République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Par

Ben Meradi Nourelhouda

ETUDE DE QUELQUES PROBLÈMES PARABOLIQUES NON LOCAUX

Soutenu publiquement le 23 juin 2024 devant le jury composé de

Hocine AYADI	*MCA.* **Univ. Médéa**	**Président**
Rezak SOUILAH	*MCA.* **Univ. Médéa**	**Encadreur**
Khaled BOUADJILA	*MCA.* **Univ. Médéa**	**Examinateur**

Année universitaire 2023/2024

Remerciements

Tout d'abord, je voudrais remercier ***Allah****, tout puissant, qui m'a donné la force de mener à bien ce travail.*

Je remercie tout particulièrement Monsieur ***R. SOUILAH****, qui a dirigé ce travail. Son enthousiasme, sa bienveillance et sa compétence m'a conduit bien plus loin que je n'aurais pu l'imaginer. J'ai énormément appris auprès de lui et je tiens à lui faire part de toute ma gratitude.*

Mes remerciements vont également à Monsieur ***H. AYADI****, président du jury qui a accepté de relire ce travail.*

Je remercie vivement Monsieur ***K. BOUADJILA*** *qui m'a fait honneur en acceptant d'examiner et de juger ce travail.*

Je souhaite aussi remercier tous les enseignants du département de mathématiques et informatique de la faculté des sciences de l'université Yahia Farès Médéa.

إهداء

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات

اللهم لك الحمد كما ينبغي لجلال وجهك وعظيم سلطانك

الحمد لله على كثير نعمه الحمد لله أن سخر لي أن أصل لهذا النجاح وأن حفني برعايته خلال هذا الطريق

اللهم صل وسلم على خير المرسلين محمد الصادق الأمين صلى الله عليه و سلم تسليما كثيرا.

أهدي هذا العمل :

للذين لم أكن لأصل دونهم للذين آمنو بي لمصادر إلهامي لقرة عيني التي ضحت بالنفس والنفيس من أجلنا لأمي ولسندي لمشعري بالأمان أبي ولأشقائي الأعزاء مروى ياسمين عبدالفتاح بدر الدين و رتاج ولزوجي

ولصديقاتي المميزات على ومحبتهم لي خاصة رفيدة و رميساء وباقي أفراد عائلتي

و لجميع الأساتذة الذين درسوني خلال مسيرتي الدراسية لكل من ساهم في هذا العمل من قريب أو بعيد وأشكرهم على تشجيعهم ودعمهم لي وأهديه لنفسي التي صبرت و حاربت للوصول ووصلت لهذا النجاح بفضل الله .

نور الهدى

Résumé

Dans ce mémoire, on a étudié deux types de problèmes paraboliques non locaux. On a démontré des résultats d'existence pour ces problèmes par des arguments de point fixe et la méthode de Faedo-Galerkin..

Mots-clés : Problèmes paraboliques non locaux, Lemma Aubin-Lions, Point fixe de Leray-Schauder,Méthode de Faedo-Galerkin.

Notations

Ω	un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$
$\partial\Omega$	frontière topologique de Ω
$x=(x_1,\cdots,x_N)$	point générique de $\mathbb{R}^N$
$dx=dx_1dx_2\cdots dx_N$	mesure de Lebesgue sur Ω
$Q=\Omega\times]0,T[$ t	variable du temps, $T>0$
$\Sigma=\partial\Omega\times]0,T[$	
$\overline{\Omega}$	l'adhérence de l'ensemble Ω
$\rightharpoonup$	la convergence faible
p.p.	presque partout
V	un espace de Banach
H	un espace de Hilbert
V'	le dual topologique de V
$\langle .,. \rangle_{V'\times V}$	le crochet de dualité entre
	l'espace V et son dual topologique V'
$\|.\|$	la norme sur l'espace de Banach V
$(.,.)$	le produit scalaire sur l'espace de Hilbert H
$\|.\|$	la norme sur l'espace de Hilbert H
$\mathbb{R}^{m\times N}$	l'espace des matrices réelles.
Id	désigne la matrice d'identité.
$f^+=\max(f,0)$, $f^-=\max(-f,0)$	la partie positive et négative de la fonction f
$\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$	l'espace des fonctions continues

$L^p(\Omega)$	espace de Lebesgue
$\mathscr{D}(\Omega) = \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$	espace des fonctions différentiables et à support compact dans Ω
$\mathscr{C}^k(\Omega)$	espace des fonctions k-fois continûment différentiables dans Ω, Q
$\mathscr{D}'(\Omega) = (\mathscr{D}(\Omega))'$	l'espace des distributions
$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \quad \nabla u \in L^p(\Omega)\}$	un espace de Sobolev, $1 \leq p \leq \infty$
$W_0^{1,p}(\Omega)$	la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$
$W^{-1,p'}(\Omega)$	le dual topologique de l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$
$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$	un espace de Sobolev
$\mathscr{C}([0,T];V)$	espace des fonctions continues à valeurs dans l'espace de Banach V
$\mathscr{D}([0,T];V)$	espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact et à valeurs dans V.

TABLE DES MATIÈRES

Résumé i

Notation ii

Introduction 1

Introduction générale 1

1 Préliminaires 5

1 Espaces de Lebesgue 5
2 Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ 7
3 Quelques théorèmes utiles 9

2 Espaces de Bochner-Sobolev 10

1 Espaces de Lebesgue à valeurs vectorielles 10
2 Dérivation faible 14
3 Espaces de Sobolev à valeurs vectorielles 14

3 Équations paraboliques linéaires 22

1 Cadre général 22
2 Application 29
3 Régularité 31

4 Problème parabolique quasi-linéaire non local 33

1 Position du problème 33
2 Énoncé du résultat principal 34

5 Problème parabolique de type Kirchhoff 39

1 Position du problème 39
2 Énoncé du résultat principal 40

Introduction

L'objectif de ce mémoire est d'étudier quelques problèmes paraboliques non locaux. Plus précisément, on démontre l'existence des solutions faibles pour les problèmes suivants :

$$(\mathscr{P}_1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - M\left(\displaystyle\int_\Omega u\,dx\right)\Delta u = f & \text{dans } Q, \\ u = 0, & \text{sur } \Sigma, \\ u(0) = u_0, & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

et

$$(\mathscr{P}_2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - M\left(\int_\Omega |u|^2\right)\Delta u = f & \text{dans } Q, \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ u(0) = u_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de frontière suffisamment régulière, et $M : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction continue vérifiant

$$\exists m_0,\ M_\infty > 0 \quad m_0 \le M(s) \le M_\infty \quad \forall s \in \mathbb{R}_+.$$

Dans le cas du problème $(\mathscr{P}_1)$, on suppose que $f \in L^2\left(0; T, H^{-1}(\Omega)\right)$, $u_0 \in L^2(\Omega)$, et pour le problème $(\mathscr{P}_2)$, on assume plus de régularité, en prenant $f \in L^2\left(0; T, L^2(\Omega)\right)$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$.

L'origine du problème $(\mathscr{P}_1)$ est l'équation hyperbolique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\tau_0}{m} + \frac{\sigma E}{2mL}\int_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

qui a été proposé par **Kirchhoff** dans [30] afin de généraliser le modèle de **d'Alembert** :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\tau_0}{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in [0, L], \quad t > 0, \tag{2}$$

qui décrit des petites vibrations verticales d'une corde élastique, avec extrémités fixés.

Les paramètres de l'équation (1) ont les significations suivantes : L est la longueur de la corde, τ_0 représente la tension initiale, m est la masse de la corde, E est le module de Young (ou module d'élasticité) du matériau, et σ est l'aire de la section transversale de la corde à la position de repos. L'inconnue u représente le déplacement de la corde dans la direction orthogonale à $[0, L]$ (pour plus de détails voir [26, 33, 34, 35, 37], et les références qui s'y trouvent). Tandis que le modèle de **d'Alembert** (2) suppose que la longueur de la corde est invariante pour des petites vibrations transversales, le modèle de **Kirchhoff** (1) prend en compte ces variations.

Dans [4], Carrier a établi l'équation qui modélise la vibration d'une corde élastique lorsque les variations de tension ne sont pas faibles :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{1}{m} + \frac{\sigma E}{\tau_0 m L} \int_0^L u^2 \, dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{3}$$

Le cadre abstrait du modèle de **Kirchhoff** a été proposé dans [32] sous le forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - M\left(\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2\right) \Delta u = f & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ u = 0 & \text{dans } \partial\Omega \times]0, T[, \\ u(0) = u_0, \quad u'(1) = u_1, \end{cases}$$

où $M : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $M(s) \geq c > 0$ pour tout $s \geq 0$, et Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, avec une frontière régulière.

Dans [1], il a été signalé que le problème $(\mathscr{P}_1)$ pourrait modéliser plusieurs systèmes physiques, où u décrit un processus qui dépend de la moyenne de lui-même. L'effet non local (présence du terme $M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)$) trouve également ses applications dans les systèmes biologiques. La version parabolique du problème $(\mathscr{P}_1)$ peut être utilisé pour décrire la croissance d'une espèce particulière (par exemple des bactéries).

Dans le cas où la fonction a ne dépend pas de x et $l(u) = \int_\Omega u(x) \, dx$, Le problème $(\mathscr{P}_2)$ a été proposé par Chipot-Lovat [20]. Plus précisément, ils ont étudié le problème suivant :

$$\begin{cases} M\left(\int_\Omega u(x) \, dx\right) \Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et sa version parabolique :

$$(\mathscr{P}_3)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - M\left(\int_\Omega u(x,t)\,dx\right)\Delta u = f & \text{dans } \Omega\times]0,T[,\\ u(x,t)=0 & \text{sur } \partial\Omega\times]0,T[,\\ u(x,0)=u_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Les auteurs de ce travail ont signalé que le problème $(\mathscr{P}_3)$ se présente dans diverses situations. Par exemple, la fonction inconnue u pourrait décrire la densité d'une population (par exemple de bactéries). Le coefficient de diffusion a est alors censé dépendre de l'ensemble de la population du domaine plutôt que de la densité locale c'est-à-dire les mouvements sont guidés en tenant compte de l'état global du support. Une autre explication de la l'importance d'un tel modèle réside dans le fait que les mesures qui servent à déterminer les constantes physiques ne sont pas faites en un point mais représentent une moyenne dans un voisinage d'un point de sorte que ces constantes physiques dépendent de moyennes locales.

Ce travail a été généralisé par la suite par Chipot-Lovat [21] au problème suivant

$$(\mathscr{P}_4)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - M\left(l\left(u(.,t)\right)\right)\Delta u = f & \text{dans } \Omega\times]0,T[,\\ u(x,t)=0 & \text{sur } \partial\Omega\times]0,T[,\\ u(x,0)=u_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

où l est une forme linéaire continue sur $L^2(\Omega)$. Les auteurs de ce modèle ont mentionné que dans le cas où $l\left(u(.,t)\right)=\int_{\Omega'} u(x,t)\,dx$, avec Ω' est un sous-domaine de Ω, le problème $(\mathscr{P}_4)$ pourrait modéliser une migration de population (par exemple des bactéries dans un récipient). Le terme non local $M\left(\int_{\Omega'} u(x,t)\,dx\right)$ signifie que la vitesse de la migration dépend de la population totale dans un sous-domaine Ω'.

Ce mémoire est composé de cinq chapitres. Le premier est entièrement consacré à l'exposé des définitions et résultats nécessaires pour la suite de ce travail. L'objectif du deuxième chapitre est de présenter les espaces de Lebesgue et ceux de Sobolev à valeurs vectorielles. Dans le troisième chapitre, on prouve un résultat d'existence et d'unicité pour un cadre général d'un problème parabolique linéaire. Le quatrième chapitre est consacré pour l'étude du problème $(\mathscr{P}_1)$ moyennant un théorème de point fixe. Dans le cinquième chapitre, on a

utilisé deux méthodes pour attaquer le problème $(\mathscr{P}_2)$; la première est la méthode de compacité (théorème du point fixe de Schauder), la deuxième est la méthode de Galerkin.

PRÉLIMINAIRES

Chapitre 1

Sommaire

1	Espaces de Lebesgue	5
2	Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$	7
3	Quelques théorèmes utiles	9

Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions et rappels des résultats nécessaires pour la suite de ce travail. nous introduisons quelques définitions, lemmes et quelques théorèmes sur les espaces fonctionnels et les espaces des mesures de Radon, ensuite nous donnons quelques définitions et résultats sur les opérateurs.

1.1 Espaces de Lebesgue

DÉFINITION 1.1

On définit l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ par :
Pour $1 \leq p < +\infty$

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mesurable}, \quad \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = +\infty$

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mesurable}, \quad \sup_{x \in \Omega} ess|u(x)| < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} ess|u(x)|.$$

$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$ et de Hilbert Pour $p = 2$ muni de produit scalaire

$$(f, g) = \int_\Omega f(x) g(x) \, dx.$$

PROPOSITION 1.1 – Complétude, séparabilité et dualité de l'espace $L^p(\Omega)$ [3]. Les assertions suivantes sont vraies.

1. $L^p(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < +\infty$ et réflexif pour $1 < p < +\infty$.
2. Le dual de $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < +\infty$ est isomorphe à $L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
3. $L^1(\Omega)$ est séparable, ni réflexif et son dual est $L^\infty(\Omega)$.
4. $L^\infty(\Omega)$ ni séparable, ni réflexif et son dual est contient strictement $L^1(\Omega)$.

