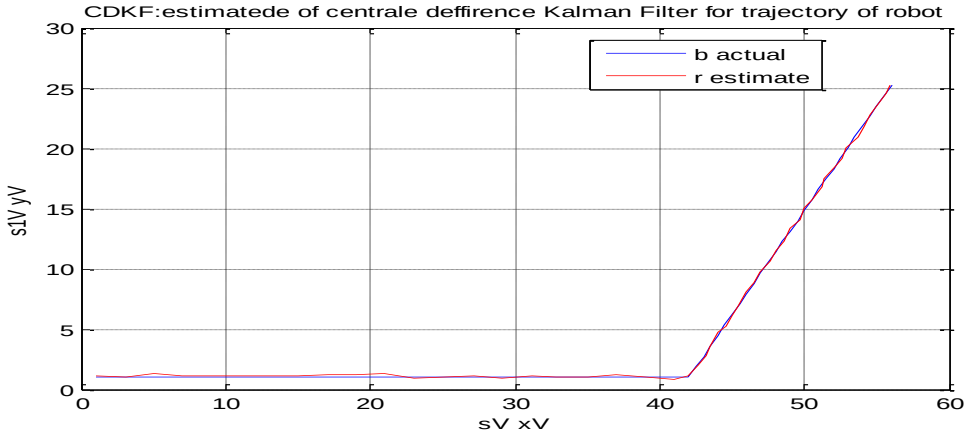


Figure 4.16- trajectoire du robot et son estimée par le filtre de Kalman à déférence centrale

La trajectoire du robot pour $\theta = \pi/3$ (rotation inclinée) est bien estimée avec le filtre de Kalman à déférence centrale. Le résultat est illustrés dans la figure 4.16 qui montre la supperposition totale de la trajectoire du robot mesuré et son estimé.

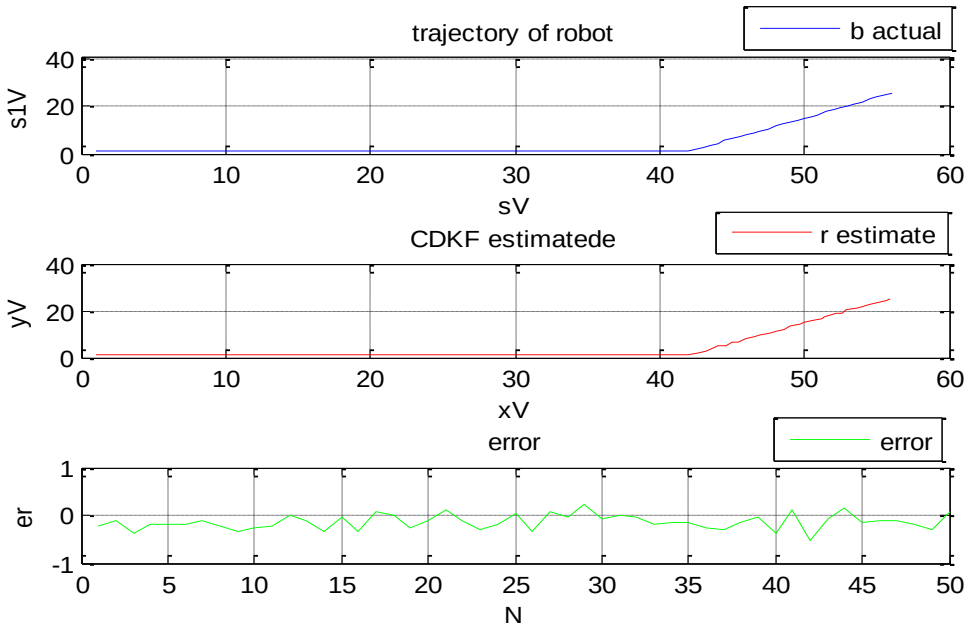


Figure 4.17- trajectoire du robot, son estimé par le filtre de Kalman à déférence centrale et l'erreur de l'estimation

La trajectoire du robot pour $\theta = \pi/3$ (rotation inclinée), son estimée par le filtre de Kalman à déférence centrale et l'erreur de l'estimation sont illustrées par la figure 4.17. L'erreur de l'estimation tend vers zéro.

- Pour $\theta_1 = \pi/2$ et $\theta_2 = \pi/2$: le robot fait deux rotations successives

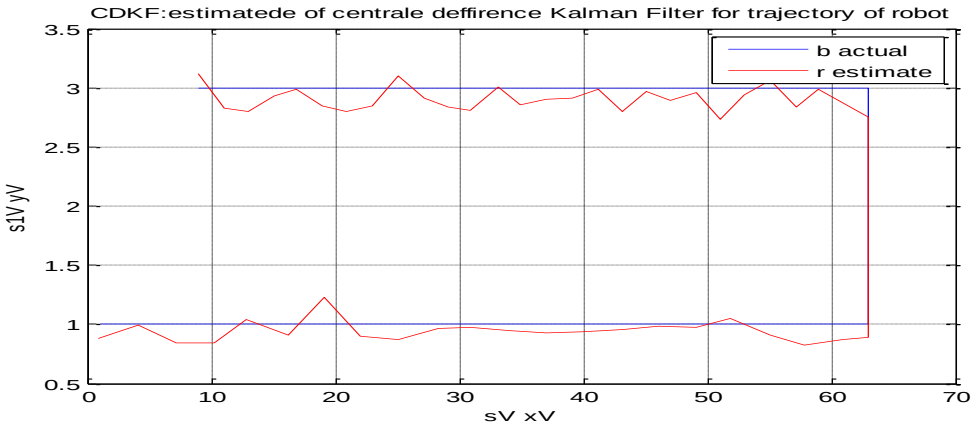


Figure 4.18- trajectoire du robot et son estimée par le filtre de Kalman à déférence centrale

La trajectoire du robot pour deux rotations successives $\theta_1 = \pi/2$ et $\theta_2 = \pi/2$ est bien estimée avec le filtre de Kalman à déférence centrale. Le résultat est illustrés dans la figure 4.18 qui montre la supperposition de la trajectoire du robot mesuré et celle estimé.

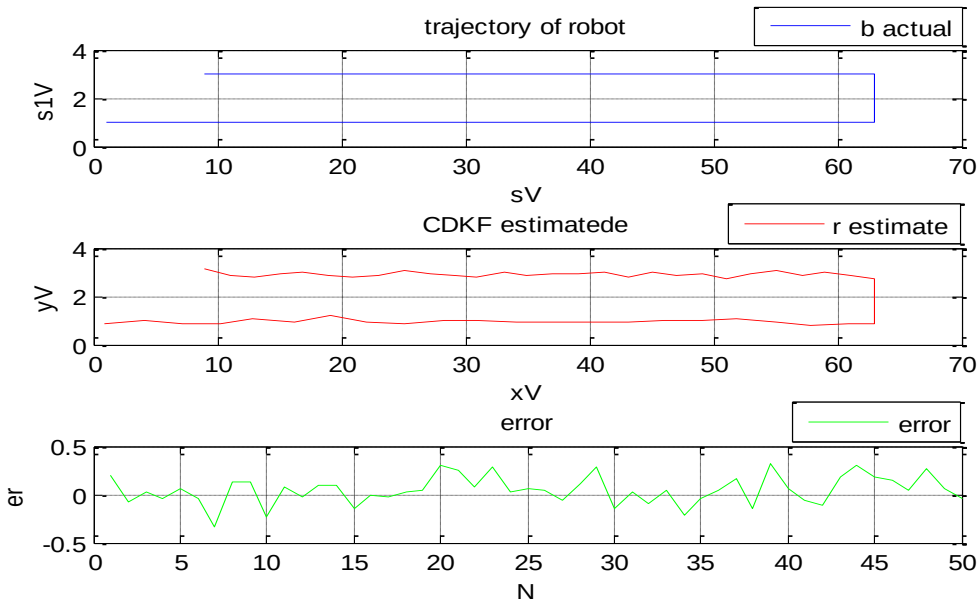


Figure 4.19- trajectoire du robot, son estimée par le filtre de Kalman à déférence centrale et l'erreur de l'estimation

La figure 4.19 montre la trajectoire du robot pour deux rotations successives $\theta_1 = \pi/2$ et $\theta_2 = \pi/2$ et son estimée par le filtre de Kalman à déférence centrale et l'erreur de l'estimation. L'erreur d'estimation tend vers zéro.

