République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministére de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Dr. Yahia Fares de Médéa
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques



MEMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse et Modélisation Mathématique

par

GUENTOUR Widad

Titre : Etude d'une equation elliptique non linéaire à exposant variable et à donnée mesure

---

Soutenu publiquement le 13 juin 2017 devant le jury composé de

Président :	K.TOUMACHE	*MAA*	*U.Y.F.M*
Examinateur :	K.MAALOUM	*MAA*	*U.Y.F.M*
Encadreur :	M.BENCHAA	*MAA*	*U.Y.F.M*

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2016-2017

Dédicace

Avant tout, je remercie le grand Dieu, qui nous a aidés *à*
élabrer ce modeste travail
J'ai immense honneur de dédier ce modeste travail :
Ames cher parents (**Ibrahim et Kheira**) qu'étaient
présents pour moi durent tout ma vie.
Ames fréres (Saleh, Ahmed et Rachid)
et mes soeurs (Nacira et Rabiaa).
Atout la famille **"GUENTOUR"** sans exception.
Atous les enseignants qui m'ont guidée tout au long de
mon parcours universitaire.
A tous mes amis.
A mes amis de la promotion **AMM 2017**.

GUENTOUR WIDAD

Remerciements

Au terme de ce travail

Nous remercions en premier lieu, dieu le tous puissant,
de nous avoir illuminé et ouverts les ports des savoirs
et de nous avoirs donner le courage et la volonté pour

bien mener ce travail.

Nous tenons à exprimer notre gratitude et nos vifs
remerciements à notre promoteur : **Monsieur BENCHAA Mohamed**
pour son aide, sa patience, ainsi que sa gentillesse.
Nous remerciements vont également à tous les
enseignants de département de MI.
Enfin nous remercions tous qui ont contribué de prés ou
de loin la réaliàsation de ce travail

Merci a tous.

GUENTOUR Widad

Résumé

Dans ce travail, nous prouvons l'existence et la régularité des solutions faibles pour une classe de les équations elliptiques non linéaires avec des exposants variables et des données de mesure ou L^m, avec m étant petit. Le cadre fonctionnel implique des espaces de Lebesgue-Sobolev avec des exposants variables.

Mots-clés :
exposant variable, équation elliptique.

Abstract

In this work, we prove existence and régularity of weak solutions for a class of nonlinear elliptic equations with variable exponents and measure or L^m data, with m being small. The functional setting involves Lebesgue-Sobolev spaces with variable exponents.

Key word :

variable exponent, elliptic equation.

Notations et symboles

$(.,.)$: produit scalaire.

E' : le dual topologique.

$< .,. >_{E' \times E}$: le crochet de dualité entre l'espace E et son dual topologique.

Ω : un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue.

$\partial\Omega$: la frontiere de Ω.

$L^p(\Omega)$: l'espace de Lebesgue.

supp(.) : support d'une fonction.

$D(\Omega) = C^\infty(\Omega) \bigcap C_c(\Omega)$: espace des fonctions indéfiniments différentiables à support compact dans Ω.

$D'(\Omega)$: l'espace des distributions sur Ω.

$\alpha \in \mathbb{N}^N$: un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$ de longueur $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_N$.

∂_i : la i-iéme dérivée partielle, $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

∂^α : la dérivée d'ordre α.

$\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_{1 \leq i \leq N}$ le gradient.

$\text{div} = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_k}$ la divergence.

χ_E : la fonction caractéristique de l'ensemble E.

$\rightharpoonup$: la convergence faible.

$\hookrightarrow$: l'injection.

$W^{k,p}(\Omega)$: l'espace de Sobolev.

$W_0^{k,p}(\Omega)$: la ferméture de $D(\Omega)$ dans $W^{k,p}(\Omega)$.

$P(\Omega)$: l'ensemble des fonctions mésurable sur Ω.

$p(.)$: une fonction exposante.

$p'(.)$: la conjugué de $p(.)$.

p^+, p^- : supess et infess de $p(.)$.

$A(.)$: semi-modulaire, modulaire.

$L^{p(.)}(\Omega)$: l'espace de Lebesgue $\grave{a}$ exposants variables.

$||.||_{p(.)}$: la norme dans $L^{p(.)}(\Omega)$.

$W^{k,p(.)}(\Omega)$: l'espace de Sobolev $\grave{a}$ exposants variables.

$||.||_{k,p(.)}$: la norme dans $W^{k,p(.)}(\Omega)$.

$p*$: c'est l'exposant critique de Sobolev.

T_k : fonction troncature de niveau $k > 0$.

$C_0(\Omega)$: espace des fonctions continues nulles au bord de Ω.

$C^\infty(\Omega)$: l'espace des fonctions infiniment différentiables sur Ω.

$C_c(\Omega)$: l'espace des fonctions continue à support compact.

$\text{supess}_\Omega\, |u| = \inf\{M > 0\ ;\ \ |u(x)| \leq M \quad pp\ x \in \Omega\}$.

Table des matières

Introduction **9**

1 Rappels et définitions **11**

1.1 Espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ 11

1.2 Distributions 14

1.3 Espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ 15

2 Espace de Lebesgue et de Sobolev à exposant variable **21**

2.1 Espace de Lebesgue $L^{p(.)}(\Omega)$ 21

2.2 Espace de Sobolev $W^{k,p(.)}(\Omega)$ 27

3 Problème à donnée L^m **30**

3.1 Introduction 30

3.2 Preuve de théorème 31

3.2.1 Étape 1 : Approximation 31

3.2.2 Étape 2 : Estimations à priori 33

3.2.3 Étape 3 : Passage à la limite 38

3.3 Fin de Preuve 42

4 Problème à donnée mesure **43**

4.1 Introduction 43

4.2 Preuve de théorème 44

4.2.1 Étape 1 : Approximation 44

4.2.2 Étape 2 : Estimations à priori 46

4.2.3 Étape 3 : Passage à la limite 49

4.3 Fin de Preuve 50

Conclusion **52**

Introduction

Les mathématiques consistent d'abord en un langage, qui permet de transcrire des problèmes de nature quantitative : c'est la modélisation. Une fois cette transcription faite, des outils sont disponibles pour comprendre et résoudre les problèmes issus des phénomén du monde reél qui utilise les lois de la physique (mécanique, thermodynamique, électromagnétisme, etc.), ces lois sont, généralement, écrites sous la forme de bilans qui se traduisent mathématiquement par Equation Différentielles Ordinaires ou par des Equations aux Dérivées Partielles.

Les équations aux dérivées Partielles (EDPs) interviennent aussi dans beaucoup d'autres domaines : en chimie pour modéliser les réactions, en économie pour étudier les comportement des marchés, en finance pour étudier les produits dérivés et en traitement d'images pour restaurer les dégradations.

Les EDPs sont probalement apparues pour la premiere fois lors de la naissance de la mécanique rationnelle au cours du 17 éme (Newton, Leibniz...). En suite le "Catalogue" des EDPs s'est enrichi au fur et à mesure du développement des sciences et en particulier de la physique. S'il ne faut retenir que quelques noms, on se doit citer celui d'Euler puis ceux de Navier et Stokes, pour les équations de la mécanique des fluides.

La notion de solution faible ne suffit donc pas à déterminer la solution physique observée car elle n'est pas unique. Il apparait alors nécessaire de trouver un critére d'origine physique qui permet de sélectionner parmi toutes les solutions faibles, la solution physiquement admissible (celle qui est la plus proche de la solution physique) et qui permet d'obtenir des résultats d'existence et d'unicité. Pour remédier à cela, trois approches ont été utilisées.

Dall'Algio a montré que , la méthode par approximation conduit à une unique solution appelée SOLA (Solution Obtenue comme Limite d'Approximations) . Bénilan, Boccardo,

Gallouët, Gariepy, Pierre et Vazquez définissent la notion de solution entropique.
Enfin, Lions et Murat ont introduit une autre notion celle de solution renormalisée.
Le champ d'espace á exposant variable a assiste a un exposif criossance ces derniére années. Une recherche pour "exposante variable" rendements de 15 articles avant l'années 2000, 31 articles entre 2000 et 2004, et 267 articles entre 2005 et 2010.
L'espace de Lebesgue á exposant variable dans la littérature a été introduits par Orlicz en 1931. Aprés le travail d'Orlicz, H.Hudzik et J.Musielak ont étidié les espaces de Sobolev á exposante variables. L'espace de Lebegue á exposante variable a été indépendamente dévellopé par des chercheures Russes, particuliément Sharpudinov. Ceux-ci recherches sont á l'origine dans l'article de Tsenoven 1961, de plus les espaces de Sobolev á exposant variables ont été utilisées de modéliser différents phénoménes.
Ce mémoire, qui est compose de quatre chapitres, présente une étude l'existence de solutions faibles pour quelques problèmes elliptique non-linéaire à exposant variable et à données mesure .
Dans le premiér chapitre, on a présenté quelques rappelle et définition nécessaire à la suite de ce travail.
Le chapitre 2, nous rappelons quelque résultat de base sur les espaces de Lebesgue-Sobolev á exposants variables.
L'objéctif du troiséme chapitre, on traite le problème elliptique non-linéaire sous forme de divergence de second membre fonction donnée L^m.
En fin, dans le dernier chapitre, on montre l'existence de solution faible pour un problème elliptique non-linéaire à exposant variable et à donnée mesure.

Chapitre 1

Rappels et définitions

Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions et rappels des résultats nécessaires pour la suite de ce travail. Dans la suite Ω sera un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ avec $N \in \mathbb{N}^*$, muni de la mesure de Lebesgue.

1.1 Espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Définition 1.1 *On définit l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ par :*
Pour $1 \leq p < +\infty$

$$L^p(\Omega) = \Big\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable} ; \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty \Big\},$$

muni de la norme

$$||u||_{L^p(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \Big)^{\frac{1}{p}},$$

Pour $p = \infty$, on note

$$L^\infty(\Omega) = \Big\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable} ; \ \operatorname{supess}_\Omega |u| < \infty \Big\},$$

muni de la norme

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{supess}_\Omega |u|.$$

Pour $p = 2$, l'espace $L^2(\Omega)$ est de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)\, dx.$$

Proposition 1.1 ***(Séparabilité, réflexivité et dual de $L^p(\Omega)$)***

1. *$\mathcal{D}(\Omega)$ est un sous espace dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < \infty$.*
2. *$L^p(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$ et réflexif pour $1 < p < \infty$.*
3. *Le dual de $L^p(\Omega)$ pour $1 < p < \infty$ est isomorphe à $L^{p'}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*
4. *$L^1(\Omega)$ est séparable mais pas réflexif et son dual est $L^\infty(\Omega)$.*
5. *$L^\infty(\Omega)$ n'est ni séparable, ni réflexif et son dual est contient strictement $L^1(\Omega)$.*

Lemme 1.2 ***(Inégalité de Young)*** *Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que $1 \leq p, q \leq +\infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On a :*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Lemme 1.3 ***(Inégalité de Hölder généralisé)*** *Soit $p, q, r \in [1, +\infty[$ avec $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Si $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$, alors $uv \in L^r(\Omega)$ et on a*

$$||uv||_{L^r(\Omega)} \leq ||u||_{L^p(\Omega)} \times ||v||_{L^q(\Omega)}.$$

Lemme 1.4 ***(Inégalité d'interpolation)*** *Soit $1 \leq p,\ q \leq +\infty$.*
Si $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ alors $u \in L^r(\Omega)$, pour tout $r \in [p, q]$ et on a

$$||u||_{L^r(\Omega)} \leq ||u||^{\theta}_{L^p(\Omega)} \times ||u||^{1-\theta}_{L^q(\Omega)} \quad \text{où} \quad \frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}, \quad \text{avec} \quad \theta \in [0, 1].$$

Lemme 1.5 ***(Lemme de Fatou)*** *Soit Ω un ouvert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction mesurables, à valeurs dans $[0; +\infty]$, on a*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)dx.$$

Corollaire 1.6 *Soit $p, q \in [1, +\infty[$ tel que $1 < p \leq q < +\infty$.*
Si $|\Omega| < \infty$ alors

$$L^\infty(\Omega) \subset ... \subset L^q(\Omega) \subset ... \subset L^p(\Omega) \subset ... \subset L^1(\Omega).$$

La convergence dans $L^p(\Omega)$

Définition 1.2 ***(Convergence faible-forte dans $L^p(\Omega)$)*** *Soient $p, p' \in [1, +\infty]$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $(f_n)_{n\in N} \subset L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$.*

- *On dit que (f_n) converge fortement vers f dans $L^p(\Omega)$ et on note $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$ si*

$$\lim_{n\to+\infty} ||f_n - f||_{L^p(\Omega)} = 0.$$

- *On dit que (f_n) converge faiblement vers f dans $L^p(\Omega)$ et on note $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(\Omega)$ si*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega (f_n - f) \cdot \varphi \ = 0, \qquad \forall \varphi \in L^{p'}(\Omega).$$