PROPOSITION 1.2 – Inégalité de Young [3]. Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pour tout réel positif a et b, on a

$$a\,b \leq \frac{1}{p}\,a^p + \frac{1}{q}\,b^q.$$

PROPOSITION 1.3 – Inégalité de Hölder [3]. Soient $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Alors $f\,g \in L^1(\Omega)$ et

$$\int |f\,g| \leq \|f\|_{L^p}\,\|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

PROPOSITION 1.4. Soit $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, Si $|\Omega| < +\infty$ alors $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.

DÉFINITION 1.2: Convergence forte, convergence faible dans $L^p(\Omega)$

Soient $p \in [1, \infty[$,et $\{f_n, f\}$ une famille de $L^p(\Omega)$.

- on dit que f_n converge fortement vers f dans $L^p(\Omega)$ et on note $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0$.
- on dit que f_n converge faiblement vers f dans $L^p(\Omega)$ et on note $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(\Omega)$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_\Omega (f_n - f).g = 0,\ \forall g \in L^q$.
- on dit que f_n converge faible $*$ vers f dans $L^\infty(\Omega)$ et on note $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ dans $L^\infty(\Omega)$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_\Omega (f_n - f).g = 0,\ \forall g \in L^1$.

PROPOSITION 1.5 – Lemme de Fatou [11]. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction mesurable, à valeurs dans $[0,+\infty[$ on a

$$\int_\Omega \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)\,dx \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int_\Omega f_n(x)\,dx.$$

PROPOSITION 1.6 – Théorème de convergence dominée [11]. Soit $1 \leq p < +\infty$ et $(f_n)_n \subset L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$. On suppose que,

1. $f_n \longrightarrow f$ p.p dans Ω.
2. il existe $g \in L^p(\Omega)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|f_n| \leq g$ p.p dans Ω.

Alors

$$f_n \to f \quad \text{fortement dans } L^p(\Omega).$$

THÉORÈME 1.1 (Théorème de Convergence dominée de Lebesgue généralisé[28]):
Soit $\{f_n\}$ une suite des fonctions mesurables sur E qui convergent ponctuellement $p.p$ dans E à f. Supposons qu'il existe une suite des fonctions $\{g_n\}$ intégrables sur E qui convergent ponctuellement $p.p$ dans E à g tel que

$$|f_n| \leq g_n \quad \text{dans} \quad E \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

si

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E g_n = \int_E g < \infty \quad \text{alors} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n = \int_E f$$

1.2 Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

DÉFINITION 1.3

On définit l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$, par :

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \quad \nabla u \in (L^2(\Omega))^N\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

et le produit scalaire

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$$

.

PROPOSITION 1.7. L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable et réflexif.

DÉFINITION 1.4

On note $H_0^1(\Omega)$ la fermeture de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, (c'est-à-dire $H_0^1(\Omega) := \overline{\mathscr{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$) avec

$$H_0^{1,}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), \quad u_{|\partial\Omega} = 0\}.$$

DÉFINITION 1.5: Convergence faible, convergence forte dans $H^1(\Omega)$

Soient $\{f_n, f\}$ une famille de $H^1(\Omega)$.

- on dit que f_n converge fortement vers f dans $H^1(\Omega)$ et on note $f_n \to f$ dans $H^1(\Omega)$ si
$$f_n \to f \text{ dans } L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad \nabla f_n \to \nabla f \text{ dans } L^2(\Omega)$$
- on dit que f_n converge faiblement vers f dans $H^1(\Omega)$ et on note $f_n \rightharpoonup f$ dans $H^1(\Omega)$ si
$$f_n \rightharpoonup f \text{ dans } L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad \nabla f_n \rightharpoonup \nabla f \text{ dans } L^2(\Omega)$$

PROPOSITION 1.8 – Injéction de Rellich [12]. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et de classe $\mathscr{C}^1$, alors de toute suite bornée de $H^1(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite convergente dans $L^2(\Omega)$ (on dit que l'injection canonique de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte).

PROPOSITION 1.9 – Inégalité de Poincaré [8]. On suppose que Ω est un ouvert borné dans une direction de $\mathbb{R}^N$ alors, il existe une constante positive $C = C(N,\Omega)$ telle que :

$$\|u\|_{L^2} \leq C\|\nabla u\|_{L^2} \quad , \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

par conséquence l'application $u \mapsto \|\nabla u\|_{L^2}$ définie une norme sur $H_0^1(\Omega)$, équivalente à la norme usuelle.

THÉORÈME 2.1: Supposons que $\Omega \in \mathbb{R}^n$ soit un domaine borné de Lipschitz qui satisfait une condition de boule externe uniforme. Alors l'espace $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ devient un espace de Hilbert lorsqu'il est doté du produit scalaire

$$(u,v) \to \int_\Omega \Delta u \Delta v \, dx \quad \forall u, v \in H^2 \cap H_0^1(\Omega).$$

Ce produit scalaire induit une norme équivalente à $\|.\|_{H^2}$

Preuve.

Voir [25, theorem 2.31, p. 53].

1.3 Quelques théorèmes utiles

THÉORÈME 3.1 (Point fixe de Schauder [13]):
Soit V un espace de Banach, K un sous-ensemble convexe fermé de V et S une application continue de K dans K telle que $S(k)$ est relativement compact, alors S admet au-moins un point fixe dans K .

Le théorème suivant donne l'existence des solutions pour les systèmes d'équations différentielles linéaires. C'est une généralisation du théorème de Cauchy-Lipschitz.

THÉORÈME 3.2 (Théorème de Peano[17]): Soient O et Ω deux ouverts de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement avec $(t_0, u_0) \in O \times \Omega$, et soit $f : O \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Alors, il existe un voisinage I de t_0 dans O, et une fonction $u : I \to \Omega$ solution de problème de Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = F(t, u(t)). \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Plus précisément, si $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[\times B(u_0, r)$ a son adhérence incluse dans $O \times \Omega$ et si

$$M\alpha < r \quad \text{avec} \quad M = \sup\{\|f(t, u)\| \backslash (t, u) \in]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[\times B(u_0, r)\},$$

alors il existe une solution définie sur $I =]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$.

ESPACES DE BOCHNER-SOBOLEV

Chapitre 2

Sommaire

1 Espaces de Lebesgue à valeurs vectorielles 10
2 Dérivation faible 14
3 Espaces de Sobolev à valeurs vectorielles 14

Dans ce qui suit I désigne un intervalle borné de $\mathbb{R}$, V désigne un espace de Banach et V' son dual topologique.

2.1 Espaces de Lebesgue à valeurs vectorielles

2.1.1 Mesurable au sens de Bochner

DÉFINITION 2.1: (Fonction simple [14])

On dit que $u : I \to V$ est une fonction simple si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs $v_i \in V$ et $A_i := u^{-1}(v_i)$ est mesurable au sens de Lebesgue.

DÉFINITION 2.2: (Mesurabilité au sens de Bochner [14])

On dit que $u : I \to V$ est mesurable au sens de Bochner si elle est une limite simple (pour la topologie forte de V) d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions simples; c'est à dire

$$u_n(t) \to u(t) \quad \text{fortement dans } V \text{ pour tout } t \in I.$$

THÉORÈME 1.1 (Pettis [38]): Soit $u : I \to V$. Si V est séparable, alors u est mesurable au sens de Bochner si et seulement si elle est faiblement mesurable au sens suivant :

$$\langle f, u(.)\rangle_{V'\times V} \quad \text{est mesurable au sens de Lebesgue pour tout } f \in V'.$$

2.1.2 Intégrabilité au sens de Bochner

DÉFINITION 2.3: (Intégrale de Bochner d'une fonction simple [14])

Soit $u : I =]0, T[\to V$ une fonction simple. On définit l'intégrale de Bochner de la fonction u par :

$$\int_0^T u(t)\,dt := \sum_{\text{finie}} |A_i|\, v_i.$$

DÉFINITION 2.4: Intégrabilité au sens Bochner [14]

Soit $u : I =]0, T[\to V$ une fonction mesurable au sens de Bochner. On dit que u est Bochner intégrable si

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \|u(t) - u_n(t)\|_V \, dt = 0.$$

Dans ce cas la limite

$$\int_0^T u(t)\,dt := \lim_{n\to\infty} \int_0^T u_n(t)\,dt,$$

existe et est indépendante du choix particulier de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De plus, si V est séparable, alors une fonction u mesurable (au sens de Bochner) est intégrable au sens Bochner si et seulement si $\|u(.)\|_V$ est intégrable au sens de Lebesgue.

2.1.3 Espaces de Lebesgue $L^p(0, T; V)$

DÉFINITION 2.5: [40, 44]

On définit l'espace de Lebesgue $L^p(0, T; V)$ par :

1. Pour $1 \le p < +\infty$

$$L^p(0, T; V) = \left\{ u :]0, T[\longrightarrow V \quad \text{mesurable}, \int_0^T \|u(t)\|_V^p \, dt < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(0,T;V)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

2. pour $p = +\infty$ par :

$$L^{\infty}(0,T;V)=\left\{u:\longrightarrow V \quad \text{mesurable; } \exists C>0,\ \|u(t)\|_V\leq C \quad p.p.t\in]0,T[\right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^{\infty}(0,T;V)}=\inf\left\{C>0; \quad \|u(t)\|_V\leq C \quad p.p.t\in]0,T[\right\}.$$

THÉORÈME 1.2 (Complétude): Pour tout $1\leq p\leq+\infty$ l'espace $L^p(0,T;V)$ est de Banach.

Preuve.

Voir [40, Satz 1.24, page 40] et [7, Satz 1.11, page 127]

PROPOSITION 2.1. [44] L'ensemble P de tous les polynômes $p:[0,T]\to V$ coefficients dans V, est dense dans $L^p(0,T;V)$.

THÉORÈME 1.3 (Densité[44]): Pour tout $1\leq p<+\infty$ l'espace $\mathscr{C}([0,T];V)$ est dense dans $L^p(0,T;V)$.

Preuve.

Montrer d'abord que l'ensemble de toutes les fonctions échelonnées est dense dans $L^p(0,T;V)$. En fait, il résulte de la définition de l'intégrale de Lebesgue que pour chaque $u\in L^p(0,T;V)$, il existe une suite (u_n) de fonctions échelons telle que

$$u_n(t)\to u(t) \qquad \text{p.p} \quad t\in[0,T].$$

En prenant

$$v_n(t)=\begin{cases} u_n(t) & \text{si} \quad \|u_n(t)\|\leq 2\|u(t)\|. \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

On obtient

$$\int_0^T \|u(t)-v_n(t)\|^p\,dt\to 0.$$

Par le principe de convergence majoritaire 1.1.

THÉORÈME 1.4 (Séparabilité[44]): Si V est séparable alors pour tout $1\leq p<+\infty$ l'espace $L^p(0,T;V)$ est séparable.

Preuve.

On suppose que V est séparable. Choisissant un ensemble M au plus dénombrable (i.e., fini ou dénombrable), qui est dense dans V. Soit P l'ensemble de tous les polynômes $p : [0,T] \to V$ coefficients dans M. Un argument d'approximation simple montre que P est dense dans $L^p(0,T;V)$ par (2.1).

THÉORÈME 1.5 ([29]): Si V s'injecte continûment dans un espace de Banach W, $p, r \in [1,+\infty]$, $p \leq r$, alors $L^r(0,T;V)$ s'injecte continûment dans $L^p(0,T;W)$.

Preuve.

Soit $f \in L^r(0,T;V)$. Puisque V s'injecte continûment dans W, en utilisant l'inégalité de Hölder , nous avons

$$\left(\int_0^T \|f(t)\|_W^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq c_1 \left(\int_0^T \|f(t)\|_V^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_0^T \|f(t)\|_V^r \, dt\right)^{\frac{1}{r}}.$$

pour certains $c_1, c_2 > 0$. Donc $L^r(0,T;V)$ s'injecte continûment dans $L^p(0,T;W)$.

2.1.4 Espace dual de $L^p(0,T;V)$

THÉORÈME 1.6 (Théorème de représentation de Riesz [43]): Si $1 \leq p < +\infty$, l'espace dual de $L^p(0,T;V)$ contient toujours $L^{p'}(0,T;V')$ et l'égalité tient si V' est séparable, le crochet de la dualité étant donnée par la formule

$$\langle g, u \rangle_{L^{p'}(0,T;V') \times L^p(0,T;V)} = \int_0^T \langle f(t), u(t) \rangle_{V' \times V} \, dt.$$

Ainsi, si $1 < p < +\infty$ et V est réflexif et séparable, alors $L^p(0,T;V)$ est réflexif.

Preuve.

Voir [43, Proposition 1.38., p. 23].

