République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique
Université. Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences
Département De Mathématiques et Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse de Mathématiques et Applications

par

MAGHRAOUI Amina

Résultats de stabilité d'un problème distribué impliquant le système de Bresse avec des conditions aux limites entièrement Dirichlet ou mélangées

---

Soutenu

Président :	BENAICHOUCH.H.	M.A.A	Université de Mèdèa
Promotrice :	BOULARIAH.F.	M.A.A	Université de Mèdèa
Examinateur :	TOUMACH.K.	M.A.A	Université de Mèdèa
Examinateur :	OUKIL.W.	M.C.B	Université de Mèdèa

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2017-2018

Remerciements

Au terme de ce modeste travail, je tiens à remercier en premier lieu :
dieu Miséricordieux qui m'a donné la force et la patience à achever ce mémoire.
J'adresse mes plus sincères remerciements à madame BOULARIAH Fatiha, qui en tant que promotrice, s'est toujours montré à l'écoute et très disponible lors de ce travail.
Tous les enseignants de spécialité de mathématiques de l'univercité de Médéa.
Tous les membres de jury qui m'ont fait l'honneur d'examiner mon travail.
En fin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et mes amis qui m'ont toujours soutenu et encourager.

Dédicace

♢

dédie ce

modeste travaille

à ma chère mère

A mon cher père qui m'ont

toujours soutenu

Qui m'ont aide à affronter les difficultés

A tous mes enseignants pour leurs utiles conseilles,

leurs patience, leur persévérance.

A mes trés chères soeurs :Hedjila, Fatiha , Noura, Fahima, Aicha,

Fatima, Sabrina, Nassima, Fatima Zohra et Houria

à mon frère Ahmed et sa femme Fatima Zohra et mon frère Abdelhak

et sa femme Zahra et Omar

A les petits : Mohamed, Ibrahim, Anas, Yousef, Yasine,

Islam, Ishak, Anfal, Arwa, Hoda, Mariem, Hadjer.

A mon chère mari Ali

A toute ma famille MAGHRAOUI et

ZOUANE

A tous les amis : Amina,

Hadjer S et So-

maia.

♢

Table des matières

Introduction **5**

1 Rappels et outils de base **9**

1.1 Espaces de Banach 9

1.1.1 Théorème de l'application ouverte 9

1.1.2 Théorème du graphe fermé 10

1.2 Espaces L^p 10

1.3 Espaces de Hilbert 10

1.4 Méthode spectrale 12

1.5 Espace de Sobolev $W^{n,p}(\Omega)$. 14

1.6 Opérateurs m-dissipatifs 15

1.6.1 Définitions 15

1.7 Semi-groupes 16

1.7.1 Semi-groupes des contractions 18

1.7.2 Théorème de Hille Yosida 18

2 Formulation de problème et l'existence du solution **21**

2.1 Formulation du problème 22

2.2 L'existence d'une solution de système 27

3 Stabilité du système **32**

3.1 Stabilité forte du système 32

3.2 Stabilité exponentielle dans le cas $\frac{k_1}{\rho_1} = \frac{k_2}{\rho_2}$ et $k_1 = k_3$ 37

3.3 Manque de stabilité exponentielle avec la vitesse différente 49

3.4 Stabilité polynômial dans le cas général 60
3.5 conclusion 68

Bibliographie **69**

Resumé

Dans ce travail, nous n'intéressons à étudier la stabilité d'un système de Bresse avec un contrôle de type mémoire infini et des conditions aux limites de dirichlet
nous étudions la stabilisation exponentielle du système. On utilisant une méthode de spectral pour résoudre les l'équation au dérivée partielle (la méthode de Galerkin où la méthode de tau ([15])) , On va essayé détailler les calcule de l'article : Stability resules of distributed problem involving Bresse system with history and/or cattaneo law under fully Dirichlet or mixed boundary conditions de Farah ABDALLAH, Mouhammad GHADER, and Ali WEHBE.

mots clés :système de Bresse, condition de Dirichlet, stabilité exponentielle.

Abstract

In this work, we are interested in studying the stability of a Bresse system with in fi ne memory control and dirichlet boundary conditions, or we study the exponential stability of the system. using a spectrum method to solve the partial derivative equation (Galerkin's method), we will try to compute the calculations of the article : Stability resules of distributed problem involving Bresse system with history and/or cattaneo law under fully Dirichlet or mixed boundary conditions of Farah ABDALLAH, Mouhammad GHADER, and Ali WEHBE.

key words : system of Bresse, condition of Dirichlet, exponential stability .

Introduction

Le système de Bresse est appliqué dans un diverses disciplines scientifiques et techniques pour la réduction du bruit, la vibration des structures comme les ondes sismiques et les tremblements de terre, la régulation de systèmes biologiques comme le système cardiovasculaire humain, la conception de systèmes robotiques, contrôle laser dans les systèmes mécaniques et moléculaires quantiques.

Dans ce travail, nous implémentons la théorie du semi groupe dans la théorie spectrale étudier les approximations et la stabilisation de certaines équations couplées.

En général, les résultats de la stabilisation sont obtenus en utilisant différentes méthodes comme la théorie de décomposition spectrale.

Ce système défini sur $(0, L) \times (0, +\infty)$ sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k_1(\varphi_x + \psi + l\omega) - lk_3(\omega_x - l\varphi) = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - k_2 \psi_{xx} + k_1(\varphi_x + \psi + l\omega) - \int_0^{+\infty} g(s)\psi_{xx}(x, t-s)ds = 0 \\ \rho_1 \omega_{tt} - k_3(\omega_x - l\varphi)_x + lk_1(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0, \end{cases} \tag{0.1}$$

avec les conditions aux limites de Dirichlet :

$$\begin{cases} \varphi(0, .) = \varphi(L, .) = \psi(0, .) = \psi(L, .) = 0 \ dans \ \mathbb{R}_+, \\ \omega(0, .) = \omega(L, .) = 0 \ dans \ \mathbb{R}_+, \end{cases} \tag{0.2}$$

ou les conditions aux limites de Dirichlet-Neumann-Dirichlet-Dirichlet

$$\begin{cases} \varphi(0, .) = \varphi(L, .) = \psi_x(0, .) = \psi_x = (L, .) = 0 \ dans \ \mathbb{R}_+, \\ \omega(0, .) = \omega(L, .) = 0 \ dans \ \mathbb{R}_+, \end{cases} \tag{0.3}$$

ou avec les conditions aux limites de Dirichlet-Neumann-Neumann-Dirichlet

$$\begin{cases} \varphi(0, .) = \varphi(L, .) = \psi_x(0, .) = \psi_x = (L, .) = 0 \ dans \ \mathbb{R}_+, \\ \omega_x(0, .) = \omega_x(L, .) = 0 \ dans \ \mathbb{R}_+, \end{cases} \tag{0.4}$$

et les conditions initiales suivantes

$$\begin{cases} \varphi(.,0) = \varphi_0(.), \quad \psi(.,-t) = \psi_0(.,t), \quad \omega(.,0) = \omega_0(.), \\ \varphi_t(.,0) = \varphi_1(.), \quad \psi_t(.,0) = \psi_1(.), \quad \omega_t(.,0) = \omega_1(.), \quad dans \quad (0,L). \end{cases}$$

Où les fonctions φ, ψ *et* ω désignent respectivement de modèle de verticale , l'angle de rotation d'un filament , et le déplacement longitudinal du filament de la poutre. Les coefficients $\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3,\ k_1,\ k_2,\ k_3,\ l,\ \delta,\ \tau,\ \beta$ sont des constantes positives.

Cet mémoire est organisé comme suit :

chapitre 1 :

est entièrement consacré à l'exposé des définitions et des résultats nécessaire comme espaces de Banach, les espaces L^p, espaces de Hilbert, Les opérateurs m-dissipatifs, et les Semi-groupes des opérateurs linéaires bornés .

Chapitre 2 :

nous donnons la formulation du système (2,1) avec entièrement des conditions de frontière de Dirichlet, et nous prouvons la stabilité forte du système dans le manque de la compacité du résolvent du générateur, et nous étudions l'existence d'une solution de système.

Chapitre 3 :

nous prouvons la stabilisation exponentielle du système avec une condition que les propagations des ondes et des vitesses sont égaux ($\frac{k_1}{\rho_1} = \frac{k_2}{\rho_2} = \frac{k_3}{\rho_3}$ et $k_1 = k_3$), et nous montrons que le système de Bresse considéré avec entièrement des conditions de frontière de Dirichlet est non uniformément stable quand les vitesses de la propagation des vagues sont différentes, plus avec précision, nous considérons le système réduit de Timochenko avec entièrement des conditions de frontière de Dirichlet et montrons qu'un nombre infini de valeurs propres approchent l'axe imaginaire, si les vagues propagent avec différentes vitesses, nous prouvons la stabilité polynomiale du système.

Chapitre 1

Rappels et outils de base

1.1 Espaces de Banach

Définition 1.1. *: Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.*

Proposition 1.1. *:Les espaces vectoriels normés de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$ sont des Banach.*

Proposition 1.2. *: Soit E un espace vectoriel normé et B un Banach alors $\mathcal{L}(E; B)$ est aussi un espace de Banach pour la norme des applications linéaires.*

Lemme 1.1. *:[6]*
tout espace de Banach $(E, \|\|)$ est fermé.

1.1.1 Théorème de l'application ouverte

Théorème 1.1. *[6]*
Soient E et F deux espaces Banach, et $T \in \mathcal{L}(E, F)$ surjective. Alors T est une application ouverte.

Définition 1.2. *Une application $f : U \longrightarrow V$ est un isomorphisme (ou biholomorphe) si elle bijective, holomorphe et son inverse est holomorphe*

Corollaire 1.1. *Soient E et F deux espaces Banach, et $T \in \mathcal{L}(E, F)$ bijective. Alors T^{-1} est continue.*

1.1.2 Théorème du graphe fermé

Théorème 1.2. *: Soient E, F deux espaces vectoriel normé, et T une application linéaire de E vers F. On appelle graphe de T (noté G(T)) le sous-ensemble de $E \times F$ suivant :*

$$G(T) = \{(x, y) \in E \times F | y = T(x)\}.$$

Théorème 1.3. *(Théorème du graphe fermé). Soient E et F deux espaces Banach, soit T une application linéaire de E vers F , T est continue si et seulement si G(T) est un fermé de $E \times F$.*

Définition 1.3. *on dit qu'un opérateur T est fermé si G(T) est fermé dans $E \times F$*

[6]

1.2 Espaces L^p

soit $\mathcal{A}$ un borélien de $\mathbb{R}$ de mesure non nulle. Pour $p \in [1; +\infty[$; on note

$$\mathcal{L}^p(\mathcal{A}, \mathbb{K}) := \{f : \mathcal{A} \to \mathbb{K} |\ f \text{ Lebesgue mesurable et } \int_A |f(x)|^p dx < \infty\}.$$

L'application

$$f \longmapsto \|f\|_{L^p} := \left(\int_A |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

a toutes les propriétés d'une norme sauf celle qui stipule que $\|f\|_{L^p} = 0$ si et seulement si f $= 0$.

Théorème 1.4. ***(Inégalité de Hölder)***[6]
soient $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$ avec $1 \leq p \leq \infty$, et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$ alors $f.g \in L^1$ et

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$$

1.3 Espaces de Hilbert

Définition 1.4. *:Un espace de Hilbert est un espace vectoriel $\mathcal{H}$ muni d'un produit scalaire (u,v) et qui est complet pour la norme $(u, u)^{\frac{1}{2}}$*

Théorème 1.5. . *(**Théorème de représentation de Riesz**). Soit $l \in \mathcal{H}'$ tel que $\mathcal{H}'$ le dual de $\mathcal{H}$, une forme linéaire continue, alors il existe un unique vecteur $u \in \mathcal{H}$ tel que*

$$\forall v \in \mathcal{H}\ l(v) = (u, v)$$

Corollaire 1.2. *: Soit a une forme linéaire continue, alors il existe $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que*

$$\forall (u, v) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H},\ a(u, v) = (\mathcal{A}u, v).$$

Théorème 1.6. *:(**Théorème de Lax Milgram**). soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, soit $a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. Supposons qu'il existe deux constants $c, \alpha > 0$ tel que*

(i) *a continue : $|a(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|$ pour tout $(u, v) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$;*

(ii) *a coercive : $a(u, u) \geq \alpha\|u\|^2$ pour tout $u \in \mathcal{H}$.*

Alors pour toute forme linéaire $l \in \mathcal{H}'$ (espace dual de $\mathcal{H}$), il existe un unique solution $u \in \mathcal{H}$ tel que

$$\forall v \in \mathcal{H},\ a(u, v) = l(v)$$

[6]

Problème de Dirichlet homogène

On appelle problème de Dirichlet homogène, dans le cas d'un problème différentiel du première ordre, en dimension un, sur un intervalle [a, b], un problème dans lequel les conditions aux limites aux extrémités a et b de l'intervalle sont

$$u(a) = 0,\ u(b) = 0.$$

le problème de Dirichlet homogène est vérifie

1) L'espace $H_0^1[a, b]$ est un espace de Hilbert, (voir page 14)

2) La forme bilinéaire a est continue.

3) La forme a est coercive.

En conséquence, les hypothèses du théorème de Lax-Milgram étant vérifiées, le problème de Dirichlet admet une solution unique dans $H_0^1[a, b]$

(preuve : voir [8])

1.4 Méthode spectrale

on présente les méthodes spectrales pour résoudre quelques équations aux dérivées partielles dans des domaines bornées

Exemple d'équation aux dérivées partielles

1) Equation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - v\triangle u = f.$$

1) Equation de poison

$$\triangle u = f.$$

Principe des Méthode spectrale

les méthodes spectrales consistent à traiter la dépendance spéciale. En décomposant les éléments de $\mathcal{H}$ sur une base des fonctions $(\phi_n)_{n\geq 1}$ et cherche

$$u_N = \sum_{n=1}^{N} a_n(t)\phi_n(x)$$

élément de l'espace $\mathcal{H}_\mathcal{N}$ tel que : $\mathcal{H}_\mathcal{N} : vect\{\phi_n : n = 1..N\}$

Méthode de Galerkin

On se place maintenant sous les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{H}\ espace\ de\ Hilbert, \\ a : forme\ bilinaire\ continue\ et\ coercive,\ L \in \mathcal{H}', \end{cases}$$

remarquons que maintenant, a n'est pas nécessairement symétrique, On considère le problème

$$\begin{cases} u \in \mathcal{H}, \\ a(u,v) = L(v), v \in \mathcal{H}, \end{cases}$$

Par le théorème de Lax Milgram, il y a l'existence et l'unicité de $u \in \mathcal{H}$ solution de ce problème . Le principe de la méthode de Galerkin est similaire à celui de la méthode de Ritz, et on cherche à résoudre le problème approché :

$$\begin{cases} u^N \in \mathcal{H}, \\ a(u^N,v) = L(v),\ \forall v \in \mathcal{H}, \end{cases}$$

Par le théorème de Lax-Milgram ([15])

Théorème 1.7. *: (**Théoreme du rang**)Soit E, F deux espaces vectoriels normés sur* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *où* $\mathbb{C}$
et $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(E, F)$*. On suppose que E est de dimension finie, alors*

$$dim(Im(\mathcal{A})) + dim(ker(\mathcal{A})) = dim(E),$$

et $\mathcal{A}$ *est une bijection et* $ker(\mathcal{A}) = \{0\}$ *et donc un isomorphisme*

Corollaire 1.3. *: Soit E un espace vectoriel normé sur* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *où* $\mathbb{C}$ *de dimension finie et* $A \in \mathcal{L}(E)(:= \mathcal{L}(E, E))$*. On a alors l'équivalence entre les trois proposition suivante :*

- $\mathcal{A}$ *est bijectif,*
- $\mathcal{A}$ *est injectif,* $N(\mathcal{A}) = \{0\}$*,*
- $\mathcal{A}$ *est surjectif,*$Im(\mathcal{A}) = E$*.*

Théorème 1.8. *:(**Alternative de Fredholm**) Soit* $\mathcal{H}$ *un espace de Hilbert et* $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ *tel que* $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ *l'ensemble des opérateurs compact de* $\mathcal{H}$ *. On a alors*

a) *ker(Id - K) est de dimension finie,*

b) $Im(Id - K) = ker(Id - K^*)^T$ *est fermé,*

c) *Im(Id - K) est de co-dimension finie et codim(Im(Id - K)) = dim(ker(Id - K). En particulier Id - K est surjectif si et seulement si Id - K est injectif.*
(Ker $(I - T) = \{0\}$ *si et seulement si* $Im(I - T) = H$*)*

Remarque 1.1. *L'Alternative de Fredholm concerne la résolution de l'équation* $u - \mathcal{A}u = f$ *. Elle exprime que on a pour tout* $f \in E$ *l'équation* $u - \mathcal{A}u = f$ *admet une solution unique.*

Définition 1.5. *(**Spectre des opérateurs**) :Soit E un espace vectoriel sur* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *où* $\mathbb{C}$*, et T un endomorphisme de E : On appelle :*
***spectre de T** : l'ensemble* $\sigma(T)$ *des* $\lambda \in \mathbb{K}$ *tels que* $T - \lambda I$ *ne soit pas bijectif de E dans E,*
***spectre ponctuel de T** : l'ensemble* $\sigma_p(T)$ *des valeurs propres de T,*
***ensemble résolvant de T** : le complémentaire* $\rho(T)$ *du spectre* $\sigma(T)$*.*

Théorème 1.9. *: Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$.*

(i) *Si H est de dimension infinie alors $0 \in \sigma(T)$,*

(ii) *si $\lambda \in \sigma(T)\backslash\{0\}$ alors λ est valeur propre de T de multiplicité finie,*

(iii) *si $\sigma(T)$ contient une suite d'éléments deux à deux distincts alors cette suite tend vers 0.*

Remarque 1.2. *On interprété légalité $Im(Id-K) = ker(Id-K^*)^T$ de la façon suivante. Soit $(e_1, ..., e_N)$ une base de $ker(Id-K^*)$ et $f \in \mathcal{H}$. Le problème :*

$$Trouver\ u \in \mathcal{H}\ tel\ que,\ u - Ku = f,$$

a des solutions si et seulement si f vérifie N conditions de compatibilités :

$$\forall i \in 1, ..., N,\ (f, e_i) = 0.$$

C'est l'alternative de Fredholm :

- *ou le second membre vérifie N conditions de compatibilités et dans ce cas l'ensemble des solutions est un espace affine de dimension N de la forme $u_0 + ker(Id-K)$.*
- *ou il n'y a aucune solution.*

1.5 Espace de Sobolev $W^{n,p}(\Omega)$.

Définition 1.6. *L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega)/D^\alpha(u) \in L^p(\Omega), \forall \alpha : |\alpha| \leq m\}$$

$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ et $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$, $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$
$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach

Définition 1.7. *on note $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ tel que*

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}/\varphi \in \mathcal{C}^\infty\}$$

Définition 1.8. *soit Ω un ouvert, soit γ_0 l'application de trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ on a l'égalité :*

$$H_0^1 = \{u \in H^1(\Omega)/\gamma_0(u) = 0\}$$

1.6 Opérateurs m-dissipatifs

1.6.1 Définitions

Définition 1.9. *Un opérateur linéaire non borné dans X est un couple $(\mathcal{A}, \mathcal{D}(\mathcal{A}))$ ou $(\mathcal{A}, \mathcal{D}(\mathcal{A}))$ un sous-espace vectoriel de X et $\mathcal{A}$ une application linéaire de $(\mathcal{A}, \mathcal{D}(\mathcal{A}))$ dans X. Le sous-espace $(\mathcal{A}, \mathcal{D}(\mathcal{A}))$ est le domaine de $\mathcal{A}$.*

Définition 1.10. *Un opérateur $(\mathcal{A}, \mathcal{D}(\mathcal{A}))$, linéaire non borné dans X, est fermé si son graphe*

$$G(\mathcal{A}) = \{(x, \mathcal{A}x) \setminus x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})\}$$

est fermé dans $X \times X$.