Théorème 1.1 *Soit $1 \leq p < q \leq +\infty$.*
Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$, $f \in L^p(\Omega)$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^q(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ tels que
$f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$ et $g_n \rightharpoonup g$ dans $L^q(\Omega)$, alors

$$f_n g_n \rightharpoonup fg \quad \text{dans} \quad L^r(\Omega), \text{avec } \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Théorème 1.2 *Soit $1 \leq q < p \leq +\infty$.*
Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$ tel que $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$ et $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^q(\Omega)$, alors

$$f_n \to f \quad \text{dans} \quad L^r(\Omega), \quad \forall\, r \in]q, p[.$$

Définition 1.3 ***(Equi-intégrabilité)*** *Soit $p > 1$, et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^p(\Omega)$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est equi-intégrable, si pour tout $E \subset \Omega$ mesurable on a*

$$\lim_{|E|\to 0} \int_E |f_n|^p = 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Théorème 1.3 ***(Vitali)*** *Soit $p > 1$, et soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ une suite de fonction équi-intégrable et $f \in L^p(\Omega)$, telle que $f_n \to f$ pp dans Ω, Alors*

$$f_n \to f \text{ fortement dans } \quad L^p(\Omega).$$

Théorème 1.4 ***(Théoréme de convergence monotone)*** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction de $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$, tel que $f_n(x) \to f(x)$ pp sur Ω. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\, dx.$$

Théorème 1.5 ***(La convergence dominé de Lebesgue)*** *Soit* $1 \leq p \leq +\infty$.
Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ *et* $f \in L^p(\Omega)$. *On suppose que*

1. $f_n \to f \;\; pp \;\; dans\ \Omega$;
2. $\exists\, g \in L^p(\Omega) : |f_n| \leq g \;\; pp \;\; dans\ \Omega, \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$; *alors*

$$f_n \to f \;\; dans\ L^p(\Omega).$$

Théorème 1.6 ***(la réciproque partielle du théorème de convergence dominé)***

Soit $p \in [1, +\infty[$ *et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonction dans* $L^p(\Omega)$ *converge fortement vers* f *dans* $L^p(\Omega)$, *avec* $g \in L^p(\Omega)$. *Alors il existe une sous-suite extraite* $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *telle que*

- $f_{n_k} \to f \;\; p.p\ sur\ \Omega.$
- $|f_{n_k}| \leq g$, *pour tout* $k \in \mathbb{N}, \;\; p.p\ sur\ \Omega.$

Définition 1.4 (Fonction Carathéodory) *Soit* $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *On dit que* f *est de Carathéodory si*

(1) $f(\cdot, s) : \Omega \to \mathbb{R}$ *mesurable pour tout* $s \in \mathbb{R}$,

(2) $f(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue p.p.* $x \in \Omega$.

1.2 Distributions

Définition 1.5 *On appelle support d'une fonction continue* φ *sur* Ω, *et on le note* $supp(\varphi)$ *l'ensemble définie par :*

$$supp(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega : \;\; \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Définition 1.6 *On désigne par* $\mathcal{D}(\Omega)$ *à l'espace des fonctions de classe* C^∞ *sur* Ω *à support compact, un élément de* $\mathcal{D}(\Omega)$ *est appelé fonction test.*

Définition 1.7 *Le dual topologique de* $\mathcal{D}(\Omega)$ *noté par* $\mathcal{D}'(\Omega)$, *un élément* T *de* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *est appelé distribution sur* Ω *définie par :*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathcal{D}(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ & \varphi & \mapsto & \langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = \langle T, \varphi\rangle. \end{array}$$

Proposition 1.7 *$\mathcal{D}(\Omega)$ est un sous-espace dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < +\infty$.*

Définition 1.8 *Soit $K \subset \Omega$ compact, on note*

$$\mathcal{D}_K(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) : \quad supp(\varphi) \subset K\}.$$

Proposition 1.8 *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Donc pour tout compact $K \subset \Omega$, ils existent $C > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que*

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C \cdot \sup_{x \in K,\ |\alpha| \leq m} |D^\alpha \varphi| \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega),$$

la plus petit constant m vérifie l'inégalité président s'appele ordre de la distribution T.

Définition 1.9 ***(Dérivées aux sens de distributions)*** *Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $k \in \{1...N\}$, $\alpha \in \mathbb{N}^N$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.*
On appelle dérivé partielle de T par rapport à la k-ième variable et on la note $\dfrac{\partial T}{\partial x_k}$ la distribution définie par :

$$\langle \frac{\partial T}{\partial x_k}, \varphi\rangle = -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

par récurrence, on définit la dérivé partielle de T d'ordre α par :

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

1.3 Espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.10 *Soit $1 \leq p \leq +\infty$.*
On définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ par :
Pour $1 \leq p < +\infty$

$$W^{1,p}(\Omega) = \Big\{u \in L^p(\Omega)\ ; \quad \nabla u \in L^p(\Omega)\Big\},$$

muni de la norme

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega)} = \Big(||u||^p_{L^p(\Omega)} + ||\nabla u||^p_{L^p(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{p}},$$

pour faire un espace de Banach.
Pour $p = +\infty$

$$W^{1,\infty}(\Omega) = \Big\{u \in L^\infty(\Omega)\ ; \quad \nabla u \in L^\infty(\Omega)^N\Big\},$$

muni de la norme

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega)} = \max\Big(||u||_{L^\infty(\Omega)}, ||\nabla u||_{L^\infty(\Omega)}\Big).$$

Pour $p = 2$ l'espace $W^{1,2}(\Omega)$ noté $H^1(\Omega)$ est de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \nabla u, \nabla v\rangle_{L^2(\Omega)},$$

et de la norme

$$||u||_{H^1(\Omega)} = \Big(||u||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u||^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 1.9 *Soit $1 \leq p < +\infty$.*

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < +\infty$, et réflexif pour $1 < p < +\infty$.

Théorème 1.7 ***(Traces des fonctions $W^{1,p}(\Omega)$)[4],[5]*** *Soit Ω un ouvert borné et lipschitzienne de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leq p \leq +\infty$.*

L'application $\gamma : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) & \to & L^p(\partial\Omega) \\ u & \mapsto & \gamma(u) = u_{|\partial\Omega} \end{array}$ *, se prolonge de manière unique et de façon continue à $W^{1,p}(\Omega)$. γ s'appele opérateur de trace.*

On définit l'espace $W^{\frac{1}{p'},p}(\partial\Omega)$ par :

$$W^{\frac{1}{p'},p}(\partial\Omega) = \Big\{g \in L^p(\partial\Omega) \ : \ \exists\, u \in W^{1,p}(\Omega); \ \ g = \gamma(u)\Big\}, \qquad \text{avec } \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

On muni $W^{\frac{1}{p'},p}(\partial\Omega)$ par la norme

$$||g||_{W^{\frac{1}{p'},p}(\partial\Omega)} = \inf\Big\{||u||_{W^{1,p}(\Omega)} \ : \ u \in W^{1,p}(\Omega); \ \ \gamma(u) = g\Big\},$$

pour faire un espace de Banach.

Si $p = 2$, on note $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)$.

Définition 1.11 *Soit $1 \leq p < +\infty$.*

On note $W_0^{1,p}(\Omega)$ la ferméture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ i.e

$$W_0^{1,p}(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Proposition 1.10 *Soit $1 \leq p < +\infty$. Donc*

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \Big\{u \in W^{1,p}(\Omega) \ ; \quad u_{|\partial\Omega} = 0\Big\}.$$

$$H_0^1(\Omega) = \Big\{u \in H^1(\Omega) \ ; \quad u_{|\partial\Omega} = 0\Big\}.$$

Définition 1.12 *Soit $1 \leq p < +\infty$.*

L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est par définition dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, donc on peut identifier le dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ à un sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$ par :

$$W^{-1,p'}(\Omega) := \Big(W_0^{1,p}(\Omega)\Big)', \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Remarque 1.1 *On note $H^{-1}(\Omega)$ le dual de $H_0^1(\Omega)$.*

Définition 1.13 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ avec $(N \geq 2)$.*

Si on peut trouver un nombre fini d'ouverts $(\mathcal{O}_i)_{0\leq i\leq n}$ de $\mathbb{R}^N$, et un nombre fini de bijection $(\varphi_i)_{0\leq i\leq n}$, tels que

- $\overline{\mathcal{O}_0} \subset \Omega$, $\partial\Omega \subset \cup_{i=1}^n \mathcal{O}_i$ *et* $\overline{\Omega} \subset \cup_{i=1}^n \mathcal{O}_i$.
- *Pour tout $i = \overline{1...n}$, φ_i est lipschitzienne de $\mathcal{O}_i$ dans $B_{\mathbb{R}^N}(0,1)$, et l'inverse de φ_i lipschitzienne.*
- *Pour tout $i = \overline{1...n}$,*
$$\begin{aligned} \varphi_i(\mathcal{O}_i \cap \Omega) &= \Big\{(x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \,/\; x_N > 0\Big\} \cap B_{\mathbb{R}^N}(0,1) \\ \varphi_i(\mathcal{O}_i \cap \partial\Omega) &= \Big\{(x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \,/\; x_N = 0\Big\} \cap B_{\mathbb{R}^N}(0,1) \end{aligned}$$

On dit que Ω lipschitzien.

Théorème 1.8 ***(Inégalité de Poincaré)***

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ borné au moins d'une direction et $p \in [1, +\infty[$. Alors il existe $C_\Omega > 0$, tel que pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ on a :

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leq C_\Omega \cdot ||\nabla u||_{L^p(\Omega)}.$$

Corollaire 1.11 *Soit $p \in [1, +\infty[$. Alors l'application $u \mapsto ||\nabla u||_{L^p(\Omega)}$ définie une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ équivalente à la norme usuelle $||\cdot||_{W^{1,p}(\Omega)}$.*

Corollaire 1.12 *Soit $p \in]1, +\infty[$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$. Alors elle existe une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ notée la même, telle que $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ dans $L^p(\Omega)$.*

Théorème 1.9 ***(Inégalité de Sobolev)***

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $p \in [1, +\infty[$. Alors $\exists\ S_\Omega > 0$, tel que pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ on a :

$$S_\Omega \cdot ||u||_{L^{p^*}(\Omega)} \leq ||\nabla u||_{L^p(\Omega)}.$$

Lemme 1.13 ***(Inégalité de Poincaré-Wirtinger)*** *Soient $1 \leq p \leq \infty$ et Ω un ouvert borné, connexe et Lipschitzien de $\mathbb{R}^N$. Alors il existe une constant $C > 0$ telle que pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on ait*

$$\|u - \overline{u}\|_p \leq C \|\nabla u\|_p ,$$

où $\overline{u} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(x)\, dx$.

convergence dans $W^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.14 ***(Convergence faible-forte dans*** $W^{1,p}(\Omega)$*)** Soient $p \in [1, +\infty]$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W^{1,p}(\Omega)$ et $f \in W^{1,p}(\Omega)$.*

- *On dit que f_n converge fortement vers f dans $W^{1,p}(\Omega)$ et on note $f_n \to f \quad dans \quad W^{1,p}(\Omega)$ si*

$$f_n \to f \quad dans \quad L^p(\Omega) \quad et \quad \nabla f_n \to \nabla f \quad dans \quad L^p(\Omega).$$

- *On dit que f_n converge faiblement vers f dans $W^{1,p}(\Omega)$ et on note $f_n \rightharpoonup f \quad dans \quad W^{1,p}(\Omega)$ si*

$$f_n \rightharpoonup f \quad dans \quad L^p(\Omega) \quad et \quad \nabla f_n \rightharpoonup \nabla f \quad dans \quad L^p(\Omega).$$

Théorème 1.10 (Injections de Sobolev-Rellich-Kondrachov) *Soit Ω un ouvert borné et Lipschitizien de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ et $p^* = \frac{Np}{N-p}$. Alors on a :*

- *Si $1 \leq p < N$ alors l'injection $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compact pour $q \in [1, p^*[$, et continue pour $q = p^*$. En particulier l'injection $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ est compact pour tout $p \in [1, +\infty[$.*

- *Si $p = N$ alors l'injection $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compact et continue pour $q \in [1, +\infty[$.*

- *Si $p = N$ alors l'injection $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ est compact et continue.*

Exemple 1.1 *Soit Ω un ouvert borné et lipschitzienne de $\mathbb{R}^N$.*

1. *Avec $N = 3$ l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compact, et $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ est continue.*
2. *Avec $N = 2$ l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compact et continue.*
3. *Avec $N = 1$ l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ est compact, et $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ est continue.*

Théorème 1.11 • *Soit E un espace de Banach réflexif (i.e. E est isomorphe à E''), alors de toute suite bornée de E, on peut extraire une sous suite qui converge faiblement dans E.*

• *Soit E un espace de Banach séparable (i.e. qui admet une partie dénombrable dense), alors de toute suite bornée de E', on peut extraire une sous suite qui converge faible $\star$ dans E'.*

Définition 1.15 *Pour tout $k > 0$, la fonction troncature de niveau k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$T_k(s) = \begin{cases} s, & si|s| \leq k, \\ ksign(s), & si|s| > k. \end{cases}$$

Où

$$sign(s) = \begin{cases} 1, & si|s| > 0, \\ 0, & si|s| = 0, \\ -1, & si \ \ s < 0. \end{cases}$$

Définition 1.16 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert, on désigne par $C_0(\Omega)$ la fermeture de L'espace $C_c(\Omega)$.*

Définition 1.17 *L'espace des mesures de Radon finies sur Ω noté $M(\Omega)$, est par définition le dual de L'espace $C_0(\Omega)$.*

Définition 1.18 ***(Convergence faible dans** $M(\Omega)$**)*** *On dit qu'une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M(\Omega)$ de mesure de Radon finies sur Ω converge faiblement vers λ dans $M(\Omega)$ si pour tout $v \in C_0(\Omega)$ tel que*

$$\int_\Omega v \, d\lambda_n \to \int_\Omega v \, d\lambda \quad lorsque \, n \to \infty.$$

Définition 1.19 *Soit V un espace de Banach. Un opérateure $A : V \to V'$ est dit monotone si*

$$\langle A(u) - A(v), u - v\rangle \geq 0, \quad \forall \ \ u, v \in V.$$

Définition 1.20 *Soit V un espace de Banach. Un opérateur $A : V \to V'$ est dit hémi-continue si l'application*

$$\lambda \longmapsto \langle A(u + \lambda v), w\rangle,$$

est continue de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, *pour tout* u, v, w *dans* V.