PROPOSITION 2.2 – Inégalité de Hölder [44]. Si $u \in L^p(0,T;V)$ et $v \in L^{p'}(0,T;V')$, alors

$$\int_0^T |\langle v(t), u(t) \rangle|_{V' \times V} \, dt \leq \left(\int_0^T \|v(t)\|_{V'}^{p'} dt\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

2.2 Dérivation faible

DÉFINITION 2.6

Soient $V \subset W$ (avec injection continue) deux espaces de Banach, $1 \leq p, q \leq +\infty$. Nous disons qu'une fonction $u \in L^p(0,T;V)$ a une dérivée faible dans $L^q(0,T;W)$ s'il existe une fonction $g \in L^q(0,T;W)$ telle que

$$\int_0^T \varphi'(t)u(t)dt = -\int_0^T \varphi(t)g(t)dt, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(]0,T[).$$

(Cette égalité a lieu en W). Si une telle fonction g existe, il est unique et nous notons

$$\frac{du}{dt} = g.$$

2.3 Espaces de Sobolev à valeurs vectorielles

2.3.1 Notions générales

DÉFINITION 2.7

Soit $p \in [1,+\infty]$, nous définissons l'espace

$$W^{1,p}(0,T;V) = \left\{ u \in L^P(0,T;V); \quad u' = \frac{du}{dt} \in L^P(0,T;V) \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;V)} = \|u\|_{L^p(0,T;V)} + \|u'\|_{L^p(0,T;V)}.$$

THÉORÈME 3.1 ([27]): Pour tout $p \in [1,+\infty]$, $W^{1,p}(0,T;V)$ est un espace de Banach.

Preuve.

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy dans $W^{1,p}(0,T;V)$, comme pour tous $n \geq 1$ et $m \geq 1$, on a

$$\|u_n - u_m\|_{L^p(0,T;V)} \leq \|u_n - u_m\|_{W^{1,p}(0,T;V)} \quad \text{et} \quad \|u_n' - u_m'\|_{L^p(0,T;V)} \leq \|u_n - u_m\|_{W^{1,p}(0,T;V)},$$

Les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(u_n')_{n\geq 1}$ sont de Cauchy dans $L^p(0,T;V)$ et convergent donc dans cet espace, on note u et v leurs limites respectives.
Mais la convergence de $(u_n)_{n\geq 1}$ vers u dans $L^p(0,T;V)$ entraine la convergence dans

$\mathscr{D}(0,T;V)$. et on a donc

$$\begin{aligned} u_n' &\to u_n \quad \text{dans} \quad L^p(0,T;V), \\ u_n' &\to v \quad \text{dans} \quad W^{1,p}(0,T;V). \end{aligned}$$

Ce qui donne $u' = v \in L^p(0,T;V)$. Ainsi $u \in W^{1,p}(0,T;V)$.et

$$\|u_n - u\|_{W^{1,p}(0,T;V)} = \|u_n - u\|_{L^p(0,T;V)} + \|u_n - v\|_{L^p(0,T;V)} \to 0.$$

Donc la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge dans $W^{1,p}(0,T;V)$, qui est donc complet.

LEMME 3.1 [27]
Si $u \in W^{1,p}(0,T;V)$, alors u est continue sur $]0,T[$ et nous avons, pour tout $t_0,\ t \in]0,T[$

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} u'(s)ds.$$

Remarque 2.1. *Puisque $u' \in L^p(0,T;V) \subset L^1_{loc}(0,T;V)$, l'intégrale ci-dessus a bien un sens.*

Preuve.

Soit $g(t) = \int_{t_0}^{t} u'(s)\,ds$, comme $u' \in L^1_{loc}(0,T;V)$, g est continue si

$$t_n \to t_\infty \quad \text{dans} \quad]0,T[.$$

Alors pour n assez grand, (t_n) demeure dans un compact $[T_0,T_1]$ de $]0,T[$ et

$$\|g(t_n) - g(t_\infty)\|_V = \left\| \int_{t_\infty}^{t_n} u(s)\,ds \right\|_V \leq \left| \| \int_{t_\infty}^{t_n} u(s)\,ds \|_V \right| \to 0.$$

Puisque $u' \in L^1([T_0,T_1];v)$, alors par le théorème de convergence dominée, on a donc $g \in L^1_{loc}(0,T;v)$. Maintenant, on calcule la dérivée de g au sens de $\mathscr{D}'(0,T;V)$.
Si $\varphi \in \mathscr{D}(]0,T[)$, par le théorème de Fubini on a

$$\begin{aligned} \langle g', \varphi \rangle_{\mathscr{D}'_V, \mathscr{D}} &= -\int_0^T g(t)\varphi'(t)\,dt \\ &= -\int_{t_0}^{T} \left(\int_0^T \mathbb{1}_{[t_0,t]} u'(s)\varphi'(t)\,ds \right) dt - \int_0^{t_0} \left(\int_0^T \mathbb{1}_{[t,t_0]} u'(s)\varphi'(t)\,ds \right) dt \\ &= -\int_{t_0}^{T} u'(s) \left(\int_s^T \varphi'(t)\,dt \right) ds + \int_0^{t_0} u'(s) \left(\int_0^s \varphi'(t)\,dt \right) ds \\ &= \int_{t_0}^{T} u'(s)\varphi(s)\,ds + \int_0^{t_0} u'(s)\varphi(s)\,ds = \int_0^T u'(s)\varphi(s)\,ds. \end{aligned}$$

Donc $g' = u'$. Ainsi, il existe un vecteur a de V tel que

$$u = a + g \quad \text{dans } \mathscr{D}'(0,T;V).$$

Par conséquent

$$u = g \quad \text{p.p dans } L^1_{loc}(0,T;V).$$

Mais g est continue, donc u est (égale presque partout à) une fonction continue et on a bien $u(t) = a + \int_{t_0}^{t} u'(s)\,ds$, avec $a = u(t_0) - \int_{t_0}^{t_0} u'(s)\,ds = u(t_0)$.

Alors

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} u(s)\,ds.$$

Convention 2.1. *Nous identifions l'espace $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ avec*

$$L^2(Q) = L^2(\Omega\times]0,T[) = \left\{ \tilde{u} : \Omega\times]0,T[\longrightarrow \mathbb{R}; \quad \int_0^T \int_\Omega |\tilde{u}(x,t)|^2 dx\,dt < +\infty \right\},$$

par l'isomorphisme naturel $\tilde{u} \mapsto u : \tilde{u}(x,t) = [u(t)](x)$. Également, $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ est identifié par cet isomorphisme avec

$$H^1(Q) = \left\{ \tilde{u} : \Omega\times]0,T[\longrightarrow \mathbb{R}; \quad \int_0^T \int_\Omega |\tilde{u}(x,t)|^2 dx\,dt + \int_0^T \int_\Omega |\nabla\tilde{u}(x,t)|^2 dx\,dt < +\infty \right\}.$$

DÉFINITION 2.8: Triplet d'évolution

Soit V un espace de Banach réflexif contenu dans un espace de Hilbert H, $V \subset H$ avec injection continue, V étant dense dans H ; identifiant H à son dual et V' désignant le dual de V, nous pouvons alors identifier H à un sous-espace de V' de sorte que $V \subset H \subset V'$. Dans ce cas (V,H,V') est appelé triplet d'évolution.

Remarque 2.2. *Pour un triplet d'évolution (V,H,V') le crochet de dualité $\langle \varphi, v \rangle$ pour $\varphi \in V'$ et $v \in V$ est considéré comme une extension continue du produit scalaire sur H, c'est à dire, si $\varphi \in V' \cap H$, alors*

$$\langle \varphi, v \rangle = (\varphi, v)_H.$$

2.3.2 Espace de Sobolev $H^1(0,T;V,V')$

THÉORÈME 3.2 ([24]): L'espace

$$H^1(0,T;V,V') = \left\{ u \in L^2(0,T;V); \quad u' = \frac{du}{dt} \in L^2(0,T;V') \right\}$$

est de Hilbert que l'on munit de la norme

$$\|u\|_1 = \|u\|^2_{L^2(0,T;V)} + \|u'\|^2_{L^{p'}(0,T;V')}.$$

Preuve.

Soit u_n une suite de Cauchy dans $H^1(0,T;V,V')$. Alors u_n est une suite de Cauchy dans $L^2(0,T;V)$ et $(u_n)_t$ est une suite de Cauchy dans $L^2(0,T;V')$. Ainsi, il existe $u \in L^2(0,T;V)$, $u' \in L^2(0,T;V')$ tels que

$$\begin{aligned} u_n &\to u \quad \text{dans} \quad L^2(0,T;V) \\ (u_n)_t &\to u' \quad \text{dans} \quad L^2(0,T;V'). \end{aligned}$$

Bien sûr $u_n \to u$ dans $\mathscr{D}'(0,T;V)$ et dans $\mathscr{D}'(0,T;V')$ et donc $(u_n)_t \to u_t$ dans $\mathscr{D}'(0,T;V')$. Cela implique que $u' = u_t$ et la preuve du théorème est terminée puisqu'il est facile de montrer que $u_n \to u$ dans $H^1(0,T;V,V')$.

THÉORÈME 3.3 (Density[24]): L'espace $\mathscr{D}([0,T];V)$ est dense dans $H^1(0,T;V,V')$.

Preuve.

Tout d'abord, on suppose que $a=-\infty$, $b=+\infty$; c'est-à-dire on veut démontrer que $\mathscr{D}(\mathbb{R};V)$ est dense dans $H^1(-\infty,+\infty;V,V')$. Soit $u \in H^1(-\infty,+\infty;V,V')$. On peut approcher u par des fonctions à support compact dans $H^1(-\infty,+\infty;V,V')$. En effet, soit $\varrho \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ une fonction régulière telle que

$$\varrho(t) = \begin{cases} 1 & x \in [-1,1], \\ 0 & x \notin [-2,2]. \end{cases} \tag{2.1}$$

On définit la suite tronquante

$$u_n(t) = \varrho(\frac{1}{n})u(t) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, on a

$$u_n \to u \quad \text{dans} \quad H^1(-\infty,+\infty;V,V').$$

Alors, sans perte de généralité, on peut supposer que u à support compact. Soit $\varrho \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ telle que

$$\varrho \le 0 \qquad \int_{\mathbb{R}} \varrho(t)\,dt = 1.$$

On définit la suite régularisante $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ par

$$\varrho_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\varrho(\frac{1}{\varepsilon}).$$

Il est facile de prouver que

$$u_\varepsilon = \varrho_\varepsilon * u(t) \to u \quad \text{dans } H^1(-\infty,+\infty;V,V').$$

Passons maintenant à $H^1(a,+\infty;V,V')$, avec $a > -\infty$. Alors, si ψ_h désigne un fonction régulière telle que

$$\psi_h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \ge a - \frac{h}{2}, \\ 0 & \text{si} \quad t < a - h, \end{cases}$$

où h est un nombre positif. Il est facile de voir que la fonction

$$u_h(t) = \psi_h(t)u(t+h)$$

appartenant à $H^1(-\infty,+\infty;V,V')$ et que

$$u_h \to u \quad \text{dans } H^1(-\infty,+\infty;V,V') \quad \text{lorsque } h \to 0.$$

Ainsi, l'espace $\mathscr{D}([a,+\infty[;V)$ est dense en $H^1(a,+\infty;V,V')$.
En raisonnant de la même manière pour $H^1(-\infty,b;V,V')$ avec $b<+\infty$.

Soient θ_1 et θ_2 deux fonctions régulières telles que

$$\begin{cases} \theta_1 = 0 & \text{dans} \quad]-\infty,a], \\ \theta_2 = 0 & \text{dans} \quad [b,+\infty[, \\ \theta_1+\theta_2 = 1 & \text{dans} \quad [a,b]. \end{cases}$$

Alors, il est facile de vérifier que $u_1 \in H^1(-\infty,b;V,V')$, $u_2 \in H^1(a,+\infty;V,V')$ et

$$u = \theta_1 u + \theta_2 u = u_1 + u_2,$$

Finalement, obtient le résultat voulu, en approchant u_1 et u_2 comme précédemment.

LEMME 3.2 [24]
Il existe un opérateur de prolongement linéaire et continu, que l'on note P, de $H^1(0,T;V,V')$ dans $H^1(-\infty,+\infty;V,V')$ tel que

$$Pu = u \qquad p.p \quad t \in [0,T] \qquad \forall u \in H^1(0,T;V,V').$$

THÉORÈME 3.4 ([24]): L'injection $H_1(0,T;V,V') \subset \mathscr{C}([0,T];H)$ est continue.

Preuve.

Soient $u \in H^1(0,T;V,V')$ et $Pu \in H^1(-\infty,+\infty;V,V')$ le prolongement introduit dans lemme 3.2. Soit (φ_n) une suite de $\mathscr{D}(\mathbb{R},V)$ telle que

$$\varphi_n \to Pu \quad \text{dans} \quad H^1(-\infty,+\infty;V,V').$$

Ensuite, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\varphi_n(x)|^2 = \left(\frac{d\varphi_n}{dt},\varphi_n\right) = \left\langle \frac{\varphi_n}{dt},\varphi_n \right\rangle \leq \|\varphi_n'\|\|\varphi_n\|.$$

(la dualité entre parenthésés est la dualité $V-V'$: note pour deux vecteur de $V, V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ on a $(u,v) = \langle u,v\rangle$ en l'identifiant u avec la forme linéaire $v \to (u,v)$ qui il définit sur V dans V').