Définition 1.11. *Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{D}(\mathcal{A}))$ un opérateur linéaire non borné dans X. Lorsque $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ est dense dans X, on dit que $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ est de domaine dense dans X.*

Définition 1.12. *On noterons par X un espace de Banach sur le corps des nombres complexes $\mathcal{C}$, par $\mathcal{L}(X)$ l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés dans X et par I l'unité de $\mathcal{L}(X)$. Pour un opérateur linéaire $\mathcal{A} : X \to X$ nous noterons par*

$$\rho(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathcal{C} \setminus I - \mathcal{A} \text{ est inversible dans } \mathcal{L}(X)\}$$

l'ensemble résolvant de $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(x)$ et par

$$\mathcal{R}(.; \mathcal{A}) : \rho(\mathcal{A}) \to \mathcal{L}(X)$$
$$\mathcal{R}(\lambda; \mathcal{A}) = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$$

la résolvante de l'opérateur linéaire $\mathcal{A}$.

Théorème 1.10. *[10] Un opérateur $(\mathcal{A}, \mathcal{D}(\mathcal{A}))$, linéaire non borné dans X, est dissipatif si et seulement si*

$$\forall x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),\ (\mathcal{A}x, x) \leq 0$$

Dans le cas d'un espace de Hilbert complexe, la condition précédente remplacée par

$$\forall x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),\ \Re(\mathcal{A}x, x) \leq 0$$

Remarque 1.3. *:En fait que $\mathcal{A} - \lambda I$ est bijectif d'inverse continu car*

$$-Re\langle(\mathcal{A} - \lambda)u, u\rangle \geq \lambda\|u\|^2$$

implique que $\mathcal{A} - \lambda I$ est injectif et de plus par Cauchy-Schwarz

$$\|(\mathcal{A} - \lambda)u\| \geq \lambda\|u\|$$

ce qui implique $\|(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$

Théorème 1.11. *[10] Si $\mathcal{A}$ est m-dissipatif alors $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ est dense dans X.*

Définition 1.13. *Un opérateur $(\mathcal{A}, \mathcal{D}(\mathcal{A}))$, linéaire non borné dans X, est m-dissipatif si :*

1. *$\mathcal{A}$ est dissipatif,*
2. *$\forall f \in X,\ \forall \lambda > 0,\ \exists x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tel que $\lambda x - \mathcal{A}x = f$.*

Remarque 1.4. *: Un opérateur est maximal dissipatif si en outre il existe $\lambda > 0$ tel que $\mathcal{A} - \lambda I$ soit surjectif*

Théorème 1.12. *[10] Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{D}(\mathcal{A}))$ un opérateur non borné dans X. S'il existe $\lambda_0 > 0$ pour lequel l'opérateur $\lambda_0 I - \mathcal{A}$ est un bijection de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ sur X, et si $(\lambda_0 I - \mathcal{A})^{-1}$ est un opérateur borné sur X, alors $\mathcal{A}$ est fermé. En particulier, si $\mathcal{A}$ est m-dissipatif alors $\mathcal{A}$ est fermé.*

1.7 Semi-groupes

Définition 1.14. *On appelle C_0- semi-groupe (ou semi-groupe fortement continu) d'opérateurs linéaires bornés sur X une famille $\{T(t)\}_{t\leq 0} \subset \mathcal{L}(X)\}$ vérifiant les propriétès suivantes :*

1. *$T(0) = I_{\mathcal{L}(X)}$*
2. *$T(t+s) = T(t)T(s),\ pour\ touts, t \geq 0$*
3. *$\lim_{t\to 0} T(t)x = x,\ \forall x \in X$*
4. *$pour\ \ tout\ \ x \in X, t \to T(t)x$ est continue de $\mathbb{R}_+$*

Exemple :

Soit $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que :

$$T(t) = e^{\mathcal{A}t} = \sum_{n\geq 0} \frac{(\mathcal{A}t)^n}{n!}$$

alors $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0 semi-groupe

Définition 1.15. *: On appelle générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_t \geq 0$, un opérateur $\mathcal{A}$ défini sur l'ensemble :*

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ x \in X : \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} existes \right\}$$

et

$$\mathcal{A}x = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ pour tout } x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$$

.

Définition 1.16. *: On appelle semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t\leq 0}$ vérifiant la propriété suivante :*

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - I\| = 0$$

Corollaire 1.4. *Soit $T(t)_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe des opérateurs linéaires bornés. Alors :*

1. *Il existe $\tau > 0$ et $M \geq 1$ tel que :*

$$\|T(t)\| \leq M, \forall t \in [0, \tau];$$

2. *il existe $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ tel que :*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \ \forall t \geq 0.$$

Théorème 1.13. *[2] Si :*

(a) *: $\mathcal{A}$ est un opérateur linéaire fermé tel que $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$.*

(b) *: $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ existe pour tout $\lambda > \omega$.*

(c) *: $\| (\lambda I - \mathcal{A})^{-m} \| \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)^n}, \lambda > \omega m = 1, 2, ...$ alors $\mathcal{A}$ est un générateur infinitésimal d'un C_0semi-groupe avec*

$$\| T(t) \| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0$$

1.7.1 Semi-groupes des contractions

Définition 1.17. *un semi-groupe $\{T(t)\}_{t\leq 0}$ fortement continue sur X est un semi groupe de contraction si :*

$$\|T(t)\| \leq 1, \quad \forall t \geq 0$$

Proposition 1.3. *T(t) est un C_0semi-groupe compact (i.e T(t) est compact pour tout t> 0), alors T(t) est continu pour la norme uniforme.*

Réciproquement, on a

Proposition 1.4. *Supposons que $\mathcal{A}$ est un générateur infinitésimal d'un C_0semi-groupe T(t).*
Le semi-groupe S(t) est compact si et seulement si il est continu pour la topologie uniforme et la résolvante $R(\lambda, \mathcal{A})$ est compacte pour tout $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$.

Corollaire 1.5. *Si $(\mathcal{A}, \mathcal{D}(\mathcal{A}))$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ fortement continu sur X alors $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ est dense dans X, et $\mathcal{A}$ est fermé. (preuve : Voir [10]).*

Théorème 1.14. *: Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{D}(\mathcal{A}))$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(T(t))_{t\geq 0}$ fortement continu sur X. Pour tout $x_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), x(t) = T(t)x_0$ est l'unique solution du problème*

$$x \in C([0,\infty); \mathcal{D}(\mathcal{A})) \cap C^1([0,\infty); X),$$

$$x_0(t) = \mathcal{A}x(t) \quad \textit{pour tout} \quad t \geq 0, \ x(0) = x_0.$$

(preuve : voir [10]).

1.7.2 Théorème de Hille Yosida

Théorème 1.15. ***(Hille Yosida 1)*** *Un opérateur linéaire non borné $(\mathcal{A}, \mathcal{D}(\mathcal{A}))$ dans X est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe de contractions sur X si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *$\mathcal{A}$ est fermé,*
2. *$\mathcal{D}(\mathcal{A})$ est dense dans X,*

3. *Pour tout* $\lambda > 0$, $(\lambda I - \mathcal{A})$ *est une application bijective de* $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ *sur* X, *et* $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ *est un opérateur borné sur* X *vérifiant :*

$$\|(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

Théorème 1.16. ***(Hille Yosida 2)*** *Un opérateur linéaire non borné* $(\mathcal{A}, \mathcal{D}(\mathcal{A}))$ *dans* X *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur* X *si et seulement si* $\mathcal{A}$ *est m-dissipatif et de domaine dense dans* X.

[2]

Théorème 1.17. ***(Arendt- Batty)*** *Supposons que* $\mathcal{A}$ *est un générateur infinitésimal fortement continue d'un semi-groupe* $(T(t)_{t\geq 0}$ *sur un espace de Banach réflexif* X. *Si*

— $\mathcal{A}$ *n'a aucune valeur propre imaginaire pure*

— $\sigma(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R}$ *est dénombrable.*

Alors T(t) est fortement stable

Remarque 1.5. *si la résolvante* $(I - T)^{-1}$ *de* T *est compact, alors* $\sigma(T) = \sigma_p(T)$, *tel que*

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(\lambda I - T) \neq \{0\}\}$$

de plus, la condition du théorème président diminue dans $\sigma_p(T) \bigcap i\mathbb{R} = \emptyset$.

Théorème 1.18. ***(Huang-Pruss)****Supposons que* $\mathcal{A}$ *est un générateur infinitésimal fortement continue d'un semi-groupe* $(T(t)_{t\geq 0}$ *sur* $\mathcal{H}$. *T(t) est uniformément stable si et seulement si*

— $i\mathbb{R} \subseteq \rho(\mathcal{A})$.

— $\sup_{\beta\in\mathbb{R}} \| (i\beta I - \mathcal{A})^{-1} \|_{\mathcal{L}(H)} < +\infty$.

Théorème 1.19. ***(Lumer-Phillips)****[2] Soit* $(\mathcal{A}; \mathcal{D}(\mathcal{A}))$ *un opérateur linéaire non borné de domaine dense dans X. Si* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{A}^*$ *sont dissipatifs et si* $\mathcal{A}$ *est fermé* $(\lambda I - \mathcal{A}$ *est surjectif) alors* $\mathcal{A}$ *est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur X.*

Théorème 1.20. *(inégalité de Hölder).([6]) soient* $f \in L^p$ *etg* $\in L^{p'}$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *alors* $f.g \in L^1$ *et*

$$\int fg \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$$

Théorème 1.21. ***(Théorème de Rouché)*** *Soient f et g deux fonctions holomorphes non constantes dans un ouvert connexe U, et soit K un compact à bord régulier inclus dans U. Supposons qu'on a $|f(z)-g(z)| < |f(z)|+|g(z)|$ sur la frontière de K. Alors f et g ont même nombre de zéros dans K (comptés avec leur multiplicité).*

Chapitre 2

Formulation de problème et l'existence du solution

Dans ce chapitre, nous donnons la formulation de problème, et nous étudions l'existence d'une solution du système de Bresse avec un seul amortissement de mémoire infinie agissant dans l'équation sur le déplacement de l'angle de cisaillement dans des conditions aux limites entièrement Dirichlet (notre étude peut être facilement adapté à d'autres conditions de frontière mélangées). Le système est régi par les équations partielles suivantes :

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k_1(\varphi_x + \psi + l\omega) - lk_3(\omega_x - l\varphi) = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - k_2\psi_{xx} + k_1(\varphi_x + \psi + l\omega) + \int_0^{+\infty} g(s)\psi_{xx}(x, t-s)ds = 0 \\ \rho_1\omega_{tt} - k_3(\omega_x - l\varphi)_x + lk_1(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

avec les conditions aux limites suivants :

$$\varphi(0,t) = \varphi(L,t) = \psi(0,t) = \psi(L,t) = \omega(0,t) = \omega(L,t) = 0 \tag{2.2}$$

et les conditions initiales suivantes :

$$\varphi(0,t) = \varphi_0(.), \psi(.,-t) = \psi_0(.,t), \omega(.,0) = \omega_0(.),$$

$$\varphi_t(.,0) = \varphi_1(.), \quad \psi_t(.,0) = \psi_1(.), \quad \omega_t(.,0) = \omega_1(.).$$

Le terme intégral représente un terme d'histoire avec le noyau g satisfais l'hypothèse suivante :

(H)

$$g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$$

est une fonction différentiable décroissante tel que $\lim_{s\to 0} g(s)$ existe et il existe $c > 0$ tel que

$$g'(s) \leq -cg(s).$$

On pose $\widetilde{k_2} > 0$ où $\widetilde{k_2} := k_2 - g_0$ *et* $g_0 = \int_0^{+\infty} g(s)ds$.
En effet, la condition $\lim_{s\longrightarrow 0} g(s)$ est tant vers zéro suffisante et peut remplacer la condition $g'(s) \geq -cg(s)$ pour certains $\widetilde{c} > 0$

2.1 Formulation du problème

Dans cette partie, en utilisant une approche de semi groupe, nous établissons le résultat possédantes pour le système (2.1)-(2.2) sous la condition (H) imposée sur la fonction de relaxation.
Nous présentons la nouvelle variable

$$\eta(x,t,s) := \psi(x,t) - \psi(x,t-s) \; dans \; (0,L) \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$$

donc

$$\eta_{xx}(x,t,s) := \psi_{xx}(x,t) - \psi_{xx}(x,t-s)$$

alors

$$\psi_{xx}(x,t-s) = \psi_{xx}(x,t) - \eta_{xx}(x,t,s)$$

Puis, le système (2.1)-(2.2) devient

$$(2.3) \quad \begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k_1(\varphi_x + \psi + l\omega) - lk_3(\omega_x - l\varphi) = 0, \\ , \rho_2\psi_{tt} - (k_2 - \int_0^{+\infty} g(s)ds)\psi_{xx} + k_1(\varphi_x + \psi + l\omega) - \int_0^{+\infty} g(s)\eta_{xx}ds = 0, \\ \rho_1\omega_{tt} - k_3(\omega_x - l\varphi)_x + lk_1(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0, \\ \psi_{xx}(x,t) - \psi_{xx}(x,t-s) - \eta_{xx}(x,t-s) = 0, \\ \eta_t + \eta_s - \psi_t = 0, \end{cases}$$

avec les conditions aux limites

(2.4)
$$\begin{cases} \varphi(0,.) = \varphi(L,0) = \psi(0,.) = \psi(L,.) = \omega(0,.) = \omega(L,.) = 0 & in \quad \mathbb{R}_+, \\ \eta(0,.,.) = \eta(L,.,.) = 0 & in \quad \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \\ \eta(0,0,0) = 0 & in \quad (0,L) \times \mathbb{R}_+, \end{cases}$$

et les conditions initiales

$$\begin{cases} \varphi(0,.) = \varphi_0(.), \psi(.,-t) = \psi_0(.,t), \omega(.,0) = \omega_0(.), \\ \varphi_t(.,0) = \varphi_1(.), \psi_t(.,0) = \psi_1(.), \omega_t(.,0) = \omega_1(.), \\ \eta^0(.,s) := \eta(.,0,s) = \psi_0(.,0) - \psi(.,s), \qquad in \quad (0,L), s \geq 0. \end{cases}$$

Proposition 2.1. *L'énergie du système (2.3)-(2.4) est définit par*

$$E(t) = \frac{1}{2} \quad \begin{array}{l} \Big\{ \int_0^L (\rho_1 |\varphi|^2 + \rho_2 |\psi_t|^2 + \rho_1 |\omega_t|^2 + k_1 |\varphi_x + \psi^2 + l\omega|^2) dx. \\ + k_3 \int_0^L |\omega_x - l\varphi|^2 dx + \int_0^L \int_0^{+\infty} g(s) |\eta_x|^2 dx ds \Big\} \end{array} \tag{2.5}$$

alors on a

$$E^{'}(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{+\infty} g^{'}(s) |\eta_x|^2 dx ds \leq 0. \tag{2.6}$$