Définition 1.21 *Soit* V *un espace de Banach. Un opérateur* $A : V \to V'$ *est dit borné si*

$$\exists\, C > 0 : ||A(v)||_{V'} \leq C||v||_V, \quad \forall\ v \in V.$$

Définition 1.22 *Soit* V *un espace de Banach réflexif. Un opérateur* $A : V \to V'$ *est dit coércif si*

$$\lim_{||v||_V \to \infty} \frac{\langle A(v), v\rangle}{||v||_V} = +\infty.$$

Théorème 1.12 ***(Surjectivité)[2]*** *Soit* V *un espace de Banach, réflexif et séparable. Soit* $A : V \to V'$ *un opérateur monotone, hémi-continue, coércif et borné. Alors* A *est surjectif, c'est-à-dire*

$$\forall\ f \in V', \quad \exists\ \ u \in V \ \ \textit{tel que}\ \ A(u) = f.$$

Chapitre 2

Espace de Lebesgue et de Sobolev à exposant variable

2.1 Espace de Lebesgue $L^{p(.)}(\Omega)$

Définition 2.1 *Soit $P(\Omega)$ l'ensemble des fonctions mesurables $p(.) : \Omega \longrightarrow]1, \infty[$. Les éléments de $P(\Omega)$ sont appelées les exposants. On note*

$$p^- = \inf_{x\in\Omega} ess\ p(x), p^+ = \sup_{x\in\Omega} ess\ p(x).$$

$p'(x)$ le conjugué de $p(x)$: $p'(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}$, avec $\frac{1}{\infty} = 0$. Alors on a

$$(p')^+ = (p^+)', (p')^- = (p^-)'.$$

Définition 2.2 *Soit $p(.) \in P(\Omega)$, on dit que $p(.)$ est localement log-Hölder continue, et on note par $p(.) \in LH_0$, s'il existe une constante C_0 tel que pour tout $x, y \in \Omega$, $|x - y| < \frac{1}{2}$*

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C_0}{-\log(|x - y|)}.$$

Définition 2.3 *Soient $p(.) \in P(\Omega)$ et f fonction mesurable, on définie le modulaire associe à $p(.)$ par*

$$A_{p(.)}(f) = \int_\Omega |f(x)|^{p(x)}\ dx < +\infty.$$

Proposition 2.1 *1. $A_{p(.)}(f) \geqslant 0$, pour tout f.*

2. $A_{p(.)}(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

3. $A_{p(.)}(f) = A_{p(.)}(-f)$ *pour tout* f.

4. $A_{p(.)}(f)$ *et convexe.*

5. *Si* $|f(x)| \geqslant |g(x)|$ *pp et si* $A_{p(.)}(f) < \infty$ *alors* $A_{p(.)}(f) \geqslant A_{p(.)}(g)$.

6. *Si* $0 < A_{p(.)}(f) < \infty$, *alors la fonction* $\lambda \longmapsto A_{p(.)}(\frac{f}{\lambda})$ *est continue décroissant sur l'intervalle* $[1, \infty[$.

Preuve 2.1 *La preuve de la propriété* $(1+2+3+4+5)$ *par la définition de* $A_{p(.)}(f)$. *Pour la propriété* (6) *décroissant d'après* (5) *et continue en effet ; soit* (λ_k) *suite décroissant avec :*

$$\lambda_k \to \lambda \Rightarrow \Big|\frac{f(x)}{\lambda_k}\Big| \to \Big|\frac{f(x)}{\lambda}\Big|$$

croissant, et on a : $\left|\frac{f(x)}{\lambda_k}\right|_k^{p(x)}$ *croissant,*
$\left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} \leq |f(x)|^{p(x)} \in L^1(\Omega)$ *d'après le théorème 1.4.*

Définition 2.4 *Soit* $p(.) \in P(\Omega)$. *On définié l'espace de Lebesgue à exposant variable*

$$L^{p(.)}(\Omega) = \Big\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \ : \quad A_{p(.)}(f) < \infty \Big\},$$

et muni de la norme

$$||f||_{L^{p(.)}(\Omega)} = ||f||_{p(.),\Omega} = ||f||_p = \inf \Big\{ \lambda > 0; A_{p(.)}(\frac{f}{\lambda}) \leq 1 \Big\}.$$

Remarque 2.1 *pour* $p(.) = cst$ *est reste vraie*

$$\begin{aligned} ||f||_{L^{p(.)}(\Omega)} = \inf \Big\{ \lambda > 0 : \int_\Omega \Big(\frac{f}{\lambda}\Big)^p \, dx \leq 1 \Big\} &= \inf \Big\{ \lambda > 0 : \int_\Omega |f|^p \, dx \leq \lambda^p \Big\} \\ &= \inf \Big\{ \lambda > 0 : \int_\Omega \Big(|f|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \, dx \leq \lambda \Big\} \\ &= \inf \Big[\int_\Omega \Big(|f|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, +\infty \Big[= \int_\Omega \Big(|f|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \, dx = ||f||_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Proposition 2.2 ***(Séparabilité, Réflexivité et dual de*** $L^{p(.)}(\Omega)$***) :***

1. *L'espace* $L^{p(.)}(\Omega)$ *est un espace de Banach.*

2. *$L^{p(.)}(\Omega)$ est séparable si $p^+ < \infty$.*

3. *$L^{p(.)}(\Omega)$ réflexif pour $p^- = \inf_{x\in\bar{\Omega}} p(x) > 1$.*

4. *Le dual de $L^{p(.)}(\Omega)$ pour $1 < p(.) < \infty$ est isomorphe à $L^{p'(.)}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$.*

Exemple 2.1 *$\Omega = \mathbb{R}$, $p(x) = \max(|x|, 1)$ et $u(x) = \frac{1}{2}$.*
Pour $p = cst$ on a : $\int_{\mathbb{R}} |\frac{1}{2}|\, dx = +\infty$, donc $u \notin L^p(\Omega), \forall\, 1 \le p < +\infty$. Et on a :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u(x)|^{p(x)}\, dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big|\frac{1}{2}\Big|^{p(x)}\, dx \\
&= \int_{|x|<1} \Big|\frac{1}{2}\Big|^{p(x)}\, dx + \int_{|x|>1} \Big|\frac{1}{2}\Big|^{p(x)}\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \Big|\frac{1}{2}\Big|\, dx + \int_{-\infty}^{-1} \Big|\frac{1}{2}\Big|^{-x}\, dx + \int_{1}^{+\infty} \Big|\frac{1}{2}\Big|^{x}\, dx \\
&= \Big[\frac{1}{2}x\Big]_{-1}^{1} + \int_{-\infty}^{-1} 2^x\, dx + \int_{1}^{+\infty} 2^{-x}\, dx \\
&= \Big[\frac{1}{2}x\Big]_{-1}^{1} + \Big[\frac{1}{\ln 2}\exp(x\ln 2)\Big]_{-\infty}^{-1} + \Big[\frac{-1}{\ln 2}\exp(-x\ln 2)\Big]_{1}^{+\infty} \\
&= 1 + \frac{1}{\ln 2}.
\end{aligned}$$

Donc :

$$u \in L^{p(.)}(\Omega).$$

Proposition 2.3 *Si $0 < ||f||_{p(.)} < +\infty$, alors*

$$A_{p(.)}\Big(\frac{f}{||f||_{p(.)}}\Big) \le 1.$$

Preuve 2.2 *Soit γ_k converge vers $||f||_{p(.)}$ décroissant, pour tout $k \in \mathbb{N}$:*
$\Big|\frac{f(x)}{\gamma_k}\Big|^{p(x)} \longrightarrow \Big|\frac{f(x)}{||f||_{p(.)}}\Big|^{p(x)}$ croissant, et $\Big|\frac{f(x)}{\gamma_k}\Big|^{p(x)} < \Big|\frac{f(x)}{||f||_{p(.)}}\Big|^{p(x)} < \infty$. d'après le lemme 1.5, donc

$$\int_\Omega \Big|\frac{f(x)}{||f||_{p(.)}}\Big|^{p(x)}\, dx \le \liminf \int_\Omega \Big|\frac{f(x)}{\gamma_k}\Big|^{p(x)}\, dx \le 1.$$

Corollaire 2.4 *Si $0 < ||f||_p \le 1$, alors*

$$A_p(f) \le 1.$$

Preuve 2.3 *On a :* $\frac{1}{||f||_p} \geqslant 1 \Rightarrow A_{p(.)}\Big(\frac{f}{||f||_p}\Big) \geqslant A_p(f)$, *donc*

$$\begin{aligned} A_p(f) &= \int_\Omega |f(x)|^{p(x)}\, dx \\ &\leq \int_\Omega \frac{|f(x)|}{||f||_p^{p(x)}}\, dx \\ &= A_p\Big(\frac{f}{||f||_p}\Big) \leq 1. \end{aligned}$$

Proposition 2.5 *Si* $p^+ < \infty$, *et* $0 < ||f||_{p(.),\Omega} < \infty$. *Alors*

$$A_{p(.)}\Big(\frac{f}{||f||_{p(.),\Omega}}\Big) = 1.$$

Preuve 2.4 *On montrer par contradiction : Soit* $0 < \lambda \leq ||f||_p, \quad A_{p(.)}(\frac{f}{||f||_p}) > 1.$

$$\begin{aligned} A_{p(.)}\Big(\frac{f}{\lambda}\Big) &= \int_\Omega \frac{|f(x)|^{p(x)}}{\lambda^{p(x)}}\, dx \\ &= \int_\Omega \Big(\frac{|f(x)|}{||f||_{p(.),\Omega}}\Big)^{p(x)} \cdot \Big(\frac{||f||_{p(.),\Omega}}{\lambda}\Big)^{p(x)}\, dx \\ &\leq \Big(\frac{||f||_{p(.),\Omega}}{\lambda}\Big)^{p^+} A_p\Big(\frac{f}{||f||_{p(.),\Omega}}\Big). \end{aligned}$$

si on a : $A_{p(.)}\Big(\frac{f}{||f||}\Big) < 1$, *on choisi* $\lambda < ||f||$ *tel que* $A_{p(.)}\Big(\frac{f}{\lambda}\Big) \leq 1$ *contradiction avec la définition de la norme* $||f||_p$.

Corollaire 2.6 *Si* $p^+ < \infty$ *et* $||f||_{p(.),\Omega} \leq 1$, *alors*
$A_{p(.)}(f) \leq ||f||_{p(.),\Omega}$, *tel que* $p(x) \in [p^-, p^+] \subset]1, \infty[, x\, p.p$ *dans* Ω.

Lemme 2.7 *Pour tout* $f \in L^{p(.)}(\Omega)$, *alors :*

$$\min\{||f||_{p(.),\Omega}^{p^-}, ||f||_{p(.),\Omega}^{p^+}\} \leq A_{p(.)}(f) \leq \max\{||f||_{p(.),\Omega}^{p^-}, ||f||_{p(.),\Omega}^{p^+}\}.$$

Preuve 2.5 *On pose* $\mu = ||f||_{p(.),\Omega}$ *et* $h(x) = \frac{f(x)}{\mu}$ *tel que* $h \in L^{p(.)}(\Omega)$ *donc* $||h||_{p(.),\Omega} = 1$
D'une part :

$$1 = ||h||_{p(.),\Omega}$$

$$\leq A_{p(.)}(h)$$
$$\leq \begin{cases} (\frac{1}{\mu})^{p^+} A_{p(.)}(f) & si\ \mu \leq 1, \\ (\frac{1}{\mu})^{p^-} A_{p(.)}(f) & si\ \mu > 1, \end{cases}$$

Alors :

$$A_{p(.)}(f) \geqslant \min\{\mu^{p^+}, \mu^{p^-}\}.$$

D'autre part :

$$A_{p(.)}(f) = \int_\Omega |f(x)|^{p(x)}\, dx = \int_\Omega \mu^{p(x)} |h(x)|^{p(x)}\, dx$$
$$\leq \begin{cases} \mu^{p^-} & si\ \mu \leq 1, \\ \mu^{p^-} & si\ \mu > 1, \end{cases}$$

Alors :

$$A_{p(.)}(f) \leq \max\{\mu^{p^+}, \mu^{p^-}\}.$$

Si $||f||_{p(.),\Omega} = 0$, *alors* $f = 0$ *p.p dans* Ω *et* $A_{p(.)}(f) = 0$.

Corollaire 2.8 *Pour tout* $f \in L^{p(.)}(\Omega)$, *alors*

$$\min\{A_{p(.)}^{\frac{1}{p^-}}(f), A_{p(.)}^{\frac{1}{p^+}}(f)\} \leq ||f||_{p(.),\Omega} \leq \max\{A_{p(.)}^{\frac{1}{p^-}}(f), A_{p(.)}^{\frac{1}{p^+}}(f)\}.$$

Si $p = cst$ *alors* $p^+ = p^-$ *donc* $A_p(f) = ||f||^p_{p(.),\Omega}$.

Corollaire 2.9

1. $||f||_{p(.),\Omega} = 1 \Leftrightarrow A_{p(.)}(f) = 1$.
2. $||f||_{p(.),\Omega} < 1 \Leftrightarrow A_{p(.)}(f) < 1$.
3. $||f||_{p(.),\Omega} > 1 \Leftrightarrow A_{p(.)}(f) > 1$.
4. $||f||_{p(.),\Omega} \leq A_{p(.)}(f) + 1$.