En intégrant sur $]-\infty\,,t[$, on obtient

$$|\varphi_n(t)|^2 \leq 2\int_{-\infty}^{t} \|\varphi_n'\|\|\varphi_n\|\,dt.$$

En utilisant l'inégalité de Young , il s'ensuit que

$$|\varphi_n(t)|^2 \leq \|\varphi_n'\|_{L^2(-\infty,+\infty,V')} + \|\varphi_n\|_{L^2(-\infty,+\infty,V)}.$$

Par conséquent,

$$|\varphi_n(t)|^2 \leq \|\varphi_n\|^2_{H^1(-\infty,+\infty;V,V')} \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Ainsi si l'on applique cette inégalité à $\varphi_n - \varphi$, on voit que φ_n est une suite de Cauchy dans $\mathscr{C}((-\infty,+\infty),H)$ donc converge uniformément dans cet espace. Ceci que $Pu \in \mathscr{C}((-\infty,+\infty),H)$ l'implique donc $u \in \mathscr{C}([0;T],H)$ et en passant à la limite en (2.2) on obtient

$$|u|_{\mathscr{C}((-\infty,+\infty),H)} \leq \|Pu\|_{H^1(-\infty,+\infty;V,V')} \leq C\|u\|_{H^1(0,T;V,V')}.$$

Ce qui prouve que L'injection $H_1(0,T;V,V') \subset \mathscr{C}([0,T];H)$ est continue.

THÉORÈME 3.5 (Formule d'intégration par parties[24]): Si $u, v \in H_1(0,T;V,V')$ et si $t_1, t_2 \in]0,T[$, on a alors la formule d'intégration par parties

$$(u(t_2),v(t_2))_H - (u(t_1),v(t_1))_H = \int_{t_1}^{t_2} \left[\langle u', v\rangle + \langle v', u\rangle\right] dt.$$

Preuve.

Soient u et v deux élément de $\mathscr{D}([t_1,t_2;V])$. On a

$$\int_{t_1}^{t_2} \big(u',v\big) + \big(v',u\big)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(u(t),v(t))\, dt = (u(t_2),v(t_2)) - (u(t_1),v(t_1)). \tag{2.3}$$

Ensuite, le résultat suit par la densité de l'espace $\mathscr{D}([t_1,t_2;V])$ dans $H^1(0,T;V,V')$.

THÉORÈME 3.6 ([24]): Si $u \in H_1(0,T;V,V')$, alors pour tout $v \in V$, on a

$$\frac{d}{dt}\langle u(.),v\rangle = \langle \frac{\partial u}{\partial t}, v\rangle \quad \text{dans } \mathscr{D}'(]0,T[).$$

En particulier, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_H = \big\langle u'(t), u(t)\big\rangle \qquad p.p \quad t \in [0,T].$$

Preuve.

Soit $\varphi \in \mathscr{D}(0,T)$, d'apprêt (2.3) on a

$$\int_0^T \langle u'(t),w(t)\rangle\, dt + \int_0^T \langle w'(t),u(t)\rangle\, dt = u(T)w(T) - u(0)w(0).$$

On prendre $w = v\varphi(t) \in \mathscr{D}(0,T)$, on a

$$\int_0^T \langle u'(t), v\varphi(t)\rangle\, dt + \int_0^T \langle v\varphi'(t), u(t)\rangle\, dt = u(T)v(T)\varphi(T) - u(0)v(0)\varphi(0).$$

Alors

$$\int_0^T \langle u', v\rangle \varphi(t)\,dt = -\int_0^T \langle v, u\rangle \varphi'(t)\,dt \qquad \forall v \in V.$$

D'où le résultat.

2.3.3 Lemme de Compacité

THÉORÈME 3.7 (Aubin-Lions [10, 42, 19]): Soient V_0, V et V_1 trois espaces de Banach, tels que $V_0 \subset V \subset V_1$. On suppose de plus que $V_0 \hookrightarrow V$ est compacte $V \hookrightarrow V_1$ est continue. Soient $1 \le p, q < \infty$ et $1 < q < \infty$, Nous supposons que V_0, V_1 sont réflexifs.

On définit l'espace

$$W = \{u \in L^p(0,T;V_0), \quad u' \in L^q(0,T;V_1)\}.$$

Alors l'injection $W \hookrightarrow L^p(0,T;V)$ est compacte.

PROPOSITION 2.3 – Bochner[6]. Si f un fonction $f : (0,T) \to X$ est fortement mesurable alors

$$\left\langle u, \int_0^T f(t)\,dt \right\rangle = \int_0^T \langle u, f(t)\rangle\,dt \qquad \forall u \in X'$$

THÉORÈME 3.8 (Continuité de la dérivation faible [6]): Si (u_n) une suite de $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ vérifiant

$$\begin{cases} u_n \to u & \text{faiblement dans } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ u_n' \to v & \text{faiblement dans } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)), \end{cases} \tag{2.4}$$

alors $v = u'$.

Preuve.

Soit (u_n) une suite de $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ satisfaisant (2.4). Soit $\varphi \in \mathscr{D}'(0,T)$ et $w \in H_0^1(\Omega)$. Prenant $g = \varphi(t)w$, alors $g \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. D'après la définition de la dérivation faible, il s'ensuit que

$$\int_0^T \langle u_n', \varphi w\rangle\,dt = -\int_0^T \langle u_n, \varphi' w\rangle\,dt. \tag{2.5}$$

En utilisant (2.4), on peut passer à la limite dans (2.5) pour obtenir

$$\int_0^T \langle v, \varphi w\rangle\,dt = -\int_0^T \langle u, \varphi' w\rangle\,dt. \tag{2.6}$$

D'après la proposition 2.3, il découle que

$$\int_0^T \langle u, \varphi' w\rangle\,dt = \int_0^T \langle u\varphi', w\rangle\,dt = \langle \int_0^T u(t)\varphi'(t)\,dt, w\rangle. \tag{2.7}$$

Puis on remarque que

$$\int_0^T \langle v, \varphi w\rangle \, dt = \int_0^T \langle v\varphi, w\rangle \, dt. \tag{2.8}$$

En combinant (2.6), (2.7) et (2.8), il vient

$$\langle \int_0^T u(t)\varphi'(t)\, dt, w\rangle = \langle -\int_0^T v(t)\varphi(t)\, dt, w\rangle \qquad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Par conséquent,

$$\int_0^T u(t)\varphi'(t) = -\int_0^T v(t)\varphi(t)\, dt \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}'(0,T).$$

Ce qui signifie que $v = u'$.

ÉQUATIONS PARABOLIQUES LINÉAIRES

Chapitre 3

Sommaire

1	Cadre général	22
2	Application	29
3	Régularité	31

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$. Pour $T > 0$, On note Q le cylindre $\Omega \times]0,T[$ et Σ sa surface latérale $\partial\Omega \times]0,T[$. On considère le problème parabolique linéaire suivant

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{dans } Q, \\ u = 0, & \text{sur } \Sigma, \\ u(0) = u_0, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $u = u(x,t)$ est une fonction sur Q à valeurs dans $\mathbb{R}$, u_0 et f sont des fonctions données telles que

$$u_0 \in L^2(\Omega), \quad f \in L^2\big(0,T;H^{-1}(\Omega)\big). \tag{3.2}$$

Remarque 3.1. *Le première équation du problème (3.1) est connue sous le nom de l'équation de la chaleur. Elle est utilisée pour modéliser le transfert de chaleur par conduction.*

DÉFINITION 3.1

Une fonction u est dite solution faible au problème (3.1) si

$$\begin{cases} u \in L^2\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big) \cap \mathscr{C}\big([0,T];L^2(\Omega)\big), \quad u_t \in L^2\big(0,T;H^{-1}(\Omega)\big), \\ u(0) = u_0, \\ \langle u_t, v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} + \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \quad \text{dans } \mathscr{D}'(]0,T[) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.3}$$

3.1 Cadre général

Soit (V,H,V') un triplet d'évolution, V étant séparable. Pour $t \in]0,T[$, on note $a(t;u,v)$ une forme bilinéaire sur V avec la suivante propriétés :

$$\forall u,\, v \in V, \quad t \mapsto a(t;u,v) \text{ est mesurable,} \tag{3.4}$$

il existe deux constantes $\alpha\,\beta > 0$ telles que

$$|a(t;u,v)| \le \beta \|u\| \|v\| \quad \forall u,\, v \in V, \quad \text{p.p. } t \in]0,T[, \tag{3.5}$$

et

$$|a(t;u,u)| \ge \alpha \|u\|^2 \quad \forall u \in V, \quad \text{p.p. } t \in]0,T[. \tag{3.6}$$

On se donne deux fonctions u_0 et f telles que

$$u_0 \in H, \quad f \in L^2\big(0,T;V'\big). \tag{3.7}$$

On peut maintenant donner le théorème d existence suivant

THÉORÈME 1.1 ([22]): Sous les hypothèses (3.4)–(3.7), il existe une solution unique au problème :

$$u \in L^2\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big), \quad u_t \in L^2\big(0,T;H^{-1}(\Omega)\big), \tag{3.8}$$

$$u(0) = u_0, \tag{3.9}$$

$$\frac{d}{dt}(u,v) + a(.;u,v) = \langle f, v \rangle \quad \text{dans } \mathscr{D}'(]0,T[) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.10}$$

Preuve.

La démonstration de l'existence de la solution du problème (3.1) est basée sur la méthode de Faedo-Galerkin est l'une des techniques les plus efficaces pour déterminer des solutions approximatives pour une équation différentielle donnée dans un espace abstrait. Une suite de solutions approchées construites à partir de cette méthode qui converge uniformément vers la solution exacte du problème donné. La méthode de Faedo-Galerkin consiste à réaliser les trois étapes suivantes :

1- Rechercher de solutions approchées.

2- Établir des estimations à priori sur ces solutions approchées .

3- Passer à la limite dans le problème approché.

1. Construction d'une approximation de u. Pour cela soit $w_1,\ldots,w_n,\ldots$ une base de V, i.e. les vecteurs w_i sont linéairement indépendants et l'espace vectoriel engendré par ces vecteurs est dense dans V et également dans H puisque V est dense dans H. Notant que la séparabilité de V assure l'existence d'une telle base. Puisque $u_0 \in H$, alors

$$u_0^n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i w_i \to u_0 \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega) \quad \text{lorsque } n \to \infty, \tag{3.11}$$

où $\beta_i = (u_0, w_i)_{L^2(\Omega)}$
On affirme alors qu'il existe des fonctions $\alpha_1(t)\ldots\ldots\alpha_n(t)$ définies sur $]0,T[$ qui sont des solutions du système différentiel linéaire

$$\alpha_i(0)=\beta_i \quad \forall i=1,\cdots,n. \tag{3.12}$$

$$u_n(t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(t)w_i, \tag{3.13}$$

$$\big(u_n'(t),w_j\big)+a\big(t;u_n(t),w_j\big)=\langle f(t),w_j\rangle \text{ p.p. } t\in]0,T[\quad \forall j=1,\cdots n. \tag{3.14}$$

Notant que l'équation (3.14) est également vraie dans $\mathscr{D}'(]0,T[)$. Posant $\alpha(t)=\big(\alpha_j(t)\big)_{1\le j\le n}$ et $F(t)=\big(\langle f(t),w_j\rangle\big)_{1\le j\le n}$ alors on peut écrire (3.14) sous la forme suivante :

$$\alpha'(t)=B(t)\alpha(t)+G(t) \tag{3.15}$$

où $G(t)=M^{-1}\cdot F(t)$ et $B(t)=-M^{-1}\cdot\big(a(t;w_i,w_j)\big)_{i,j}$ avec $M=\big((w_i,w_j)\big)_{i,j}$.
Puisque les coefficients de la matrice $B(t)$ sont $L^\infty(]0,T[)$ et G est un vecteur avec des composantes dans $L^2(]0,T[)$, alors $\alpha(t)$ est la solution unique de l'équation intégrale

$$\alpha(t)=\alpha(0)+\int_0^t\Big(B(s)\cdot\alpha(s)+G(s)\Big)\,ds. \tag{3.16}$$

2. Estimations à priori sur u_n . En multipliant chaque équation de (3.14) par $x_j(t)$ et en sommant en j on obtient :

$$\big(u_n'(t),u_n(t)\big)+a\,(t;u_n(t),u_n(t))=\big\langle f(t),u_n(t)\big\rangle$$

ou bien

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_n(t)|^2+a\,(t;u_n(t),u_n(t))=\big\langle f(t),u_n(t)\big\rangle\le\|f(t)\|_*\|u_n(t)\| \tag{3.17}$$

où $\|\cdot\|_*$. désigne la norme forte dans V'. En utilisant (3.6), il découle que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_n(t)|^2+\alpha\|u_n(t)\|^2\le\|f(t)\|\cdot\|u_n(t)\|.$$

On peut alors appliquer l'inégalité de Young

$$ab\le\frac{\alpha}{2}a^2+\frac{1}{2\alpha}b^2 \quad \forall a,b$$

afin d'obtenir

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_n(t)|^2+\alpha\|u_n(t)\|^2\le\frac{\alpha}{2}\|u_n(t)\|^2+\frac{1}{2\alpha}\|f(t)\|_*^2.$$

Donc finalement

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_n(t)|^2+\frac{\alpha}{2}\|u_n(t)\|^2\le\frac{1}{2\alpha}\|f(t)\|_*^2.$$

En intégrant entre 0 et t on obtient pour chaque $t\in[0,T]$:

$$\frac{|u_n(t)|^2}{2}+\frac{\alpha}{2}\int_0^t\|u_n(s)\|^2\,ds\le\frac{|u_n(0)|^2}{2}+\frac{1}{2\alpha}\int_0^t\|f(s)\|_*^2 ds.$$