Preuve :

On multiplient l'équation $\rho_1 \varphi_{tt} - k_1(\varphi_x + \psi + l\omega) - lk_3(\omega_x - l\varphi)$ par φ_t et on integre l'équation $(\rho_1 \varphi_{tt} - k_1(\varphi_x + \psi + l\omega) - lk_3(\omega_x - l\varphi)$ par $\varphi_t)\varphi_t$ par rapport x .....(*)
et on multiplient l'équation $\rho_2 \psi_{tt} - (k_2 - \int_0^{+\infty} g(s)ds)\psi_{xx} + k_1(\varphi_x + \psi + l\omega) - \int_0^{+\infty} g(s)\eta_{xx} ds$ par ψ_t et on integre l'équation $(\rho_2 \psi_{tt} - (k_2 - \int_0^{+\infty} g(s)ds)\psi_{xx} + k_1(\varphi_x + \psi + l\omega) - \int_0^{+\infty} g(s)\eta_{xx} ds)\psi_t$ pa rapport x.....(**)
et on multiplient l'équation $\rho_1 \omega_{tt} - k_3(\omega_x - l\varphi)_x + lk_1(\varphi_x + \psi + l\omega)$ par ω_t et on intégrant l'équation $(\rho_1 \omega_{tt} - k_3(\omega_x - l\varphi)_x + lk_1(\varphi_x + \psi + l\omega)$ par rapport x .....(***)
on addition (*) et (**),(***) ona alors

$$\begin{aligned}
&\int_0^L ((\rho_1\varphi_{tt} - k_1(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - lk_3(\omega_x - l\varphi))\varphi_t \\
&+(\rho_1\omega_{tt} - k_3(\omega_x - l\varphi)_x + lk_1(\varphi_x + \psi + l\omega))\omega_t)dx \\
&+(\rho_2\psi_{tt} - \widetilde{k}_2\psi_{xx} + k_1(\varphi_x + \psi + l\omega) - \int_0^{+\infty} g(s)\eta_{xx}ds)\psi_t \\
&= \int_0^L (\rho_1\varphi_{tt}\varphi_t + \rho_2\psi_{tt}\psi_t + \rho_1\omega_{tt}\omega_t)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L \frac{d}{dt}(\rho_1|\varphi|^2 + \rho_2|\psi_t|^2 + \rho_1|\omega_t|^2)dx.....(1)
\end{aligned}$$

$$\int_0^L (-\widetilde{k}_2\psi_{xx}\psi_t)dx = \widetilde{k}_2\int_0^L \psi_x\psi_{tx}dx = \frac{1}{2}\widetilde{k}_2\int_0^L \frac{d}{dt}|\psi_{xx}|^2dx....(2)$$

$$\begin{aligned}
& k_1\int_0^L (-(\varphi_x + \psi + l\omega)_x\varphi_t + (\varphi_x + \psi + l\omega)\psi_t + l(\varphi_x + \psi + l\omega)\omega_t)dx \\
= \; & k_1\int_0^L (-\varphi_{xx}\varphi_t - \varphi_t\psi_x - l\varphi_t\omega_x \\
+ \; & \psi_t\varphi_x + \psi_t\psi + l\psi_t\omega \\
+ \; & l\omega_t\varphi_x + l\omega_t\psi + l^2\omega_t\omega)dx \\
= \; & k_1\int_0^L (\varphi_x\varphi_{tx} + \varphi_{tx}\psi + l\varphi_{tx}\omega \\
+ \; & \psi_t\varphi_x + \psi_t\psi + l\psi_t\omega \\
+ \; & l\omega_t\varphi_x + l\omega_t\psi + l^2\omega_t\omega)dx \\
= \; & \frac{1}{2}k_1\int_0^L \frac{d}{dt}|\varphi_x + \psi^2 + l\omega|^2.....(3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& k_3\int_0^L (-l(\omega_x - l\varphi)\varphi_t - (\omega_x - l\varphi)\omega_t))dx \\
= \; & k_3\int_0^L (-l\varphi_t\omega_x + l^2\varphi_t\varphi + l\omega_t\varphi_x - l\omega_t\omega_{xx})dx \\
= \; & k_3\int_0^L (-l\varphi_t\omega_x + l^2\varphi_t\varphi - l\omega_{tx}\varphi + l\omega_{tx}\omega_x) \\
= \; & \frac{1}{2}k_3\int_0^L \frac{d}{dt}|\omega_x - l\varphi|^2dx.....(4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^L(-\int_0^{+\infty} g(s)\eta_{xx}ds\psi_t)dx &= \int_0^L(-\int_0^{+\infty} g(s)\eta_{xx}(\eta_t+\eta_s)ds)dx \\
&= -\int_0^L\int_0^{+\infty} g(s)\eta_{xx}\eta_t dsdx - \int_0^L\int_0^{+\infty} g(s)\eta_{xx}\eta_s dsdx \\
&= \int_0^L\int_0^{+\infty} g(s)\eta_x\eta_{tx}dsdx + \int_0^L\int_0^{+\infty} g(s)\eta_{xs}\eta_x dsdx \\
(5)..... &= \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^{+\infty}\frac{d}{dt}g(s)|\eta_x|^2dxds - \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^{+\infty} g^{'}(s)|\eta_x|^2dsdx
\end{aligned}$$

A partir des equations (1),(2),(3)(4)et(5), on trouve

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\int_0^L(\rho_1|\varphi|^2+\rho_2|\psi_t|^2+\rho_1|\omega_t|^2+k_1|\varphi_x+\psi^2+l\omega|^2)dx$$

$$+k_3\int_0^L|\omega_x-l\varphi|^2dx+\int_0^L\int_0^{+\infty} g(s)|\eta_x|^2dxds) = \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^{+\infty} g^{'}(s)|\eta_x|^2dsdx$$

alors

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L(\rho_1|\varphi|^2+\rho_2|\psi_t|^2+\rho_1|\omega_t|^2$$

$$+k_1|\varphi_x+\psi^2+l\omega|^2)dx+k_3\int_0^L|\omega_x-l\varphi|^2dx+\int_0^L\int_0^{+\infty} g(s)|\eta_x|^2dxds$$

et

$$E^{'}(t) = \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^{+\infty} g^{'}(s)|\eta_x|^2dxds.$$

Nous définissons l'espace d'énergie $\mathcal{H}$ par

$$\mathcal{H} = (H_0^1(0,L))^3\times(L^2(0,L))^3\times L_g^2(\mathbb{R}_+,H_0^1)$$

où $L_g^2(\mathbb{R}_+,H_0^1)$ dénote l'espace de Hilbert menu du produit scalaire

$$(\eta^1,\eta^2)_g = \int_0^L\int_0^{+\infty} g(s)\eta_x^1(x,s)\eta_x^2(x,s)dsdx.$$

L'espace $\mathcal{H}$ d'énergie est menu de la norme suivante :

$$\begin{aligned}
\| U \|_{\mathcal{H}}^2 &= \| (v^1,v^2,v^3,v^4,v^5,v^6,v^7) \|_{\mathcal{H}}^2 \\
(2.7) \qquad &= \rho_1\| v^4 \|^2+\rho_2\| v^5 \|^2+\rho_1\| v^6 \|^2+k_1\| v_x^1+v^2+lv^3 \|^2+\widetilde{k_2}\| v_x^2 \|^2 \\
&+ k_3\| v_x^3-lv^1 \|^2+\| v^7 \|_g^2
\end{aligned}$$

où $\|.\|$ et $\|.\|_g$ dénotent les normes sur $L^2(0,L)$ et $L_g^2(\mathbb{R}_+,H_0^1)$ respectivement. On définissons l'opérateur linéaire $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{H}$ par

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \big\{&U\in\mathcal{H}\mid v^1,v^3\in H^2(0,L),v^4,v^5,v^6\in H_0^1(0,L),v_s^7\in L_g^2(\mathbb{R}_+,H_0^1), \\
&v^2+\textstyle\int_0^{+\infty} g(s)v^7ds\in H^2(0,L)\cap H_0^1(0,L),v^7(x,0)=0\big\}
\end{aligned}$$

et

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \\ v^4 \\ v^5 \\ v^6 \\ v^7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^4 \\ v^5 \\ v^6 \\ \rho_1^{-1}(k_1(v_x^1 + v^2 + lv^3)_x + lk_3(v_x^3 - lv^1)) \\ \rho_2^{-1}(\widetilde{k}_2 v_{xx}^2 - k_1(v_x^1 + v^2 + lv^3) + \int_0^{+\infty} g(s)v_{xx}^7 ds) \\ \rho_1^{-1}(k_3(v_x^3 - lv^1) - lk_1(v_x^1 + v^2 + lv^3)) \\ v^5 - v_s^7 \end{pmatrix}$$

pour tout $U = (v^1, v^2, v^3, v^4, v^5, v^6, v^7) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Si $U = (\varphi, \psi, \omega, \varphi_t, \psi_t, \omega_t, \eta)^T$ est les conditions (2.4)-(2.5), ona

$$\rho_1\varphi_{tt} - k_1(\varphi_x + \psi + l\omega)_x - lk_3(\omega_x - l\varphi) = 0$$

donc

$$\varphi_{tt} = \rho_1^{-1}(k_1(\varphi_x + \psi + l\omega)_x + lk_3(\omega_x - l\varphi))$$

et

$$\rho_2\psi_{tt} - \widetilde{k}_2\psi_{xx} + k_1(\varphi_x + \psi + l\omega) - \int_0^{+\infty} g(s)\eta_{xx}ds = 0$$

donc

$$\psi_{tt} = \rho_2^{-1}(\widetilde{k}_2\psi_{xx} - k_1(\varphi_x + \psi + l\omega) + \int_0^{+\infty} g(s)\eta_{xx}ds)$$

et

$$\rho_1\omega_{tt} - k_3(\omega_x - l\varphi)_x + lk_1(\varphi_x + \psi + l\omega) = 0$$

donc

$$\omega_{tt} = \rho_1^{-1}(k_3(\omega_x - l\varphi)_x - lk_1(\varphi_x + \psi + l\omega))$$

et

$$\eta_t + \eta_s - \psi_t = 0$$

donc

$$\eta_t = \psi_t - \eta_s.$$

Alors le système de faisceau de Bresse est transformé en équation d'évolution du première ordre sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$:

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}U \\ U(0) = U^0 \end{cases} \tag{2.8}$$

où

$$U^0(x) = (\varphi_0(x), \psi_0(x), \omega_0(x), \varphi_1(x), \psi_1(x), \omega_1(x), \eta^0(x,.))^T$$

Remarque 2.1. . *Grâce l'inégalité de Poincaré* ($\int u \leq c \int \nabla u$)*, il est facile de voir qu'il existe une constante positive* $k_0^{'}$ *tels que*

$$k_1\|\varphi_x + \psi + l\omega\|^2 + \widetilde{k_2}\|\psi_x\|^2 + k_3\|\omega_x - l\varphi\|^2 \leq k_0^{'}(\|\varphi_x\|^2 + \|\psi_x\|^2 + \|\omega_x\|^2)$$

D'autre part, sous l'hypothèse (H) $\widetilde{k_2} > 0$*, il est facile de voir qu'il existe une constante positive* k_0 *tels que*
$k_0(\|\varphi_x\|^2+\|\psi_x\|^2+\|\omega_x\|^2) \leq k_1\|\varphi_x+\psi+l\omega\|^2+\widetilde{k_2}\|\psi_x\|^2+k_3\|\omega_x-l\varphi\|^2+\int_0^L \int_0^{+\infty} g(s)|\eta_x|^2 dxds.$
Nous pouvons montrer par un argument de contradiction l'existence d'une constante positive $\widetilde{k_0}$ *tel que : pour* $(\varphi, \psi, \omega) \in (\mathrm{H}_0^1(]0, L[))^3$

$$\widetilde{k_0}(\|\varphi_x\|^2 + \|\psi_x\|^2 + \|\omega_x\|^2) \leq k_1\|\varphi_x + \psi + l\omega\|^2 + \widetilde{k_2}\|\psi_x\|^2 + k_3\|\omega_x - l\varphi\|^2$$

2.2 L'existence d'une solution de système

Proposition 2.2. *Sous l'hypothèse (H) l'opérateur* $\mathcal{A}$ *est m-dissipatif dans l'espace d'énergie* $\mathcal{H}$

Preuve

Pour tout $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ on a

$$E(t) = \frac{1}{2}\|U\|^2 \text{ et ona } \mathcal{A}U = U_t$$

donc

$$\begin{aligned} < \mathcal{A}U, U > &= < U_t, U > \\ &= E^{'}(t) \end{aligned}$$

d'où

$$\Re(< \mathcal{A}U, U >) = \frac{1}{2}\int_0^L \int_0^{+\infty} g^{'}(s)|\eta_x|^2 dxds \tag{2.9}$$

tel que $\Re$ est la partie réel.

g est décroissante ($g^{'} \leq 0$ alors $E^{'} \leq 0$) nous obtenons que $\mathcal{A}$ est dissipative.

Soit maintenant $F = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6, f^7)^T \in \mathcal{H}$ nous prouvons l'existence de

$$U = (v^1, v^2, v^3, v^4, v^5, v^6, v^7) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$$

solution unique de l'équation

$$-\mathcal{A}U = F$$

D'une manière équivalente, nous avons le système suivant

$$-v^4 = f^1, \tag{2.10}$$

$$-v^5 = f^2, \tag{2.11}$$

$$-v^6 = f^3, \tag{2.12}$$

$$-k_1(v_x^1 + v^2 + lv^3)_x - lk_3(v_x^3 - lv^1) = \rho_1 f^4, \tag{2.13}$$

$$-\widetilde{k}_2 v_{xx}^2 + k_1(v_x^1 + v^2 + lv^3) - \int_0^{+\infty} g(s)v_{xx}^7 ds = \rho_2 f^5, \tag{2.14}$$

$$-k_3(v_x^3 - lv^1) + lk_1(v_x^1 + v^2 + lv^3) = \rho_1 f^6, \tag{2.15}$$

$$v_s^7 - v^5 = f^7, \tag{2.16}$$

à partir (2.16) et (2.11), nous pouvons déterminer

$$v_s^7 + f^2 = f^7$$

donc

$$\int_0^s v_s^7(x,\tau)d\tau = \int_0^s (-f^2(x) + f^7(x,\tau))d\tau$$

alors

$$v^7(x,s) = -sf^2(x) + \int_0^s f^7(x,\tau)d\tau \tag{2.17}$$

Il est clair que $v^7(x,0) = 0$ et $v_s^7 \in \mathrm{L}_g^2(\mathbb{R}_+, \mathrm{H}_0^1)$, Pour montrer que $v^7 \in \mathrm{L}_g^2(\mathbb{R}_+, \mathrm{H}_0^1)$ pour tout $T, \epsilon > 0$.

En utilisant l'hypothèse (H),et on applique l'intégrale par partie, on peut trouver :

$$\begin{aligned}\int_\epsilon^T g(s)\|v_x^7\|^2 ds &\leq -\frac{1}{c}\int_\epsilon^T g^{'}(s)\|v_x^7\|^2 ds \\ &\leq -\frac{1}{c}\int_\epsilon^T g^{'}(s)\int_0^L (v_x^7)^2 dxds \\ &\leq -\frac{1}{c}g(s)\|v_x^7(.,s)\|_\epsilon^T + \frac{2}{c}\int_\epsilon^T g(s)\Re\left\{\int_0^L v_x^7\overline{v_{xs}^7}dx\right\}ds \\ &\leq -\frac{g(T)}{c}\|v_s^7(.,T)\|^2 + \frac{g(\epsilon)}{c}\|v_s^7(.,\epsilon)\|^2 + \frac{2}{c}\int_\epsilon^T g(s)\Re\left\{\int_0^L v_x^7\overline{v_{xs}^7}dx\right\}ds. \quad (2.18)\end{aligned}$$

Car $v_x \in L^p(0,L)$ *donc* $\|v_x^7\|^2 = \int_0^L (v_x^7)^2 dx$

En utilisant l'hypothèse (H) sur g, $v^7(x,0)=0$,

$(T \to +\infty \Rightarrow \lim_{T\longrightarrow 0}\|v_s^7(.,T)\| = 0)$et $(\epsilon \to 0 \Rightarrow \lim_{\epsilon\to 0} g(\epsilon) = 0)$ nous obtenons à partir (2.18)

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} g(s)\|v_x^7\|^2 ds &\leq \frac{2}{c}\int_0^{+\infty} g(s)\Re\left\{\int_0^L v_x^7\overline{v_{xs}^7}dx\right\}ds \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} g(s)\|v_x^7\|^2 ds + \frac{2}{c^2}\int_0^{+\infty} g(s)\|v_{xs}^7\|^2 ds\end{aligned}$$

(d'aprés $xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$)

On trouve

$$\int_0^{+\infty} g(s)\|v_x^7\|^2 ds - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} g(s)\|v_x^7\|^2 ds \leq \frac{2}{c^2}\int_0^{+\infty} g(s)\|v_{xs}^7\|^2 ds$$

donc

$$\int_0^{+\infty} g(s)\|v_x^7\|^2 ds \leq \frac{4}{c^2}\int_0^{+\infty} g(s)\|v_{xs}^7\|^2 ds < +\infty$$

Par conséquent $v^7 \in \mathrm{L}_g^2(\mathbb{R}_+, H_0^1)$. Maintenant, s'insérant (2.17) dans (2.13)-(2.15), nous obtenons