Lemme 2.10 *Soit* $p(.) \in P(\Omega)$. *On suppose* $p^+ < \infty$.
Pour toute suite $(f_n)_{n\in N} \in L^{p(.)}(\Omega)$ *et* $f \in L^{p(.)}(\Omega)$,

$$||f_n - f||_{p(.)} \to 0 \Leftrightarrow A_{p(.)}(f_n - f) \to 0.$$

Preuve 2.6 *Supposer la suite converge en norme. D'après le corollaire 2.6, pour n grand*

$$A(f_n - f) \leq ||f_n - f||_{p(.)} \leq 1,$$

et donc $A(f_n - f) \to 0$. *Pour montrer l'inverse, fixant* $\lambda < 1$. *Donc*

$$A\Big(\frac{(f_n - f)}{\lambda}\Big) \leq \Big(\frac{1}{\lambda}\Big)^{p^+} A(f_n - f).$$

Alors $A\Big(\frac{(f_n - f)}{\lambda}\Big) < 1$. *Donc* $||f_n - f||_{p(.)} \leq \lambda$.

Lemme 2.11 *Soit* $p(.), q(.) \in P(\Omega)$ *tel que* $p(x) \geqslant q(x)$ *pp dans* Ω, *alors*

$$L^{p(.)}(\Omega) \subset L^{q(.)}(\Omega).$$

Preuve 2.7 *Soit* $u \in L^{p(.)}(\Omega)$ *donc* $A_{p(.)}(u) < \infty$. *D'après le lemme 1.2, on a*

$$\begin{aligned} A_{q(.)}(u) &\leq \int_\Omega \Big(\frac{q(x)}{p(x)}|u|^{p(x)} + \frac{p(x) - q(x)}{p(x)}\Big)\, dx \\ &\leq \int_\Omega (1 + |u|^{p(x)})\, dx = |\Omega| + A_{p(.)}(u). \end{aligned}$$

Lemme 2.12 ***(Inégalité de Hölder)[3]*** *Soit* $p(.) \in P(\Omega)$, *pour tout* $f \in L^{p(.)}(\Omega)$ *et* $g \in L^{p'(.)}(\Omega)$ *avec* $p'(x) = \frac{p(x)}{p(x)-1}$, *on a :*

$$\int_\Omega |fg|\, dx = \Big(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{(p')^-}\Big)||f||_{p(.),\Omega}||g||_{p'(.),\Omega} \leq 2||f||_{p(.),\Omega}||g||_{p'(.),\Omega}.$$

Lemme 2.13 *Soit* $p(.) \in P(\Omega)$ *et* $q = cst$ *tel que* $p(x) \geqslant q$ *pp dans* Ω, *alors*

$$||f||_{q,\Omega} \leq C||f||_{p(.),\Omega}.$$

Tel que $C = (1 + |\Omega|)^{\frac{1}{q}}$.

Preuve 2.8 *Soit* $f \in L^{p(.)}(\Omega)$ *et* $||f||_{p(.),\Omega} = \lambda < \infty$. *Soit* $g(x) = \frac{f(x)}{\lambda}$ *d'aprés le lemme 2.11,* $g \in L^{p(.)}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *avec* $||g||_{p(.),\Omega} = A_{p(.)}(g) = 1$, *et*

$$\frac{1}{\lambda}||f||_{q,\Omega} = ||g||_{q,\Omega} \leq A_q^{\frac{1}{q}}(g). \tag{2.1.1}$$

D'aprés le lemme 1.2 on a

$$A_q(g) = \int_\Omega \Big|\frac{f(x)}{\lambda}\Big|^q\, dx$$

$$\leq \int_{\Omega} \Big(\frac{p(x)-q}{p(x)} + \frac{q}{p(x)} |\frac{f(x)}{\lambda}|^{p(x)} \Big)\, dx$$
$$\leq |\Omega| + A_{p(.),\Omega}(g) = 1 + |\Omega|.$$

D'aprés (2.1.1) on a

$$||f||_{q,\Omega} \leq (1+|\Omega|)^{\frac{1}{q}} \lambda = (1+|\Omega|)^{\frac{1}{q}} ||f||_{p(.),\Omega}.$$

densité de $L^{p(.)}(\Omega)$

Lemme 2.14 ***[3]*** *Soit* $p(.) \in P(\Omega)$, *suppose* $p^+ < \infty$.
Alors l'ensemble des fonctions mesurables et borné est dense dans $L^{p(.)}(\Omega)$.

Preuve 2.9 *Soit* $f \in L^{p(.)}(\Omega)$ *et soit* $(f_k) \in L^{p(.)}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$ *définie par :*

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x), & si\ |f(x)| \leq k, \\ ksignf(x), & si\ |f(x)| > k. \end{cases}$$

On a : $|f_k| \leq |f|$ *et* $f_k \to f$ *pp. dans* Ω *d'aprés le théorème 1.5, donc* $A_{p(.)}\Big(f_k - f\Big) \to 0$, *c-á-d*

$$||f_n - f||_{L^{p(.)}(\Omega)} \to 0.$$

Lemme 2.15 *Soit* $p(.) \in P(\Omega)$, *suppose* $p^+ < \infty$. *Alors*

$$D(\Omega) \ \ dense \ \ dans \ \ L^{p(.)}(\Omega).$$

2.2 Espace de Sobolev $W^{k,p(.)}(\Omega)$

Définition 2.5 *Soit* $k \in \mathbb{N}$ *et* $p(.) \in P(\Omega)$. *On définit l'espace de Sobolev* $W^{k,p(.)}(\Omega)$ *par :*

$$W^{k,p(.)}(\Omega) = \Big\{ u \in L^{p(.)}(\Omega) : \partial_\alpha u \in L^{p(.)}(\Omega), \forall |\alpha| \leq k \Big\},$$

muni de la norme :

$$||u||_{W^{k,p(.)}(\Omega)} = ||u||_{L^{p(.)}(\Omega)} + \sum_{0<|\alpha|\leq k} ||\partial_\alpha u||_{L^{p(.)}(\Omega)}.$$

Si $k = 0$ *on a*

$$W^{0,p(.)}(\Omega) = L^{p(.)}(\Omega).$$

Si $k = 1$ *on a :*

$$W_0^{1,p(.)}(\Omega) = \Big\{ u \in L^{p(.)}(\Omega) : |\nabla u| \in L^{p(.)}(\Omega), u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \Big\},$$

muni de la norme :

$$||u||_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)} = ||u||_{L^{p(.)}(\Omega)} + ||\nabla u||_{L^{p(.)}(\Omega)}.$$

Proposition 2.16 ***[8]*** *Soit* $p \in P(\Omega)$

1. *L'espace* $W_0^{1,p(.)}(\Omega)$ *est un espace de Banach.*

2. *L'espace* $W_0^{1,p(.)}(\Omega)$ *est séparable si* $p^+ < \infty$, *réflexif et uniformément convexe si*

$$1 < p^- < p^+ < \infty.$$

3. *Si* $u \in W_0^{1,p(.)}(\Omega)$ *alors , u est prolongeable par* 0 *à* $\mathbb{R}^N$ *d'hors de* (Ω)

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & si\ x \in \Omega, \\ 0, & si\ x \notin \Omega. \end{cases}$$

et $\tilde{u} \in W^{1,p(.)}(\mathbb{R}^N)$.

Proposition 2.17 ***[7]*** *Soit l'ensemble*

$$C_+(\bar{\Omega}) = \Big\{ p \in C(\bar{\Omega}), \min_{x \in \overline{\Omega}} p(x) > 1 \Big\}.$$

Soit

$$p^*(x) = \begin{cases} \frac{Np(x)}{N - p(x)}, & si\ p(x) < N, \\ \infty, & si\ p(x) \geqslant N. \end{cases}$$

Soit $p, q \in C(\bar{\Omega})$ *tel que* $1 \leq q(x) \leq p^*(x)$ *pour tout* $x \in \overline{\Omega}$ *alors il y a une injection continue :*

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega).$$

De plus, si $p^* > q$ l'injection est compacts.
Et on a pour $q \in C_+(\bar{\Omega})$ tel que $q(x) \leq p^*(x)$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$

$$W_0^{1,p(.)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega),$$

est continue et compacts.

Lemme 2.18 ***(Inégalité de Poincaré)[8]*** *Soit $p(.) \in P(\Omega)$, pour tout $u \in W_0^{1,p(.)}(\Omega)$ alors*

$$||u||_{p(.)} \leq C||\nabla u||_{p(.)}.$$

Où C ne dépend que de Ω et p.

Lemme 2.19 ***[3]*** *Soit $\Omega' \subset\subset \Omega$. Si $p(x)$ est localement log-Hölder continue, alors pour tout $f \in L^{p(.)}(\Omega)$*
on a

$$||f_\xi||_{p(.),\Omega'} \leq C(||f||_{p(.),\Omega} + ||f||_{1,\Omega}), \tag{2.2.1}$$

$$||f_\xi - f||_{p(.),\Omega'} \to 0 \; si \; \xi \to 0. \tag{2.2.2}$$

Lemme 2.20 ***[3]*** *Soit $p(.) \in P(\Omega)$. Si $p(x)$ est localement log-Hölder continue, alors*

$$D(\Omega) \text{ dense dans } W_0^{1,p(.)}(\Omega).$$

Lemme 2.21 ***[3]*** *Soit $p(x), q(x) \in C_{\bar{\Omega}}$ et $q(x) < p^*(x)$ dans $\bar{\Omega}$, alors pour tout $u \in W_0^{1,p(.)}(\Omega)$*

$$||u||_{q(.),\Omega} < C||\nabla u||_{p(.),\Omega}.$$

Donc $W_0^{1,p(.)}(\Omega) \subset L^{q(.)}(\Omega)$ continue et compacts.

Chapitre 3

Problème à donnée L^m

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on montre l'existence de solutions faibles pour certains problèmes elliptiques non-linéaires à exposant variable et à donnée intégrable .
Pour cela on va étudier le problème suivant :

$$(P)\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)) &= f \ dans\ \Omega, \\ u &= 0 \ sur\ \partial\Omega, \end{cases}$$

où $f \in L^m(\Omega)$, avec Ω un ouvert régulier dans $\mathbb{R}^N (N \geqslant 2)$.
Soient $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^N, a = (a_1, ..., a_N)$ fonction Carathéodory, tell que pour tout $(s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et x pp dans Ω , avec les propriétés suivantes :

a- $\exists\, \alpha > 0$ tel que $a(x, s, \xi).\xi \geqslant \alpha|\xi|^{p(x)}$;

b- $\exists\, \beta > 0$ tel que $|a(x, s, \xi)| \leq \beta(h + |s|^{p(x)-1} + |\xi|^{p(x)-1})$;

c- $(a(x, s, \xi) - a(x, s, \xi')).(\xi - \xi') > 0 \ \ si \ \ \xi \neq \xi'$.

où h fonction positive dans $L^{p'(.)}(\Omega)$, et $p(.) : \overline{\Omega} \to]1, +\infty[$ fonction continue et $m \in \mathbb{N}^*$ vérifient :

$$2 - \frac{1}{N} < p(x) < N, \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{3.1.1}$$

$$1 < m < \frac{Np(x)}{Np(x) - N + p(x)}, \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{3.1.2}$$

Définition 3.1 *On dit que u solution faible de (P) si :*

$$u \in W_0^{1,1}(\Omega),\ a(x,u,\nabla u) \in (L^1(\Omega))^N.$$

Et

$$\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla\phi\ dx = \int_\Omega \phi f\ dx,\ \ \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Théorème 3.1 *Soit $f \in L^m(\Omega)$. On pose $p(.)$ et m vérifient (3.1.1) et (3.1.2) Soient a satisfait $(a)-(c)$. Alors le problème (P) admet une solution faible $u \in W_0^{1,q(.)}(\Omega)$, où $q(.)$ fonction continue dans $\overline{\Omega}$ vérifie*

$$1 \leq q(x) < \frac{Nm(p(x)-1)}{N-m},\ \ \forall\ \ x \in \overline{\Omega}. \tag{3.1.3}$$

3.2 Preuve de théorème

La preuve se fait en trois étape.

3.2.1 Étape 1 : Approximation

On veut utilise l'approximation pour montre l'existence de solution aux sens de distribution pour le probèlme (P). Pour cela on considére le problème :

$$(P_n)\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,u_n,\nabla u_n)) &= f_n\ dans\ \Omega, \\ u_n &= 0\ sur\ \partial\Omega. \end{cases}$$

D'aprés la densité de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $L^m(\Omega)$, on choisi $(f_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$ tel que

$$f_n \to f\ \ fortoment\ \ dans\ \ L^m(\Omega), si\ n \to \infty, \tag{3.2.1}$$

et

$$||f_n||_{L^m(\Omega)} \leq ||f||_{L^m(\Omega)},\ \ \forall\ \ n \geqslant 1. \tag{3.2.2}$$

Pour montrer l'existence de solution, on applique le théorème de surjectivité (Théorème 1.12) à l'opérateur

$$\begin{array}{rccc} A: & W_0^{1,p(.)}(\Omega) & \to & W_0^{-1,p'(.)}(\Omega) \\ & u & \mapsto & -\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)). \end{array}$$

La démonstration décompose en quatre étape.