Or, nous avons vu (voir (3.11)) que

$$u_n(0) \to u_0 \quad \text{dans } H,$$

de sorte que pour un C constant,

$$|u_n(0)| \le C\,|u_0|.$$

Ainsi, l'inégalité ci-dessus s'écrit, pour une autre constante C,

$$|u_n(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|u_n(s)\|^2\,ds \le C\left(|u_0|^2 + \int_0^t \|f(s)\|_*^2 ds\right) \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.18}$$

Pour une certaine constante C, on a obtenu

$$|u_n|_{L^\infty(0,T;H)}, |u_n|_{L^2(0,T;V)} \le C. \tag{3.19}$$

3. Passage à la limite . Avant de passer à la limite, on fait une remarque. Il résulte de (3.5) que

$$v \mapsto a(t;u,v)$$

est une forme continue linéaire sur V pour p.p. t, et chaque u. Ainsi, d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un élément que l'on notera $A(t)u$ dans V' tel que

$$a(t;u,v) = \langle A(t)u, v) \quad \forall u, v, \text{ p.p. } t. \tag{3.20}$$

Il n'est pas difficile de voir que pour les t, l'opérateur

$$u \mapsto A(t)u$$

est linéaire de V dans V'. De plus, grâce à (3.5), pour p.p. t

$$\|A(t)u\|_* \le M\|u\| \quad \forall u \in V. \tag{3.21}$$

Il résulte donc de (3.19) que

$$|A(t)u_n|_{L^2(0,T;V')} \le C \tag{3.22}$$

pour une certaine constante C. En considérant (3.19), (3.22), on peut extraire une sous-suite de u_n, notée toujours u_n, telle que

$$u_n \rightharpoonup u \qquad \text{dans } L^2(0,T;V), \tag{3.23}$$
$$u_n \rightharpoonup \bar{u} \qquad \text{dans } L^\infty(0,T;H) \text{ faible }^*, \tag{3.24}$$
$$A(t)u_n \rightharpoonup \overline{\bar{u}} \qquad \text{dans } L^2\left(0,T;V'\right), \tag{3.25}$$

pour $u, \bar{u}, \overline{\bar{u}}$ appropriés. Mais il n'est pas alors difficile de montrer que

$$\bar{u} = u, \quad \overline{\bar{u}} = A(t)u. \tag{3.26}$$

En effet, si $v \in L^2(0,T;V)$, alors $v \in L^2(0,T;H)$ et

$$|v| \leq C\|v\| \quad \forall v \in V. \tag{3.27}$$

Ainsi, pour tout $v \in L^2(0,T;V)$, d'après (3.24),

$$\int_0^T (u_n, v)\, dt \to \int_0^T (\tilde{u}, v)\, dt.$$

Maintenant, pour v fixé

$$u \mapsto \int_0^T (u, v)$$

est une forme linéaire sur $L^2(0,T;V)$, ceci est également dû à (3.27) et de (3.23) on déduit

$$\int_0^T (u_n, v)\, dt \to \int_0^T (u, v)\, dt.$$

Par conséquent

$$\int_0^T (\bar{u} - u, v)\, dt = 0$$

pour chaque $v \in L^2(0,T;V)$ et par densité de V dans H on conclut que $u = \bar{u}$. Ensuite, pour $v \in L^2(0,T;V)$ on a

$$\int_0^T \langle A(t)u_n, v\rangle\, dt \to \int_0^T \langle \overline{\bar{u}}, v\rangle\, dt.$$

Mais depuis

$$\langle A(t)u_n, v\rangle = a(t; u_n, v).$$

Et puisque pour v fixé

$$t \mapsto a(t;\cdot, v).$$

Appartient à $L^2(0,T;V')$, on a aussi

$$\int_0^T \langle A(t)u_n, v\rangle\, dt \to \int_0^T (A(t)u, v)\, dt.$$

Donc

$$\int_0^T \langle A(t)u, v\rangle\, dt = \int_0^T \langle \overline{\bar{u}}, v\rangle\, dt$$

pour tout $v \in L^2(0,T;V)$ et ainsi on obtient (3.26). On a donc maintenant une séquence u_n telle que

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u && \text{dans} \quad L^2(0,T;V), \\ u_n &\rightharpoonup u && \text{dans} \quad L^\infty(0,T;H) \text{ faible } *, \\ A(t)u_n &\rightharpoonup A(t)u && \text{dans} \quad L^2(0,T;V'), \end{aligned}$$

Et on aura terminé, à condition de montrer que u est une solution de (3.8)–(3.10).

4. u est une solution de (3.8)–(3.10). Soit $v \in V$. On peut alors clairement trouver une suite

$$v_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^n w_j$$

telle que $v_n \to v$ in V et également dans H. Alors pour chaque $\varphi \in \mathscr{D}(]0,T[)$, il vient

$$\varphi(t)v_n \to \varphi(t)v \quad \text{dans } L^2(0,T;V)$$

et aussi dans $L^2(0,T;H)$. Maintenant, clairement, en multipliant chaque équation de (3.14) par $\varphi(t)\alpha_j^n$, en sommant et en intégrant sur $]0,T[$ on obtient

$$\int_0^T -\big(u_n(t),\varphi'(t)v_n\big)+\big(A(t)u_n,\varphi(t)v_n\big)\,dt = \int_0^T \big(f(t),\varphi(t)v_n\big)\,dt. \tag{3.28}$$

En passant à la limite on obtient immédiatement

$$\int_0^T -\big(u(t),\varphi'(t)v\big)+a(t;u,\varphi(t)v)\,dt = \int_0^t (f(t),\varphi(t)v)\,dt.$$

Cela peut aussi s'écrire

$$\int_0^T -(u(t),v)\varphi' + a(t;u,v)\varphi\,dt = \int_0^T \langle f(t),v\rangle\varphi\,dt, \tag{3.29}$$

c'est-à-dire que (3.10) est vraie. Il reste à montrer que

$$u_t \in L^2\big(0,T;V'\big), \quad u(0)=u_0.$$

Pour le premier point on remarque que (3.29) peut aussi s'écrire

$$\frac{d}{dt}(u(t),v) = \langle f(t)-A(t)u,v\rangle \quad \text{dans } \mathscr{D}'(]0,T[),$$

pour chaque $v \in V$. Cela signifie également que

$$-\int_0^T (u(t),v)\varphi'(t)\,dt = \int_0^T \langle f(t)-A(t)u,v\rangle\varphi(t)\,dt \quad \forall v\in V,\ \forall\varphi\in\mathscr{D}(]0,T[).$$

Et, en considérant des intégrales à valeurs dans V',

$$-\int_0^T (u(t),\cdot)\varphi'\,dt = \int_0^T \langle f(t)-A(t)u,\cdot\rangle\,\varphi\,dt \quad \forall\varphi\in\mathscr{D}(]0,T[).$$

Ainsi :

$$u_t = f(t)-A(t)u \quad \text{dans } L^2\big(0,T;V'\big). \tag{3.30}$$

Ensuite, pour établir que $u(0)=u_0$ On considéra une fonction régulière φ telle que $\varphi(0)\neq 0, \varphi(T)=0$. De (3.30) et du fait que $\varphi(t)v \in L^2(0,T;V) \quad \forall v\in V$, on dérive

$$\langle u_t,v\rangle\,\varphi(t) = \langle f(t)-A(t)u,v\rangle\varphi(t) \quad \text{p.p. } t\in]0,T[.$$

En intégrant dans t entre $0, T$ on conclut que (voir formule d'intégration par parties)

$$\int_0^T (u,v)_t \varphi \, dt = \int_0^T \langle f(t) - A(t)u, v\rangle \varphi \, dt.$$

Donc après intégration

$$-\int_0^T (u,v)\varphi' \, dt - (u(0),v)\varphi(0) = \int_0^T \langle f(t) - A(t)u, v\rangle \varphi \, dt.$$

En utilisant (3.28) avec notre φ et en intégrant par parties, on obtient

$$-\int_0^T (u_n,v_n)\varphi' \, dt - (u_n(0),v_n)\varphi(0) = \int_0^T \big\langle f(t) - A(t)u_n, v_n\big\rangle \varphi \, dt.$$

Passer à la limite en n donnera

$$-\int_0^T (u,v)\varphi' \, dt - (u_0,v)\varphi(0) = \int_0^T \langle f(t) - A(t)u, v\rangle \varphi \, dt.$$

Ainsi

$$(u_0 - u(0), v) = 0 \quad \forall v \in V$$

et par densité de V dans H on conclut que $u(0) = u_0$.

5. Unicité . En supposant que u_1 et u_2 sont deux solutions de (3.8)–(3.10), on a par soustraction

$$\frac{d}{dt}(u_1 - u_2, v) + a(\cdot; u_1 - u_2, v) = 0 \quad \text{dans } \mathscr{D}'(]0,T[), \forall v \in V$$

ou bien

$$\frac{d}{dt}(u_1 - u_2) + A(t)(u_1 - u_2) = 0 \quad \text{dans } L^2\big(0,T;V'\big).$$

Multiplier les deux côtés par $u_1 - u_2$ et intégrer sur $]0,T[$ donne

$$|(u_1 - u_2)(t)|^2 + \int_0^t a(s; u_1 - u_2, u_1 - u_2)\, ds = 0$$

d'où le résultat puisque $a \geq 0$. Concernant la convergence de u_n on peut être un peu plus précis et montrer que $u_n \to u$ fortement dans $L^2(0,T;V)$. En effet, d'après (3.18) écrit pour $t = T$, il est clair que $u_n(T)$ reste borné dans H. Donc, il existe $u_\infty \in H$ tel que

$$u_n(T) \rightharpoonup u_\infty \quad \text{dans } H.$$

Pour montrer que $u_\infty = u(T)$ on procède alors comme dans la preuve de $u(0) = u_0$, en choisissant φ une fonction régulière telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(T) \neq 0$. On considère alors la quantité

$$\begin{aligned} U_n(t) &= \frac{1}{2}|u_n(T) - u(T)|^2 + \int_0^T a(t; u_n(t) - u(t), u_n(t) - u(t))\, dt \\ &= \frac{1}{2}|u_n(T)|^2 + \int_0^T a(t; u_n(t), u_n(t))\, dt + R_n(T) \end{aligned} \tag{3.31}$$

où

$$R_n(T)=\frac{1}{2}|u(T)|^2-(u_n(T),u(T))+\int_0^T a(t;u(t),u(t))\,dt$$
$$+\int_0^T a(t;-u(t),u_n(t)-u(t))\,dt+\int_0^T a(t;u_n(t)-u(t),-u(t))\,dt.$$

Sachant que $u_n(T)\rightharpoonup u(T)$ et du fait de la faible convergence de u_n, il est clair que

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(T)=-\frac{1}{2}|u(T)|^2-\int_0^T a(t;u(t),u(t))\,dt. \tag{3.32}$$

Maintenant à partir de (3.17) intégré sur $]0,T[$ on dérive :

$$\frac{1}{2}|u_n(T)|^2+\int_0^T a(t;u_n(t),u_n(t))\,dt=\frac{1}{2}|u_n(0)|^2+\int_0^T \langle f(t),u_n(t)\rangle\,dt.$$

Donc en passant à la limite

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}|u_n(T)|^2+\int_0^T a(t;u_n(t),u_n(t))\,dt=\frac{1}{2}|u_0|^2+\int_0^T \langle f(t),u(t)\rangle\,dt.$$

Mais on a également de (3.10) écrit avec $v=u(t)$ et après l'intégration

$$\frac{1}{2}|u(T)|^2+\int_0^T a(t;u(t),u(t))\,dt=\frac{1}{2}|u_0|^2+\int_0^T (f(t),u(t))\,dt. \tag{3.33}$$

En combinant (3.31), (3.32) et (3.33) on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} U_n(T)=0.$$

Le résultat découle alors du fait que

$$\alpha\int_0^T \|u_n(t)-u(t)\|^2\,dt\le U_n(T).$$

3.2 Application

Soient Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $u_0\in L^2(\Omega)$ et $f\in L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$. On considère le problème parabolique linéaire suivant

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-g(t)\Delta u=f & \text{dans } Q,\\ u=0, & \text{sur } \Sigma,\\ u(x,0)=u_0(x), & \text{dans } \Omega,\end{cases} \tag{3.34}$$

où $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction mesurable vérifiant la condition suivante :

$$\exists \lambda, \Lambda > 0; \quad \lambda \leq g(t) \leq \Lambda, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \tag{3.35}$$

Remarque 3.2. *Dans le cas où $g \equiv 1$, le problème de la chaleur.*

DÉFINITION 3.2

Une fonction u est dite solution faible au problème (3.34) si

$$\begin{cases} u \in L^2\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big) \cap \mathscr{C}\big([0,T];L^2(\Omega)\big), \quad u_t \in L^2\big(0,T;H^{-1}(\Omega)\big), \\ u(0) = u_0, \\ \langle u_t, \varphi \rangle + a\big(t,u,\varphi\big) = \langle f, \varphi \rangle \quad \text{dans } \mathscr{D}'(]0,T[) \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.36}$$

où $a\big(t,u,\varphi\big) = g(t)\displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx$.

THÉORÈME 2.1: Sous l'hypothèses (3.35), le problème (3.1) au- moins une solution faible.

Preuve.