(2.19)

$$\begin{cases} -k_1(v_x^1 + v^2 + lv^3)_x - lk_3(v_x^3 - lv^1) = \rho_1 f^4, \\ -\underline{k}_2 v_{xx}^2 + k_1(v_x^1 + v^2 + lv^3) = \rho_2 f^5 + \int_0^{+\infty} g(s)\left(-sf^2(x) + \int_0^s f^7(x,\tau)d\tau\right)_{xx} ds, \\ -k_3(v_x^3 - lv^1) + lk_1(v_x^1 + v^2 + lv^3) = \rho_1 f^6, \end{cases}$$

La solution du système (2.19) est équivalente à $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tel que :

$$\begin{cases} \int_0^L \left\{-k_1(v_x^1 + v^2 + lv^3)_x - lk_3(v_x^3 - lv^1)\right\}\phi_1 dx = \int_0^L \left\{\rho_1 f^4\right\}\phi_1 dx, \\ \int_0^L \left\{-\widetilde{k}_2 v_{xx}^2 + k_1(v_x^1 + v^2 + lv^3)\right\}\phi_2 dx \\ = \int_0^L \left\{\rho_2 f^5 + \int_0^{+\infty} g(s)\left(-sf^2(x) + \int_0^s f^7(x,\tau)d\tau ds\right)_{xx}\right\}\phi_2 dx, \\ \int_0^L \left\{-k_3(v_x^3 - lv^1) + lk_1(v_x^1 + v^2 + lv^3)\right\}\phi_3 dx = \int_0^L \left\{\rho_1 f^6\right\}\phi_3 dx, \end{cases}$$

En conséquence, le problème (2.19) est équivalent au problème

$$a(U,\phi) = L(\phi),\ \textit{tel que}\ \phi = (\phi_1,\phi_2,\phi_3)$$

où la forme bilinéaire $a : \mathcal{H}^2 \to R$ et la forme linéaire $L : \mathcal{H} \to R$ sont définés par

$$\begin{aligned} a(U,\phi) &= \int_0^L \left\{-k_1(v_x^1 + v^2 + lv^3)_x - lk_3(v_x^3 - lv^1)\right\}\phi_1 dx \\ &\quad + \int_0^L \left\{-\widetilde{k_2}v_{xx}^2 + k_1(v_x^1 + v^2 + lv^3)\right\}\phi_2 dx \\ &\quad + \int_0^L \left\{-k_3(v_x^3 - lv^1) + lk_1(v_x^1 + v^2 + lv^3)\right\}\phi_3 dx \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} L(\phi_1,\phi_2,\phi_3) &= \int_0^L \left\{\rho_1 f^4\right\}\phi_1 dx \\ &\quad + \int_0^L \left\{\rho_2 f^5 + \int_0^{+\infty} g(s)(-sf^2(x) + \int_0^s f^7(x,\tau)d\tau_{xx}^7)ds\right\}\phi_2 dx \\ &\quad + \int_0^L \left\{\rho_1 f^6\right\}\phi_3 dx \end{aligned}$$

on a a et L sont continue car $a, L \in \mathcal{H}$ donc ces dérivables sont continues $(a(u,\phi)) \leq C\|u\|\|\phi\|$ tel que C est le maximum de α) , et a est coercive car ou bien le minimum m de α sur [0, L] est strictement positif donc $a(u,u) \geq m\|u\|^2$ donc $\mathcal{A}$ est coercive ([15]). Ainsi s'appliquant le théorème de Lax Milgram nous déduisons que (2.19) admet une solution unique dans $(H_0^1(0,L))^3$. En utilisant (2.17), nous concluons que $-\mathcal{A}U = F$ admet un solution unique $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ *et* $0 \in \rho(\mathcal{A})$. Puisque $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ est dense dans $\mathcal{H}$; alors par l'identité résolvent, Par conséquent, l'opérateur $\lambda I - A$ est surjective.

pour $\lambda > 0$ nous avons $R(\lambda I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$ donc $\mathcal{A}$ et dissipative.

Grâce au théorème de Lumer-Phillips, nous déduisons que $\mathcal{A}$ génère un C_0-semi-groupe de contraction $e^{t\mathcal{A}}$ dans $\mathcal{H}$ et donc le problème (2.3)- (2.4) est bien posé.

Ensuite, nous avons le résultat suivant

Théorème 2.1. *(Hille-Yosida-Phillips). Soit $\mathcal{H}$ un Banach et $\mathcal{A}$ un opérateur m-dissipatif dans $\mathcal{A}$, de domaine dense. Alors il existe un unique semi-groupe de contractions T(t) tel que : pour tout $U^0 \in \mathcal{H}$, le problème (2.8) admet une solution faible unique*

$$U \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{H})$$

de plus, si $U_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ *alors*

$$U \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{D}(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}).$$

Chapitre 3

Stabilité du système

Dans ce chapitre, nous étudions la stabilité du système de Bresse avec un seul amortisseur de mémoire infinie

3.1 Stabilité forte du système

Dans la présente partie, nous employons des critères généraux d'Arendt-Batty pour montrer la stabilité forte du C_0-semi groupe $e^{t\mathcal{A}}$ associé au système de Bresse (2.3)-(2.4) en l'absence de la compacité du résolvent de $\mathcal{A}$.

Théorème 3.1. *.Supposons que(H) est vrai, le C_0-semi groupe $e^{t\mathcal{A}}$ est fortement stable dans $\mathcal{H}$ c-à-d, pour tout $U^0 \in \mathcal{H}$, la solution de (2.8) satisfait*

$$\lim_{t\to+\infty} \|e^{t\mathcal{A}}U^0\|_{\mathcal{H}} = 0.$$

Pour la preuve du théorème 3.1 nous avons besoin des deux lemmes suivants.

Lemme 3.1. *Sous l'hypothèse (H) nous avons*

$$\ker(i\lambda - \mathcal{A}) = 0 \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Preuve

A partir de proposition 2.2 nous déduisons que $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

Nous devons toujours montrer le résultat pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Supposons l'existence d'un nombre réel $\lambda \neq 0$ (pour $\lambda = 0 \Rightarrow -\mathcal{A}$ n'est pas inversible) et $U = (v^1, v^2, v^3, v^4, v^5, v^6, v^7)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tel que

$$\mathcal{A}U = i\lambda U. \tag{3.1}$$

Puis, nous avons

$$\Re(< \mathcal{A}U, U >_{\mathcal{H}}) = \frac{1}{2}\int_0^L \int_0^{+\infty} g^{'}(s)|v_x^7|^2 ds dx = 0$$

á cause de l'hypothèse (H), il suit

$$\int_0^L \int_0^{+\infty} g(s)|v_x^7|^2 ds dx = 0.$$

Ceci implique que

$$v^7 = 0.$$

Maintenant l'équation (3.1) est équivalente à

$$v^4 = i\lambda v^1, \tag{3.2}$$

$$v^5 = i\lambda v^2, \tag{3.3}$$

$$v^6 = i\lambda v^3, \tag{3.4}$$

$$k_1(v_x^1 + v^2 + lv^3)_x + lk_3(v_x^3 - lv^1) = i\rho_1\lambda v^4, \tag{3.5}$$

$$\widetilde{k_2} v_{xx}^2 - k_1(v_x^1 + v^2 + lv^3) = i\rho_2\lambda v^5, \tag{3.6}$$

$$k_3(v_x^3 - lv^1) - lk_1(v_x^1 + v^2 + lv^3) = i\rho_1\lambda v^6, \tag{3.7}$$

$$v^5 = 0. \tag{3.8}$$

En utilisant les équations (3.8), (3.3), (3.6) et de raison que $v^2, v^5 \in H_0^1(0, L)$, nous obtenons

$$v^2 = v^5 = 0 \quad et \quad v_x^1 + lv^3 = 0. \tag{3.9}$$

S'insérant (3.2), (3.4) et (3.9) dans les équations (3.5) et (3.7), nous obtenons

$$\begin{aligned} lk_3(v_x^3 - lv^1) &= -\lambda^2\rho_1 v^1, \\ k_3(v_x^3 - lv^1)_x &= -\lambda^2\rho_1 v^3, \\ -v_{xx}^1 &= lv_x^3. \end{aligned}$$

Alors on obtient

$$\begin{aligned} -k_3 v^1_{xx} + (\lambda^2\rho_1 - l^2 k_3)v^1 &= 0, \\ k_3 v^3_{xx} + (\rho_1\lambda^2 + k_3 l^2)v^3 &= 0, \\ v^1(0) = v^1(L) = v^3(0) = v^3(L). & \end{aligned}$$

Nous déduisons que $v^1 = v^3 = 0$ et donc $U = 0$.

Lemme 3.2. *Sous l'hypothèse (H), $i\lambda - \mathcal{A}$ est surjective pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, ie*

$$\mathcal{R}(i\lambda I - \mathcal{A}) = \mathcal{H} \text{ o } \mathcal{R} \text{ la partie rel}$$

Preuve :

Depuis $0 \in \rho(\mathcal{A})$ Nous devons toujours montrer le résultat pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$ Pour tout

$$F = (f^1, f^2, f^3, f^4, f^4, f^5, f^6, f^7)^T \in \mathcal{H},\ \lambda \in \mathbb{R}^*$$

, nous prouvons l'existence de

$$U = (v^1, v^2, v^3, v^4, v^5, v^6, v^7)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$$

solution de l'équation suivante

$$(i\lambda - \mathcal{A})U = F.$$

D'autre manière, nous avons le système suivant

$$i\lambda v^1 - v^4 = f^1, \tag{3.10}$$

$$i\lambda v^2 - v^5 = f^2, \tag{3.11}$$

$$i\lambda v^3 - v^6 = f^3, \tag{3.12}$$

$$i\lambda v^4 - k_1(v^1_x + v^2 + lv^3)_x - lk_3(v^3_x - lv^1) = \rho_1 f^4, \tag{3.13}$$

$$i\lambda v^5 - \widetilde{k_2} v^2_{xx} + k_1(v^1_x + v^2 + lv^3) - \int_0^{+\infty} g(s) v^7_{xx} ds = \rho_2 f^5, \tag{3.14}$$

$$i\lambda v^6 - k_3(v^3_x - lv^1) + lk_1(v^1_x + v^2 + lv^3) = \rho_1 f^6, \tag{3.15}$$

$$i\lambda v^7 + v^7_s - v^5 = f^7. \tag{3.16}$$

A partir de (3.16) et (3.11), nous avons

$$i\lambda v^7 + v^7_s = i\lambda v^2 - f^2 + f^7$$

la solution homogène

$$\begin{aligned} i\lambda v^7 + v_s^7 = 0 \implies & \frac{v_s^7}{v^7} = -i\lambda \\ \implies & \ln v^7 = -i\lambda\tau + c_1 \\ \implies & v_h^7 = ce^{-i\lambda\tau} \end{aligned}$$

la solution particulier

$$\begin{aligned} & v^7 = c(\tau)e^{-i\lambda\tau} \\ \implies & (v^7)' = c'(\tau)e^{-i\lambda\tau} - i\lambda c(\tau)e^{-i\lambda\tau} \\ \implies & c'(\tau)e^{-i\lambda\tau} - i\lambda c(\tau)e^{-i\lambda\tau} + i\lambda c(\tau)e^{-i\lambda\tau} = i\lambda v^2 - f^2 + f^7 \\ \implies & c'(\tau)e^{-i\lambda\tau} = i\lambda v^2 - f^2 + f^7 \\ \implies & c'(\tau) = e^{i\lambda\tau}(i\lambda v^2 - f^2 + f^7) \\ \implies & \int_0^s c'(\tau)d\tau = \int_0^s (e^{i\lambda\tau}(i\lambda v^2 - f^2 + f^7))d\tau \\ \implies & c(s) = \int_0^s i\lambda e^{i\lambda\tau}v^2 d\tau - \int_0^s e^{i\lambda\tau}f^2 d\tau + \int_0^s e^{i\lambda\tau}f^7 d\tau \\ \implies & c(s) = e^{i\lambda\tau}v^2|_0^s + \frac{i}{\lambda}e^{i\lambda\tau}f^2|_0^s + \int_0^s e^{i\lambda\tau}f^7 d\tau \\ \implies & c(s) = (e^{i\lambda s} - 1)v^2(x) + \frac{i}{\lambda}(e^{i\lambda s} - 1)f^2 + \int_0^s e^{i\lambda\tau}f^7 d\tau \\ \implies & v^7(x,s) = (1 - e^{-i\lambda s})v^2(x) + \frac{i}{\lambda}(1 - e^{-i\lambda s})f^2 + \int_0^s e^{i\lambda(\tau-s)}f^7(x,\tau)d\tau \end{aligned}$$

donc

$$v^7(x,s) = (1 - e^{-i\lambda s})v^2(x) + \frac{i}{\lambda}(1 - e^{-i\lambda s})f^2 + \int_0^s e^{i\lambda(\tau-s)}f^7(x,\tau)d\tau, \tag{3.17}$$

A partir de (3.10)-(3.12), nous avons

$$v^4 = i\lambda v^1 - f^1, v^5 = i\lambda v^2 - f^2, v^6 = i\lambda v^3 - f^3. \tag{3.18}$$

S'insérant (3.17) et (3.18) dans (3.13)-(3.15), on obtenons

$$\begin{cases} i\lambda(i\lambda v^1 - f^1) - \rho_1^{-1}(k_1(v_x^1 + v^2 + lv^3)_x + lk_3(v_x^3 - lv^1)) = f^4, \\ i\lambda(i\lambda v^2 - f^2) - \rho_2^{-1}(\widetilde{k}_2 v_{xx}^2 - k_1(v_x^1 + v^2 + lv^3) \\ + \int_0^{+\infty} g(s)((1 - e^{-i\lambda s})v_{xx}^2(x) + \frac{i}{\lambda}(1 - e^{-i\lambda s})f_{xx}^2 + \int_0^s e^{i\lambda(\tau-s)}f_{xx}^7(x,\tau)d\tau)ds) = f^5, \\ i\lambda(i\lambda v^3 - f^3) - \rho_1^{-1}(k_3(v_x^3 - lv^1) - lk_1(v_x^1 + v^2 + lv^3)) = f^6, \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} -\lambda^2 v^1 - \rho_1^{-1} k_1 (v_x^1 + v^2 + l v^3)_x - l k_3 \rho_1^{-1} (v_x^3 - l v^1) = h^1, \\ -\lambda^2 v^2 - \rho_2^{-1} \breve{k}_2 v_{xx}^2 + k_1 \rho_2^{-1} (v_x^1 + v^2 + l v^3) = h^2, \\ -\lambda v^3 - \rho_1^{-1} k_3 (v_x^3 - l v^1)_x + l k_1 \rho_1^{-1} (v_x^1 + v^2 + l v^3) = h^3, \end{cases} \tag{3.19}$$

avec

$$\begin{aligned} \breve{k}_2 &= \int_0^{+\infty} (1 - e^{-i\lambda s}) g(s) ds + k_2 - \int_0^{+\infty} g(s) ds \\ &= k_2 - \int_0^{+\infty} e^{-i\lambda s} g(s) ds \end{aligned}$$

et

$$\begin{cases} h^1 = f^4 - i\lambda f^1, \\ h^2 = f^5 - i\lambda f^2 + \frac{i}{\lambda} \rho_2^{-1} \int_0^{+\infty} g(s)(1 - e^{-i\lambda s}) ds f_{xx}^2 \\ + \rho_2^{-1} \int_0^{+\infty} g(s) \int_0^s e^{i\lambda(\tau - s)} f_{xx}^7(x, \tau) d\tau ds, \\ h^3 = f^6 - i\lambda f^3. \end{cases}$$

Définissez l'opérateur

$$\mathcal{L} v = \begin{pmatrix} -\rho_1^{-1} k_1 (v_x^1 + v^2 + l v^3)_x - l k_3 \rho_1^{-1} (v_x^3 - l v^1) \\ -\rho_2^{-1} \breve{k}_2 v_{xx}^2 + k_1 \rho_2^{-1} (v_x^1 + v^2 + l v^3) \\ -\rho_1^{-1} k_3 (v_x^3 - l v^1)_x + l k_1 \rho_1^{-1} (v_x^1 + v^2 + l v^3) \end{pmatrix}, \forall v = (v^1, v^2, v^3)^T \in (H_0^1(0.L))^3$$

En utilisant le théorème de Lax Milgram, ona $\mathcal{L}$ est un isomorphisme de $(H_0^L(0, L))^3$ dans $(H^{-1}(0, L))^3$ ($\mathcal{L}$ est un opérateur linéaire continue bijective donc inversible). Quand $v = (v^1, v^2, v^3)^T$ et $h = (h^1, h^2, h^3)^T$, puis nous transformons le système (3.19) en forme suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{L} v - \lambda^2 v &= h \\ &\textit{donc} \\ v - \lambda^2 \mathcal{L}^{-1} v &= \mathcal{L}^{-1} h. \end{aligned} \tag{3.20}$$

En utilisant la compacité enfonçant de $L^2(0, L)$ *dans* $H^{-1}(0, L)$ et de $H_0^1(0, L)$ *dans* $L^2(0, L)$ nous déduisons que l'opérateur $\mathcal{L}^{-1}$ est compact de $L^2(0, L)$ *dans* $L^2(0, L)$.

En conséquence, par alternative de Fredholm, l'existence de la solution de v de (3.20)

réduit à prouver l'injectivité de l'identification d'opérateur $Id - \lambda^2\mathcal{L}^{-1}$.