4.6 Comparaison entre la trajectoire du robot avec les estimés des filtres EKF, UKF et CDKF et leurs erreurs:

Dans ce qui suit ; on présente une comparaison des différentes estimations réalisées par le filtre de Kalman étendu, filtre de Kalman sans parfums et le filtre de Kalman à différence centrale. Les figures (4.20, 4.22 et 4.24) montrent la trajectoire mesurée du robot et ses estimations sur la même figure pour la même trajectoire respectivement avec un angle de rotation de $\theta = \pi/2$, puis un angle de rotation de $\theta = \pi/3$ et avec deux angles de rotation successives $\theta_1 = \pi/2$ et $\theta_2 = \pi/2$. Les figures (4.21, 4.23 et 4.25) montrent des comparaisons des erreurs d'estimation des différents filtres utilisés précédemment.

- Pour $\theta = \pi/2$:

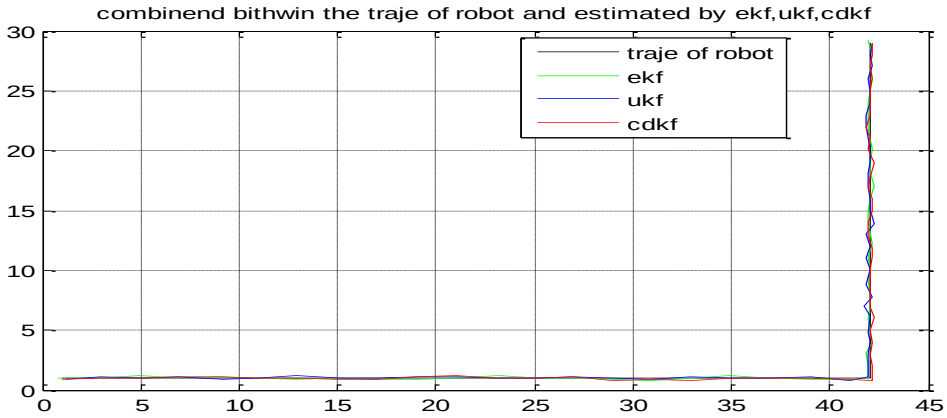


Figure 4.20- Comparaison entre la trajectoire du robot et de l'estimation des filtres de EKF, UKF et CDKF pour $\theta = \pi/2$

La trajectoire du robot pour $\theta = \pi/2$ (rotation verticale) est bien estimée avec le filtre de Kalman étendu, le filtre de Kalman sans parfums et le filtre de Kalman à déférence centrale. Le résultat est illustrés dans la figure 4.20 qui montrent la supperposition entre la trajectoire du robot mesuré et les estimés.

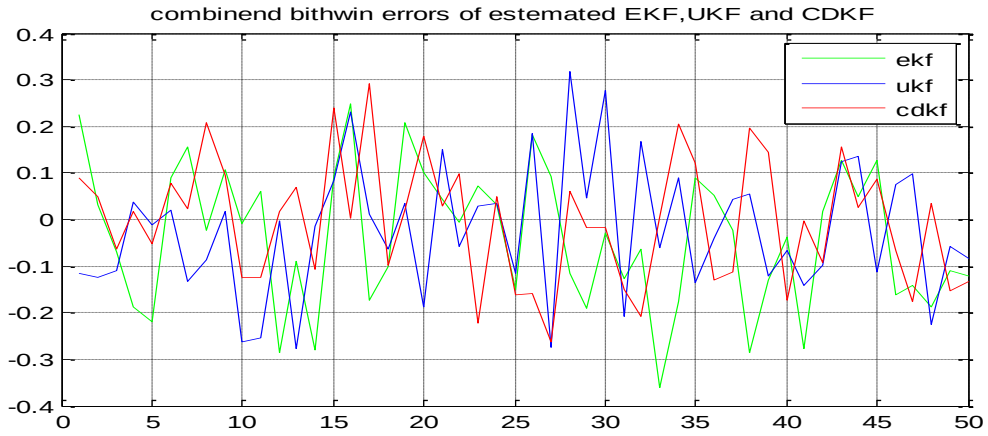


Figure 4.21- Comparaison entre les erreurs de l'estimation des filtres de EKF, UKF et CDKF pour $\theta = \pi/2$

La reconstitution de la trajectoire par les filtres conçus est bien faite car le montre la figure 4.21 de sa superposition avec ses estimés et la figure 4.21 qui montre l'évolution des erreurs d'estimation. Il est clair que ces dernière tendent vers zéro avec un rapport de valeurs maximale à la valeur du signale de la trajectoire est de 0.8% pour l'estimation réalisée par le filtre de Kalman étendu, 0.6% pour l'etimation réalisée par le filtre de Kalman sans parfums et 0.35% pour celle réalisée par le filtre de Kalman à déférence centrale.

- pour $\theta = \pi/3$:

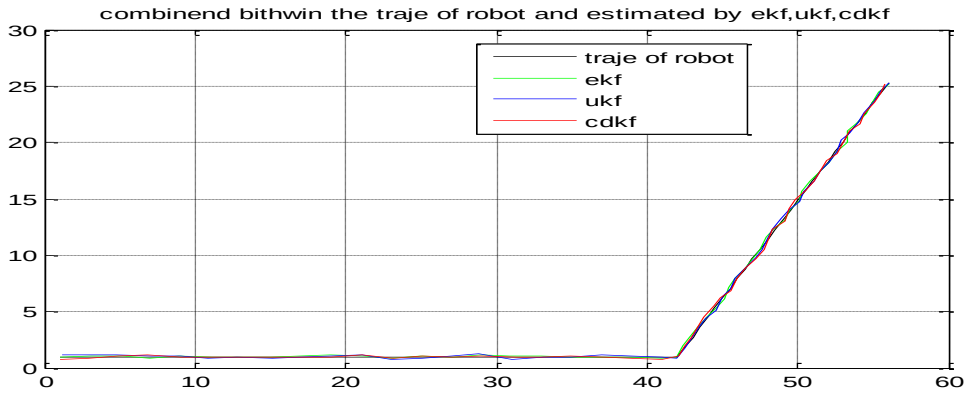


Figure 4.22- Comparaison entre la trajectoire du robot et de l'estimation des filtres de Kalman EKF, UKF et CDKF pour $\theta = \pi/3$

La trajectoire du robot pour $\theta = \pi/3$ (rotation inclinée) est bien estimée avec le filtre de Kalman étendu, le filtre de Kalman sans parfums et le filtre de Kalman à déférence centrale. Le résultat est illustrés dans la figure 4.22 qui montrent la supperposition entre la trajectoire du robot mesuré et les estimés.

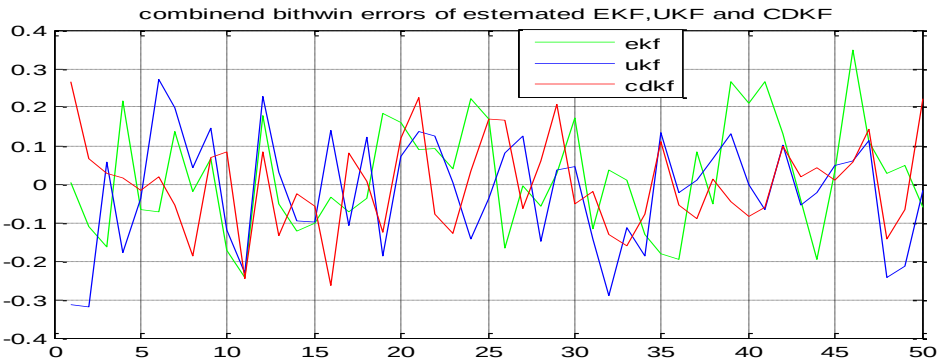


Figure 4.23- Comparaison entre les erreurs de l'estimation des filtres de Kalman EKF, UKF et CDKF pour $\theta = \pi/3$

L'erreur de l'estimation entre la trajectoire du robot pour $\theta = \pi/3$ (rotation inclinée) et son estimée vaut 0.8% pour l'estimation par le filtre de Kalman étendu, 0.6% pour l'estimation par le filtre de Kalman sans parfums et 0.35% pour l'estimation par le filtre de Kalman à déférence centrale. Les résultats sont illustrées dans la figure 4.23. D'après ces resultats, on conclue que l'erreur du filtre de Kalman à déférence centrale est petite par rapport aux erreurs d'autres filtres utilisés.