Pour démontrer que problème (4.6) admet une unique solution faible, il suffit de démontrer que la forme bilinéaire $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ satisfait toutes les hypothèses du théorème 1.1.

$$a\big(t,u,\varphi\big) = g(t)\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx \tag{3.37}$$

1. Soient $u, \varphi \in H_0^1(\Omega)$. Puisque g est une fonction continue, alors l'application $h :]0,T[\to \mathbb{R}$ définie par

$$h(t) = a(t;u,\varphi) = g(t)\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx, \tag{3.38}$$

est mesurable.

2. *a est continue :* Soient $u, \varphi \in H_0^1(\Omega)$. Pour presque partout $t \in]0,T[$, on a

$$|a(t;u,\varphi)| = g(t)\left|\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx\right| \leq \Lambda \int_\Omega |\nabla u||\nabla \varphi| \, dx \leq \Lambda \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{3.39}$$

3. *a est coercive :* Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. Pour presque partout $t \in]0,T[$, on a

$$a(t;u,u) = g(t)\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \quad \geq \lambda \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}. \tag{3.40}$$

3.3 Régularité

THÉORÈME 3.1: Dans le problème (3.34), si on suppose que les données f, u_0, et g sont plus régulières :

$$f \in L^2\big(0,T;L^2(\Omega)\big),\ u_0 \in H_0^1(\Omega), \tag{3.41}$$

et $g \in \mathscr{C}^1([0,T])$ satisfaisant (3.35). Alors la solution faible u du problème (3.34) ayant la régularité suivante :

$$u \in L^2\big(0,T;H^2(\Omega)\big)\cap L^\infty\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big),\ u' \in L^2\big(0,T;L^2(\Omega)\big). \tag{3.42}$$

De plus on a l'estimation suivante :

$$\sup_{0\le t\le T}\operatorname{ess}\|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + \|u'\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}\right), \tag{3.43}$$

où C est une constante positive dépend seulement de Ω, T, λ, Λ et $\|g'\|_\infty = \sup_{t\in[0,T]}|g'(t)|$.

Preuve.

Soit $n \ge 1$ fixé. En multipliant l'équation (3.14) par $\alpha_j'(t)$ et en sommant en j, il vient

$$\big(u_n', u_n'\big) + g(t)\big(\nabla u_n, \nabla u_n'\big) = \big(f(t), u_n'\big), \quad \text{p.p. } t \in]0,T[.$$

En utilisant le fait que $\big(\nabla u_n, \nabla u_n'\big) = \dfrac{d}{2dt}\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)}$, et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\|u_n'\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{d}{2t}\Big(g(t)\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)}\Big) \le \frac{1}{2}g'(t)\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} + 2\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|u_n'\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad \text{p.p. } t \in]0,T[.$$

En utilisant (3.35), l'estimation (3.19) et le fait que $\|u_n(0)\|_{H_0^1(\Omega)} \le \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\int_0^T \|u_n'\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + \lambda \sup_{0\le t\le T}\operatorname{ess}\|u_n(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} &\le \Lambda\|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + 4\|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\ &\quad + \|g'\|_\infty\|u_n\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\ &\le C\left(\|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\right).\end{aligned} \tag{3.44}$$

Passer à la limite in (3.44), on en déduit que $u \in L^\infty\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big)$, $u' \in L^2\big(0,T;L^2(\Omega)\big)$ et l'estimation suivante :

$$\|u'\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \sup_{0\le t\le T}\operatorname{ess}\|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \le C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}\right). \tag{3.45}$$

Puisque, pour presque partout $t \in [0,T]$, la fonction u satisfait

$$(\nabla u, \nabla v) = (h, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{3.46}$$

où $h(t) = \dfrac{1}{g(t)}(f - u') \in L^2(\Omega)$, alors par la régularité elliptique (voir [5, Theorem 4, page 334]), il découle que

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{H^2(\Omega)} &\leq C\left(\|h\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\ &\leq C\left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u'\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right). \end{aligned} \tag{3.47}$$

En intégrant sur $[0, T]$ et en utilisant l'estimation (3.45), il vient

$$\|u\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leq C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|u_0\|_{H^1_0(\Omega)}\right). \tag{3.48}$$

PROBLÈME PARABOLIQUE QUASI-LINÉAIRE NON LOCAL

4

Chapitre

Sommaire

1 Position du problème 33
2 Énoncé du résultat principal 34

4.1 Position du problème

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Pour $T>0$, On note Q le cylindre $\Omega\times]0,T[$ et Σ sa surface latérale $\partial\Omega\times]0,T[$. On considère le problème parabolique non local suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - M\left(\displaystyle\int_\Omega u\,dx\right)\Delta u = f & \text{dans } Q,\\ u=0, & \text{sur } \Sigma,\\ u(0)=u_0, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

où $u=u(x,t)$ est une fonction sur Q à valeurs dans $\mathbb{R}$, u_0 et f sont des fonctions données telles que

$$u_0\in L^2(\Omega),\quad f\in L^2\big(0,T;H^{-1}(\Omega)\big). \tag{4.2}$$

On suppose en outre que $M:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction continue vérifiant

$$\exists m_0,\, m_\infty>0;\qquad 0<m_0\le M(s)\le m_\infty,\qquad \forall s\in\mathbb{R}. \tag{4.3}$$

DÉFINITION 4.1

Une fonction u est dite solution faible au problème (3.1) si

$$\begin{cases} u\in L^2\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big)\cap\mathscr{C}\big([0,T];L^2(\Omega)\big),\quad u_t\in L^2\big(0,T;H^{-1}(\Omega)\big),\\ u(0)=u_0,\\ \langle u_t,\varphi\rangle + M\left(\displaystyle\int_\Omega u\,dx\right)\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx = \langle f,\varphi\rangle \quad \text{dans } \mathscr{D}'(]0,T[)\quad \forall\varphi\in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

(4.4)

4.2 Énoncé du résultat principal

Dans cette section, on va démontrer le théorème d'existence suivant :

THÉORÈME 2.1: Sous les hypothèses (4.2) et (4.3), le problème (3.1) a au moins une solution.

Preuve.

On utilise le théorème du point fixe de Schauder. On définit l'application

$$\begin{aligned} S : L^2\big(0,T;L^2(\Omega)\big) &\longrightarrow L^2\big(0,T;L^2(\Omega)\big), \\ v &\longrightarrow S(v)=w, \end{aligned}$$

où w est la solution faible unique du problème linéaire

$$(p_v)\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} - M\left(\displaystyle\int_\Omega v\,dx\right)\Delta w = f & \text{dans } Q, \\ w=0, & \text{sur } \Sigma, \\ w(0)=u_0, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{4.5}$$

au sens faible suivant :

$$\begin{cases} w\in L^2\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big), \quad w_t\in L^2\big(0,T;H^{-1}(\Omega)\big), \\ w(0)=u_0, \\ \langle w_t,\varphi\rangle + a_v(t;w,\varphi)=\langle f,\varphi\rangle \quad \text{dans } \mathscr{D}'(]0,T[) \quad \forall\varphi\in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{4.6}$$

où

$$a_v(t;w,\varphi)=M\left(\int_\Omega v\,dx\right)\int_\Omega \nabla w\cdot\nabla\varphi\,dx. \tag{4.7}$$

Pour démontrer que problème (4.6) admet une unique solution faible, il suffit de démontrer que la forme bilinéaire $a_v : H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\to\mathbb{R}$ satisfait toutes les hypothèses du théorème 1.1.

1. Soient u, $\varphi\in H_0^1(\Omega)$. Le fait que M est une fonction continue, alors l'application $h :]0,T[\to\mathbb{R}$ définie par
$$h(t)=a_v(t;w,\varphi)=M\left(\int_\Omega v\,dx\right)\int_\Omega \nabla w\cdot\nabla\varphi\,dx, \tag{4.8}$$
est mesurable.
2. Continuité de a_v. Soient u et v deux éléments de $H_0^1(\Omega)$. En utilisant (4.3), puis l'inégalité de Hölder, on obtient
$$\begin{aligned} |a_v(t;w,\varphi)| &= M\left(\int_\Omega v\,dx\right)\left|\int_\Omega \nabla w\cdot\nabla\varphi\,dx\right| \\ &\le m_\infty\int_\Omega |\nabla w||\nabla\varphi|\,dx \\ &\le m_\infty\|w\|_{H_0^1(\Omega)}\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

3. Coercivité de a_v. Soit u un élément de $H_0^1(\Omega)$. En utilisant (4.3), il vient

$$\begin{aligned} a_v(t;w,w) &= M\left(\int_\Omega v\,dx\right)\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx \\ &\geq m_0\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Maintenant, on prouve que l'application S est vérifie toutes les hypothèses du point fixe de Schauder 3.1.

1. L'application S laisse invariante une certaine boule fermée de $L^2\big(0,T;L^2(\Omega)\big)$.

Prenant $\varphi = w$ in (4.4), il s'ensuit que

$$\langle w_t, w\rangle + M\left(\int_\Omega v\,dx\right)\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \langle f, w\rangle. \tag{4.11}$$

Puisque

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = \langle w_t, w\rangle \quad \text{p.p. } t\in[0,T],$$

alors, en utilisant (4.3), il vient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + m_0\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)}\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{p.p. } t\in]0,T[. \tag{4.12}$$

En utilisant l'inégalité de Young, il découle que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2_{H} + m_0\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{2m_0}\|f\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + \frac{m_0}{2}\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{p.p. } t\in]0,T[. \tag{4.13}$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{m_0}{2}\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{2m_0}\|f\|^2_{H^{-1}(\Omega)} \quad \text{p.p. } t\in]0,T[. \tag{4.14}$$

En intégrant sur $]0,T[$, il s'ensuit que

$$\frac{1}{2}\|w(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{m_0}{2}\int_\Omega \|w\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,dx \leq \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2m_0}\int_\Omega \|f\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\,dx. \tag{4.15}$$

En conséquence,

$$\|w\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}, \quad \|w\|_{L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)} \leq R, \tag{4.16}$$

où

$$R^2 = \frac{1}{m_0}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{m_0^2}\|f\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}. \tag{4.17}$$

Donc la boule fermée

$$\bar{B}(0,R)=\left\{w\in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right);\quad \|w\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\leq R\right\},$$

est invariante par l'application S.

2. L'application S est continue de $\bar{B}(0,R)$ dans $\bar{B}(0,R)$.

Soit (v_n) une suite de $\bar{B}(0,R)$ telle que

$$v_n\longrightarrow v\quad \text{fortement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{4.18}$$

On veut montrer que

$$w_n=S(v_n)\longrightarrow w=S(v)\quad \text{fortement dans } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{4.19}$$

Tenant compte de (4.18), alors par la réciproque partielle du théorème de convergence dominée, il s'ensuit que

$$\|v_n(t)-v(t)\|^2_{L^2(\Omega)}=\int_\Omega |v_n(x,t)-v(x,t)|^2\,dx\to 0,\quad \text{p.p. } t\in\,]0,T[.$$

Par conséquent,

$$\int_\Omega v_n(x,t)\,dx\to\int_\Omega v(x,t)\,dx,\quad \text{p.p. } t\in\,]0,T[. \tag{4.20}$$

Puisque $M:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continue, alors

$$M\left(\int_\Omega v_n(x,t)\,dx\right)\to M\left(\int_\Omega v(x,t)\,dx\right),\quad \text{p.p. } t\in\,]0,T[. \tag{4.21}$$

Comme w_n et w sont respectivement solution des problèmes (p_{v_n}) et (p_v) alors

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(w_n-w,\varphi)+M\left(\int_\Omega v_n\,dx\right)\int_\Omega\nabla(w_n-w)\cdot\nabla\varphi\,dx\\&=\left[M\left(\int_\Omega v\,dx\right)-M\left(\int_\Omega v_n\,dx\right)\right]\int_\Omega\nabla w\cdot\nabla\varphi\,dx\quad\text{dans }\mathscr{D}'(]0,T[),\end{aligned} \tag{4.22}$$

pour tout $\varphi\in H^1_0(\Omega)$. En prenant $\varphi=w_n-w$ dans (4.22), et en utilisant (4.3), il vient

$$\begin{aligned}&\langle w_n'-w',w_n-w\rangle+m_0\|w_n-w\|^2_{H^1_0(\Omega)}\\&\leq\left[M\left(\int_\Omega v\,dx\right)-M\left(\int_\Omega v_n\,dx\right)\right]\int_\Omega\nabla w\cdot\nabla(w_n-w)\,dx\quad\text{p.p. } t\in\,]0,T[.\end{aligned} \tag{4.23}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}&\langle w_n'-w', w_n-w\rangle + m_0\|w_n-w\|^2_{H_0^1(\Omega)}\\ &\leq \left[M\left(\int_\Omega v\,dx\right)-M\left(\int_\Omega v_n\,dx\right)\right]\int_\Omega \nabla w\cdot\nabla(w_n-w)\,dx\\ &\leq \left|M\left(\int_\Omega v\,dx\right)-M\left(\int_\Omega v_n\,dx\right)\right| \|w(.)\|_{H_0^1(\Omega)}\|w_n-w\|_{H_0^1(\Omega)},\end{aligned} \tag{4.24}$$

pour presque partout $t\in]0,T[$. En appliquant l'inégalité de Young, il découle que,

$$\begin{aligned}\langle w_n'-w', w_n-w\rangle + m_0\|w_n-w\|^2_{H_0^1(\Omega)} &\leq \frac{m_0}{2}\|w_n-w\|^2_{H_0^1(\Omega)}\\ &+\frac{1}{2m_0}\left|M\left(\int_\Omega v\,dx\right)-M\left(\int_\Omega v_n\,dx\right)\right|^2\|w(.)\|^2_{H_0^1(\Omega)},\end{aligned} \tag{4.25}$$

pour presque partout $t\in]0,T[$. En intégrant sur $]0,T[$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|w_n(T)-w(T)\|_{L^2(\Omega)}+\frac{m_0}{2}\|w_n-w\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\\ &\leq \frac{1}{2m_0}\int_0^T\left|M\left(\int_\Omega v\,dx\right)-M\left(\int_\Omega v_n\,dx\right)\right|^2\|w(.)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,dt.\end{aligned} \tag{4.26}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}&\|w_n-w\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\\ &\leq \frac{1}{m_0^2}\int_0^T\left|M\left(\int_\Omega v\,dx\right)-M\left(\int_\Omega v_n\,dx\right)\right|^2\|w(.)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,dt.\end{aligned} \tag{4.27}$$

Alors en laissant n tendre vers $+\infty$, on en déduit (4.19).