En effet, si $\tilde{v} = (\tilde{v^1}, \tilde{v^2}, \tilde{v^3})^T \in Ker(Id - \lambda^2\mathcal{L}^{-1})$ alors nous avons $\lambda^2\tilde{v} - \mathcal{L}\tilde{v} = 0$.

Il suit cela :

$$\begin{cases} -\rho_1\lambda^2\tilde{v}^1 - k_1(\tilde{v}^1_x + \tilde{v}^2 + l\tilde{v}^3)_x - lk_3(\tilde{v}^3_x - l\tilde{v}^1) = 0, \\ -\rho_2\lambda^2\tilde{v}^2 - \breve{k_2}\tilde{v}^2_{xx} + k_1(\tilde{v}^1_x + \tilde{v}^2 + l\tilde{v}^3) = 0, \\ -\rho_1\lambda^2\tilde{v}^3 - k_3(\tilde{v}^3_x - l\tilde{v}^1)_x + lk_1(\tilde{v}^1_x + \tilde{v}^2 + l\tilde{v}^3) = 0. \end{cases} \tag{3.21}$$

Maintenant, il est facile de voir que si $(\tilde{v}^1, \tilde{v}^2, \tilde{v}^3)$ est une solution du système (3.21) alors le vecteur $\tilde{V}$ définie par $\tilde{V} = (\tilde{v}^1, \tilde{v}^2, \tilde{v}^3, i\lambda\tilde{v}^1, i\lambda\tilde{v}^2, i\lambda\tilde{v}^3, (1 - e^{-i\lambda s})\tilde{v}^2)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ et nous avons $i\lambda\tilde{V} - \mathcal{A}\tilde{V} = 0$.

Par conséquent, par Lemme 3.1, nous obtenons $\tilde{V} = 0$ et $Ker(Id - \lambda^2\mathcal{L}^{-1}) = 0$.

Grâce à l'alternative de Fredholm l'équation (3.20) admet une solution unique $v = (v^1, v^2, v^3) \in (H^1_0(0, L))^3$ Ainsi, en utilisent (3.17), (3.18) et des arguments classiques d'une régularité, nous concluons que $(i\lambda - \mathcal{A})U = F$ admet un solution unique $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

Preuve du théorème 3.1.

Après critères généraux d'Arendt Baty ([16]) le C_0-semi groupe $e^{t\mathcal{A}}$ des contractions est fortement stable si $\mathcal{A}$ n'a aucune valeur propre imaginaire pure et $\sigma(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R}$ est dénombrable.

Par Lemme 3.1, l'opérateur $\mathcal{A}$ n'a aucune valeur propre imaginaire pure et par Lemme 3.2, $R(i\lambda - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ (car $i\lambda - \mathcal{A}$ est surjective).

Par conséquent le théorème de graphe fermé de Banach implique que $\sigma(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$.

3.2 Stabilité exponentielle dans le cas $\frac{k_1}{\rho_1} = \frac{k_2}{\rho_2}$ et $k_1 = k_3$

Dans ce partie, sous l'hypothèse (H), nous prouvons la stabilité exponentielle du système de Bresse (2.1)-(2.2) à condition que

$$\frac{k_1}{\rho_1} = \frac{k_2}{\rho_2} \quad et \quad k_1 = k_3 \tag{3.22}$$

Théorème 3.2. *:Supposons que (3.22) est satisfait. Sous l'hypothèse (H) ,le* C_0*-semi-groupe* $e^{t\mathcal{A}}$ *est exponentiellement stable , c.-à-d, ils existent des constantes* $M \geq 1$ *et*

$\epsilon > 0$ *indépendant de* U^0 *tel que*

$$\|e^{t\mathcal{A}}U^0\|_{\mathcal{H}} \leq Me^{-\epsilon t}\|U^0\|_{\mathcal{H}}, \quad t \geq 0.$$

on suppose qu'il existe $(\lambda_n)_n \in \mathbb{R}^*$ tel que : $i\lambda_n$ est une valeur propre et U est un vecteur propre tel que :

$$U_n = (v_n^1, v_n^2, v_n^3, v_n^4, v_n^5, v_n^6, v_n^7) \; avec \; \|U_n\|_{\mathcal{H}} = 1 \tag{3.23}$$

et

$$i\lambda_n U_n - \mathcal{A}U_n = (f_n^1, f_n^2, f_n^3, f_n^4, f_n^5, f_n^6, f_n^7)^T \to 0 \quad dans \quad \mathcal{H}. \tag{3.24}$$

nous détaillons

$$i\lambda_n v_n^1 - v_n^4 = h_n^1, \tag{3.25}$$

$$i\lambda_n v_n^2 - v_n^5 = h_n^2, \tag{3.26}$$

$$i\lambda_n v_n^3 - v_n^6 = h_n^3, \tag{3.27}$$

$$\rho_1\lambda_n^2 v_n^1 + k_1[(v_n^1)_x + v_n^2 + lv_n^3]_x + lk_3[(v_n^3)_x - lv_n^1] = h_n^4, \tag{3.28}$$

$$\rho_2\lambda_n^2 v_n^2 + \widetilde{k_2}(v_n^2)_{xx} - k_1[(v_n^1)_x + v_n^2 + lv_n^3] + \int_0^{+\infty} g(s)(v_n^7)_{xx}ds = h_n^5, \tag{3.29}$$

$$\rho_1\lambda_n^2 v_n^3 + k_3[(v_n^3)_x - lv_n^1]_x - lk_1[(v_n^1)_x + v_n^2 + lv_n^3] = h_n^6, \tag{3.30}$$

$$i\lambda_n v_n^7 + (v_n^7)_s - i\lambda_n v_n^2 = h_n^7, \tag{3.31}$$

où

$$\begin{cases} h_n^1 = f_n^1, h_n^2 = f_n^2, h_n^3 = f_n^3, h_n^7 = f_n^7 - f_n^2, \\ h_n^4 = -\rho_1(f_n^4 + i\lambda_n f_n^1), h_n^5 = -\rho_2(f_n^5 + i\lambda_n f_n^2), h_n^6 = -\rho_1(f_n^6 + i\lambda_n f_n^3). \end{cases}$$

pour démontrer ce théorème il faut introduire les lemmes suivants,

Lemme 3.3. *:Suppose que l'hypothèse (H) est vérifiée, Alors nous avons*

$$\int_0^L \int_0^{+\infty} g(s)|v_x^7|^2 dsdx = o(1) \tag{3.32}$$

Preuve :

Nous multiplions (3.24) par U dans $\mathcal{H}$, d'après (2.9) et que U est uniformément bornée dans $\mathcal{H}$ nous obtenons

$$\frac{1}{2}\int_0^L \int_0^{+\infty} g(s)'|v_x^7|^2 dsdx = \Re(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = -\Re(i\lambda U - \mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = o(1). \tag{3.33}$$

En utilisant la condition (H) dans (3.33), nous obtenons l'équation asymptotique vérifier (3.32).

Lemme 3.4. *Suppose que l'hypothèse (H) est vérifiée. Alors nous avons*

$$\int_0^L |v_x^2|^2 dx = o(1) \quad et \quad \int_0^L |\lambda v^2|^2 dx = o(1). \tag{3.34}$$

preuve.

On multiplions (3.31) par $\overline{v^2}$ dans $L_g^2(\mathbb{R}_+, H_0^1)$, on obtient

$$\int_0^L (i\lambda v^7 + v_s^7 - i\lambda v^2)\overline{v^2} dx = \int_0^L h^7 \overline{v^2} dx$$

en utilisant le raison que $\|v^2\|_g^2 = g_0 \|v_x^2\|^2$:

$$\int_0^L g(s) v_x^7 \overline{v_x^2} ds dx + \frac{1}{i\lambda} \int_0^L g(s) v_{sx}^7 \overline{v_x^2} ds dx - g_0 \int_0^L |v_x^2|^2 dx = \int_0^L h^7 \overline{v^2} dx$$

et on utilise le raison que f^2 converge vers zéro dans $H_0^1(0, L)$ et f^7 converge vers zéro dans $L_g^2(\mathbb{R}_+, H_0^1)$ donc on obtient

$$g_0 \int_0^L |v_x^2|^2 dx = \int_0^L \int_0^{+\infty} g(s) v_x^7 \overline{v_x^2} ds dx + \frac{1}{i\lambda} \int_0^L \int_0^{+\infty} g(s) v_{xs}^7 \overline{v_x^2} ds dx + \frac{o(1)}{\lambda}. \tag{3.35}$$

En utilisant l'intégration par partie, la condition (H) et le raison que $v^7(x, 0) = 0$, nous obtenons

$$\frac{1}{i\lambda} \int_0^L \int_0^{+\infty} g(s) v_{xs}^7 \overline{v_x^2} ds dx = -\frac{1}{i\lambda} \int_0^L \int_0^{+\infty} g'(s) v_x^7 \overline{v_x^2} ds dx,$$

Puis, appliquant l'inégalité d'Hölder dans $L^2(0, L)$ et $L^2(0, +\infty)$ et en utilisant (3.33) et le raison que v_x^2 est uniformément borné dans $L^2(0, L)$ et $\lim_{s\to 0} \sqrt{g(s)}$ existe,il suit

$$\left| \frac{1}{i\lambda} \int_0^L \int_0^{+\infty} g(s) v_{xs}^7 \overline{v_x^2} ds dx \right| \leq \frac{\lim_{s\to 0} \sqrt{g(s)}}{|\lambda|} \left(\int_0^L \int_0^{+\infty} -g'(s) |v_x^7|^2 ds dx \right)^{\frac{1}{2}} \|v_x^2\| = \frac{o(1)}{\lambda}. \tag{3.36}$$

En utilisant le lemme 3.3 et le raison que v_x^2 est uniformément borné sur $L^2(0, L)$, nous obtenons

$$\left| \int_0^L \int_0^{+\infty} g(s) v_x^7 \overline{v_x^2} ds dx \right| = o(1) \tag{3.37}$$

En utilisant l'équation (3.36) et (3.37) dans l'équation (3.35), nous obtenons la première évaluation asymptotique de (3.34).

Maintenant, en multipliant (3.29) par $\overline{v^2}$ en $L^2(0,L)$.

$$\begin{aligned}\rho_2\int_0^L \lambda^2 v^2\overline{v^2}dx + \widetilde{k_2}\int_0^L (v^2)_{xx}\overline{v^2}dx &- k_1\int_0^L [(v^1)_x + v^2 + lv^3]\overline{v^2}dx \\ &+ \int_0^L\int_0^{+\infty} g(s)(v^7)_{xx}\overline{v^2}dsdx = \int_0^L h^5\overline{v^2}dx,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\rho_2\lambda^2\int_0^L |v^2|^2dx &= -\widetilde{k_2}\int_0^L v^2_{xx}\overline{v^2}dx - \int_0^L\int_0^{+\infty} g(s)v^7_{xx}\overline{v^2}dsdx \\ &\quad + \int_0^L (v^1_x + v^2 + lv^3)\overline{v^2}dx + o(1).\end{aligned}$$

Puis, en utilisant le raison que v^2 est uniformément borné dans $L^2(0,L)$, f^2 converge vers zéro dans $H_0^1(0,L)$ et f^5 converge vers zéro dans $L^2(0,L)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\rho_2\lambda^2\int_0^L |v^2|^2dx &= \widetilde{k_2}\int_0^L |v^2_x|^2dx + \int_0^L\int_0^{+\infty} g(s)v^7_x\overline{v^2_x}dsdx \\ &\quad + \int_0^L (v^1_x + v^2 + lv^3)\overline{v^2}dx + o(1) \qquad (3.38)\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 3.3 : $\int_0^L\int_0^{+\infty} g(s)v^7_x\overline{v^2_x}dsdx = o(1)$

la première évaluation de (3.34) : $\int_0^L |v^2_x|^2dx = o(1)$

et le raison que v^1_x est uniformément borné dans $L^2(0,L)$, $\|v^2\| = o(1)$, v^2, v^3 convergent vers zéro dans $L^2(0,L)$ dans l'équation (3.38) nous obtenons

$$\int_0^L |\lambda v^2|^2dx = o(1).$$

Lemme 3.5. *:Supposez que l'hypothèse (H)est vérifie.*
si $\|U\|_{\mathcal{H}} = o(1)$ *sur* $(\alpha,\beta) \subset (0,L)$ *alors* $\|U\|_{\mathcal{H}} = o(1)$ *sur (0,L).*

Preuve.

A partir du lemme lemme 3.4, nous avons $\|v^2_x\| = o(1)$ et $\|\lambda v^2\| = o(1)$.

Par conséquent, nous devons seulement prouver les mêmes résultats que v^1 et v^3.

Soit $\phi \in H_0^L(0,L)$ une fonction donnée, nous procédons la preuve dans deux étapes.

(1) Multiplication de l'équation (3.28) par $2\phi\overline{v_x^1}$ dans $L^2(0,L)$ et les conditions aux limites de Dirichlet d'utilisation pour obtenir :

$$\begin{aligned} & 2\rho_1 \int_0^L \lambda\phi\overline{v_x^1}v^1 dx + 2k_1 \int_0^L \phi\overline{v_{xx}^1}v_x^1 dx \\ + \quad & 2\mathfrak{R}\left\{k_1 \int_0^L \phi\overline{v_x^1}v_x^2 dx + l(k_1+k_3)\int_0^L \phi\overline{v_x^1}v_x^3 dx - l^2k_3\int_0^L \phi\overline{v_x^1}v_x^1 dx\right\} \\ & = -2\rho_1\mathfrak{R}\left\{\int_0^L \phi\overline{v_x^1}f^4 dx - i\int_0^L \phi\lambda\overline{v_x^1}f^1 dx\right\}. \end{aligned}$$

En utilisant l'intégrale par partie on obtient :

$$\begin{aligned} & -\rho_1 \int_0^L \phi'|\lambda v^1|^2 dx - k_1\int_0^L \phi'|v_x^1|^2 dx \\ & +2\mathfrak{R}\left\{k_1 \int_0^L \phi v_x^2\overline{v_x^1}dx + l(k_1+k_3)\int_0^L \phi v_x^3\overline{v_x^1}dx - l^2k_3\int_0^L \phi v^1\overline{v_x^1}dx\right\} \\ & = -2\rho_1\mathfrak{R}\left\{\int_0^L \phi f^4\overline{v_x^1}dx - i\int_0^L (\phi' f^1 + \phi f_x^1)\lambda\overline{v^1}dx\right\} \end{aligned} \tag{3.39}$$

A patir (3.23) et (3.25)-(3.27), nous remarquons que :

$$\|v^1\| = O(\frac{1}{\lambda}), \|v^2\| = O(\frac{1}{\lambda}), \|v^3\| = O(\frac{1}{\lambda}). \tag{3.40}$$

Puis, dans (3.39) en utilisant lemme 3.4 et les raisons que $v_x^1, \lambda v^1$ sont uniformément borné dans $L^2(0,L)$,on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^L \phi\overline{v_x^1}v_x^2 dx &\leq (\int_0^L (\phi\overline{v_x^1})^2 dx)^{\frac{1}{2}}(\int_0^L (v_x^2)^2 dx)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (\int_0^L (\phi\overline{v_x^1})^2 dx)^{\frac{1}{2}}\|v_x^2\|^2 \\ &= o(1) \end{aligned}$$

et l'équation (3.40) pour

$$\begin{aligned} 2\int_0^L \phi\overline{v_x^1}v^1 dx &= -\int_0^L \phi' v^1 dx \\ &\leq (\int_0^L (\phi')^2 dx)^{\frac{1}{2}}(\int_0^L (v^1)^2 dx)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (\int_0^L (\phi')^2 dx)^{\frac{1}{2}}\|v^1\|^2 \\ &= o(1) \end{aligned}$$

on utilise que f^1 converge vers zéro dans $H_0^1(0,L)$, f^4 converge vers zéro sur $L^2(0,L)$ donc on obtient :

(3.41)
$$-\rho_1\int_0^L \phi^{'}|\lambda v^1|^2dx - k_1\int_0^L \phi^{'}|v_x^1|^2dx + 2l(k_1+k_2)\mathfrak{R}\left\{\int_0^L \phi v_x^3\overline{v_x^1}dx\right\} = o(1).$$

De même façon, en multipliant l'équation (3.30) par $2\phi\overline{v_x^3}$ dans $L^2(0,L)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} & 2\rho_1\int_0^L \lambda\phi\overline{v_x^3}v^3dx + 2k_3\int_0^L \phi\overline{v_{xx}^3}v_x^3dx \\ + \;& 2\mathfrak{R}\left\{k_1\int_0^L l\phi\overline{v^3}v_x^2dx + l(k_1+k_3)\int_0^L \phi\overline{v_x^1}v_x^3dx - l^2k_3\int_0^L \phi\overline{v_x^3}v^3dx\right\} \\ & = -2\rho_1\mathfrak{R}\left\{\int_0^L \phi\overline{v_x^3}f^6dx - i\int_0^L \phi\lambda\overline{v_x^3}f^3dx\right\}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} & -\rho_1\int_0^L \phi^{'}|\lambda v^3|^2dx - k_3\int_0^L \phi^{'}|v_x^3|^2dx \\ & +2\mathfrak{R}\left\{k_1l\int_0^L \phi v_x^2\overline{v^3}dx + l(k_1+k_3)\int_0^L \phi v_x^3\overline{v_x^1}dx - l^2k_1\int_0^L \phi v^3\overline{v_x^3}dx\right\} \\ & = -2\rho_1\mathfrak{R}\left\{\int_0^L \phi f^6\overline{v_x^3}dx - i\int_0^L (\phi^{'}f^3 + \phi f_x^3)\lambda\overline{v^3}dx\right\}, \end{aligned}$$

donc

(3.42)
$$-\rho_1\int_0^L \phi^{'}|\lambda v^3|^2dx - k_3\int_0^L \phi^{'}|v_x^3|^2dx - 2l(k_1+k_3)\mathfrak{R}\left\{\int_0^L \phi v_x^1\overline{v_x^3}dx\right\} = o(1).$$

S'addition (3.41) et (3.42), nous obtenons

$$\rho_1\int_0^L \phi^{'}\left(|\lambda v^1|^2 + |\lambda v^3|^2\right)dx + k_1\int_0^L \phi^{'}|v_x^1|^2dx + k_3\int_0^L \phi^{'}|v_x^3|^2dx = o(1). \quad (3.43)$$

(2) soit $\epsilon > 0$ tels que $\alpha + \epsilon < \beta$ et définissent la fonction de coupure ς_1 dans $C^1([0,L])$ par

$$\varsigma_1 = \begin{cases} 0 \le \varsigma_1 \le 1, & \\ 1, & \text{dans } [0,\alpha] \\ 0 & \text{dans } [\alpha+\epsilon, L] \end{cases}$$

En prenant $\phi = x\varsigma_1$ dans (3.43) et on utilise la raison que $\|U\|_{\mathcal{H}} = o(1)$ dans (α,β) , nous obtenons

$$\rho_1\int_0^\alpha |\lambda v^1|^2dx + \rho_1\int_0^\alpha |\lambda v^3|^2dx + k_1\int_0^\alpha |v_x^1|^2dx + k_3\int_0^\alpha |v_x^3|^2dx = o(1). \quad (3.44)$$

En utilisant les lemmes 3.3 et 3.4, dans (3.44), on obtient

$$\|U\|_{\mathcal{H}} = o(1) \ dans \ (0, \alpha).$$

De même, par symétrie, nous pouvons prouver que $\|U\|_{\mathcal{H}} = o(1)$ *dans* (β, L) et donc :

$$\|U\|_{\mathcal{H}} = o(1) \ dans \ (0, L)$$

(définissent la fonction de coupure ς_1 dans $C^1([0, L])$ par $0 \leq \varsigma_1 \leq 1, \varsigma_1 = 0$ dans $[0, \beta - \epsilon]$ et $\varsigma_1 = 1$ dans $[\beta, L]$.)