Étape 1 : A est coércif en effet ;

pour tout $u \in W_0^{1,p(.)}(\Omega)$ on a :

$$\begin{aligned}
\langle A(u), u\rangle &= \int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla u \geqslant \alpha \int_\Omega |\nabla u|^{p(.)} \qquad \text{d'après l'hypothèse (a) de a} \\
&\geqslant \alpha A_{p(.)}(\nabla u) \\
\frac{\langle Au, u\rangle}{||u||_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)}} &\geqslant \alpha \frac{A_{p(.)}(\nabla u)}{||u||_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)}} \\
&\geqslant \alpha \frac{\min\left\{||u||^{p^+}_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)}, ||u||^{p^-}_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)}\right\}}{||u||_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)}} \qquad \text{d'après le lemme (2.7).}
\end{aligned}$$

Donc A est coércif, si $\frac{\langle Au,u\rangle}{||u||_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)}} \to +\infty$ lorsque $||u||_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)} \to +\infty$.

Étape 2 : A est bornée en effet ; pour tout $u \in W_0^{1,p(.)}(\Omega)$

$$\begin{aligned}
||Au||_{(W_0^{1,p(.)}(\Omega))'} &= \sup\{|\langle A(u),\phi\rangle| : ||\phi||_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)} \leq 1\} \\
&\leq \sup_{||\phi||_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)\leq 1}} |\langle A(u),\phi\rangle| \\
||Au||_{(W_0^{1,p(.)}(\Omega))'} &\leq \sup_{\phi\in W_0^{1,p(.)}(\Omega), ||\phi||_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)}\leq 1} \int_\Omega \beta(h + |u|^{p(x)-1} + |\nabla u|^{p(x)-1})|\nabla\phi|\, dx \quad \text{d'aprés (b) de a} \\
&\leq C_1||(h + |u|^{p(x)-1} + |\nabla u|^{p(x)-1})||_{\frac{p(.)}{p(.)-1}} \quad \text{d'aprés Hölder.}
\end{aligned}$$

Comme : $||u||_{p(.)} \leq A_{p(.)}(u) + 1$, on obtient :

$$||Au||_{(W_0^{1,p(.)}(\Omega))'} \leq C_2 + C_3 \int_\Omega \left(h^{p'(x)} + |u|^{p(x)} + |\nabla u|^{p(x)}\right).$$

Donc $||Au||_{(W_0^{1,p(.)}(\Omega))'}$ est borné, si $||(h + |u|^{p(x)-1} + |\nabla u|^{p(x)-1})||_{\frac{p(.)}{p(.)-1}}$ est borné.

Étape 3 : A est monotone en effet ;

le résultat est une conséquence de l'hypothése (c), de a on a

$$\langle A(u) - A(v), u - v\rangle = \int_\Omega (a(x,u,\nabla u) - a(x,v,\nabla v))(u - v) \geq 0.$$

Étape 4 : A est hémi-continue en effet ;

Pour tout $u \in W_0^{1,p(.)}(\Omega), A(u)$ est hémi-continue i-e ; l'opérateur $\lambda \longmapsto \langle A(u+\lambda v), w\rangle$ est continue pour tout $u, u, w \in W_0^{1,p(.)}(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to 0}\langle A(u+\lambda v), w\rangle &= \lim_{\lambda\to 0}\int_\Omega a(x, u+\lambda v, \nabla(u+\lambda v))\nabla w \\ &= \int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla w = \langle A(u), w\rangle.\end{aligned}$$

Donc A est surjective d'aprés la définition $Au_n = f_n$, et par conséquent il existe suite de solution $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,p(.)}(\Omega)$, satisfait

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla\phi\, dx = \int_\Omega f_n\phi\, dx \quad \forall \phi \in W_0^{1,p(.)}(\Omega). \tag{3.2.3}$$

3.2.2 Étape 2 : Estimations à priori

Lemme 3.1 *Soit $p(.)$ définie dans (3.1.1), m définie dans (3.1.2). Donc pour tout $0<\delta<1$, alors il existe un constant $C_\delta > 0$ indépendent de n tell que*

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^{p(x)}}{(1+|u_n|)^\delta}\, dx \le C_\delta\Big(1+\Big(\int_\Omega (1+|u_n|)^{(1-\delta)\frac{m}{m-1}}\, dx\Big)^{1-\frac{1}{m}}\Big) \tag{3.2.4}$$

Preuve 3.1 *Pour tout $0<\delta<1$, on définie la fonction $\psi_\delta : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par*

$$\psi_\delta(t) = \int_0^t \frac{dx}{(1+|x|)^\delta}.$$

Et

$$\psi_\delta(t) = \frac{1}{\delta-1}\Big(1-\frac{1}{(1+|t|)^{\delta-1}}\Big)sign(t), \tag{3.2.5}$$

où ψ_δ fonction continue vérifie $\psi_\delta(0)=0$, et $|\psi_\delta(.)|\le 1$. On prend $\psi_\delta(u_n)$ comme fonction test de (3.2.3) on obtient

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla\psi_\delta(u_n)\, dx = \int_\Omega f_n\psi_\delta(u_n)\, dx.$$

De (a) et l'inégalité de Hölder, on trouve

$$\begin{aligned}\alpha\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^{p(x)}}{(1+|u_n|)^\delta}\, dx &\le ||f_n||_{L^m(\Omega)}||\psi_\delta(u_n)||_{L^{m'}(\Omega)} \\ &\le C_3\Big(\int_\Omega |\psi_\delta(u_n)|^{\frac{m}{m-1}}\, dx\Big)^{1-\frac{1}{m}}.\end{aligned}$$

Pour tout $0 < \delta < 1, |\psi_\delta(t)| = \frac{1}{1-\delta}\Big(\frac{1}{(1+|t|)^{\delta-1}} - 1\Big)$, *on obtient*

$$|\psi_\delta(t)|^{\frac{m}{m-1}} \leq C_4\Big(1 + (1+|u_n|)^{(1-\delta)\frac{m}{m-1}}\Big).$$

Et

$$\Big(\int_\Omega |\psi_\delta(u_n)|^{\frac{m}{m-1}}\, dx\Big)^{1-\frac{1}{m}} \leq C_5\Big(1 + \Big(\int_\Omega (1+|u_n|)^{(1-\delta)\frac{m}{m-1}}\, dx\Big)^{1-\frac{1}{m}}\Big).$$

Donc

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^{p(x)}}{(1+|u_n|)^\delta}\, dx \leq C_\delta\Big(1 + \Big(\int_\Omega (1+|u_n|)^{(1-\delta)\frac{m}{m-1}}\, dx\Big)^{1-\frac{1}{m}}\Big).$$

Lemme 3.2 *Soit $p(.)$ définie dans (3.1.1), m définie dans (3.1.2), et $f \in L^m(\Omega)$. Alors il existe une constant $C_6 > 0$ tell que*

$$||u_n||_{W_0^{1,q(.)}(\Omega)} \leq C_6,$$

pour tout $q(.)$ fonction continue dans (3.1.3).

Preuve 3.2 *On prend $m > 1$ et $p(.)$ définie dans (3.1.1), on obtient*

$$1 < \frac{Nm(p(x)-1)}{N-m}, \quad \forall \quad x \in \overline{\Omega}.$$

On distinct deux cas

Cas(a) : *Soit q^+ constant vérifie*

$$q^+ < \frac{Nm(p^- - 1)}{N-m}. \tag{3.2.6}$$

De (3.1.2) implique

$$\frac{Nm(p^- - 1)}{N-m} < p^-. \tag{3.2.7}$$

Grâce à l'inégalité de Hölder avec exposant $\frac{p^-}{q^+}$ et (3.2.4), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u_n|^{q^+}\, dx &= \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^{q^+}}{(1+|u_n|)^{\delta\frac{q^+}{p^-}}}(1+|u_n|)^{\delta\frac{q^+}{p^-}} \\
&\leq \Big(\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^{p^-}}{(1+|u_n|)^\delta}\, dx\Big)^{\frac{q^+}{p^-}} \Big(\int_\Omega (1+|u_n|)^{\delta\frac{q^+}{p^- - q^+}}\, dx\Big)^{1-\frac{q^+}{p^-}} \\
&\leq C_\delta\Big(1 + \Big(\int_\Omega (1+|u_n|)^{(1-\delta)\frac{m}{m-1}}\, dx\Big)^{1-\frac{1}{m}}\Big)^{\frac{q^+}{p^-}} \Big(\int_\Omega (1+|u_n|)^{\delta\frac{q^+}{p^- - q^+}}\, dx\Big)^{1-\frac{q^+}{p^-}}
\end{aligned}$$

$$\leq C_7\Big(1+\Big(\int\limits_\Omega (1+|u_n|)^{(1-\delta)\frac{m}{m-1}}\,dx\Big)^{(1-\frac{1}{m})\frac{q^+}{p^-}}\Big)\Big(1+\Big(\int\limits_\Omega (1+|u_n|)^{\delta\frac{q^+}{p^--q^+}}\,dx\Big)\Big)^{1-\frac{q^+}{p^-}},$$

et

$$\int\limits_\Omega |\nabla u_n|^{q^+}\,dx$$
$$\leq C\Big(1+\Big(\int\limits_\Omega (1+|u_n|)^{(1-\delta)\frac{m}{m-1}}\,dx\Big)\Big)^{(1-\frac{1}{m})\frac{q^+}{p^-}}\Big(1+\Big(\int\limits_\Omega (1+|u_n|)^{\delta\frac{q^+}{p^--q^+}}\,dx\Big)\Big)^{1-\frac{q^+}{p^-}}. \quad (3.2.8)$$

De (3.2.6) et (3.2.7), on obtient

$$0<\frac{m(p^--q^+)}{(m-1)q^++m(p^--q^+)}<1.$$

D'autre part, l'inégalité $m<\frac{Np^-}{Np^-+p^--N}$ *équivalent à* $\frac{Nm(p^--1)}{N-m}<\frac{mN}{mN-N+m}$, *de (3.2.6), on obtient* $q^+<\frac{mN}{mN-N+m}$ *équivalent à*

$$0<1-\Big(\frac{Nq^+}{N-q^+}\Big)\Big(\frac{m-1}{m}\Big), \quad (3.2.9)$$

et (3.2.6) équivalent à

$$1-\Big(\frac{Nq^+}{N-q^+}\Big)\Big(\frac{m-1}{m}\Big)<\frac{m(p^--q^+)}{(m-1)q^++m(p^--q^+)}. \quad (3.2.10)$$

On choisi $\delta\in]0,1[$ *tel que*

$$\frac{\delta q^+}{p^--q^+}<\frac{m(1-\delta)}{m-1}, \quad (3.2.11)$$

et

$$\frac{m(1-\delta)}{m-1}<q^{+*}:=\frac{Nq^+}{N-q^+}. \quad (3.2.12)$$

De (3.2.11) et (3.2.12), on obtient

$$\delta<\frac{m(p^--q^+)}{(m-1)q^++m(p^--q^+)}, \quad (3.2.13)$$

et

$$\delta>1-\Big(\frac{Nq^+}{N-q^+}\Big)\Big(\frac{m-1}{m}\Big). \quad (3.2.14)$$

On choisi $\delta\in]0,1[$ *pour l'inégalité (3.2.10) il reste vraie, de (3.2.8), on peut écrire*

$$\int\limits_\Omega |\nabla u_n|^{q^+}\,dx\leq C_8\Big(1+\int\limits_\Omega (1+|u_n|)^{(1-\delta)\frac{m}{m-1}}\,dx\Big)^{1+(1-\frac{1}{m})\frac{q^+}{p^-}-\frac{q^+}{p^-}}.$$

Et on a

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{q^+}\, dx \leq C_9\Big(1+\int_\Omega |u_n|^{\frac{(1-\delta)m}{m-1}}\, dx\Big)^{1-\frac{q^+}{mp^-}}.$$

On prend (3.2.12) le dernier inégalité on obtient

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{q^+}\, dx \leq C\Big(1+\int_\Omega |u_n|^{q^{+*}}\, dx\Big)^{1-\frac{q^+}{mp^-}}. \tag{3.2.15}$$

D'aprés l'inégalité de Sobolev avec q^{+*}, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_n|^{q^+}\, dx &\leq C_{10}\Big(1+\int_\Omega |\nabla u_n|^{q^+}\, dx\Big)^{\left(\frac{N}{N-q^+}\right)\left(1-\frac{q^+}{mp^-}\right)}\\ &\leq C_{11}+C_{11}\Big(\int_\Omega |\nabla u_n|^{q^+}\, dx\Big)^{\left(\frac{N}{N-q^+}\right)\left(1-\frac{q^+}{mp^-}\right)}.\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

De

$$m < \frac{Np^-}{Np^- - N + p} < \frac{N}{p^-}, \tag{3.2.17}$$

d'aprés (3.2.6), implique

$$q^+ < mp^- \quad et \quad 0 < \Big(\frac{N}{N-q^+}\Big)\Big(1-\frac{q^+}{mp^-}\Big) < 1.$$

D'aprés (3.2.16) (∇u_n) bornée dans $L^{q^+}(\Omega)$,
et de $|\nabla u_n|^{q(x)} \leq |\nabla u_n|^{q^+}+1$, (∇u_n) bornée dans $L^{q(x)}(\Omega)$. D'où (u_n) bornée dans $W_0^{1,q(.)}(\Omega)$.
Cas(b) : *Soit q fonction continue vérifie (3.1.3) et*

$$q^+ \geqslant \frac{Nm(p^- - 1)}{N-m}.$$

D'aprés la continuité de $q(.)$ et $p(.)$ dans $\overline{\Omega}$, alors il existe $\eta > 0$ tel que

$$\max_{y\in B(x,\eta)\cap\Omega} q(y) < \min_{y\in B(x,\eta)\cap\Omega} \frac{Nm(p(y)-1)}{N-m},\ \forall\, x \in \bar{\Omega}. \tag{3.2.18}$$