3. $S\left(\bar{B}(0,R)\right)$ est relativement compacte.

Soit (v_n) une suite de $\bar{B}(0,R)$. On veut démontrer que la suite $(w_n)=(S(v_n))$ est relativement compacte. Soit $\psi\in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$. Le fait que w_n est la solution du problème (p_{v_n}), alors

$$\langle\frac{dw_n}{dt},\psi\rangle=-M\left(\int_\Omega v_n\,dx\right)\int_\Omega\nabla w_n\cdot\nabla\psi\,dx+\langle f,\psi\rangle\quad\text{p.p } t\in]0,T[. \tag{4.28}$$

En intégrant sur $]0,T[$, et en utilisant (4.3), il s'ensuit que

$$\left|\int_0^T\langle\frac{dw_n}{dt},\psi\rangle\,dt\right|\leq\int_0^T\int_\Omega|\nabla w_n||\nabla\psi|\,dx\,dt+\left|\int_0^T\langle f,\psi\rangle\right|dt. \tag{4.29}$$

En employant l'inégalité de Hölder et en utilisant l'estimation (4.16), on trouve

$$\left|\int_0^T \langle \frac{dw_n}{dt}, \psi \rangle \, dt\right| \leq \left[\|w_n\|_{L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)} + \|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\right] \|\psi\|_{L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)} \tag{4.30}$$
$$\leq \left[\|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} + R\right] \|\psi\|_{L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)}.$$

En conséquence, il vient

$$\left\|\frac{dw_n}{dt}\right\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq \|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} + R. \tag{4.31}$$

De (4.16) et (4.31), on déduit que la suite (w_n) est bornée dans l'espace

$$W\left(0,T,H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega)\right) = \left\{ v \in L^2(0,T,H_0^1(\Omega)); \quad \frac{dv}{dt} \in L^2(0,T,H^{-1}(\Omega)) \right\},$$

qui s'injecte de façon compacte dans $L^2(0,T,L^2(\Omega))$ (par lemme de Compacité de type Aubin-Lions 3.7). Par conséquent la suite (w_n) est relativement compacte dans $L^2(0,T,L^2(\Omega))$.

PROBLÈME PARABOLIQUE DE TYPE KIRCHHOFF

Chapitre 5

Sommaire

1 Position du problème 39
2 Énoncé du résultat principal 40

5.1 Position du problème

Ce chapitre est basé essentiellement sur l'article de [23]. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière lipschitzienne $\partial\Omega$. On s'intéresse au problème de trouver $u = u(x,t)$ solution faible à

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx\right)\Delta u = f & \text{dans } Q, \\ u = 0, & \text{sur } \Sigma, \\ u(x,0) = u_0(x), & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

où $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue vérifiant

$$0 < m_0 \le M(s) \le m_\infty, \qquad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{5.2}$$

On suppose de plus que u_0 et f sont des fonctions données satisfaisant :

$$u_0 \in H_0^1(\Omega), \quad f \in L^2\big(0,T;L^2(\Omega)\big). \tag{5.3}$$

DÉFINITION 5.1

Une fonction u est dite solution faible au problème (5.1) si

$$\begin{cases} u \in L^2\big(0,T;H^1(\Omega)\big) \cap \mathscr{C}\big([0,T];L^2(\Omega)\big), \quad u_t \in L^2\big(0,T;H^{-1}(\Omega)\big), \\ u(.,0) = u_0, \\ u = 0, \\ \langle u_t, v\rangle + M\left(\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right)\displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \text{dans } \mathscr{D}'(]0,T[), \end{cases} \tag{5.4}$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$.

5.2 Énoncé du résultat principal

THÉORÈME 2.1: Sous les hypothèses (5.2) et (5.3), le problème (5.1) admet au moins une solution.

Preuve.

1. **Méthode 1 : Via le théorème du point fixe de Schauder 3.1.**

On procède par un argument du point fixe. On définit l'application

$$\begin{aligned} S : L^2\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big) &\longrightarrow L^2\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big), \\ w &\longrightarrow S(w)=u, \end{aligned}$$

où u est la solution unique du problème suivant

$$(P_v)\begin{cases} u\in L^2\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big)\cap\mathscr{C}\big([0,T];L^2(\Omega)\big) \quad u_t\in L^2\big(0,T;H^{-1}(\Omega)\big), \\ u(0)=u_0, \\ u=0, \\ \langle w_t,\varphi\rangle + a_w(t;u,v)=\displaystyle\int_\Omega f\,v\,dx \quad \text{dans } \mathscr{D}'(]0,T[) \quad \forall v\in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{5.5}$$

où $a_w(t;u,v)=M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx\right)\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx.$

Pour démontrer que problème (5.5) admet une unique solution, il suffit de montrer que la forme bilinéaire $a_w : H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\to\mathbb{R}$ satisfait toutes les hypothèses du théorème 1.1.

$$a_w(t;u,v)=M\left(\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx\right)\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx \tag{5.6}$$

(a). Soient $u,\ v\in H_0^1(\Omega)$. Puisque M est une fonction continue, alors l'application
$h :]0,T[\to\mathbb{R}$ définie par

$$h(t)=a_w(t;u,v)=M\left(\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx\right)\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx, \tag{5.7}$$

est mesurable.

(b). Continuité de a_w. Soient u et v deux éléments de $H_0^1(\Omega)$. En utilisant (5.2), puis l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} |a_w(t;u,v)| &= M\left(\int_\Omega |\nabla w|^2\,dx\right)\left|\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx\right| \\ &\le m_\infty \int_\Omega |\nabla u||\nabla v|\,dx \\ &\le m_\infty \|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

(c). Coercivité de a_v. Soit u un élément de $H_0^1(\Omega)$. En utilisant (5.2), il vient

$$\begin{aligned} a_w(t;u,u) &= M\left(\int_\Omega |\nabla w|^2\, dx\right)\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \\ &\geq m_0\|u\|^2_{H^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Maintenant, on prouve que l'application S est satisfait toutes les hypothèses du point fixe de Schauder 3.1.

I. On prouve qu'il existe une certaine boule fermée de $L^2\big(0,T;H_0^1(\Omega)\big)$ invariante par S.

Prenant $v = u$ dans (5.5), il s'ensuit que

$$\langle u_t, u\rangle + M\left(\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right)\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \langle f, u\rangle. \tag{5.10}$$

Puisque

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = \langle u_t, u\rangle \quad \text{p.p. } t\in[0,T],$$

alors en utilisant (5.2) et l'inégalité de Hölder, puis celle de Poincaré, il vient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + m_0\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C_\Omega\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{p.p. } t\in]0,T[. \tag{5.11}$$

Appliquant l'inégalité de Young, il découle que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + m_0\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega}{2m_0}\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{m_0}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{p.p. } t\in]0,T[. \tag{5.12}$$

C'est-à-dire

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{m_0}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega}{2m_0}\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \quad \text{p.p. } t\in]0,T[. \tag{5.13}$$

En intégrant sur $]0,T[$, il s'ensuit que,

$$\frac{1}{2}\|u(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{m_0}{2}\int_0^T \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}\, dt \leq \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2m_0}\int_0^T \|f\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt. \tag{5.14}$$

Par conséquent,

$$\int_0^T \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,dt \le \frac{1}{m_0}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{m_0^2}\int_0^T \|f\|^2_{L^2(\Omega)}\,dt. \quad \text{p.p. } t \in]0,T[. \tag{5.15}$$

Il en résulte que

$$\|u\|_{L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)} \le R, \tag{5.16}$$

où

$$R^2 = \frac{1}{m_0}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{m_0^2}\|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}. \tag{5.17}$$

Donc la boule fermée

$$\bar{B}(0,R) = \left\{ u \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right); \quad \|u\|_{L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)} \le R \right\},$$

est invariante par l'application S.

I. L'application S est continue de $\bar{B}(0,R)$ dans $\bar{B}(0,R)$.

Soit (v_n) une suite de $\bar{B}(0,R)$ telle que

$$w_n \longrightarrow w \quad \text{fortement dans } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{5.18}$$

On veut démontrer que

$$u_n = S(w_n) \longrightarrow u = S(w) \quad \text{fortement dans } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{5.19}$$

Tenant compte de (5.18), alors par la réciproque partielle du théorème de convergence dominée, il s'ensuit que

$$\|w_n(t) - w(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla(w_n(x,t) - w(x,t))^2\,dx \to 0, \quad \text{p.p. } t \in]0,T[.$$

Par conséquent,

$$\int_\Omega \nabla w_n(x,t)\,dx \to \int_\Omega \nabla w(x,t)\,dx, \quad \text{p.p. } t \in]0,T[. \tag{5.20}$$

Le fait que M est continue, alors

$$M\left(\int_\Omega \|w_n\|_{H_0^1(\Omega)}\,dx\right) \to M\left(\int_\Omega \|w\|_{H_0^1(\Omega)}\,dx\right), \quad \text{p.p. } t \in]0,T[. \tag{5.21}$$

Comme w_n et w sont respectivement solutions des problèmes (P_{v_n}) et (P_v) alors

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(u_n-u,v)+M\left(\|w_n\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right)\int_\Omega \nabla(u_n-u)\cdot\nabla v\,dx\\&=\left[M\left(\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right)-M\left(\|w_n\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right)\right]\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx,\end{aligned}\tag{5.22}$$

dans $\mathscr{D}'(]0,T[)$ pour tout $v\in H_0^1(\Omega)$.
En prenant $v=u_n-u$ dans (5.22), et en utilisant (5.2), il vient, pour presque partout $t\in]0,T[$,

$$\begin{aligned}&\left(u_n'-u',u_n-u\right)+m_0\|u_n-u\|^2_{H_0^1(\Omega)}\leq\\&\left[M\left(\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right)-M\left(\|w_n\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right)\right]\int_\Omega \nabla u_n\cdot\nabla u_n-u\,dx\\&\leq\left[M\left(\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right)-M\left(\|w_n\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right)\right]\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|u_n-u\|_{H_0^1(\Omega)}.\end{aligned}\tag{5.23}$$

En appliquant l'inégalité de Young, puis en intégrant sur $]0,T[$ il vient,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|(u_n-u)(T)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{m_0}{2}\|u_n-u\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}&\\\leq\frac{1}{2m_0}\int_0^T\Big[M\left(\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right)&\\-M\left(\|w_n\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right)\Big]\|u_n-u\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,dt&\\+\frac{m_0}{2}\|u_n-u\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}.&\end{aligned}\tag{5.24}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}&\frac{m_0}{2}\|u_n-u\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\leq\frac{1}{2m_0}\int_0^T\Big[M\left(\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right)\\&-M\left(\|w_n\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right)\Big]\|u_n-u\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,dt\quad\text{p.p. } t\in]0,T[.\end{aligned}\tag{5.25}$$

Alors en laissant n tendre vers $+\infty$, on déduit que

$$u_n=S(w_n)\longrightarrow u=S(w)\quad\text{fortement dans } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).\tag{5.26}$$

II. $S\left(\bar{B}(0,R)\right)$ est relativement compacte.

Soit (v_n) une suite de $\bar{B}(0,R)$. On veut démontrer que la suite $(w_n)=(S(v_n))$ est relativement compacte. D'après le théorème 3.1, il découle que

$$\begin{aligned}\sup_{0\leq t\leq T}\operatorname{ess}\|w_n(t)\|_{H_0^1(\Omega)}+\|w_n\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}+\|w_n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}&\\\leq C\left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}&\\+\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}\right),&\end{aligned}$$

où C est une constante positive ne dépend pas de n. Alors, on en déduit que la suite (w_n) est bornée dans l'espace

$$W=\left\{v\in L^2\left(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right);\ \frac{dv}{dt}\in L^2(0,T;L^2(\Omega))\right\}.$$

Puisque l'injection de $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ est compacte, alors par le lemme de Compacité de type Aubin-Lions 3.7), l'espace W s'injecte de façon compacte dans $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Par conséquent la suite (w_n) est relativement compacte dans $L^2(0,T,H_0^1(\Omega))$.

2. **Méthode 2 : Via l'approximation de Faedo-Galerkin.** Quitte à régulariser la fonction f par une suite de fonctions suffisamment régulières, on peut supposer que $f\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$.