- pour $\theta_1 = \pi/2$ et $\theta_2 = \pi/2$: le robot fait deux rotations

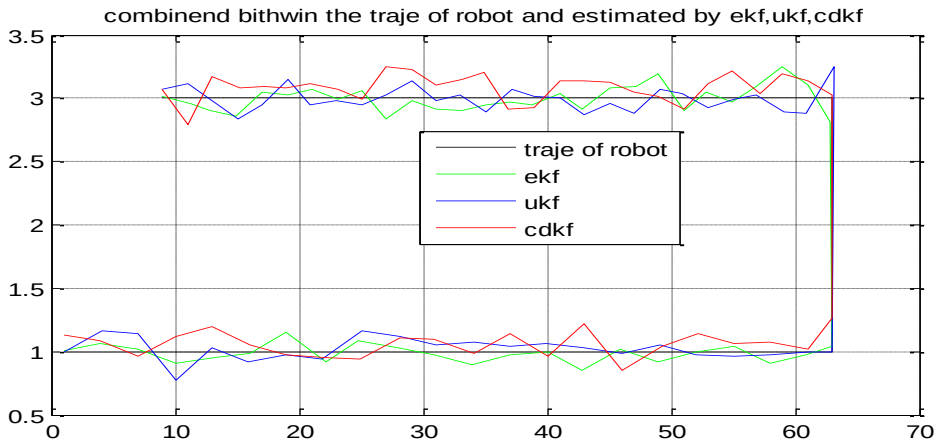


Figure 4.24- Comparaison entre la trajectoire du robot et de l'estimation des filtres de Kalman EKF, UKF et CDKF

La trajectoire du robot pour deux rotations est bien estimée avec le filtre de Kalman étendu, le filtre de Kalman sans parfums et aussi avec le filtre de Kalman à déférence centrale. Les résultats sont illustrées dans la figure 4.24 qui montre la supperposition entre La trajectoire du robot mesuré et les estimés.

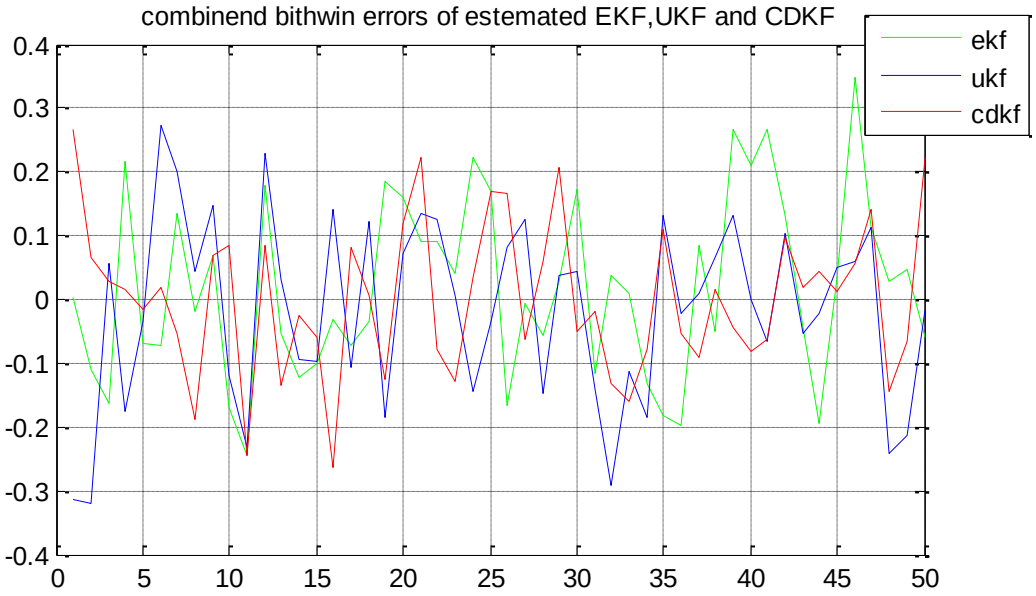


Figure 4.25- Comparaison entre les erreurs de l'estimation des filtres de Kalman EKF, UKF et CDKF

L'erreur de l'estimation de la trajectoire du robot pour deux rotations et son estimée par le filtre de Kalman étendu cette erreur d'estimation est egale à 0.8%. et son estimée par le filtre de Kalman sans parfums est egale à 0.6%. et son estimée par le filtre de Kalman à déférence centrale est egale à 0.35%. et Le résultat est illustrés dans la figure 4.25. et d'après ce resultat on conclue que l'erreur de filtre de Kalman à déférence centrale est petite par rapport au filtre de Kalman étendu et au filtre de Kalman sans parfums.

4.7 Comparaison entre les erreurs aux carrés des estimations des filtres :

Le carré de l'erreur représente une signification de l'évolution de l'erreur quadratique. Les figures 4.26, 4.27 et 4.28 montrent respectivement les variations des carrés des erreurs d'estimation des trois filtres utilisés dans le cas d'un mouvement avec une rotation d'un angle $\theta = \pi/2$, un angle $\theta = \pi/3$ et un mouvement avec deux rotations successives $\theta_1 = \pi/2$ puis $\theta_2 = \pi/2$.

- Rotation d'un angle $\theta = \pi/2$:

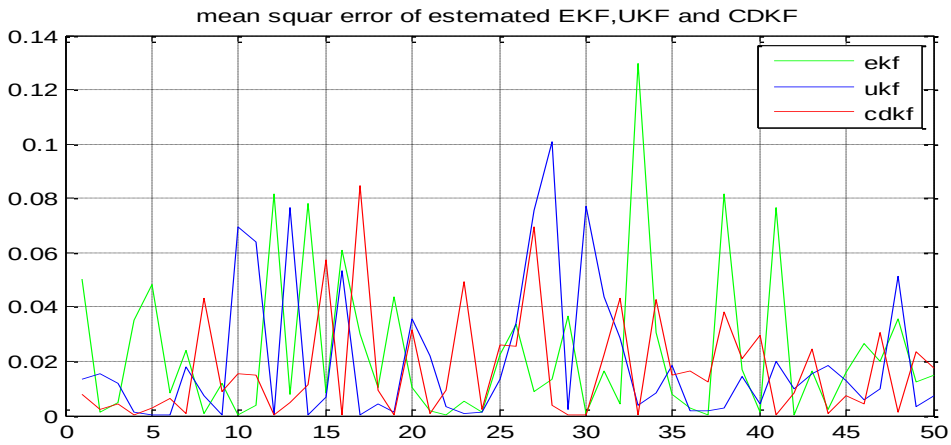


Figure 4.26- Comparaison entre les carrés des erreurs de l'estimation des filtres EKF, UKF et CDKF pour $\theta = \pi/2$

L'erreur au carré de l'estimation de la trajectoire du robot pour $\theta = \pi/2$ (rotation verticale) et son estimée par le filtre de Kalman étendu, cette erreur d'estimation est egale à 0.13%, son estimée par le filtre de Kalman sans parfums est egale à 0.1% et son estimée par le filtre de Kalman à déférence centrale est egale à 0.09%. Les résultats sont illustrées dans la figure 4.26. et d'après ces resultats, on conclue que l'erreur du filtre de Kalman à déférence centrale est petit par rapport aux erreurs des filtres de Kalman étendu et le filtre de Kalman sans parfums.

- Pour $\theta = \pi/3$: rotation inclinée de robot

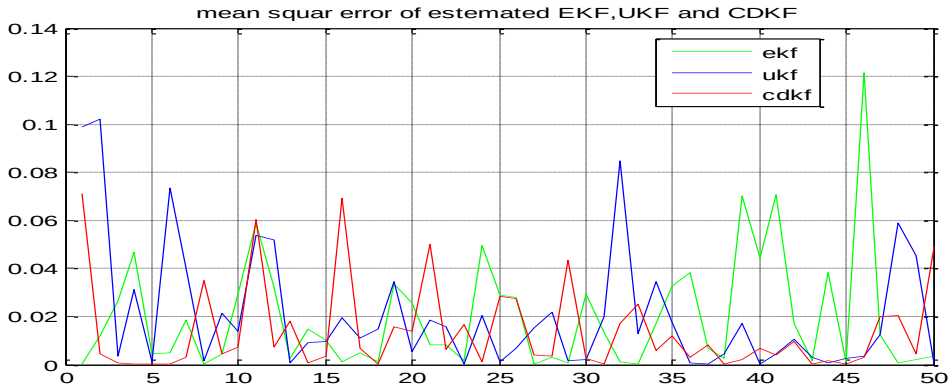


Figure 4.27- Comparaison entre les erreurs au carrée de l'estimation des filtres EKF, UKF et CDKF pour $\theta = \pi/3$

L'erreur au carrée de l'estimation de la trajectoire du robot pour $\theta = \pi/3$ (rotation inclinée) et son estimée par le filtre de Kalman étendu, cette erreur d'estimation est egale à 0.12%, son estimée par le filtre de Kalman sans parfums est egale à 0.1% et son estimée par le filtre de Kalman à déférence centrale est egale à 0.07%. Le résultat est illustré dans la figure 4.27. D'après ce resultat, on conclue que l'erreur du filtre de Kalman à déférence centrale est petit par rapport au filtre de Kalman étendu et au filtre de Kalman sans parfums.