Dans la suite, soit $0 < \alpha < \beta < L$ et considérez la fonction $\varsigma \in C^1([0, L])$ tels que $0 \leq \varsigma \leq 1, \varsigma = 1$ dans $[\alpha + \epsilon, \beta - \epsilon]$ et $\varsigma = 0$ sur $[0, \alpha] \cup [\beta, L]$.
Notre but est de prouver que $\|U\|_{\mathcal{H}} = o(1)$ dans $[\alpha, \beta]$ et ainsi par Lemme 3.5, nous obtenons $\|U\|_{\mathcal{H}} = o(1)$ sur (0,L) contredire (3.23).

Lemme 3.6. *.Suppose que cette hypothèse* (H) *et (3.22) sont satisfaits, alors nous avons :*

$$\int_0^L \varsigma |v_x^1|^2 dx = o(1), \ et \ \int_0^L \varsigma |\lambda v^1|^2 dx = o(1). \tag{3.45}$$

Preuve.

Nous montrons la première évaluation de (3.45).

Nous procédons dans trois étapes principales.

(1) Notre premier but est de montrer que :

$$\begin{aligned} &\frac{k_1}{k_2} \int_0^L \varsigma |v_x^1|^2 dx + \left(\frac{\rho_2}{k_2} - \frac{\rho_1}{k_1} \right) \Re \left\{ \int_0^L \lambda^2 v_x^2 \varsigma \overline{v^1} dx \right\} \\ &+ \left\{ \frac{\rho_1 \lambda^2}{k_1 k_2} \int_0^L \left(g_0 v_x^2 - \int_0^{+\infty} g(s) v_x^7 ds \right) \varsigma \overline{v^1} dx \right\} = o(1). \end{aligned} \tag{3.46}$$

En multipliant (3.29) par $\varsigma \overline{v_x^1}$ dans $L^2(0, L)$. En utilisant que f^2 converge vers zéro dans $H_0^1(0, L)$, f^5 converge vers zéro dans $L^2(0, L)$, Puis :

$$\begin{aligned} &-k_1 \int_0^L \varsigma v_x^1 (v_x^1 + v^2 + l v^1) dx + \rho_2 \lambda^2 \int_0^L \varsigma v^2 \overline{v_x^1} dx \\ &+ \int_0^L \left(\widetilde{k}_2 v_{xx}^2 + \int_0^{+\infty} g(s) v_{xx}^7 ds \right) \varsigma \overline{v_x^1} dx = o(1), \end{aligned}$$

en utilisant l'intégrale par partie :

$$\begin{aligned}\int_0^L \varsigma v^2\overline{v_x^1}dx &= -\int_0^L \varsigma v_x^2\overline{v^1}dx\\ &et\\ \int_0^L\left(\widetilde{k}_2 v_{xx}^2+\int_0^{+\infty} g(s)v_{xx}^7 ds\right)\varsigma\overline{v_x^1}dx &= \int_0^L\left(\widetilde{k}_2 v_x^2+\int_0^{+\infty} g(s)v_x^7 ds\right)\varsigma\overline{v_{xx}^1}dx\end{aligned}$$

en utilisant le lemme 3.4 et la raison que v_x^1 est uniformément borné dans $L^2(0,L)$,

$$\begin{aligned}\int_0^L \varsigma\overline{v_x^1}v^2dx &\leq (\int_0^L(\varsigma\overline{v_x^1})^2dx)^{\frac{1}{2}}\|v^2\|=o(1)\\ \int_0^L \varsigma\overline{v_x^1}v^3dx &\leq (\int_0^L(\varsigma\overline{v^3})^2dx)^{\frac{1}{2}}\|v_x^1\|=o(1)\end{aligned}$$

donc on obtient

$$\begin{aligned}&k_1\int_0^L\varsigma|v_x^1|^2dx+\rho_2\lambda^2\int_0^L\varsigma v_x^2\overline{v^1}dx\\ &+\int_0^L\left(\widetilde{k}_2 v_x^2+\int_0^{+\infty}g(s)v_x^7ds\right)\varsigma\overline{v_{xx}^1}dx=o(1).\end{aligned}\tag{3.47}$$

En outre, en multipliant (3.28) par $\frac{\varsigma}{k_1}(\widetilde{k}_2\overline{v_x^2}+\int_0^{+\infty}g(s)\overline{v_x^7}ds)$ dans $L^2(0,L)$, Puis, en utilisant le lemme 3.4 :

$$\begin{aligned}\int_0^L\left(\widetilde{k}_2\overline{v_x^2}+\int_0^{+\infty}g(s)\overline{v_x^7}ds\right)\varsigma v^2dx &\leq (\int_0^L(\left(\widetilde{k}_2\overline{v_x^2}+\int_0^{+\infty}g(s)\overline{v_x^7}ds\right)\varsigma)^2dx)^{\frac{1}{2}}\|v^2\|\\ &= o(1)\end{aligned}$$

et la raison que v_x^3 sont uniformément borné dans $L^2(0,L)$

$$\begin{aligned}\int_0^L\left(\widetilde{k}_2\overline{v_x^2}+\int_0^{+\infty}g(s)\overline{v_x^7}ds\right)\varsigma v_x^3dx &\leq (\int_0^L(\left(\widetilde{k}_2\overline{v_x^2}+\int_0^{+\infty}g(s)\overline{v_x^7}ds\right)\varsigma)^2dx)^{\frac{1}{2}}\|v_x^3\|\\ &= o(1)\end{aligned}$$

et la raison que v^1 sont uniformément borné dans $L^2(0,L)$

$$\begin{aligned}\int_0^L\left(\widetilde{k}_2\overline{v_x^2}+\int_0^{+\infty}g(s)\overline{v_x^7}ds\right)\varsigma v^1dx &\leq (\int_0^L(\left(\widetilde{k}_2\overline{v_x^2}+\int_0^{+\infty}g(s)\overline{v_x^7}ds\right)\varsigma)^2dx)^{\frac{1}{2}}\|v^1\|\\ &= o(1)\end{aligned}$$

et que f^1 converge vers zéro dans $H_0^1(0,L)$, f^4 converge vers zéro dans $L^2(0,L)$

$$\frac{\rho_1}{k_1}\int_0^L\left(\int_0^{+\infty}g(s)\overline{v_x^7}ds\right)\varsigma f^4dx=o(1).$$

donc on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\rho_1\lambda^2}{k_1}\int_0^L\left(\widetilde{k}_2\overline{v_x^2}+\int_0^{+\infty}g(s)\overline{v_x^7}ds\right)\varsigma v^1dx &+ \int_0^L\left(\widetilde{k}_2\overline{v_x^2}+\int_0^{+\infty}g(s)\overline{v_x^7}ds\right)\varsigma v_{xx}^1dx\\ &+ \frac{i\rho_1}{k_1}\int_0^L\left(\lambda\int_0^{+\infty}g(s)\overline{v_x^7}ds\right)\varsigma f^1dx\\ &= o(1).\end{aligned}\tag{3.48}$$

En soustrayant (3.47) de (3.48) et en prenant la partie réel de l'équation résultante, on obtient

$$\begin{aligned}&k_1\int_0^L\varsigma|v_x^1|^2dx-\mathfrak{R}\left\{\frac{\rho_1\lambda^2}{k_1}\int_0^L\left(\widetilde{k}_2\overline{v_x^2}+\int_0^{+\infty}g(s)\overline{v_x^7}ds\right)\varsigma v^1dx\right\}\\ &+\mathfrak{R}\left\{\rho_2\lambda^2\int_0^L\varsigma v_x^2\overline{v^1}dx-\frac{i\rho_1}{k_1}\int_0^L\left(\lambda\int_0^{+\infty}g(s)\overline{v_x^7}ds\right)\varsigma f^1dx\right\}=o(1).\end{aligned}\tag{3.49}$$

A partir (3.31), nous avons

$$\lambda v_x^7-iv_{xs}^7-\lambda v_x^2=-ih_x^7,\ dans\ L_g^2(\mathbb{R}_+,L^2).\tag{3.50}$$

En multipliant (3.50) par $\varsigma\overline{f^1}$ dans $L_g^2(\mathbb{R}_+,L^2)$ puis,

$$\begin{aligned}\int_0^L\left(\lambda\int_0^{+\infty}g(s)v_x^7ds\right)\varsigma\overline{f^1}dx &= i\int_0^L\left(\int_0^{+\infty}g(s)v_{sx}^7ds\right)\varsigma\overline{f^1}dx\\ &+\int_0^L\int_0^{+\infty}g(s)\lambda v_x^2\varsigma\overline{f^1}dxds\\ &+i\int_0^L\int_0^{+\infty}g(s)f_x^2\varsigma\overline{f^1}dxdx\\ &-i\int_0^L\left(\int_0^{+\infty}g(s)f_x^7ds\right)\varsigma\overline{f^1}dx.\end{aligned}$$

On utilise l'hypothèse (H), l'intégration par partie, le lemme 3.4 et les raisons que $f^1,\ f^2$ convergent vers zéro dans $H_0^1(0,L),\ f^7$ converge vers zéro dans $L_g^2(\mathbb{R}_+,H_0^1(0,L))$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^L\left(\lambda\int_0^{+\infty}g(s)v_x^7ds\right)\varsigma\overline{f^1}dx &= -i\int_0^L\left(\int_0^{+\infty}g^{'}(s)v_x^7ds\right)\varsigma\overline{f^1}dx\\ &-g_0\int_0^L\lambda v^2(\varsigma^{'}\overline{f^1}+\varsigma\overline{f_x^1})dx+ig_0\int_0^Lf_x^2\varsigma\overline{f^1}dx\\ &-i\int_0^L\left(\int_0^{+\infty}g(s)f_x^7ds\right)\varsigma\overline{f^1}dx=o(1).\end{aligned}\tag{3.51}$$

En conclusion, s'insérant (3.51) dans (3.49) et en utilisant la raison que $\widetilde{k}_2=k_2-g_0$, on obtient (3.46).

(2) Notre prochain but est de prouver :

$$k_1\int_0^L \varsigma|v_x^1|^2dx+\lambda^2k_2\left(\frac{\rho_2}{k_2}-\frac{\rho_1}{k_1}\right)\int_0^L \varsigma v_x^{2\overline{1}}dx=o(1). \tag{3.52}$$

En multipliant (3.50) par $\frac{\rho_1}{k_1}\lambda\varsigma\overline{v^1}$ dans $L_g^2(\mathbb{R}_+,L^2)$

$$\begin{aligned}\frac{\rho_1\lambda^2}{k_1k_2}\int_0^{+\infty} g(s)v_x^7\varsigma\overline{v^1}dsdx &= i\frac{\rho_1}{k_1k_2}\int_0^L\int_0^{+\infty} g(s)v_{xs}^7\varsigma\lambda\overline{v^1}dsdx\\ &+\frac{\rho^1\lambda^2}{k^1k^2}\int_0^L\int_0^{+\infty} g(s)v_x^2\varsigma\overline{v^1}dsdx\\ &-i\frac{\rho_1}{k_1k_2}\int_0^L\int_0^{+\infty} g(s)(f_x^7-f_x^2)\varsigma\lambda\overline{v^1}dsdx\end{aligned}$$

et en utilisant l'intégration par partie, puis, en utilisant l'hypothèse (H), le lemme 3.4, et les raisons que λv^1 est uniformément borné dans $L^2(0,L)$, f^2 converge vers zéro dans $H_0^1(0,L)$, f^7 converge vers zéro dans $L_g^2(\mathbb{R}_+,H_0^1(0,L))$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\rho_1\lambda^2}{k_1k_2}\int_0^{+\infty} g(s)v_x^7\varsigma\overline{v^1}dsdx &= -i\frac{\rho_1}{k_1k_2}\int_0^L\int_0^{+\infty} g'(s)v_x^7\varsigma\lambda\overline{v^1}dsdx\\ &+\frac{\rho^1\lambda^2}{k^1k^2}g_0\int_0^L v_x^2\varsigma\overline{v^1}dx\\ &-i\frac{\rho_1}{k_1k_2}\int_0^L\int_0^{+\infty} g(s)(f_x^7-f_x^2)\varsigma\lambda\overline{v^1}dsdx=o(1)\end{aligned} \tag{3.53}$$

en additionnant (3.46) et (3.53), on déduire (3.52)

(3) en utilisant la condition (3.22) dans (3.52), on obtient

$$\int_0^L \varsigma|v_x^1|^2dx=o(1).$$

D'ailleurs, en multipliant (3.28) par $\varsigma\overline{v^1}$ dans $L^2(0,L)$, en utilisant (3.23), (3.24), (3.40), et la première évaluation de (3.45), nous peuvons facilement prouver que :

$$\int_0^L \varsigma|\lambda v^1|^2dx=o(1).$$

car :

$$\begin{aligned}
\int_0^L v_{xx}^1 \varsigma \overline{v^1} dx &= -\int_0^L (v_x^1)^2 \varsigma dx - \int_0^L v_x^1 \varsigma' \overline{v^1} dx \\
&\leq -\int_0^L (v_x^1)^2 \varsigma dx - (\int_0^L (v_x^1 \varsigma')^2 dx)^{\frac{1}{2}} \|v^1\| = o(1) \\
\int_0^L v_x^3 \varsigma \overline{v^1} &\leq (\int_0^L (v_x^3 \varsigma)^2 dx)^{\frac{1}{2}} \|v^1\| = o(1) \\
\int_0^L v_x^2 \varsigma \overline{v^1} &\leq (\int_0^L (v_x^2 \varsigma)^2 dx)^{\frac{1}{2}} \|v^1\| = o(1)
\end{aligned}$$

Lemme 3.7. *:On suppose que l'hypothèse (H) et (3.22) sont satisfaits, on a*

$$\int_0^L \varsigma |v_x^3|^2 dx = o(1) \text{ et } \int_0^L \varsigma |\lambda v^3|^2 dx = o(1).$$

preuve :

On multipliant (3.28) par $\varsigma \overline{v_x^3}$ dans $L^2(0, L)$ on utilisant l'intégration par partie :

$$\int_0^L v_{xx}^1 \varsigma \overline{v_x^3} dx = -\int_0^L v_x^1 \varsigma \overline{v_{xx}^3} dx.$$

Puis, en utilisant des lemmes 3.4, 3.6 ($\|v_x^2\| = o(1), \|v^1\| = o(1)$)

et les raisons que f^1 converge vers zéro dans $H_0^1(0, L)$, f^4 converge vers zéro dans $L^2(0, L)$, on obtient

$$\rho_1 \int_0^L \lambda^2 v^1 \varsigma \overline{v_x^3} dx + l(k_1 + k_3) \int_0^L \varsigma |v_x^3|^2 dx - k_1 \int_0^L v_x^1 \varsigma \overline{v_{xx}^3} dx = o(1). \quad (3.54)$$

D'ailleurs, en multipliant (3.30) par $\varsigma \overline{v_x^1}$ dans $L^2(0, L)$,

en utilisant l'intégration par partie.

$$\rho_1 \int_0^L \lambda^2 v^3 \varsigma \overline{v_x^1} dx = -\rho_1 \int_0^L \lambda^2 v_x^3 \varsigma \overline{v^1} dx,$$

Puis, en utilisant le lemme 3.4

$$\int_0^L v^2 \varsigma \overline{v_x^1} dx = o(1),$$

et le lemme 3.6

$$\int_0^L \varsigma |v_x^1|^2 dx = o(1),$$

et les raisons que v^3 est uniformément borné dans $L^2(0, L)$,

$$\int_0^L v^3 \varsigma \overline{v_x^1} dx = o(1),$$

et que f^3 converge vers zéro dans $H_0^1(0,L)$, f^6 converge vers zéro dans $L^2(0,L)$, on obtient

$$-\rho_1 \int_0^L \lambda^2 v_x^3 \varsigma \overline{v^1} dx + k_3 \int_0^L \overline{v_x^1} \varsigma v_{xx}^3 dx = o(1). \tag{3.55}$$

On prend la partie réel de la somme de (3.54) et (3.55).