On a $\overline{\Omega}$ compact, donc il existe un nombre finie des boules $(B_i)_{i=1,...,k}$. Et il existe un constant $\rho > 0$ tel que

$$|\Omega_i| = mes(\Omega_i) > \rho,\ \Omega_i := B_i \cap \Omega,\ \forall\, i = 1, ..., k. \tag{3.2.19}$$

Et on note q_i^+ le maximum local de q dans $\overline{\Omega}_i$ (respectivement, p_i^- le minimum local de p dans $\overline{\Omega}_i$), tell que

$$q_i^+ < \frac{Nm(p_i^- - 1)}{N-m},\ \forall\, i = 1, ..., k. \tag{3.2.20}$$

La mème manier comme estime dans (3.2.15)

$$\int_{\Omega_i} |\nabla u_n|^{q_i^+}\, dx \leq C_{12}\Big(1+\int_{\Omega_i} |u_n|^{q_i^{+*}}\, dx\Big)^{1-\frac{q_i^+}{mp_i^-}},\ \forall\ i=1,...,k. \tag{3.2.21}$$

De plus la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est borné dans $L^1(\Omega)$, dans (3.2.19) on obtient

$$||u_n||_{L^1(\Omega)} \leq C.$$

D'aprés le lemme (1.13), on obtient

$$\begin{aligned} ||u_n||_{L^{q_i^{+*}}(\Omega_i)} &\leq ||u_n-\bar{u_n}||_{L^{q_i^{+*}}(\Omega_i)} + ||\bar{u_n}||_{L^{q_i^{+*}}(\Omega_i)} \\ &\leq C_{13}||\nabla u_n||_{L^{q_i^+}(\Omega_i)} + C_{14},\quad \forall\ i=1,...,k. \end{aligned}$$

On utilisant (3.2.21), on obtient

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u_n|^{q_i^+}\, dx \leq C_{15} + C_{15}\Big(\int\limits_{\Omega} |\nabla u_n|^{q_i^+}\, dx\Big)^{\left(\frac{N}{N-q_i^+}\right)\left(1-\frac{q_i^+}{mp_i^-}\right)}.$$

De (3.2.17) et (3.2.20) on obtient

$$0<\Big(\frac{N}{N-q_i^+}\Big)\Big(1-\frac{q_i^+}{mp_i^-}\Big)<1,$$

donc

$$\int_{\Omega_i} |\nabla u_n|^{q_i^+} \leq C_{16},\quad \forall\ i=1,...,k,$$

la notion

$$q(x)\leq q_i^+\quad \forall\quad x\in\Omega_i, et\ \forall\ i=1,...,k.$$

On donne

$$\int_{\Omega_i} |\nabla u_n|^{q(x)}\, dx \leq \int_{\Omega_i} |\nabla u_n|^{q_i^+}\, dx + |\Omega_i| \leq C_{17}.$$

On a $\Omega \subset \bigcup\limits_{i=1}^{i=k} \Omega_i\ \ \forall\ \ i=1,...,k,$ *on conclu*

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u_n|^{q(x)}\, dx \leq \sum_{i=1}^{k} \int_{\Omega_i} |\nabla u_n|^{q(x)}\, dx = C_{18}.$$

Donc d'aprés l'inégalité de Poincaré u_n borné.

3.2.3 Étape 3 : Passage à la limite

D'aprés le lemme 3.2, et l'injection continue de $W_0^{1,q(.)}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,\bar{q}}(\Omega)$, on peut trouve à une sous-suite note u_n tel que

$$u_n \rightharpoonup u \ \ faiblement \ \ dans \ \ W_0^{1,\bar{q}}(\Omega), \tag{3.2.22}$$

$$n \to u \ \ fortement \ \ dans \ \ L^{\overline{q}}(\Omega), \tag{3.2.23}$$

$$u_n \to u \ \ p.p. \ \ dans \ \ \Omega, \tag{3.2.24}$$

$$T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u) \ \ faiblement \ \ dans \ \ W_0^{1,p(.)}(\Omega), \tag{3.2.25}$$

$$T_k(u_n) \to T_k(u) \ \ fortement \ \ dans \ \ L^{p(.)}(\Omega). \tag{3.2.26}$$

Pour montrer on a besoin les lemmes suivant

Lemme 3.3 *On a*

$$\nabla u_n \to \nabla u \ \ p.p. \ \ dans \ \ \Omega. \tag{3.2.27}$$

Preuve 3.3 *Il suffit montrer*

$$\nabla u_n \to \nabla u \ \ en \ \ mesure. \tag{3.2.28}$$

Soient λ, ε, k des nombres réels positives, nous avons l'ensemble suivant :

$$E_1^n = \{x \in \Omega, |u_n| > k\} \cup \{x \in \Omega, |u| > k\} \cup \{x \in \Omega, |\nabla u_n| > k\} \cup \{x \in \Omega, |\nabla u| > k\},$$

$$E_2^n = \{x \in \Omega, |u_n - u| > \varepsilon\},$$

$$E_3^n = \{x \in \Omega, |u_n - u| \leq \varepsilon, |u_n| \leq k, |u| \leq k, |\nabla u_n| \leq k, |\nabla u| \leq k, |\nabla u_n - \nabla u| \geqslant \lambda\}.$$

On remarque l'inclusion suivante

$$\{x \in \Omega, |\nabla u_n - \nabla u| \geqslant \lambda\} \subset E_1^n \cup E_2^n \cup E_3^n.$$

D'apré (3.2.23), pour $\varepsilon > 0$, on a pour

$$mes(E_2^n) \to 0 \ \ lorsque \ \ n \to +\infty.$$

En effet; on a : $u_n \to u$ dans $L^{q^-}(\Omega)$ fortement c-à-d $\int\limits_\Omega |u_n - u|^{q^-} = 0$ quand $n \to \infty$, et

$$mes(E_2^n) = \int\limits_{E_2^n} dx = \int\limits_{|u_n - u| > \varepsilon} dx = \frac{1}{\varepsilon^{q^-}} \int\limits_{|u_n - u| > \varepsilon} \varepsilon^{q^-} \, dx$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^{q^-}} \int\limits_{|u_n-u|>\varepsilon} |u_n-u|^{q^-}\ dx$$
$$\leq \frac{1}{\varepsilon^{q^-}} \int\limits_{\Omega} |u_n-u|^{q^-}\ dx = \frac{1}{\varepsilon^{q^-}} ||u_n-u||_{L^{q^-}(\Omega)},$$

ε fixe, donc $mes(E_2^n) \to 0$ quand $n \to \infty$.

Dans (3.2.22), on a : $u_n \rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,q^-}(\Omega)$ faiblement, et

$$mes(\{|u_n| > k\}) = \int\limits_{|u_n|>k} dx \leq \frac{1}{k^{q^-}} \int\limits_{\Omega} |u_n|^{q^-} \leq \frac{c}{k^{q^-}},$$

k assez grand, donc $mes(E_1^n)$ assez petite.

D'autre part, l'application

$$A : (s,\xi) \longmapsto a(x,s,\xi),$$

est continue pour p.p $x \in \Omega$, l'ensemble

$$K := \{|s|, |\xi_1|, |\xi_2| \leq k, |\xi_1 - \xi_2| \geqslant \lambda\},$$

est compact, et

$$(a(x,s,\xi_1) - a(x,s,\xi_2))(\xi_1 - \xi_2) > 0, \text{ pour tout } \xi_1 \neq \xi_2.$$

Par conséquent, l'application A atteint son minimum sur K, que nous noterons par $w(x)$. En outre, pour tout $\eta > 0$, alors il existe $\eta' > 0$, tell que

$$\int_{E_3^n} w(x)\ dx < \eta' \Rightarrow mes(E_3^n) \leq \eta. \tag{3.2.29}$$

On prend pour tout η' et choisi $\varepsilon > 0$ plus petit, tel que

$$\int_{E_3^n} w(x)\ dx < \eta'. \tag{3.2.30}$$

D'aprés la définition de $w(x)$ et E_3^n, on peut écrire

$$\int_{E_3^n} w(x)\ dx \leq \int_{E_3^n} (a(x,u_n,\nabla u_n) - a(x,u_n,\nabla u))(\nabla u_n - \nabla u)\ dx$$
$$\leq \int_{\{x:|u_n|\leq k, |u|\leq k\}} (a(x,u_n,\nabla u_n) - a(x,u_n,\nabla u^k))(\nabla u_n - \nabla u^k)\chi_\varepsilon(|u_n - u^k|)\ dx$$

$$\leq \int_\Omega (a(x,u_n,\nabla u_n)-a(x,u_n,\nabla u^k))(\nabla u_n-\nabla u^k)\chi_\varepsilon(|u_n-u^k|)\,dx$$
$$\leq \int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla T_\varepsilon(u_n-u^k)-\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u^k)\nabla T_\varepsilon(u_n-u^k)$$
$$= T^1_{n,\varepsilon}-T^2_{n,\varepsilon}. \tag{3.2.31}$$

Où χ_ε la fonction caractéristique dans $[0,\varepsilon]\subset[0,1]$, et ici

$$\chi_\varepsilon(|u_n-u^k|)=\begin{cases}0, & si|u_n-u^k|>\varepsilon,\\ 1, & si|u_n-u^k|\leq\varepsilon.\end{cases}$$

D'abord avec $T^2_{n,\varepsilon}$, on peut écrire

$$T^2_{n,\varepsilon}=\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u^k)(\nabla u_n-\nabla u^k)\chi_\varepsilon(|u_n-u^k|)\,dx$$
$$=\int_\Omega a(x,u_n^{k+1},\nabla u^k)(\nabla u_n^{k+1}-\nabla u^k)\chi_\varepsilon(|u_n^{k+1}-u^k|)\,dx.$$

Dans (3.2.24), $u_n\to u$ pp dans Ω, donc $u_n^{k+1}\to u^{k+1}$ pp dans Ω, alors

$$a(x,u_n^{k+1},\nabla u^k)\chi_\varepsilon(|u_n^{k+1}-u^k|)\to a(x,u^{k+1},\nabla u^k)\chi_\varepsilon(|u^{k+1}-u^k|)\ \ pp\ \ dans\ \ \Omega.$$

D'aprés l'hypothése (b) on a

$$|a(x,u_n^{k+1},\nabla u^k)\chi_\varepsilon(|u_n^{k+1}+u^k|)|\leq\beta(h+|k+1|^{p(.)-1}+|\nabla u^k|^{p(.)-1}),$$

et d'aprés le lemme 3.1 on a

$$\int_\Omega|\nabla u^k|^{(p(.)-1)p'(.)}=\int_\Omega|\nabla u^k|^{p(.)}\leq kC_4.$$

Donc d'aprés le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$a(x,u_n^{k+1},\nabla u^k)\chi_\varepsilon(|u_n^{k+1}-u^k|)\to a(x,u^{k+1},\nabla u^k)\chi_\varepsilon(|u^{k+1}-u^k|)\ \ fortement\ \ dans\ L^{p'(.)}(\Omega),$$

dans (3.2.25) on a $u_n^k\rightharpoonup u^k$ dans $W_0^{1,p(.)}(\Omega)$, alors

$$\nabla u_n^{k+1}\rightharpoonup\nabla u^{k+1}\ \ faiblement\ dans\ L^{p(.)}(\Omega),$$

donc

$$\lim_n T^2_{n,\varepsilon}=\int_\Omega a(x,u^{k+1},\nabla u^k)\nabla(u^{k+1}-u^k)\chi_\varepsilon(|u^{k+1}-u^k|)\,dx.$$

Maintenant

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n} T^2_{n,\varepsilon} = 0, \tag{3.2.32}$$

en estime $T^1_{n,\varepsilon}$, *on choisi* $T_\varepsilon(u_n - u^k)$ *comme fonction test de* (3.2.3), *on trouve*

$$|T^1_{n,\varepsilon}| = \Big| \int_\Omega f_n T_\varepsilon(u_n - u^k)\, dx \Big| \leq \varepsilon ||f||_{L^m(\Omega)} \to 0 \; si \; \varepsilon \to 0. \tag{3.2.33}$$

Donc pour ε *assez petite, on trouve*

$$\int_{E_3^n} w(x)\, dx \leq \eta',$$

donc

$$mes(E_3^n) \leq \eta.$$

Alors $\nabla u_n \to \nabla u$ *en mesure. Donc*

$$\nabla u_n \to \nabla u \;\; pp \; dans \; \Omega.$$

Lemme 3.4 *On a*

$$a(x, u_n, \nabla u_n) \to a(x, u, \nabla u) \;\; fortement \; dans \; L^{q(.)}(\Omega). \tag{3.2.34}$$

Pour une certaine fonction $q(.) : \overline{\Omega} \to [1, \frac{Nm}{N-m}[$, *avec* m *définie dans (3.1.2).*

Preuve 3.4 *Dans (3.2.24), on a* $u_n \to u$ *pp dans* Ω, *et on a* $\nabla u_n \to \nabla u$ *pp dans* Ω, *donc*

$$a(x, u_n, \nabla u_n) \to a(x, u, \nabla u) \; p.p. \; dans \; \Omega.$$

d'autre part $q(.) : \overline{\Omega} \to [1, \frac{Nm}{N-m}[$. *Et d'aprés* (3.1.1), *on choisi* $r(.)$ *fonction continue dans* $\overline{\Omega}$ *tel que* $\forall\, x \in \bar{\Omega}$

$$\begin{cases} 1 \leq q(x) < r(x) < \frac{Nm}{N-m} \\ \frac{1}{p(x)-1} < r(x) < \frac{Nm}{N-m} \end{cases}$$