- Pour $\theta_1 = \pi/2$ et $\theta_2 = \pi/2$: le robot fait deux rotations

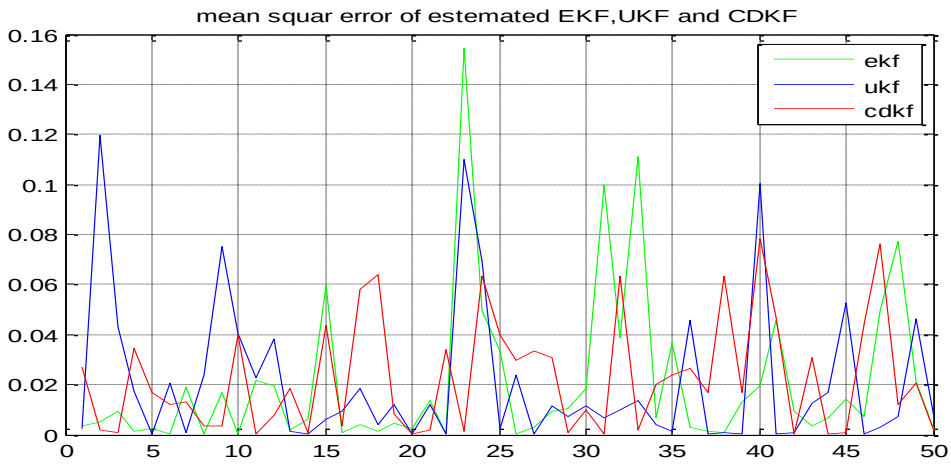


Figure 4.28- Comparaison entre les erreurs au carré de l'estimation des filtres EKF, UKF et CDKF

L'erreur au carrée de l'estimation de la trajectoire du robot pour deux rotations et son estimée par le filtre de Kalman étendu, cette erreur d'estimation est egale à 0.15%, son estimée par le filtre de Kalman sans parfums est egale à 0.12% et son estimée par le filtre de Kalman à déférence centrale est egale à 0.08%. Le résultat est illustrés dans la figure 4.28. D'après ce resultat, on conclue que l'erreur de filtre de Kalman à déférence centrale est petit par rapport au filtres de Kalman étendu et au filtre de Kalman sans parfums.

4.8 Conclusion :

Dans ce chapitre, on a présenté les résultats de la simulation des Filtres de Kalman qui sont des meilleurs observateurs stochastique, car ils donnent de très bons résultats dans le cadre d'estimation de la trajectoire du robot mobile et avec une petite erreur d'estimation au tour de zéro.

Les résultats de simulation de Filtre de Kalman étendu (EKF), qui est le meilleur filtre, car il a donné de très bons résultats dans le cadre d'estimation de la trajectoire du robot mobile et avec une petite erreur d'estimation au tour de zéro. On a présenté ensuite la simulation des résultats du filtre de Kalman sans parfums (UKF) qui est le mieux par rapport au filtre de Kalman étendu, car il donne de très bons résultats dans l'estimation de même trajectoire du robot mobile et avec une petite erreur d'estimation par rapport à l'erreur du filtre de Kalman étendu. Et on a présenté aussi la simulation des résultats de filtrage de Kalman à différence centrale (CDKF) qui est le meilleur par rapport aux deux autres filtres précédents (EKF et UKF) car il donne de très bons résultats dans l'estimation de même trajectoire du robot mobile et avec une petite erreur d'estimation par rapport aux deux autres erreurs.

Une comparaison entre les carrés des erreurs est mentionnée dans des figures de comparaison des carrés des erreurs.

Conclusion Générale:

Les travaux exposés dans ce mémoire portent sur la problématique d'estimation en présence d'incertitudes de modèle. Dans le premier chapitre, une présentation de multiples techniques d'estimation d'état dans un cadre stochastique a été effectuée. Les principes des approches linéaires optimales (vis-à-vis d'un critère de performances donné) puis non linéaires analytiques et numériques ont été en premier lieu étudiés. La prise en compte de contraintes sur les variables d'état dans le problème d'estimation a ensuite été évoquée, une telle démarche constituant un apport supplémentaire d'information.

Le deuxième chapitre a fait l'objet de l'une de nos deux principales contributions, à savoir la synthèse d'un dispositif d'estimation d'état pour systèmes non linéaires, qui est le filtre de Kalman. Ce travail se décompose en trois algorithmes. Le premier consistant au filtre de Kalman étendu, le deuxième consistant au filtre de Kalman sans parfums puis le troisième consistant au filtre de Kalman à différence centrale.

Le troisième chapitre de ce mémoire constituait une étude sur le robot mobile et quelque son type, la théorie de la navigation inertielle avec des informations en provenance d'un dispositif externe de mesures tel que le GPS puis une étude simplifié sur le capteur compas.

Le quatrième et le dernier chapitre représentait les résultats et simulation des filtres de Kalman étendu, sans parfums et à différence centrale pour l'estimation de trois chemins du robot mobile. Après avoir étudié un certain nombre d'estimateurs (ceux présentés dans le premier chapitre), nous avons finalement opté pour une utilisation de filtre de Kalman étendu, sans parfums et à différence centrale au modèle robotique ainsi élaboré a été estimée suivant différents aspects sur trois trajectoires de robot mobile. Les résultats obtenus ont montré une comparaison entre ces trois algorithmes EKF, UKF et CDKF. Enfin, en sachant grâce à des considérations d'ordre physique que les résidus de dérive sont bornés, nous avons exploité cette connaissance au travers de techniques de filtrage de Kalman sous contraintes. Les résultats obtenus ont montré une légère diminution des erreurs d'estimation de filtre de Kalman à différence centrale par rapport aux deux autres filtres de Kalman étendu et sans parfums.

La fusion des différentes données s'effectue selon un couplage de type serré, alors la représentation d'état résultante est de type non-linéaire. Les travaux du deuxième chapitre permettent ainsi de déterminer les filtres non linéaires envisageables pour un tel problème et

d’évaluer l’impact sur la qualité d’estimation de chaque élément du dispositif externe de mesures.

Enfin, ce travail présente de nombreuses perspectives, parmi lesquelles :

– l’affinement des hypothèses de travail et des modèles associés, comme par exemple celle d’une trajectoire non sphérique, la présence de biais accélérométriques, etc.

– l’essai dans un avenir proche de la solution proposée sur d’autres trajectoires et d’autres applications, puis, à plus long terme, son expérimentation dans des conditions réelles,

– la mise au point d’une technique de " bornage de covariance", qui consisterait à contraindre les écarts types associés aux résidus de dérive (modélisés par des sommes de processus auto-corrélés à l’ordre 1) de sorte qu’ils n’excèdent pas une certaine valeur, puisque l’on sait grâce à des considérations d’ordre physique que ces écarts-types sont bornés. Cela permettrait de réduire la matrice de covariance du filtre de Kalman utilisée (EKF, UKF et CDKF).

Annexe A:

A.1 Calcul de la moyenne et de la covariance d'une variable aléatoire passée à travers une fonction non linéaire :

Dans cette annexe on présente deux différentes méthodes de résolution de calcul de la moyenne et de la covariance d'une variable aléatoire :

– développements de Taylor,

– interpolation de Stirling,

A.2 Définitions préliminaires :

Soient $X \in \mathbb{R}^n$ et $Y \in \mathbb{R}^m$ deux vecteurs aléatoires mutuellement corrélés, liés entre eux par la relation $Y = \varphi(X)$ où $\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une application non linéaire. Connaissant la moyenne $\bar{x}$ et la covariance $\sum xx$ de X, le but recherché est de calculer la moyenne $\bar{y}$ et la covariance $\sum yy$ de Y , ainsi que l'inter-covariance $\sum xy$.

A.2 .1 Racine carrée d'une matrice, décomposition de Cholesky :

On appelle racine carrée d'une matrice $M \in \mathbb{R}^{n.n}$ toute matrice carrée $S \in \mathbb{R}^{n.n}$ telle que : $M = SS^T$ et S alors notée : $S = \sqrt{M}$ .Lorsque M est symétrique, il existe un algorithme simple permettant de calculer une racine carrée S de M, qui est la décomposition de Cholesky. S est alors triangulaire inférieure. La décomposition de Cholesky s'avère intéressante lorsqu'il est souhaité calculer la racine carrée d'une matrice d'auto-covariance (mais pas d'une inter-covariance, puisqu'en général, une telle matrice n'est pas symétrique), ce qui est notamment exigé par l'interpolation de Stirling et la transformation sans saveur.