   La démonstration de l'existence de la solution du problème (5.1) est basée sur la méthode de Faedo-Galerkin

   (a). Construction d'une approximation de u. Tout d'abord, on résout le problème dans un espace de dimension fine. On désigne par $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}\subset H_0^1(\Omega)$, λ_i les vecteurs propres et les valeurs propres pour le problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace : $\varphi_i\in H_0^1(\Omega)$

$$\left(\nabla\varphi_i,\nabla\varphi\right)_{L^2(\Omega)}=\lambda_i\left(\varphi_i,\varphi\right)_{L^2(\Omega)}\qquad\forall\varphi\in H_0^1(\Omega).$$

   La famille $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ forme une base orthonormale de $L^2(\Omega)$, et $\left\{\frac{\varphi_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right\}_{i=1}^{\infty}$ une base orthogonale de $H_0^1(\Omega)$.

   On cherche une solution du problème (5.4) comme limite de la suite de fonctions :

$$u_n(t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{in}(t)\varphi_i,$$

   où les coefficients α_{in} sont des fonctions à déterminés. Comme l'ensemble $\{\varphi_i\}$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, et $u_0\in H_0^1(\Omega)$, alors

$$u_0^n=\sum_{i}^{n}\beta_i\varphi_i\to u_0\quad\text{fortement dans } H_0^1(\Omega)\quad\text{lorsque } n\to\infty,\qquad(5.27)$$

   où $\beta_i=\left(u_0,\varphi_i\right)$ pour tout $i=1,\cdots,m$.

   Les fonctions α_{in} satisfont les conditions initiales

$$\alpha_{in}(0)=\left(u_0,\varphi_i\right)_{L^2(\Omega)},\quad i=1,\cdots,n.$$

   Les fonctions $\alpha_{in}(t)$ sont définies à partir du système d'équations différentielles ordinaires non linéaires :

$$\frac{d}{dt}\left(u_n,\varphi\right)+M\left(\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right)\int_\Omega\nabla u_n\nabla\varphi\,dx=\int_\Omega f\,\varphi\,dx.\qquad(5.28)$$

En prenant $\varphi = \varphi_j$ est en utilisant le fait que les φ_i sont orthogonaux, alors le problème (5.28) est équivalent à celui de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \alpha'_{jn}(t) = -\lambda_j \left(\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} \right) \alpha_{jn}(t) + \displaystyle\int_\Omega f \varphi_j \, dx \\ \alpha_{jn}(0) = \beta_j = \left(u_0, \varphi_j \right)_{L^2(\Omega)}, \quad j = 1, \cdots, n. \end{cases} \tag{5.29}$$

Puisque la fonction M est continue par rapport à α_{in}, il découle du théorème d'existence de Carathéodory 3.2 que pour tout n fini le problème de Cauchy (5.29) a une solution dans l'intervalle $[0, t_n]$ avec $t_n < T$ et tenant compte que les estimations établies ci-après ne dépendent pas de t, alors on peut prendre $t_n = T$.

(b). Estimation à priori.

En choisissant u_n comme fonction test dans la formulation (5.28), on obtient

$$\langle u'_n, u_n \rangle + M\left(\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} \right) \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, dx = \langle f, u_n \rangle \quad \text{p.p. } t \in]0, T[$$

Appliquant à droite l'inégalité de Hölder, puis celle de Poincaré, ensuite l'inégalité de Young, il vient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} + m_0 \|\nabla u_n\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega}{2m_0} \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{m_0}{2} \|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{p.p. } t \in]0, T[$$

En intégrant sur $]0, T[$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u_n(T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{m_0}{2} \|u_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq \frac{1}{2} \|u_n(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ + \frac{C_\Omega}{2m_0} \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Donc,

$$\|u_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C \left(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} \right), \tag{5.31}$$

où C est une constante positive ne dépend pas de n. Par conséquent, en utilisant le théorème 3.8 et le lemme de compacité de type Aubin-Lions 3.7, il vient

$$\begin{aligned} u_n &\longrightarrow u \qquad \text{faiblement dans} \quad L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right) \\ u'_n &\longrightarrow u' \qquad \text{faiblement dans} \quad L^2\left(0, T; H^{-1}(\Omega)\right) \\ u_n &\longrightarrow u \qquad \text{dans} \quad L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right). \end{aligned} \tag{5.32}$$

Puisque M est une fonction en générale non linéaire, alors pour passer à la limite dans le problème approché (5.28), on a besoin la convergence forte de la suite u_n dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

En multipliant chacune des équations (5.29) par $\lambda_j \alpha_{jn}(t)$ et en sommant en j, puis en intégrant par parties et en appliquant l'inégalité de Young on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\nabla u_n\|^2_{L^2(\Omega)}\right)+M\left(\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right)\|\Delta u_n\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_\Omega |\nabla f||\nabla u_n|\,dx$$
$$\leq \frac{1}{2}\|\nabla u_n\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\|\nabla f\|^2_{L^2(\Omega)}$$

En intégrant sur $]0,t[$, et en utilisant (5.2), il vient

$$\frac{1}{2}\sup_{0\leq t\leq T}\operatorname{ess}\|u_n(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}+m_0\|\Delta u_n\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \int_\Omega |\nabla f||\nabla u_n|\,dx$$
$$\leq \frac{1}{2}\|u_n\|^2_{L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)}+\frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)}+\|u_n(0)\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

En utilisant l'estimation (5.31) et le fait que $\|u_n(0)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}$, il s'ensuit que

$$\|\Delta u_n\|_{L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)} \leq C\left(\|f\|_{L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)}+\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}\right),$$

où C est une constante positive ne dépend pas de n.

Comme $\|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}$ est une norme équivalente de l'espace $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, on déduit de l'estimation précédente que

$$\|u\|_{L^2\left(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)} \leq C\left(\|f\|_{L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)}+\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)}\right). \tag{5.33}$$

De (5.31) et (5.33), on en déduit que la suite (u_n) est bornée dans l'espace

$$W=\left\{v\in L^2\left(0,T;H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right);\ \frac{dv}{dt}\in L^2(0,T;L^2(\Omega))\right\},$$

qui s'injecte de façon compacte dans $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ par le lemme de Compacité de type Aubin-Lions 3.7). Par conséquent la suite (u_n) admet une sous-suite, toujours notée (u_n), telle que

$$u_n \to u \quad \text{fortement dans } L^2(0,T,H_0^1(\Omega)). \tag{5.34}$$

(c). Passage à la limite.

De (5.34), il découle que, pour presque partout $t\in]0,T[$,

$$u_n(t)\to u(t) \quad \text{fortement dans } H_0^1(\Omega),$$

et comme M est continue, alors

$$M\left(\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right)\to M\left(\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right) \quad \text{p.p } t\in]0,T[. \tag{5.35}$$

En utilisant (5.32), (5.34) et (5.35), on peut passer a la limite dans (5.28), pour obtenir

$$\frac{d}{d\,t}\big(u,\varphi\big)+M\left(\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right)\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi\,d\,x=\langle\, f,\varphi\,\rangle \quad \text{p.p } t\in\,]0,T[,\ \forall\varphi\in H_0^1(\Omega). \tag{5.36}$$

Tenant compte du théorème 3.4 et (5.27), on en déduit que $u(0)=u_0$.

Bibliographie

[1] C. A. Alves, S. A. Corrêa, and T. F. Ma, *Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type*. Computers & Mathematics with Applications 49.1 (2005) : 85-93.

[2] L. Boccardo, F. Murat and J. P. Puel; *Existence results for some quasilinear parabolic equations*, Non Lin. Anal. TMA, 13 (1988) 373-392.

[3] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson, Paris, 1983.

[4] G. F. Carrier, *On the non-linear vibration problem of the elastic string*. Quarterly of applied mathematics 3.2 (1945) : 157-165.

[5] L. C. Evans, Partial differential equations. Vol. 19. American Mathematical Society, 2022.

[6] L. C. Evans, and R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*. Chapman and Hall/CRC, 2015.

[7] H. Gajewski, K. Gröger, and K. Zacharias,*Nichtlineare operatorgleichungen und operatordifferentialgleichungen*. Vol. 38. Walter de Gruyter GmbH and Co KG, 1974.

[8] J.Kinnunen, *Sobolev Spaces*.Déparetement of mathematics and Systems Analysis, Aalto University, 2017.

[9] M. T. Lacroix-Sonrier, *Distributions, espaces de Sobolev : applications*. Ellipses, 1998.

[10] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. 1969.

[11] H. Le Dret, *Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations*. Springer International Publishing :, 2018.

[12] N.S Papageorgiou, V.D Radulescu and D.D.Repovs, *Nonlinear Analysis : Theory and Methods*.Springer Monographs in Mathematics.

[13] H.K.Pathak, *an introduction to nonlinear analysis and fixed point theory*.springer.

[14] T. Roubicek, *Nonlinear partial differential equations with applications*. Vol. 153. Springer Science and Business Media, 2013.

[15] M. Ruzicka, and H. Eberlein; *Nichtlineare Funktionalanalysis*. Springer, Berlin 10 (2004) : 3-540.

[16] S. Salsa, *Partial differential equations in action : from modelling to theory*. Vol. 99. Springer, 2016.

[17] C. Srishti D, *Equations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles*.Vol. 3. PPUR presses polytechniques, 1998.

[18] S. Bochner, *Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind*. Fundamenta Mathematicae 20.1 (1933) : 262-176.

[19] F. Boyer and P. Fabrie, Mathematical tools for the study of the incompressible Navier-Stokes equations and related models. Vol. 183. Springer Science and Business Media, 2012.

[20] M. Chipot, and B. Lovat, *Some remarks on non local elliptic and parabolic problems*. Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications 30.7 (1997) : 4619-4627.

[21] M. Chipot, and B. Lovat, *On the asymptotic behaviour of some nonlocal problems*. Positivity 3 (1999) : 65-81.

[22] M. Chipot, *Elements of nonlinear analysis*. Springer Science & Business Media, 2000.

[23] M. Chipot, and T. Savitska. *Nonlocal p -Laplace equations depending on the Lp norm of the gradient*. Adv. Differential Equations 19.11-12 (2014) : 997-1020.

[24] M. Chipot, Elements of nonlinear analysis. Birkhäuser, 2012.

[25] G. Filippo, H. Grunau, and G. Sweers. *Polyharmonic boundary value problems : positivity preserving and nonlinear higher order elliptic equations in bounded domains*. Springer Science Business Media, 2010.

[26] F. Julio, S. A. Corrêa, and G. M. Figueiredo, *On an elliptic equation of p-Kirchhoff type via variational methods*. Bulletin of the Australian Mathematical Society 74.2 (2006) : 263-277.

[27] J. Droniou, Intégration et Espaces de Sobolev à valeurs vectorielles. Polycopié de l'Ecole Doctorale de Maths-Info de Marseille (2001) 1-85.

[28] R. Halsey, and p. Michael Fitzpatrick*Real analysis* Springer China Machine Press, 2010.

[29] L. Gasinski and N. S. Papageorgiou, Nonlinear Analysis. Series in Mathematical Analysis and Applications, vol. 9. (2006).

[30] G. Kirchhoff, *Vorlesungen uber mechanik*. BG Teubner, 1883.

[31] J. L. Lions and E. Magenes, Problemes aux limites non homogenes et applications. Vol. 1. (1968).

[32] J. L. Lions, *On some questions in boundary value problems of mathematical physics*. North-Holland Mathematics Studies. Vol. 30. North-Holland, 1978. 284-346.

[33] T. F. Ma, *Remarks on an elliptic equation of Kirchhoff type*. Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications 63.5-7 (2005) : e1967-e1977.

[34] L. A. Medeiros, J. Limaco, & S. B. Menezes, *Vibrations of elastic strings : Mathematical aspects, Part one*. Journal of Computational Analysis and applications 4 (2002) : 91-127.

[35] L. A. Medeiros, and J. Limaco, *On the Kirchhoff equation in noncylindrical domains of* $\mathbb{R}^N$. Pro Mathematica 19.37-38 (2005) : 91-106.

[36] N. S. Papageorgiou, On the existence of solutions for nonlinear parabolic problems with nonmonotone discontinuities. Journal of Mathematical Analysis and Applications 205.2 (1997) 434-453.

[37] J. Peradze, *An approximate algorithm for a Kirchhoff wave equation*. SIAM journal on numerical analysis 47.3 (2009) : 2243-2268.

[38] B. J. Pettis, *On integration in vector spaces*. Transactions of the American Mathematical Society 44.2 (1938) : 277-304.

[39] M. Ruzicka, and H. Eberlein; *Nichtlineare Funktionalanalysis*. Springer, Berlin 10 (2004) : 3-540.

[40] M. Ruzicka, Nichtlineare Funktionalanalysis : Eine Einführung. Springer-Verlag, 2006.

[41] N. Schwartz and J. T. Dunford, Linear operators, part I. Interscience, New York 1958 (1958).

[42] J. Simon; *Compact sets in the space* $L^p(0,T;B)$, Ann. Mat. Pura Appl, 146 (1987), 65-96.

[43] T. Roubicek, Nonlinear partial differential equations with applications. Vol. 153. Springer Science and Business Media, 2013.

[44] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and Its Applications II/A : Linear Monotone Operators. 1990.

[45] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications : II/B : Nonlinear Monotone Operators*. Springer Science and Business Media, 2013.