On trouve

$$1 < r(.)(p(.)-1) < \frac{Nm(p(.)-1)}{N-m} \;\; et \;\; r(.) < \frac{Nm}{N-m} < p'(.). \tag{3.2.35}$$

En utilisant (b), *on trouve la suite* $(a(x, u_n, \nabla u_n))_n$ *borné dans* $L^{r(.)}(\Omega)$, *en effet ;*

$$\int_\Omega |a(x,u_n,\nabla u_n)|^{r(x)}\,dx \le C_{18}3^{r(x)-1}\Big(\int_\Omega |h|^{r(x)}\,dx+\int_\Omega |u_n|^{r(x)(p(x)-1)}\,dx+\int_\Omega |\nabla u_n|^{r(x)(p(x)-1)}\,dx\Big).$$

Comme $r(.)<p'(.)$, on trouve

$$\int_\Omega |h|^{r(x)}\,dx<\int_\Omega |h|^{p'(.)}\,dx+|\Omega|<\infty.$$

En utilisant (3.2.35) *et le lemme 3.2, le corollaire 2.9, et l'inégalité de Poincaré, on trouve*

$$\int_\Omega |u_n|^{r(x)(p(x)-1)}\,dx<C_{19}\ et\ \int_\Omega |\nabla u_n|^{r(x)(p(x)-1)}\,dx\le C_{20},$$

pour montrer $a(x,u_n,\nabla u_n)$ equi-intégrabilité, on utilisant l'inégalité de Hölder avec exposant $\frac{r(x)}{q(x)}$, et le corollaire 2.8, tel que $a(x,u_n,\nabla u_n)$ est bornée dans $L^{r(.)}(\Omega)$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_E |a(x,u_n,\nabla u_n)|^{q(x)}\,dx &\le 2||a(x,u_n,\nabla u_n||_{\frac{r(.)}{q(.)}}||1||_{\frac{r(x)}{q(x)}'}\\ &\le C_{21}\max\{|E|^{\frac{1}{w^+}},|E|^{\frac{1}{w^-}}\},\ w=\frac{r(.)}{r(.)-q(.)}.\end{aligned}$$

Donc d'aprés le théorème de Vitali on a

$$a(x,u_n,\nabla u_n)\to a(x,u,\nabla u)\ \ fortement\ dans\ L^{q(.)}(\Omega).$$

3.3 Fin de Preuve

Finalement

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla\phi\,dx=\int_\Omega \phi f_n\,dx\quad\forall\,\phi\in C_0^\infty(\Omega),\tag{3.3.1}$$

on a $a(x,u_n,\nabla u_n)\to a(x,u,\nabla u)\ \ fortement\ dans\ L^{q(.)}(\Omega)$, passe à la limite si $n\to\infty$ sur la formulation faible (3.3.1), on obtient

$$\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla\phi\,dx=\int_\Omega f\phi\,dx\quad\forall\,\phi\in C_0^\infty(\Omega),\tag{3.3.2}$$

Donc u est un solution faible de (P).

Chapitre 4

Problème à donnée mesure

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on montre l'existence de solutions faibles pour certains problèmes elliptiques non-linéaires à donnée mesure et à exposant variable.
Pour cela on va étudier le problème suivant :

$$(P)\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)) &= \mu \ dans\ \Omega, \\ \mu &= 0 \ sur\ \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\mu \in M(\Omega)$ mesure de Radon, avec Ω un ouvert régulier dans $\mathbb{R}^N (N \geqslant 2)$.
Soient $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^N, a = (a_1, ..., a_N)$ fonction Carathéodory, tell que pour tout $(s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et x pp dans Ω, avec les propriétés suivantes :

a- $\exists\, \alpha > 0$ tel que $a(x, s, \xi).\xi \geqslant \alpha|\xi|^{p(x)}$;

b- $\exists\, \beta > 0$ tel que $|a(x, s, \xi)| \leq \beta(h + |s|^{p(x)-1} + |\xi|^{p(x)-1})$;

c- $(a(x, s, \xi) - a(x, s, \xi')).(\xi - \xi') > 0$ si $\xi \neq \xi'$.

Où h fonction positive dans $L^{p'(.)}(\Omega)$, $p(.) : \overline{\Omega} \to]1, +\infty[$ fonction continue tel que :

$$2 - \frac{1}{N} < p(x) < N, \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{4.1.1}$$

Définition 4.1 *On dit que u solution faible de (P) si :*

$$u \in W_0^{1,1}(\Omega),\ a(x, u, \nabla u) \in (L^1(\Omega))^N.$$

Et

$$\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla\phi\,dx = \int_\Omega \phi\,d\mu,\ \ \forall\phi\in C_0^\infty(\Omega).$$

Théorème 4.1 *Soit $\mu\in M(\Omega)$, on pose $p(.)$ vérifie (4.1.1). Soit a fonction Carathéodory satisfait $(a)-(c)$. Alors le problème (P) admet une solution faible $u\in W_0^{1,q(.)}(\Omega)$,*
où $q(.)$ fonction continue dans $\overline{\Omega}$ tel que

$$1\le q(x)<\frac{N(p(x)-1)}{N-1},\forall x\in\overline{\Omega}. \tag{4.1.2}$$

4.2 Preuve de théorème

La preuve se faite en trois étape.

4.2.1 Étape 1 : Approximation

On veut utilise l'approximation pour montre l'existence de solution aux sens de distribution pour le problème (P). Pour cela on considére le problème :

$$(P_n)\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,u_n,\nabla u_n)) &= \mu_n \ dans\ \Omega,\\ u_n &= 0\ sur\ \partial\Omega.\end{cases}$$

O*ù* $(\mu_n)\subset C_0^\infty(\Omega)$ telle que $\mu_n\to\mu$ dans $D'(\Omega)$ et vérifie l'inégalité

$$||\mu_n||_{L^1(\Omega)}\le||\mu||_{M(\Omega)},\ \ \forall\ n\geqslant 1. \tag{4.2.1}$$

On applique le théorème de surjectivité (Théorème 1.12) à l'opérateur

$$\begin{array}{rccc} A: & W_0^{1,p(.)}(\Omega) & \to & W_0^{-1,p'(.)}(\Omega)\\ & u & \mapsto & -\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)).\end{array}$$

La démonstration décompose en quatre étape.

Étape 1 : A est coércif en effet ;
pour tout $u\in W_0^{1,p(.)}(\Omega)$ on a :

$$\langle A(u),u\rangle=\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla u\geqslant\alpha\int_\Omega|\nabla u|^{p(.)}\qquad \text{d'après l'hypothèse (a) de a}$$

$$\begin{aligned}
&\geqslant \alpha A_{p(.)}(\nabla u)\\
\frac{\langle Au,u\rangle}{||u||_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)}} &\geqslant \alpha \frac{A_{p(.)}(\nabla u)}{||u||_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)}}\\
&\geqslant \alpha \frac{\min\left\{||u||^{p^+}_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)}, ||u||^{p^-}_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)}\right\}}{||u||_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)}} \qquad \text{d'après le lemme (2.7).}
\end{aligned}$$

Donc A est coércif, si $\frac{\langle Au,u\rangle}{||u||_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)}} \to +\infty$ lorsque $||u||_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)} \to +\infty$.

Étape 2 : A est bornée en effet ; pour tout $u \in W_0^{1,p(.)}(\Omega)$

$$\begin{aligned}
||Au||_{(W_0^{1,p(.)}(\Omega))'} &= \sup\{|\langle A(u),\phi\rangle| : ||\phi||_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)} \leq 1\}\\
&\leq \sup_{||\phi||_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)\leq 1}} |\langle A(u),\phi\rangle|\\
||Au||_{(W_0^{1,p(.)}(\Omega))'} &\leq \sup_{\phi\in W_0^{1,p(.)}(\Omega),||\phi||_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)}\leq 1} \int_\Omega \beta(h+|u|^{p(x)-1}+|\nabla u|^{p(x)-1})|\nabla\phi|\,dx \quad \text{d'aprés (b) de a}\\
&\leq C_{22}||(h+|u|^{p(x)-1}+|\nabla u|^{p(x)-1})||_{\frac{p(.)}{p(.)-1}} \quad \text{d'aprés Hölder.}
\end{aligned}$$

Comme : $||u||_{p(.)} \leq A_{p(.)}(u)+1$, on obtient :

$$||Au||_{(W_0^{1,p(.)}(\Omega))'} \leq C_{23} + C_{24}\int_\Omega \Big(h^{p'(x)} + |u|^{p(x)} + |\nabla u|^{p(x)}\Big).$$

Donc $||Au||_{(W_0^{1,p(.)}(\Omega))'}$ est borné, si $||(h+|u|^{p(x)-1}+|\nabla u|^{p(x)-1})||_{\frac{p(.)}{p(.)-1}}$ est borné.

Étape 3 : A est monotone en effet ;

le résultat est une conséquence de l'hypothése (c), de a on a

$$\langle A(u)-A(v),u-v\rangle = \int_\Omega (a(x,u,\nabla u)-a(x,v,\nabla v))(u-v) \geq 0.$$

Étape 4 : A est hémi-continue en effet ;

Pour tout $u \in W_0^{1,p(.)}(\Omega)$, $A(u)$ est hémi-continue i-e ; l'opérateur $\lambda \longmapsto \langle A(u+\lambda v),w\rangle$ est continue pour tout $u,u,w \in W_0^{1,p(.)}(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to 0}\langle A(u+\lambda v),w\rangle &= \lim_{\lambda\to 0}\int_\Omega a(x,u+\lambda v,\nabla(u+\lambda v))\nabla w\\
&= \int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla w = \langle A(u),w\rangle.
\end{aligned}$$

Donc A est surjective d'aprés la définition $Au_n = f_n$, et par conséquent il existe suite de solution $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,p(.)}(\Omega)$, satisfait

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla\phi\ dx = \int_\Omega \mu_n\phi\ dx\ \ \forall\phi \in W_0^{1,p(.)}(\Omega). \tag{4.2.2}$$

4.2.2 Étape 2 : Estimations à priori

Lemme 4.1 *Il existe un constant $C_{25} > 0$ tel que*

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^{p(x)}\ dx \le kC_{25},\ \ \forall\ k > 0, \tag{4.2.3}$$

où T_k définie par :

$$T_k(v) = \begin{cases} k, & si\ v > k, \\ v, & si\ |v| \le k, \\ -k, & si\ v < -k. \end{cases}$$

Preuve 4.1 *On prend $T_k(u_n)$ comme fonction test dans (4.2.2) on obtient :*

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla(T_k(u_n))\ dx &= \int_\Omega \mu_n T_k(u_n)\ dx \\ &\le k||\mu||_{M(\Omega)}.\end{aligned}$$

On utilisant (a), et on note $T_k' = T_k'^{p(x)}\ \forall\ k > 0$, on obtient :

$$\alpha\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)}.T_k'(u_n)\ dx \le k||\mu||_{M(\Omega)},$$

donc

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^{p(x)}\ dx \le kC_{25},\ \ \forall\ k > 0.$$

Lemme 4.2 *Soit $p(.)$ fonction continue dans Ω et $\delta > 1$.*

Alors il existe un constant $C(\delta) > 0$ indépendant de n, tell que :

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^{p(x)}}{(1+|u_n|)^\delta}\ dx \le C(\delta).$$

Preuve 4.2 *On fixe $\delta > 1$, et on définie la fonction ψ_δ pour tout $t \in \mathbb{R}$, sous la forme*

$$\psi_\delta(t) = \int_0^t \frac{dx}{(1+|x|)^\delta},$$

alors on obtient $\psi_\delta(0) = 0, 0 < \psi'_\delta \leq 1$ *et* $|\psi_\delta| \leq \frac{1}{\delta - 1}$. *On prend* $\psi_\delta(u_n)$ *comme fonction test dans (4.2.2), on obtient*

$$\begin{aligned}\alpha \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^{p(x)}}{(1+|u_n|)^\delta}\, dx &\leq \int_\Omega |\mu_n||\psi_\delta(u_n)|\, dx \\ &\leq \frac{1}{\delta - 1}\int_\Omega |\mu_n|\, dx \\ &\leq \frac{||\mu||_{M(\Omega)}}{\delta - 1}.\end{aligned}$$

D'où le résulta.