A.2 .2 Découplage stochastique:

Le découplage statistique d'un vecteur aléatoire $X \in \mathbb{R}^n$ de covariance $\sum xx$ est la transformation linéaire suivante :

$$Z = (S_{xx})^{-1} X \qquad (A.1)$$

Où $S_{xx} = \sqrt{\sum xx}$ est obtenue via [14] une décomposition de Cholesky. Une telle transformation a pour conséquence de décorréler statistiquement toutes les composantes du vecteur Z.

$$\sum zz = E\big(\big(Z - E(Z)\big)(Z - E(Z))^T\big) = I_n \qquad (A.2)$$

A.2 .2 Développement de Taylor multi-variable, jacobien et hessien :

Soit la fonction non linéaire φ définie comme suit :

$$\varphi: \quad \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$X \longmapsto Y = \varphi(X) \tag{A.3}$$

En notant Y_i (respectivement X_i) la $i^{ème}$ composante de la variable aléatoire Y (respectivement X), on réécrit (A.3) sous forme d'un système de m fonctions scalaires $\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$:

$$\begin{cases} Y_1 = \varphi_1(X) \\ \vdots \\ Y_m = \varphi_m(X \end{cases} \tag{A.4}$$

On pose également :

$$\delta X = X - x = [\delta X_1 \quad ... \quad \delta X_n]^T \tag{A.5}$$

où x est une réalisation quelconque de X. Un développement de Taylor de $\varphi_i (1 \leq i \leq m)$ en x donne le résultat suivant (l'expression est ici volontairement tronquée à l'ordre 3, mais sa forme permet de trivialement étendre ce résultat à des ordres supérieurs) :

$$Y_i = \varphi_i(x) + \frac{1}{1!}\sum_{j=1}^{n}(\delta X_j)\left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial X_j}|_{X=x}\right]$$

$$+\frac{1}{2!}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(\delta X_j)\,(\delta X_k)\left[\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial X_j\,\partial X_k}|_{X=x}\right]$$

$$+\frac{1}{3!}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(\delta X_j)\,(\delta X_k)(\delta X_l)\left[\frac{\partial^3 \varphi_i}{\partial X_j\,\partial X_k\,\partial X_l}|_{X=x}\right] + \text{reste}(3) \tag{A.6}$$

Dans le cas d'un développement tronqué à l'ordre 2, d'autres formulations de (A.6), mais vectorielles cette fois ci, sont possibles :

$$Y = \varphi(x) + J(x)\,\delta X + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\Delta_i\;\delta X^T\,H_i(x)\,\delta X$$

$$= \varphi(x) + J(x)\,\delta X + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\Delta_i\,\text{trace}\,(H_i(x)\,\delta X\,\delta X^T) \tag{A.7}$$

Où $\Delta_i \in \mathbb{R}^m$ est un vecteur dont toutes les composantes sont nulles excepté la $i^{ème}$ qui vaut 1, et le jacobien $J(x)$ et les hessiens $H_i(x)(1 \leq i \leq m)$ de φ sont définis comme suit :

$$J(x) = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial X}|_{X=x}\right] = \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial X_j}|_{X=x}\right]_{\substack{i=1\to m \\ j=1\to n}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial X_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial X_n} \end{bmatrix} \quad (A.8)$$

A.3 Utilisation de développements de Taylor :

Considérons un développement de Taylor à l'ordre 2 de φ autour de la moyenne $\bar{x}$ de X ce qui autorise l'emploi de la relation (A.7). Calculons tout d'abord la moyenne $\bar{y}$ de Y :

$$\bar{y} = E(\varphi(\bar{x}) + J(\bar{x})\delta X) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \Delta_i \, \text{trace}\,(H_i(\bar{x})\, \delta X\, \delta X^T)$$

$$= \varphi(\bar{x}) + J(\bar{x})\, E(\delta X) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \Delta_i \, \text{trace}\,(H_i(\bar{x})\, E(\delta X\, \delta X^T)) \quad (A.9)$$

Or, comme par définition : $\delta X = X - \bar{x}$ alors $E(\delta X) = 0_{n.1}$ et $E(\delta X\, \delta X^T) = \sum xx$ se simplifie alors comme suit :

$$\bar{y} = \varphi(\bar{x}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \Delta_i \, \text{trace}\,(H_i(\bar{x}) \sum xx) \quad (A.10)$$

Afin d'obtenir une expression de la covariance $\sum yy$ et Y et de l'inter-covariance $\sum xy$ entre X et Y calculons $\delta Y = Y - \bar{y}$:

$$\delta Y = \varphi(\bar{x}) + J(\bar{x})\, \delta X + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \Delta_i \, \text{trace}\,(H_i(\bar{x})\, \delta X\, \delta X^T) - \varphi(\bar{x}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \Delta_i \, \text{trace}\,(H_i(\bar{x}) \sum xx)$$

$$= J(\bar{x})\, \delta X + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \Delta_i \{ \text{trace}\,(H_i(\bar{x})\, \delta X\, \delta X^T) - \text{trace}(H_i(\bar{x}) \sum xx)\}$$

Donc $$\delta Y = J(\bar{x})\, \delta X + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \Delta_i \, \text{trace}\,(H_i(\bar{x})\, \{\delta X\, \delta X^T - \sum xx\}) \quad (A.11)$$

Comme par définition, $\sum xx = E(\delta X\, \delta X^T)$, alors on suppose que $\delta X\, \delta X^T - \sum xx \approx 0_{nxn}$ de sorte que : $\delta Y = J(\bar{x})\, \delta X$. Il vient alors les résultats suivants :

$$\sum yy = J(\bar{x}) \sum xx\, (J(\bar{x}))^T$$

$$\sum xy = \sum xx\, (J(\bar{x}))^T \quad (A.12)$$

En appliquant les résultats (A.10) et (A.12) aux équations d'état et de mesure d'un modèle d'état non linéaire, on aboutit facilement les relations du filtre de Kalman étendu [14].

A.4 Interpolation de Stirling:

L'interpolation de Stirling à l'ordre 2 est équivalente à un développement de Taylor au même ordre. Pour une fonction $\varphi: X \longmapsto Y$: mono-variable à valeurs dans $\mathbb{R}$, cela donne :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X}|_{X=\bar{x}} = \frac{\varphi(\bar{x}+h)-\varphi(\bar{x}-h)}{2h}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2}|_{X=\bar{x}} = \frac{\varphi(\bar{x}+h)-\varphi(\bar{x}-h)-\varphi(\bar{x})}{h^2} \qquad (A.13)$$

Où $h > 1$ est une largeur de fenêtre, à déterminer. L'idée suggérée par Norgaard. Est de remplacer le développement de Taylor à l'ordre 2 évoqué dans la section précédente par les formules d'interpolation de Stirling, l'avantage d'une telle approche étant d'éviter le calcul des divers jacobiens et hessiens. Toutefois, l'interpolation de Stirling n'est exploitable que pour des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'extension au cas d'une fonction φ définie comme suit :

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$X \longmapsto Y = \varphi(X) = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(X) \\ \vdots \\ \varphi_m(X) \end{bmatrix} \qquad (A.14)$$

s'effectue en procédant à un découplage stochastique de X, de sorte que chaque composante δZ_i , $1 \leq i \leq n$ de :

$$\delta Z = (S_{xx})^{-1}(X - \bar{x}) \qquad (A.15)$$

$$S_{xx} = \sqrt{\sum xx} \qquad (A.16)$$

Soit centrée, d'écart-type unitaire et indépendante de δZ_j pour $j \neq i$, ces considérations permettent d'aboutir après un certain nombre de calculs aux résultats suivants :

-moyenne :

$$\bar{y} = \frac{h^2-n}{h^2}\varphi(\bar{x}) + \frac{1}{2h^2}\sum_{i=1}^{n}\{\varphi(\bar{x} + h[S_{xx}]_i) + \varphi(\bar{x} - h[S_{xx}]_i)\} \qquad (A.17)$$

-variance :

$$P_{yy} = \frac{1}{4h^2}\sum_{i=1}^{n}\{\varphi(\bar{x} + h[S_{xx}]_i) - \varphi(\bar{x} - h[S_{xx}]_i)\}\{\dots\}^T$$

$$+\frac{h^2-1}{4h^2}\sum_{i=1}^{n}\{\varphi(\bar{x} + h[S_{xx}]_i) + \varphi(\bar{x} - h[S_{xx}]_i) - 2\varphi(\bar{x})\}\{\dots\}^T \qquad \text{(A.18)}$$

-covariance:

$$P_{xy} = \frac{1}{2h}S_{xx}\begin{bmatrix}\{\varphi(\bar{x} + h[S_{xx}]_1) - \varphi(\bar{x} + h[S_{xx}]_1)\}^T \\ \vdots \\ \{\varphi(\bar{x} + h[S_{xx}]_n) - \varphi(\bar{x} + h[S_{xx}]_n)\}^T\end{bmatrix} \qquad \text{(A.19)}$$

Tel que $\{\dots\}^T$, est un raccourci représentant la transposée de l'expression entre accolades immédiatement précédente par exemple $\{A\}\{\dots\}^T = AA^T$: Les résultats (A.17), (A.18) et (A.19) conduit directement à l'algorithme du filtre de Kalman à différence centrale (CDKF).