Puis, en utilisant la raison que $k_1 = k_3$ on obtient

$$\int_0^L \varsigma |v_x^3|^2 dx = o(1). \tag{3.56}$$

Après, si en multipliant (3.30) par $\varsigma\overline{v^3}$ dans $L^2(0,L)$, puis de (3.40), (3.56) et le lemme 3.6, on déduit que

$$\rho_1 \int_0^L \varsigma |\lambda v^3|^2 dx = o(1).$$

Preuve du théorème 3.2

nous devons vérifier si les conditions suivantes se tiennent :

$$i\mathbb{R} \subseteq \rho(\mathcal{A}) \qquad (H1),$$

et

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|(i\lambda Id - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = O(1) \qquad (H2).$$

la condition $i\mathbb{R} \subseteq \rho(\mathcal{A})((I-\mathcal{A})^{-1}$ compact $\mathcal{A}$ n'a aucune valeur propre imaginaire) est prouvé dans le lemme 3.1 et le lemme 3.2. Nous Trouverons la condition (H2) par un argument de contradiction Dans ce que suit nous vérifierons la condition (H2) en trouvant une contradiction avec (3.23) comme $\|U_n\|_{\mathcal{H}} = o(1)$ en utilisant lemme 3.3, lemme 3.4, lemme 3.6, et lemme 3.7, on obtient $\|U\|_H = o(1)$ dans $[\alpha + \epsilon, \beta - \epsilon]$.

Par conséquent, par Lemme 3.5, on obtient $\|U\|_H = o(1)$ sur [0,L] qui contredit (3.23).

Par conséquent, les conditions $(H2)$ est vérifiée, donc, on déduit la stabilité exponentielle du système (2.3)-(2.4) propageant avec des vitesses égales.

Remarque 3.1. *Il est facile de voir que notre technique utilisée pour la preuve de la stabilité exponentielle du système de Bresse avec les conditions aux limites de Dirichlet est également des conditions de frontière mélangés de dessous valides.*

3.3 Manque de stabilité exponentielle avec la vitesse différente

dans cette partie, notre but est de prouver que le système élastique de Bresse (2.3)-(2.4) avec les conditions aux limites de Dirichlet n'est pas exponentiellement stable si les vitesses de la propagation des vagues sont différentes.
En particulier, nous considérons le cas quand $l \to 0$, c-à-d, quand (2.3) - (2.4) réduit au système de Timoshenko (3.57)-(3.58) avec $\frac{\rho_1}{k1} \neq \frac{\rho_2}{k_2}$
En fait, quand les vitesses de la propagation sont différentes, si les conditions aux limites mélangés de Dirichlet-Neumann sont considérés dans le système (2.3) au lieu des conditions aux limites de Dirichlet, alors nous pouvons facilement prouver que le système n'est pas exponentiellement stable (la résolvante de $\mathcal{A}$ n'est pas uniformément borné sur l'axe imaginaire).
L'idée est de trouver $(\lambda_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ avec $|\lambda_n| \to +\infty$ et $(U_n)_n \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{A})$ avec $\|U_n\|_{\mathcal{H}} = 1$ tel que $\|(i\lambda_n Id - \mathcal{A})U_n\|_{\mathcal{H}} \to 0$.
Dans le cas des Conditions Dirichlet-Neumann-Neumann aux limites , l'opérateur de système peut être décomposé à une forme de bloc-diagonale selon la fréquence Lorsque les variables sont développées en séries de Fourier.
Toutefois, dans le cas des conditions aux limites de Dirichlet, dans cette section, nous prenons $l = 1$ ainsi (2.3)-(2.4) réduit au système e Timoshenko suivant :

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - k_1(\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - \widetilde{k_2}\psi_{xx} + k_1(\varphi_x + \psi) - \int_0^{+\infty} g(s)\eta_{xx}ds = 0, \\ \eta_t + \eta_s - \psi_t = 0, \end{cases} \tag{3.57}$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{aligned} \varphi(.,0) = \varphi_0(.),\ \psi(.,-t) = \psi_0(.,t) \\ \varphi_t(.,0) = \varphi_1(.),\ \psi_t(.,0) = \psi_1(.), \\ \eta^0(.,s) := \eta(.,0,s) = \psi_0(.,0) - \psi_0(.,s) \qquad dans (0,1),\ s \geq 0, \end{aligned}$$

et les conditions au limite de Dirichlet :

$$\begin{aligned} \varphi(0,.) = \varphi(1,.) = \psi(0,.) = \psi(1,.) = 0 \qquad & dans \mathbb{R}_+, \\ \eta(0,.,.) = \eta(1,.,.) = 0 \qquad & dans \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \\ \eta(.,.,0) = 0 \qquad & dans (0,1) \times \mathbb{R}_+. \end{aligned} \tag{3.58}$$

Dans ce cas, l'espace d'énergie $\mathcal{H}$ réduit par :

$$\mathcal{H} = (H_0^1(0,1))^2 \times (L^2(0,1))^2 \times L_g^2(\mathbb{R}_+, H_0^1)$$

et le générateur $\mathcal{A}$ devient l'opérateur $\mathcal{A}_1$ défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{A}_1) = \quad & \{U = (v^1, v^2, v^3, v^4, v^5) \in \mathcal{H} \mid v^1 \in H^2(0,1), v^3, v^4 \in H_0^1(0,1), \\ & v_s^5 \in L_g^2(\mathbb{R}_+, H_0^1), v^2 + \textstyle\int_0^{+\infty} g(s) v^5 ds \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1), v^5(x,0) = 0 \Big\} \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{A}_1 U = \begin{pmatrix} v^3 \\ v^4 \\ \rho_1^{-1} k_1 (v_x^1 + v^2)_x \\ \rho_2^{-1} (\widetilde{k_2} v_{xx}^2 - k_1 (v_x^1 + v^2) + \int_0^{+\infty} g(s) v_{xx}^5 ds) \\ v^2 - v_s^5, \end{pmatrix}$$

tel que $U = (v^1, v^2, v^3, v^4, v^5)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$.

Dans toute cette partie, en plus de l'hypothèse (H), nous assumons que

$$\mathbf{H}' \qquad \frac{\rho_1}{k_1} \neq \frac{\rho_2}{k_2} \; et \; |g''(s)| \leq c_2 g(s) \; pour \; tout \; c_2 > 0.$$

D'abord on déterminent l'équation caractéristique satisfaite par les valeurs propres de $\mathcal{A}_1$ Pour ce but, soit $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de $\mathcal{A}_1$ et soit :

$$U = (v^1, v^2, v^3, v^4, v^5)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$$

soit un vecteur propre associé tels que $\|U\|_{\mathcal{H}_1} = 1$.

Puis

$$v^3 = \lambda v^1, \tag{3.59}$$

$$v^4 = \lambda v^2, \tag{3.60}$$

$$k_1 (v_x^1 + v^2)_x = \rho_1 \lambda v^3, \tag{3.61}$$

$$\widetilde{k_2} v_{xx}^2 - k_1 (v_x^1 + v^2) + \int_0^{+\infty} g(s) v_{xx}^5 ds = \rho_2 \lambda v^4 \tag{3.62}$$

$$v^4 - v_s^5 = \lambda v^5 \tag{3.63}$$

A partir de (2.90) et (2.87), nous avons

$$v_s^5 + \lambda v^5 = \lambda v^2.$$

On résoudre cette équation différontielle :

la solution homogéne

$v_s^5 + \lambda v^5 = 0 \Rightarrow \frac{v_s^5}{v^5} = -\lambda \Rightarrow v^5 = ce^{-\lambda\tau}$

solution particulier

$$\begin{aligned} v^5 = c(\tau)e^{-\lambda\tau} &\Rightarrow v_\tau^5 = c'(\tau)e^{-\lambda\tau} - \lambda c(\tau)e^{-\lambda\tau} \\ &\Rightarrow c'(\tau)e^{-\lambda\tau} - \lambda c(\tau)e^{-\lambda\tau} + \lambda c(\tau)e^{-\lambda\tau} = \lambda v^2 \\ &\Rightarrow c'(\tau)e^{-\lambda\tau} = \lambda v^2 \\ &\Rightarrow c(s) = v^2(e^{\lambda s} - 1) \\ &\Rightarrow v^5 = v^2(1 - e^{-\lambda s}), \end{aligned}$$

on obtient

$$v^5 = v^2(1 - e^{-\lambda s}). \tag{3.64}$$

S'insérant (3.64), (3.59)-(3.60) dans (3.61)-(3.62), on obtient

$$\frac{k_1}{\rho_1}(v_x^1 + v^2)_x = \lambda^2 v^1, \tag{3.65}$$

$$\frac{\underline{k}_2}{\rho_2}v_{xx}^2 - \frac{k_1}{\rho_2}(v_x^1 + v^2) = \lambda^2 v^2, \tag{3.66}$$

où $\underline{k}_2 = k_2 - \int_0^{+\infty} g(s)e^{-\lambda s}ds$.

D'une manière équivalente, nous avons

$$\begin{cases} v_{xxxx}^2 - \left(\frac{\rho_2}{\underline{k}_2} + \frac{\rho_1}{k_1}\right)\lambda^2 v_{xx}^2 + \frac{\rho_1\rho_2}{k_1\underline{k}_2}\lambda^2\left(\lambda^2 + \frac{k_1}{\rho_2}\right)v^2 = 0, \\ v^2(\zeta) = 0, v_{xxxx}^2(\zeta) - \frac{\rho_2}{\underline{k}_2}\lambda^2 v_x^2(\zeta) = 0, \zeta = 0, 1. \end{cases} \tag{3.67}$$

preuve :

d'après (3.65) on a

$$(v_x^1 + v^2)_x = \frac{\lambda^2\rho_1}{k_1}v^1 .....(*)$$

d'après (3.66) on a

$$v_x^1 = \frac{\underline{k}_2}{k_1}v_{xx}^2 - v^2 - \frac{\lambda^2\rho_2}{k_2}v^2 .....(**)$$

on dérive (3.66) on obtient

$$\frac{\underline{k}_2}{\rho_2}v^2_{xxx} - \frac{k_1}{\rho_2}(v^1_x + v^2)_x - \lambda^2 v^2_x = 0$$

d'après (*) on a

$$\frac{\underline{k}_2}{\rho_2}v^2_{xxx} - \frac{\lambda^2\rho_1}{\rho_2}v^1 - \lambda^2 v^2_x = 0$$

on obtient

$$v^2_{xxxx} - \frac{\lambda^2\rho_1}{\underline{k}_2}v^1_x - \frac{\lambda^2\rho_2}{\underline{k}_2}v^2_{xx} = 0$$

d'après (**) on a

$$v^2_{xxxx} - \frac{\lambda^2\rho_1}{k_1}v^2_{xx} + \frac{\lambda^2\rho_1}{\underline{k}_2}v^2 + \lambda^2\lambda^2\frac{\rho_1\rho_2}{\underline{k}_2 k_1}v^2 - \frac{\lambda^2\rho_2}{\underline{k}_2}v^2_{xx} = 0$$

alors on trouve (3.67), La solution de (3.67) est donnée par

$$v^2(x) = \sum_{j=1}^{4} c_j e^{r_j x},$$

où $c_j \in \mathbb{C}$ pour tout $1 \leq j \leq 4$ et

$$\begin{cases} r_1 = \lambda\sqrt{\frac{\left(\frac{\rho_2}{\underline{k}_2}+\frac{\rho_1}{k_1}\right)+\sqrt{\left(\frac{\rho_2}{\underline{k}_2}-\frac{\rho_1}{k_1}\right)^2-\frac{4\rho_1}{\underline{k}_2\lambda^2}}}{2}}, r_2 = -r_1, \\ \\ r_3 = \lambda\sqrt{\frac{\left(\frac{\rho_2}{\underline{k}_2}+\frac{\rho_1}{k_1}\right)-\sqrt{\left(\frac{\rho_2}{\underline{k}_2}-\frac{\rho_1}{k_1}\right)^2-\frac{4\rho_1}{\underline{k}_2\lambda^2}}}{2}}, r_4 = -r_3, \end{cases}$$

les conditions aux limites dans (3.67) peuvent être exprimés par

$$MC = 0$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{r_1} & e^{-r_1} & e^{r_3} & e^{-r_3} \\ f(r_1) & -f(r_1) & f(r_3) & -f(r_3) \\ f(r_1)e^{r_1} & -f(r_1)e^{-r_1} & f(r_3)e^{r_3} & -f(r_1)e^{-r_3} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

et $f(r) = r^3 - \frac{\rho_2}{\underline{k}_2}$ Pour le brièveté, dénotez par $f(r_1) = f_1$ *et* $f(r_3) = f_3$ Puis

$$\begin{cases} f_1 = \frac{r_1\lambda^2}{2}\left[\left(\frac{\rho_1}{k_1} - \frac{\rho_2}{\underline{k}_2}\right) + \sqrt{\left(\frac{\rho_2}{\underline{k}_2} - \frac{\rho_1}{k_1}\right)^2 - \frac{4\rho_1}{\underline{k}_2\lambda^2}}\right], \\ \\ f_3 = \frac{r_1\lambda^2}{2}\left[\left(\frac{\rho_1}{k_1} - \frac{\rho_2}{\underline{k}_2}\right) - \sqrt{\left(\frac{\rho_2}{\underline{k}_2} - \frac{\rho_1}{k_1}\right)^2 - \frac{4\rho_1}{\underline{k}_2\lambda^2}}\right], \end{cases} \tag{3.68}$$

preuve

$$\begin{aligned} f(r_1) &= r_1^3 - \frac{\rho_2}{\underline{k}_2} r_1 \lambda^2 \\ &= r_1 \left(r^2 - \frac{\rho_2}{\underline{k}_2} \lambda^2 \right) \\ &= \frac{r_1 \lambda^2}{2} \left(\left(\frac{\rho_2}{\underline{k}_2} + \frac{\rho_1}{k_1} \right) + \sqrt{\left(\frac{\rho_2}{\underline{k}_2} - \frac{\rho_1}{k_1} \right)^2 - \frac{4\rho_1}{\underline{k}_2 \lambda^2}} - 2\frac{\rho_2}{\underline{k}_2} \right) \end{aligned}$$

donc

$$f_1 = \frac{r_1 \lambda^2}{2} \left[\left(\frac{\rho_1}{k_1} - \frac{\rho_2}{\underline{k}_2} \right) + \sqrt{\left(\frac{\rho_2}{\underline{k}_2} - \frac{\rho_1}{k_1} \right)^2 - \frac{4\rho_1}{\underline{k}_2 \lambda^2}} \right]$$

f_3 de même principe de démonstration de f_1

$$(3.69) \quad \begin{cases} (f_1 + f_3)^2 = \lambda^6 \frac{\rho_1}{k_1} \left(\frac{\rho_1}{k_1} - \frac{\rho_2}{\underline{k}_2} \right)^2 - \lambda^4 \frac{\rho_1}{\underline{k}_2} \left(\frac{3\rho_1}{k_1} - \frac{\rho_2}{\underline{k}_2} \right) + 2\lambda^4 \frac{\rho_1}{\underline{k}_2} \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{k_1 \underline{k}_2} \left(1 + \frac{k_1}{\rho_2 \lambda^2} \right)}, \\ (f_1 - f_3)^2 = \lambda^6 \frac{\rho_1}{k_1} \left(\frac{\rho_1}{k_1} - \frac{\rho_2}{\underline{k}_2} \right)^2 - \lambda^4 \frac{\rho_1}{\underline{k}_2} \left(\frac{3\rho_1}{k_1} - \frac{\rho_2}{\underline{k}_2} \right) - 2\lambda^4 \frac{\rho_1}{\underline{k}_2} \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2}{k_1 \underline{k}_2} \left(1 + \frac{k_1}{\rho_2 \lambda^2} \right)}. \end{cases}$$