Lemme 4.3 *Soit* $p(.)$ *vérifie (4.1.1). Alors il existe un constant* $C_{26} > 0$ *tel que*

$$||u_n||_{W_0^{1,q(.)}(\Omega)} \leq C_{26}.$$

Pour tout $q(.) \in \overline{\Omega}$ *vérifie (4.1.2).*

Preuve 4.3 *La démonstration décompose en deux étapes.*

Étape 1 : *Soit* q^+ *constant vérifie*

$$q^+ < \frac{N(p^- - 1)}{N - 1} < p^-. \tag{4.2.4}$$

Grâce à l'inégalité de Hölder avec exposant $\frac{p^-}{q^+}$ *et d'aprés le lemme 4.2, on obtient*

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_n|^{q^+}\, dx &= \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^{q^+}}{(1+|u_n|)^{\delta\frac{q^+}{p^-}}}(1+|u_n|)^{\delta\frac{q^+}{p^-}}\, dx \\ &\leq \Big(\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^{p^-}}{(1+|u_n|)^\delta}\, dx\Big)^{\frac{q^+}{p^-}} \Big(\int_\Omega (1+|u_n|)^{\delta\frac{q^+}{p^- - q^+}}\, dx\Big)^{1-\frac{q^+}{p^-}} \\ &\leq C_\delta\Big(\int_\Omega (1+|u_n|)^{\delta\frac{q^+}{p^- - q^+}}\, dx\Big)^{1-\frac{q^+}{p^-}}.\end{aligned}$$

On a dans (4.2.4) $\frac{q^+}{p^- - q^+} < q^{+*} := \frac{Nq^+}{N - q^+}$. *Alors il existe* $\delta > 1$ *tell que* $\delta\frac{q^+}{p^- - q^+} < q^{+*}$.
Grâce à l'inégalité de Poincaré de Sobolev, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_n|^{q^+}\, dx &= C_{27} + C_{28}\Big(\int_\Omega |u_n|^{q^{+*}}\, dx\Big)^{1-\frac{q^+}{p^-}} \\ &\leq C_{27} + C_{29}\Big(\int_\Omega |\nabla u_n|^{q^+}\, dx\Big)^{\frac{q^{+*}}{q^+}(1-\frac{q^+}{p^-})}\end{aligned}$$

$$= C_{27} + C_{29}\Big(\int\limits_{\Omega} |\nabla u_n|^{q^+}\, dx\Big)^{\theta}, \tag{4.2.5}$$

où $\theta = \frac{N}{N-q^+}(1-\frac{q^+}{p^-})$, *d'aprés (4.1.1) on trouve* $\theta \in (0,1)$. *On déduire*

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u_n|^{q^+}\, dx \leq C_{30}.$$

Comme $|\nabla u_n|^{q(x)} \leq |\nabla u_n|^{q^+} + 1$, *on obtient*

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u_n|^{q(x)}\, dx \leq C_{31}.$$

On particulier, il existe $C_{32} > 0$ *tell que*

$$||u_n||_{L^1(\Omega)} \leq C_{32}. \tag{4.2.6}$$

Étape 2 : *On suppose (4.1.2) vérifie , et*

$$q^+ \geqslant \frac{N(p^- - 1)}{N-1}.$$

D'aprés la continuité de $q(.)$ *et* $p(.)$ *dans* $\overline{\Omega}$, *alors il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$\max_{t\in\overline{B(x,\delta)}\cap\Omega} q(t) < \min_{t\in\overline{B(x,\delta)}\cap\Omega} \frac{N(p(t)-1)}{N-1},\ \forall\ x \in \Omega. \tag{4.2.7}$$

On a $\overline{\Omega}$ *compact, donc il existe un nombre finie des boules* $(B_i)_{i=1,...,k}$. *et il existe un constant* $v > 0$ *tel que*

$$|\Omega_i| = mes(\Omega_i) > v,\ \Omega_i := B_i \cap \Omega,\ \forall\ i = 1, ..., k. \tag{4.2.8}$$

Et on note q_i^+ *le maximum local de* q *dans* $\overline{\Omega}_i$*(respectivement,* p_i^- *le minimum local de* p *dans* $\overline{\Omega}_i$*), tell que*

$$q_i^+ < \frac{N(p_i^- - 1)}{N-1},\ \forall\, i = 1, ..., k. \tag{4.2.9}$$

Grâce à l'inégalité de Poincaré-Wiritinger, (4.2.6),(4.2.8), on trouve

$$\begin{aligned} ||u_n||_{L^{q_i^{+*}}(\Omega_i)} &\leq ||u_n - \bar{u_n}||_{L^{q_i^{+*}}(\Omega_i)} + ||\bar{u_n}||_{L^{q_i^{+*}}(\Omega_i)} \\ &\leq C_{33}||\nabla u_n||_{L^{q_i^+}(\Omega_i)} + C_{34}. \end{aligned}$$

dans (4.2.5) on obtient

$$\int_{\Omega_i} |\nabla u_n|^{q_i^+}\, dx \leq C_{35} + C_{36}\Big(\int_{\Omega_i} |\nabla u_n|^{q_i^+}\, dx\Big)^{\theta_i}, \theta_i = \frac{N}{N-q_i^+}(1-\frac{q_i^+}{p_i^-}) < 1, \tag{4.2.10}$$

et

$$\int_{\Omega_i} |\nabla u_n|^{q_i^+} \leq C_{37},\ \forall\ i = 1, ..., k.$$

Et $q(x) \leq q_i^+$ *vérifie pour tout* $x \in \Omega_i$, *et* $i = 1, ..., k$, *donc*

$$\int_{\Omega_i} |\nabla u_n|^{q(x)}\ dx \leq C_{37} + |\Omega_i|,$$

et

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u_n|^{q(x)}\ dx \leq \sum_{i=1}^{k} \int_{\Omega_i} |\nabla u_n|^{q(x)}\ dx = C_{38}.$$

4.2.3 Étape 3 : Passage à la limite

La même preuve dans l' étape 3 (chapter 3).

Lemme 4.4 *On a*

$$a(x, u_n, \nabla u_n) \to a(x, u, \nabla u)\ \ fortement\ dans\ L^{q(.)}(\Omega). \tag{4.2.11}$$

Pour une certaine fonction $q(.) : \overline{\Omega} \to [1, \frac{N}{N-1}[$.

Preuve 4.4 *Dans* (4.2.13), *on a* $u_n \to u$ *pp dans* Ω, *et d'aprés* (4.2.16) *on a* $\nabla u_n \to \nabla u$ *pp dans* Ω, *donc*

$$a(x, u_n, \nabla u_n) \to a(x, u, \nabla u)\ p.p.\ dans\ \Omega.$$

d'autre part $q(.) : \overline{\Omega} \to [1, \frac{N}{N-1}[$. *Et d'aprés* (4.1.1), *on choisi* $r(.)$ *fonction continue dans* $\overline{\Omega}$ *tel que* $\forall\ x \in \bar{\Omega}$

$$\begin{cases} 1 \leq q(x) < r(x) < \frac{N}{N-1} \\ \frac{1}{p(x)-1} < r(x) < \frac{N}{N-1} \end{cases}$$

On trouve

$$1 < r(.)(p(.) - 1) < \frac{N(p(.) - 1)}{N - 1}\ \ et\ \ r(.) < \frac{N}{N-1} < p'(.). \tag{4.2.12}$$

En utilisant (b), *pour prend la suite* $(a(x, u_n, \nabla u_n))_n$ *borné dans* $L^{r(.)}(\Omega)$, *en effet ;*

$$\int\limits_{\Omega} |a(x, u_n, \nabla u_n)|^{r(x)}\ dx \leq C_{39} 3^{r(x)-1} \Big(\int\limits_{\Omega} |h|^{r(x)}\ dx + \int\limits_{\Omega} |u_n|^{r(x)(p(x)-1)}\ dx + \int\limits_{\Omega} |\nabla u_n|^{r(x)(p(x)-1)}\ dx \Big).$$

Comme $r(.) < p'(.)$, *on trouve*

$$\int_\Omega |h|^{r(x)}\, dx < \int_\Omega |h|^{p'(.)}\, dx + |\Omega| < \infty.$$

En utilisant (4.2.24) *et le lemme 4.3, le corollaire 2.9, l'inégalité de Poincaré, on trouve*

$$\int_\Omega |u_n|^{r(x)(p(x)-1)}\, dx < C_{40} \; et \; \int_\Omega |\nabla u_n|^{r(x)(p(x)-1)}\, dx \leq C_{41},$$

pour montrer $a(x, u_n, \nabla u_n)$ *equi-intégrabilité , on utilisant l'inégalité de Hölder avec exposant* $\frac{r(x)}{q(x)}$, *et le corollaire 2.8, tel que* $a(x, u_n, \nabla u_n)$ *est bornée dans* $L^{r(.)}(\Omega)$, *on obtient*

$$\begin{aligned}\int_E |a(x, u_n, \nabla u_n)|^{q(x)}\, dx &\leq 2||a(x, u_n, \nabla u_n||_{\frac{r(.)}{q(.)}}||1||_{\frac{r(x)}{q(x)}'} \\ &\leq C_{42} \max\{|E|^{\frac{1}{w^+}}, |E|^{\frac{1}{w^-}}\},\ w = \frac{r(.)}{r(.) - q(.)}.\end{aligned}$$

Donc d'aprés le théorème de Vitali on a

$$a(x, u_n, \nabla u_n) \to a(x, u, \nabla u) \;\; fortement\ dans\ L^{q(.)}(\Omega).$$

4.3 Fin de Preuve

Finalement

$$\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla\phi\, dx = \int_\Omega \phi\mu_n\, dx \quad \forall\ \phi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{4.3.1}$$

on a $a(x, u_n, \nabla u_n) \to a(x, u, \nabla u)$ $fortement\ dans\ L^{q(.)}(\Omega)$, passe à la limite si $n \to \infty$ sur la formulation faible (4.3.1) on obtient

$$\int_\Omega a(x, u, \nabla u)\nabla\phi\, dx = \int_\Omega \phi\, d\mu \quad \forall\ \phi \in C_0^\infty(\Omega), \tag{4.3.2}$$

Donc u est un solution faible de (P).

Remarque 4.1 *On remarque dans le case constant et* $f \in L^m(\Omega)$, *on choisi dans* (3.2.8),

$$\delta = \frac{pN - mp - mpN + mN}{N - mp} \in]0, 1[,$$

pour obtient

$$q = \frac{mN(p-1)}{N-m} \Rightarrow (1-\delta)\frac{m}{m-1} = \frac{\delta q}{p-q} = \frac{Nq}{N-q}.$$

Par estimation générale de (3.2.16), *on trouve*

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^q \, dx \leq C + C\Big(\int_\Omega |\nabla u_n|^q \, dx\Big)^{\left(\frac{N}{N-q}\right)\left(1-\frac{q}{mp}\right)}$$

où

$$0 < \Big(\frac{N}{N-q}\Big)\Big(1-\frac{q}{mp}\Big) < 1.$$

Alors (P) *admet une solution faible* $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ *régulier pour tout* $q = \frac{Nm(p-1)}{N-m}$. *Pour le cas non constant on a*

$$u \in W_0^{1,q(.)}(\Omega) \quad avec \quad q(.) = \frac{Nm(p(x)-1)}{N-m}.$$

Remarque 4.2 *On remarque de le résultat donne dans* ***Lemme 4.3***
(resp ***Lemme 3.2****), pour tout* $q : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ *fonction mesurable tel que*

$$ess\inf_{\overline{\Omega}} \Big(\frac{N(p(x)-1)}{N-1} - q(x)\Big) > 0\Big(resp, ess\inf_{\overline{\Omega}} \Big(\frac{Nm(p(x)-1)}{N-m} - q(x)\Big)\Big) > 0.$$

Donc il existe une fonction continue $s : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *tel que pour* $x \in \overline{\Omega}$ *:*

$$q(x) \leq s(x) < \frac{N(p(x)-1)}{N-1}\Big(resp, q(x) \leq s(x) < \frac{Nm(p(x)-1)}{N-m}\Big).$$

Pour ***Lemme 4.3*** *(resp* ***Lemme 3.2****) on déduire pour les deux cases,*
(u_n) *bornée dans* $W_0^{1,s(.)}(\Omega)$.
Finalement, par la continuité de $W_0^{1,s(.)}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,q(.)}(\Omega)$, *on obtient le résultat.*

Conclusion

Dans ce mémoire, je me suis étudie des questions d'existence de solution faible pour des problèmes de type elliptique faisant intervenir des données peu réguliéres (L^m ou mesure). Pour ces problèmes, la nécessité de travailler dans des espaces de Lebesgue et de Sobolev à exposants variables est motivée par l'apparition de ces espaces dans la modélisation de fluides électrhéologiques et thermorhéologiques et dans la restauration d'image.
Ce travail m'a ouvert un champ sur l'étude :

- Quelques rappelle sur les espaces fonctionnés.
- L'existence de solution faible sur les problème elliptique.
- Les solutions faibles dans l'espace à exposante variable.

En fin, notons que dans la littérature, trés peu de problèmes elliptiques ont été traités. Il semble que cette difficulté soit liéé a la compréhension et à la définition d'espaces fonctionnels adapté. Par conséquent, des questions intéressantes ouvert des pistes de recherche dans ce volet.

Bibliographie

[1] H.Brezis, Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications. Masson, Paris (1992).

[2] J-L.Lions, Quelques Méthode de Résolution des Problémes aux Limites non Linéaires, Dunod (1969).

[3] S.Antontsev Sergey Shmarev, Evolution PDEs With Nonstandard Growth Conditions : Existence, Uniqueness, Localizations, Blow-up. Micchel Chipot.

[4] J.L.Lions, E. Magenes, Problèmes aux Limites non Homogénes et Applications. Dunod, Paris, vol. 1 et 2, (1968).

[5] C.B.Jr.Morry, Multiple Integrals in The Calculus of Variations. Springerverlag, Newyork (1996).

[6] L.Diening, Riesz potentianl and Sobolev embeddings on generalized Lebesgue and Sobolev spaces $L^{p(.)}$ and $W^{k,p(.)}$. Math. Nachr. 268(2004), 31-43.

[7] X.Fan,D.Zhao, on the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$. J.Math.Anal.Appl.263 (2001), 424-446.

[8] D.Lars.H.Peter.H.Petteri.R.Michal, Lebegue and Sobolev Spaces With Variable Exponents,J-M Morel,Cachan,B.Teissier,Paris,2011.

[9] F.Mokhtari,K.Bachouche and H.Abdelaziz,Nonlinear Equation With Variable Exponents and Mesure or L^m, December 2015.