Annexe B:

B.1 Calcul de la moyenne et de la covariance d'une variable aléatoire:

Dans cette annexe on présente deux différentes méthodes de résolution de calcul de la moyenne et de la covariance d'une variable aléatoire :
– transformation sans saveur,
– simulation du type Monte Carlo.

B.2 Utilisation de la transformation sans parfums (unscented):

L'emploi de développement de Taylor ou de l'interpolation de Stirling consiste à effectuer une approximation d'une fonction non linéaire φ définie comme suit :

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$X \longmapsto Y = \varphi(X) \qquad \text{(B.1)}$$

Le principe de la transformation sans parfums (unscented), introduite par Julier et Uhlmann, est tout autre. Il se base sur le constat suivant :

Il est plus simple d'approximer une densité de probabilité de type gaussienne qu'une fonction non-linéaire quelconque. Concrètement, cela consiste à sélectionner judicieusement quelques échantillons de la densité de probabilité de X à approximer, de sorte que l'ensemble de ces points présente des moments d'ordre 1, 2, voire supérieurs, identiques à ceux de la densité continue originale. Autrement dit, les informations principales transportées par la densité de probabilité de X sont encodées par l'ensemble des points sélectionnés. Chacun de ces points est alors passé par la fonction φ, les points résultants servant à calculer $\bar{y}$, $\sum yy$ et $\sum xy$.

Ce concept est illustré sur les figures B.1.a et B.1.b dans le cas simple d'une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

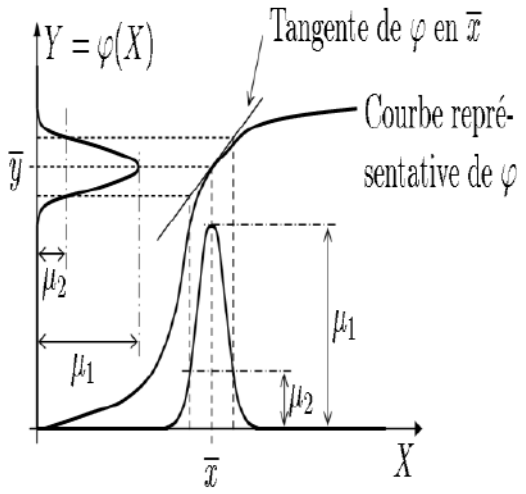


Figure B.1.a- Principe de la Linéarisation à l'ordre 1(EKF)

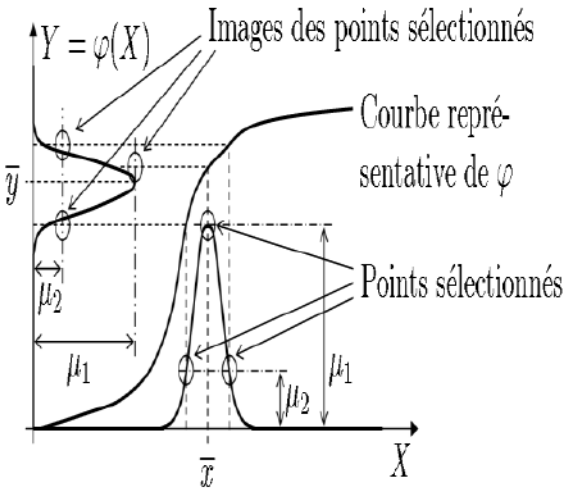


Figure B.1.b- Principe de la transformation sans parfums(UKF)

Le principe de la transformation sans parfums pour une fonction mono-variable, c'est de comparer la linéarisation de l'ordre 1 et réaliser un découplage stochastique du vecteur X centré :

$$Z = (S_{xx})^{-1}(X - \bar{x}) \tag{B.2}$$

$$S_{xx} = \sqrt{\sum xx} \tag{B.3}$$

Chacune des composantes $Z(1 \leq i \leq n)$ de Z présente alors une moyenne nulle et une variance (ou écart-type) unitaire. On va sélectionner trois points de $\mathbb{R}$ et leur associer un poids, de sorte que la moyenne m et la variance V de cet ensemble de trois points valent respectivement 0 et 1. La répartition de ces points est illustrée sur la figure B.2. On peut alors aisément en déduire que :

$$m = \mu_1 0 + \mu_2 h - \mu_2 h = 0$$

$$V = \mu_1(0 - m)^2 + \mu_2(h - m)^2 - \mu_2(-h - m)^2 \tag{B.4}$$

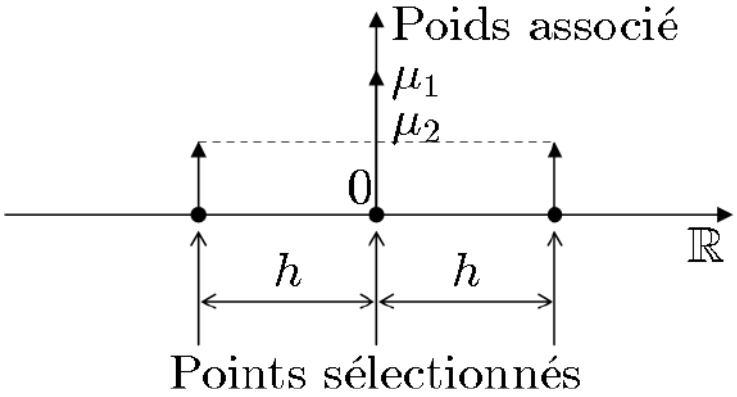


Figure. B.2 – Répartition des points pour la transformation sans parfums

La condition $V = 1$ conduit donc à la définition suivante pour h :

$$h = \frac{1}{\sqrt{2\mu_2}} \tag{B.5}$$

En outre, on introduit le paramètre k de sorte que $\mu_2 = 2k\mu_1$. Comme il y a un point de poids μ_1 et 2n points de poids μ_2(2 points pour chacune des n composantes de Z) et que la somme des poids vaut 1, alors :

$$\mu_1 = \frac{k}{n+k}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2(n+k)} \tag{B.6}$$

La relation (B.5) devient ainsi :

$$h = \sqrt{n + k} \tag{B.7}$$

Pour obtenir le placement des points dans $\mathbb{R}^n$, il suffit alors d'effectuer la transformation inverse du découplage stochastique (B.3). Les points ainsi obtenus, au nombre de $\sigma = 2n + 1$ sont ensuite passés à travers la fonction non-linéaire φ. Les σ points résultants, dont les poids sont inchangés, permettent ainsi de déterminer la moyenne et la covariance de X , ainsi que la covariance croisée entre X et Y.Concernant le paramètre k, sa valeur est généralement choisie de manière à ce que les σ points présentent non seulement des moments d'ordre 1 et 2 égaux à ceux de X, mais également des moments d'ordre 3 et 4 identiques. Compte tenu du placement symétrique des σ points autour de x, il est évident que ces derniers présentent des moments d'ordre impair nuls, et donc un moment d'ordre 3 nul. Autrement dit, la transformation sans saveur ne permet d'encoder que les informations de densités de probabilité symétriques, gaussiennes par exemple. Dans ce dernier cas de figure, le moment d'ordre 4 des Z_i vaut 3 et

par conséquent, en se référant à la figure B.2 et aux égalités (B.5) et (B.6), il vient le réglage suivant :

$$2\mu_2 h^4 = h^2 = n + k = 3 \qquad \text{(B.8)}$$

L'inconvénient de ce paramétrage est que pour des vecteurs de dimension $n > 3$, alors $k < 0$, et par conséquent $\mu^{(1)} < 0$, ce qui peut conduire à des covariances $\sum yy$ non définies positives. Pour éviter ce problème, on pourrait se cantonner à poser $k = 0$ bien que ce réglage ne soit pas optimal. Malheureusement, un autre problème se pose puisque pour de grandes valeurs de n et σ points se trouvent relativement éloignés les uns des autres, ce qui engendre des phénomènes de non localité. Pour pallier cet inconvénient, Julier et Uhlmann ont développés la transformation sans saveur mise à l'échelle. Cela consiste à introduire un second paramètre $0 < \alpha \leq 1$ tel que (B.6) se trouve modifié comme suit :

$$h = \propto \sqrt{n + k} \qquad \text{(B.9)}$$

Certains auteurs introduisent alors le paramètre λ dont le but est d'être l'équivalent de k pour la transformation mise à l'échelle :

$$h = \sqrt{n + \lambda} \qquad \text{(B.10)}$$

Les définitions (B.9) et (B.10) conduisent alors aisément à l'expression suivante pour λ :

$$\lambda = h^2 - n = \alpha^2(n + k) - n \qquad \text{(B.11)}$$

Les poids μ_1 et μ_2 évoqués précédemment se trouvent quant-à-eux modifiés comme suit :

$$\mu_1 = \frac{\lambda}{n+\lambda}$$

$$\mu_1 = \frac{1}{2(n+\lambda)} \qquad \text{(B.12)}$$

En outre, Julier et Uhlmann ont modifié l'expression de μ_1 pour le calcul des covariances, dans le but de minimiser les moments d'ordre 3 et 4 de Y:

$$\mu_1{}^{cov} = \mu_1 + 1 - \alpha^2 + \beta \qquad \text{(B.13)}$$

Où la valeur optimale du paramètre β est $\beta = 2$ dans le cas où Y est gaussien. La transformation sans parfums mise à l'échelle est synthétisée et elle permet d'aboutir directement à l'UKF.

B.3 Utilisation de simulation de Monte Carlo:

Un moyen simple pour évaluer les grandeurs caractéristiques d'une variable aléatoire passée au travers d'une fonction non linéaire est d'effectuer de la simulation de Monte Carlo. Typiquement, en sachant que X suit une loi normale de moyenne $\bar{x}$ et de covariance $\sum xx$, alors cela consiste à :

1- générer N réalisations $x^{(i)}$ de X en les tirant selon $N(\bar{x}, \sum xx)$.Ces N tirages sont appelés particules, par analogie avec le filtrage particulaire.

2- calculer les N images $y^{(i)}$ des particules $x^{(i)}$ par la fonction φ :

$$y^{(i)} = \varphi(x^{(i)}) \qquad \text{(B.14)}$$

1- Calculer la moyenne $\bar{y}$ de Y à partir de l'ensemble des points $\{y^{(i)}\}_{1\leq i\leq N}$. Cette moyenne est qualifiée de moyenne d'ensemble :

$$\bar{y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y^{(i)} \qquad \text{(B.15)}$$

5- Calculer la covariance $\sum yy$ et l'inter-covariance $\sum xy$ à partir des ensembles des points $\{x^{(i)}\}_{1\leq i\leq N}$ et $\{y^{(i)}\}_{1\leq i\leq N}$:

$$\sum yy = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y^{(i)} - \bar{y})(y^{(i)} - \bar{y})^{T}$$

$$\sum xy = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x^{(i)} - \bar{x})(y^{(i)} - \bar{y})^{T} \qquad \text{(B.16)}$$

Ces résultats permettent d'aboutir directement à l'EnKF,. A noter que le calcul de la covariance d'ensemble est analogue à celui de la covariance empirique introduite dans les calcules, ce qui est somme toute logique puisque ces deux grandeurs sont issues d'un ensemble de simulations. L'introduction du concept de simulation de Monte Carlo dans le problème de filtrage de Kalman non linéaire a été introduite par Geir Evensen.

– l'emploi de l'interpolation de Stirling, aboutissant au filtre de Kalman à différence centrale l'usage de la transformation dite sans saveur (unscented en anglais), laquelle est à la base du filtre de Kalman de même nom (Unscented Kalman Filter - UKF),

– l'utilisation de simulation de type Monte Carlo, conduisant au filtre de Kalman d'ensemble (EnKF) [14].

ANNEXE C :

C.1 Robots Mobiles :

C.1.1 Classes de robots a roues :

Il existe plusieurs classes de robots à roues déterminées, principalement, par la position et le nombre de roues utilisées. il ya quatre classes principales de robots à roues Robot unicycle, Robot tricycle, Robot voiture et Robot omnidirectionnel qui sont détaillés dans le chapitre 3.

C.1.2 Les représentations de l'environnement du robot :

Lorsqu'aucun modèle métrique n'est utilisé pour les capteurs, les données sont en général mémorisées dans une carte topologique [28, 31] (figure C.1). Dans une telle carte, un ensemble de lieux et leurs relations de voisinage sont mémorisées. Chaque lieu est défini au moyen de perceptions recueillies lorsque le robot se trouve à la position correspondante. Les relations entre lieux sont, pour leur part, déduites des données proprioceptives.

En revanche, lorsqu'un modèle métrique des capteurs est utilisé, les données peuvent être mémorisées au sein d'une carte métrique [24, 25] (figure C.1) qui rassemble dans un même cadre de référence les données proprioceptives et les perceptions. La carte contient alors un ensemble d'objets, ayant chacun une position associée. Naturellement, il est possible de construire une carte topologique lorsqu'un modèle métrique est utilisé. Dans ce cas, toutefois, les perceptions ne sont en général pas utilisées pour estimer la position relative des lieux visités, mais seulement pour caractériser ces lieux. Notons que la notion de topologique et de métrique est différente de celle mentionnée pour les stratégies de navigation dans l'introduction. Ici, cette notion fait référence à la manière dont les informations sont mémorisées et non à la stratégie de navigation utilisée. Ainsi une carte topologique pourra contenir des informations métriques et pourra être utilisée pour une stratégie de navigation métrique, au sens donné dans l'introduction. Dans la suite de ce cours, le concept topologique métrique fera toujours référence au type de carte utilisé, et non à la stratégie correspondante.

C.2.1 Cartes topologiques:

Les cartes topologiques permettent de représenter l'environnement du robot sous forme de graphe. Les nœuds du graphe correspondent à des lieux, c'est-à-dire des positions que le robot peut atteindre. Les arêtes liant les nœuds marquent la possibilité pour le robot de passer comme dans la figure C.

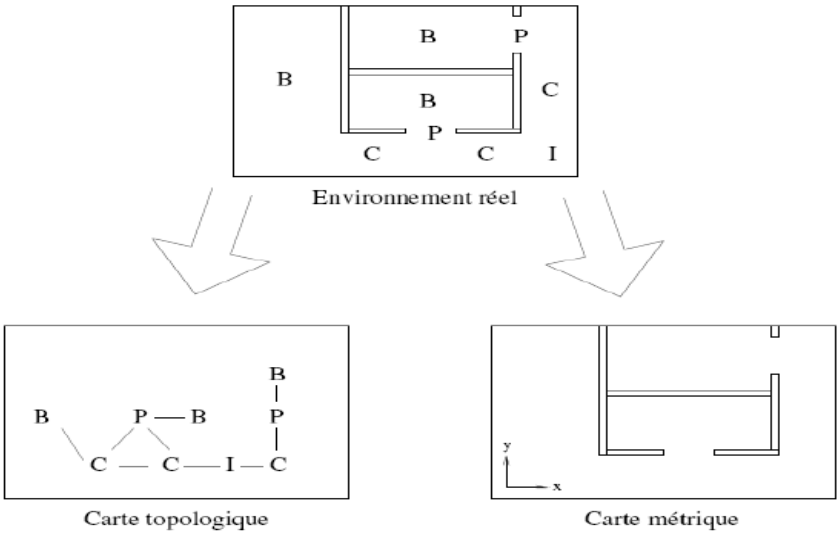


Figure C.1- Les cartes utilisées en robotique

Les cartes utilisées en robotique peuvent être de deux types : les cartes topologiques, d'une part, qui mémorisent un ensemble de lieux, ainsi que les manières de se déplacer de l'un à l'autre (dans cet exemple, B=Bureau, C=Couloir, P=Porte et I=Intersection) et les cartes métriques, d'autre part, qui mémorisent un ensemble d'objets perçus (des murs dans cet exemple) avec une position dans un cadre de référence global.

C.3 Fusion de capteurs :

Nous avons vu que les différentes données recueillies par les capteurs du robot sont mémorisées au sein d'une carte représentant l'environnement. Une source unique d'information étant en général insuffisante pour construire une représentation efficace et utilisable de l'environnement, cette carte est le lieu d'intégration des données de différents capteurs. Ces capteurs peuvent donner des informations très diverses, soit de type spatial (capteurs à ultrasons, télémètres, vision stéréoscopique), soit de type non spatial (température, couleur). Le problème de l'utilisation conjointe de tous ces capteurs pour la réalisation d'une tâche unique est abordé dans la littérature sous le nom de fusion de capteurs [28]. Les cartes topologiques et métriques réalisent cette fusion de capteurs de deux manières différentes qui permettent de reformuler les avantages et les inconvénients des deux types de cartes. En effet, les cartes métriques utilisent un cadre de référence global commun pour réaliser cette fusion. Chacun des capteurs utilisés doit donc être associé à un modèle métrique qui permet l'intégration de ces données dans le cadre commun. Cela limite donc les types de capteurs utilisables à ceux fournissant une information spatiale, pour lesquels un tel modèle peut être

construit. Les cartes topologiques, quant à elles, permettent l'utilisation de tous les types de capteurs car elles n'utilisent pas de cadre de représentation unique. La méthode de fusion est une méthode d'association qui permet de relier les données de différents capteurs qui correspondent à un même lieu. Cette méthode permet ainsi une fusion des données plus souple et plus générale que la méthode utilisée pour une carte métrique. La reconnaissance d'un lieu peut ainsi être réalisée en combinant facilement des critères autres que des critères spatiaux. Cette seconde technique peut être appelée intégration de capteurs [28]. Elle est plus adaptée au cas d'un robot pouvant posséder une large variété de capteurs car la gestion de chacun peut être réalisée indépendamment des autres.

REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUE:

[1] Julier, J. Uhlmann, and H. Durrant-Whyte, "A new approach for filtering nonlinear systems," in Proceedings of the American Control Conference. 1995.

[2] R. Banavar. A game theoretic approach to linear dynamic estimation. Thèse de doctorat, University of Texas, Austin, 1992.

[3] J. Buhmann,W. Burgard, A. B. Cremers, D. Fox, T. Hofmann, F. Schneider, J. Strikos, and S. Thrun. The mobile robot rhino. AI Magazine, 16(1), 1995

[4] W. Burgard, D. Fox, D. Hennig, and T. Schmidt. Estimating the absolute position of a mobile robot using position probability grids. In Proceedings of the Thirteenth National Conference on Artificial Intelligence (AAAI-96), 1996

[5] E. Wan & A. Nelson. "Dual Kalman filtering methods for nonlinear prediction, estimation and smoothing". Advances in neural information processing systems, Cambridge, U.K., 1997.

[6] B. D. O. Anderson & J. B. Moore. Optimal filtering. Prentice Hall inc., 1979.

[7] S. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon & T. Clapp. "A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking". IEEE Transactions on Signal Processing, 2002.

[8] M. Athans & E. Tse. "A direct derivation of the optimal linear filter using the maximum principle". IEEE Transactions on Automatic Control, 1967.

[9] L. D. Avendaño-Valencia, L. E. Avendaño, J. M. Ferrero & G. Castellanos Dominguez. "Improvement of an extended Kalman filter power line interference suppressor for ECG signals". Computers in cardiology, 2007.

[10] S. Azou. Réalisation équilibrée de systèmes par orthogonalisation de fonctions d'entrée. Grammiens et approximation. Thèse de doctorat, Université de Bretagne occidentale, 1997.

[11] R. Banavar. A game theoretic approach to linear dynamic estimation. Thèse de doctorat, University of Texas, Austin, 1992.

[12] Y. Bar-Shalom, X. Li & T. Kirubarajan. Estimation with applications to tracking and navigation. John Wiley & sons inc., 2001.

[13] O. Y. Bas, B. Shafai & S. P. Linder. "Design of optimal gains for the proportional integral Kalman filter with application to single particle tracking". IEEE Conference on Decision and Control, Phoenix, Ar., U.S.A., 1999.

[14] Vincent SIRCOULOMB. Etude des concepts de filtrage robuste aux méconnaissances de modèle et aux pertes de mesures. Application aux systèmes de navigation. THESE de Doctorat.2006

[15] Mihai Bogdan Luca. Apports du chaos et des estimateurs d'états pour la transmission sécurisée de l'information. THESE de Doctorat, Université de Bretagne occidentale.2006

[16] J. A. Barnes, A. R. Chi, L. S. Cutler, D. J. Healey, D. B. Leeson, T. E. Mac Gunical, J. A. Mullen, W. L. Smith, R. L. Sydnor, R. F. C. Vessot & G. M. R. Winkler."Characterization of frequency stability". IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 1971.

[17] S. Beale & B. Shafai. "Robust control system design via a proportional integral observer". International Journal of Control, 1989.

[18] R. Ben Abdennour, P. Borne, M. Ksouri & F. M'Sahli. Identification et commande numérique des procédés industriels. Technip, 2001.

[19] S. P. Bhattacharyya. "Observer design for linear systems with unknown inputs" IEEE Transactions on Automatic Control, 1978.

[20] G. Bierman. "Measurement updating using the UD factorization". Automatica, 1976.

[21] G. Bierman & C. Thornton. "Numerical comparison of Kalman filter algorithms : Orbit determination case study". Automatica, 1977.

[22] H. A. P. Blom & Y. Bar-Shalom. "The Iteracting Multiple Model algorithm for systems with Markovian switching coefficients". IEEE Transactions on Automatic Control, 1988.

[23] P. L. Bogler. "Tracking a maneuvering target using input estimation". IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1987.

[24] O. Bonnet Torres. "Filtrage de Kalman appliqué à la navigation inertielle". 2003.

[25] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J. P. Richard, F. Rotella & I. Zambettakis. Commande et optimisation des processus. Technip, 1990.

[26] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J. P. Richard, F. Rotella & I. Zambettakis. Modélisation et identification des processus. Tome 2, Technip, 1992.

[27] J. E. Bortz. "A new concept in strapdown inertial navigation". Technical report TR R-329, NASA, Washington, 1970.

[28] J. E. Bortz. "A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation". IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1971.

[29] O. Boutin. "La navigation". 2006. Document interne de SAGEM Défense Sécurité.

[30] J. M. Brossier & P. O. Amblard. "Filtrage particulaire appliqué aux télécommunications". Journées d'études SEE, Paris, France, 2004.

[31] J. P. Brossard. "Dynamique générale : forme vectorielle". Techniques de l'ingénieur, 1999. Traité Sciences Fondamentales.

[32] T. S. Schei. A finite-difference method for linearization in nonlinear estimation algorithms. Automatica, Nov. 1997.

[33] G. Burgers, P. Van Leeuwen & G. Evensen. “Analysis scheme in the Ensemble Kalman Filter”. Monthly Weather Revue, 1998.
[34] S. Buyamin & J. W. Finch. “Tuning extended Kalman filter for induction motor drives using simulated annealing”. Modelling, Identification and Control Conference, Innsbruck, Austria, 2007.
[35] Z. Cai, F. Le Gland & H. Zhang. “An adaptive local grid refinement method for nonlinear filtering”. Rapport technique n°2679, INRIA, Rennes, 1995.
[36] J. Carpenter, P. Clifford & P. Fearnhead. “Efficient implementation of particle filters for nonlinear systems”. 4th interim report, DRA contract WSS/U1172, department of statistics, University of Oxford, 1997.
[37] R. Van der Merwe. SPKF for probabilistic inference in dynamic state-space models. Thèse de doctorat, Faculty of the OGI school of Science & Engineering, 2004.
[38] R. Van der Merwe & E. Wan. “Sigma-Point Kalman Filters for integrated navigation”. 60th annual meeting of the Institute Of Navigation (ION), Dayton, U.S.A., 2004.
[39] R. Van der Merwe & E. Wan. “Sigma-Point Kalman Filters for nonlinear estimation and sensor fusion. Applications to integrated navigation”. AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, Providence, R.I., U.S.A., 2004.
[40] E. Wan & A. Nelson. “Dual EKF methods”. Ed. : T. Haykins, Kalman filtering and neural network, John Wiley & sons inc., 2001.
[41] E. Wan & R. Van der Merwe. “The unscented Kalman filter”. Ed. : T. Haykins, Kalman filtering and neural network, John Wiley & sons inc., 2001.
[42] E. Wan & A. Nelson. “Dual Kalman filtering methods for nonlinear prediction, estimation and smoothing”. Advances in neural information processing systems, Cambridge, U.K., 1997.
[43] R. E. Kalman. “A new approach to linear filtering and prediction problems”. Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering, Series D, 1960.
[44] R. E. Kalman & R. S. Bucy. “New results in linear filtering and prediction theory”. Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering, Series D,1961.
[45] M. V. Basin. On optimal filtering for polynomial system states. J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control, March 2003.
[46] Bradley M. Bell and FrederickW. Cathey. The iterated kalman filter update as a gauss-newtonmethod. IEEE Trans. Automat. Contr, Feb. 1993.
[47] M. Boutayeb, M. Darouach, and H. Rafaralahy. Generalized state space observers for chaotic.