preuve

$$\begin{aligned} f_1^2 &= \frac{\lambda^6}{4} \left(\frac{\rho_2}{\underline{k}_2} + \frac{\rho_1}{k_1} \right) \left(\frac{\rho_1}{k_1} - \frac{\rho_2}{\underline{k}_2} \right)^2 + \frac{\lambda^6}{4} \left(\frac{\rho_1}{k_1} - \frac{\rho_2}{\underline{k}_2} \right)^2 \sqrt{\left(\frac{\rho_2}{\underline{k}_2} - \frac{\rho_1}{k_1} \right)^2 - \frac{4\rho_1}{\underline{k}_2 \lambda^2}} \\ &\quad - \frac{\lambda^4 \rho_1}{2\underline{k}_2} \left(\frac{\rho_2}{\underline{k}_2} + \frac{\rho_1}{k_1} \right) - \frac{\lambda^4 \rho_1}{2\underline{k}_2} \sqrt{\left(\frac{\rho_2}{\underline{k}_2} - \frac{\rho_1}{k_1} \right)^2 - \frac{4\rho_1}{\underline{k}_2 \lambda^2}} + \frac{\lambda^6}{4} \left(\frac{\rho_1}{k_1} - \frac{\rho_2}{\underline{k}_2} \right)^3 \\ &\quad + \frac{\lambda^6}{4} \left(\frac{\rho_1}{k_1} - \frac{\rho_2}{\underline{k}_2} \right) \left(\frac{\rho_2}{\underline{k}_2} + \frac{\rho_1}{k_1} \right) \sqrt{\left(\frac{\rho_2}{\underline{k}_2} - \frac{\rho_1}{k_1} \right)^2 - \frac{4\rho_1}{\underline{k}_2 \lambda^2}} - \frac{\lambda^4 \rho_1}{\underline{k}_2} \left(\frac{\rho_1}{k_1} - \frac{\rho_2}{\underline{k}_2} \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_3^2 &= \frac{\lambda^6}{4} \left(\frac{\rho_2}{\underline{k}_2} + \frac{\rho_1}{k_1} \right) \left(\frac{\rho_1}{k_1} - \frac{\rho_2}{\underline{k}_2} \right)^2 - \frac{\lambda^6}{4} \left(\frac{\rho_1}{k_1} - \frac{\rho_2}{\underline{k}_2} \right)^2 \sqrt{\left(\frac{\rho_2}{\underline{k}_2} - \frac{\rho_1}{k_1} \right)^2 - \frac{4\rho_1}{\underline{k}_2 \lambda^2}} \\ &\quad - \frac{\lambda^4 \rho_1}{2\underline{k}_2} \left(\frac{\rho_2}{\underline{k}_2} + \frac{\rho_1}{k_1} \right) + \frac{\lambda^4 \rho_1}{2\underline{k}_2} \sqrt{\left(\frac{\rho_2}{\underline{k}_2} - \frac{\rho_1}{k_1} \right)^2 - \frac{4\rho_1}{\underline{k}_2 \lambda^2}} + \frac{\lambda^6}{4} \left(\frac{\rho_1}{k_1} - \frac{\rho_2}{\underline{k}_2} \right)^3 \\ &\quad - \frac{\lambda^6}{4} \left(\frac{\rho_1}{k_1} - \frac{\rho_2}{\underline{k}_2} \right) \left(\frac{\rho_2}{\underline{k}_2} + \frac{\rho_1}{k_1} \right) \sqrt{\left(\frac{\rho_2}{\underline{k}_2} - \frac{\rho_1}{k_1} \right)^2 - \frac{4\rho_1}{\underline{k}_2 \lambda^2}} - \frac{\lambda^4 \rho_1}{\underline{k}_2} \left(\frac{\rho_1}{k_1} - \frac{\rho_2}{\underline{k}_2} \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
2f_1f_3 &= \frac{2r_1r_3\lambda^2}{4}\left(\left(\frac{\rho_1}{k_1}-\frac{\rho_2}{\underline{k}_2}\right)^2-\left(\frac{\rho_1}{k_1}-\frac{\rho_2}{\underline{k}_2}\right)^2+\frac{4\rho_1}{\underline{k}_2\lambda^2}\right)\\
&= \frac{2r_1r_3\lambda^2\rho_1}{\underline{k}_2}\\
&= \frac{\lambda^4\rho_1}{\underline{k}_2}\sqrt{(\left(\frac{\rho_1}{k_1}-\frac{\rho_2}{\underline{k}_2}\right)^2-\left(\frac{\rho_1}{k_1}-\frac{\rho_2}{\underline{k}_2}\right)^2+\frac{4\rho_1}{\underline{k}_2\lambda^2}}\\
&= \frac{\lambda^4\rho_1}{\underline{k}_2}\sqrt{\frac{4\rho_2\rho_1}{\underline{k}_2k_1}+\frac{4\rho_1}{\underline{k}_2\lambda^2}}\\
&= 2\lambda^4\sqrt{\frac{\rho_1\rho_2}{k_1\underline{k}_2}\left(1+\frac{k_1}{\rho_2\lambda^2}\right)}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
(f_1+f_2)^2 &= f_1^2+f_3^2+2f_1f_3\\
&= \lambda^6\frac{\rho_1}{k_1}\left(\frac{\rho_1}{k_1}-\frac{\rho_2}{\underline{k}_2}\right)^2-\lambda^4\frac{\rho_1}{\underline{k}_2}\left(\frac{3\rho_1}{k_1}-\frac{\rho_2}{\underline{k}_2}\right)+2\lambda^4\frac{\rho_1}{\underline{k}_2}\sqrt{\frac{\rho_1\rho_2}{k_1\underline{k}_2}\left(1+\frac{k_1}{\rho_2\lambda^2}\right)}
\end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant (2.95) et (2.96), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\det(M) &= -2(f_1-f_3)^2\cosh(r_1+r_2)+2(f_1+f_3)^2\cosh(r_1-r_3)-8f_1f_3\\
&= -4\lambda^6\frac{\rho_1}{k_1}\left(\frac{\rho_1}{k_1}-\frac{\rho_2}{\underline{k}_2}\right)^2\sinh(r_1)\sinh(r_3)+4\lambda^4\frac{\rho_1}{\underline{k}_2}\left(\frac{3\rho_1}{k_1}-\frac{\rho_2}{\underline{k}_2}\right)\sinh(r_1)\sinh(r_1)\\
&\quad -8\lambda^4\frac{\rho_1}{\underline{k}_2}\sqrt{\frac{\rho_1\rho_2}{k_1\underline{k}_2}\left(1+\frac{k_1}{\rho_2\lambda^2}\right)}\cosh(r_1)\cosh(r_3)-8\lambda^4\frac{\rho_1}{\underline{k}_2}\sqrt{\frac{\rho_1\rho_2}{k_1\underline{k}_2}\left(1+\frac{k_1}{\rho_2\lambda^2}\right)}
\end{aligned}$$

preuve

$$\begin{aligned}
\det(M) &= -f_3^2e^{-r_1-r_3}+f_3^2e^{-r_1+r_3}-2f_1f_3+f_1f_3e^{r_3-r_1}+f_1f_3e^{-r_1-r_3}\\
&\quad +f_3^2e^{r_1-r_3}-f_3^2e^{r_1+r_3}-2f_1f_3+f_1f_3e^{r_1+r_3}+f_1f_3e^{r_1-r_3}\\
&\quad +f_1f_3e^{r_1-r_3}-2f_1f_3+f_1f_3e^{-r_1-r_3}-f_1^2e^{-r_1-r_3}+f_1^2e^{r_1-r_3}\\
&\quad +f_1f_3e^{r_1+r_3}-2f_1f_3+f_1f_3e^{-r_1+r_3}+f_1^2e^{-r_1+r_3}-f_1^2e^{r_1+r_3},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\det(M) &= e^{-r_1-r_3}(-f_3^2+2f_1f_3-f_1^2)+e^{-r_1+r_3}(f_3^2+2f_1f_3+f_1^2)\\
&\quad +e^{r_1-r_3}(f_3^2+2f_1f_3+f_1^2)+e^{r_1+r_3}(-f_3^2+2f_1f_3-f_1^2)\\
&\quad -8f_1f_3,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\det(M) &= -e^{-r_1-r_3}(f_1-f_3)^2+e^{-r_1+r_3}(f_1+f_3)^2+e^{r_1-r_3}(f_1+f_3)^2 \\
&\quad -e^{r_1+r_3}(f_1-f_3)^2-8f_1f_3 \\
&= -(e^{-r_1-r_3}+e^{r_1+r_3})(f_1-f_3)^2+(e^{r_1+r_3}+e^{r_1-r_3})(f_1+f_3)^2-8f_1f_3 \\
&= -2(f_1-f_3)^2\cosh(r_1+r_3)+2(f_1+f_3)^2\cosh(r_1-r_3)-8f_1f_3 \\
&= -2(f_1-f_3)^2(\cosh(r_1)\cosh(r_3)+\sinh(r_1)\sinh(r_3)) \\
&\quad +2(f_1+f_3)^2(\cosh(r_1)\cosh(r_3)+\sinh(r_1)\sinh(r_3))-8f_1f_3 \\
&= -2((f_1-f_3)^2-(f_1+f_3)^2)\cosh(r_1)\cosh(r_3) \\
&\quad -2((f_1-f_3)^2+(f_1+f_3)^2)\sinh(r_1)\sinh(r_3)-8f_1f_3 \\
&= -4\lambda^6\frac{\rho_1}{k_1}\left(\frac{\rho_1}{k_1}-\frac{\rho_2}{\underline{k}_2}\right)^2\sinh(r_1)\sinh(r_3)+4\lambda^4\frac{\rho_1}{\underline{k}_2}\left(\frac{3\rho_1}{k_1}-\frac{\rho_2}{\underline{k}_2}\right)\sinh(r_1)\sinh(r_1) \\
&\quad -8\lambda^4\frac{\rho_1}{\underline{k}_2}\sqrt{\frac{\rho_1\rho_2}{k_1\underline{k}_2}\left(1+\frac{k_1}{\rho_2\lambda^2}\right)}\cosh(r_1)\cosh(r_3)-8\lambda^4\frac{\rho_1}{\underline{k}_2}\sqrt{\frac{\rho_1\rho_2}{k_1\underline{k}_2}\left(1+\frac{k_1}{\rho_2\lambda^2}\right)}.
\end{aligned}$$

L'équation (3.67) admet une solution non insignifiante si et seulement si le $\det(M)=0$; c-à-d., si et seulement si les valeurs propres de $\mathcal{A}_1$ sont les racines de la fonction F définie par :

$$\begin{aligned}
F(\lambda) &= \frac{\lambda^6}{k_1}\left(\frac{\rho_1}{k_1}-\frac{\rho_2}{\underline{k}_2}\right)^2\sinh(r_1)\sinh(r_3)-\frac{\lambda^4}{\underline{k}_2}\left(\frac{3\rho_1}{k_1}-\frac{\rho_2}{\underline{k}_2}\right)\sinh(r_1)\sinh(r_3) \\
&\quad +\frac{2\lambda^4}{\underline{k}_2}\sqrt{\frac{\rho_1\rho_2}{k_1\underline{k}_2}\left(1+\frac{k_1}{\rho_2\lambda^2}\right)}\cosh(r_1)\cosh(r_3)+\frac{2\lambda^4}{\underline{k}_2}\sqrt{\frac{\rho_1\rho_2}{k_1\underline{k}_2}\left(1+\frac{k_1}{\rho_2\lambda^2}\right)}, \qquad (3.70)
\end{aligned}$$

Lemme 3.8. *soit $\lambda\in\mathbb{C}$ est une valeur propre de $\mathcal{A}_1$.*
alors $\Re(\lambda)$ est borné.

Preuve :

multiplient (3.65) et (3.66) par $-\rho_1\overline{\varphi}$, et $-\rho_2\overline{\psi}$ respectivement, et intégrant leur somme, nous obtenons

$$\rho_1\int_0^L\lambda^2\varphi\overline{\varphi}dx-k_1\int_0^L\overline{\varphi}(\varphi_x+\psi)_xdx-\underline{k}_2\int_0^L\psi_{xx}\overline{\psi}dx+k_1\int_0^L(\varphi_x+\psi)\psi dx+\rho_2\int_0^L\lambda^2\psi\overline{\psi}dx=0$$

on utilise l'intégration par partie on obtient :

$$\rho_1\int_0^L|\lambda\varphi|^2dx+k_1\int_0^L\overline{\varphi_x}(\varphi_x+\psi)+(\varphi_x+\psi)\psi dx+\underline{k}_2\int_0^L\psi_x\overline{\psi_x}dx+\rho_2\int_0^L|\lambda\psi|^2dx=0$$

tel que $\underline{k_2} = k_2 - \int_0^{+\infty} g(s)ds$ alors on obtient

$$\rho_1\|\lambda\varphi\|^2 + \rho_2\|\lambda\psi\|^2 + k_1\|\varphi_x + \psi\|^2 + k_2\|\psi_x\|^2 - \|\psi_x\|^2 \int_0^{+\infty} g(s)e^{-\lambda s}ds = 0.$$

Depuis $\|U\|_{\mathcal{H}_1} = 1$ puis $\rho_1\|\lambda\varphi\|^2 + \rho_2\|\lambda\psi\|^2 + k_1\|\varphi_x + \psi\|^2 + k_2\|\psi_x\|^2$ et $\|\psi_x\|^2$ sont bornés. Par conséquent

$$\int_0^{+\infty} g(s)e^{-\lambda s}ds < +\infty,$$

alors Par conséquent,

$$\lim_{s\to+\infty} g(s)e^{-\Re(\lambda)s} = 0.$$

Puisque $\mathcal{A}_1$ est dissipatif dans $\mathcal{H}_1$ alors $\Re(\lambda) \leq 0$ et par conséquent il existe un constante $a > 0$ tels que

$$-a \leq \Re(\lambda) < 0$$

Proposition 3.1. *On suppose que cette hypothèse (H) et $(H^{'})$ sont satisfaits, donc, ils existent $n_0, n_0^{'} \in \mathbb{N}$ suffisamment grand tels que*

$$\sigma(\mathcal{A}_1) \supset \widetilde{\sigma}_0 \cup \widetilde{\sigma}_1,$$

où $\widetilde{\sigma}_0 \cup \widetilde{\sigma}_1$ est l'ensemble des valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{A}_1$ tels que

$$\widetilde{\sigma}_1 = \left\{\widetilde{\lambda}_j^{(0)}, \widetilde{\lambda}_j^{(1)}\right\}_{j\in J}, \widetilde{\sigma}_0 = \left\{\lambda_n^{(0)}, \lambda_{n'}^{(1)}\right\}_{n,n'\in\mathbb{Z}_{|n|\geq n_0, |n'|\geq n_0'}}, \widetilde{\sigma}_0 \cap \widetilde{\sigma}_1 = \emptyset,$$

où J est un ensemble fini.
D'ailleurs, $\lambda_n^{(0)}$ et $\lambda_n^{(1)}$ sont simples et satisfont le comportement asymptotique suivant

$$\lambda_n^{(0)} = in\pi\sqrt{\frac{k_2}{\rho_2}} - \frac{g(o)}{2k_2} + o(1), \forall|n| \geq n_0$$

et

$$\lambda_{n'}^{1} = in^{'}\pi\sqrt{\frac{k_1}{\rho_1}} + o(1), \forall|n^{'}| \geq n_0^{'}.$$

Preuve

La preuve est divisée en trois étapes : Étape 1, étape 2 fournissent un développement asymptotique de l'équation caractéristique pour grand λ et l'étape 3 donne un développement au limite des grandes valeurs propres λ.

etape1 Dans cette étape, nous prouvons l'évaluation asymptotique suivante de comportement

$$\frac{1}{\underline{k}_2} = \frac{1}{k_2} + \frac{g(0)}{k_2^2\lambda} + O(\frac{1}{\lambda^2}). \tag{3.71}$$

En effet, intégration par partie

$$\begin{aligned}
\underline{k}_2 &= k_2 - \int_0^{+\infty} g(s)e^{-\lambda s}ds \\
&= k_2 - [-\frac{g(s)}{\lambda}e^{-\lambda s}]_0^{+\infty} + \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} g^{'}(s)e^{-\lambda s}ds \\
&= k_2 - \frac{g(0)}{\lambda} + [\frac{g(s)}{\lambda^2}e^{-\lambda s}]_0^{+\infty} - \frac{1}{\lambda^2}\int_0^{+\infty} g^{''}(s)e^{-\lambda s}ds \\
&= k_2 - \frac{g(0)}{\lambda} - \frac{g^{'}(0)}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}\int_0^{+\infty} g^{''}(s)e^{-\lambda s}ds
\end{aligned}$$

alors

$$\underline{k}_2 = k_2 - \int_0^{+\infty} g(s)e^{-\lambda s}ds = k_2 - \frac{g(0)}{\lambda} - \frac{g^{'}(0)}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}\int_0^{+\infty} g^{''}(s)e^{-\lambda s}ds. \tag{3.72}$$

De l'hypothèse $(H^{'})$ depuis $|g^{''}(s)| \leq c_2 g(s)$, puis

$$|\int_0^{+\infty} g^{''}(s)e^{-\lambda s}ds| \leq c_2\int_0^{+\infty} g(s)e^{\Re(\lambda)s}ds. \tag{3.73}$$

D'autre part, depuis

$$\int_0^1\int_0^{+\infty} g(s)|\eta_x|^2 dsdx < 0,$$

puis, de (3.64) et (3.73), nous obtenons

$$\int_0^{+\infty} g^{''}(s)e^{-\lambda s}ds = O(1). \tag{3.74}$$

On conclu, (3.72) et rendement (3.74) (3.71).

étape 2 Dans cette étape, nous fournissons un développement asymptotique de la fonction $F(\lambda)$ pour grand λ.

On suppose que $\frac{\rho_1}{k_1} \neq \frac{\rho_2}{k_2}$ alors que nous ont

$$\begin{cases}
r_1 = \lambda\sqrt{\frac{\frac{\rho_2}{k_2}+\frac{\rho_1}{k_1}+\left|\frac{\rho_2}{k_2}-\frac{\rho_1}{k_1}\right|}{2}} + \frac{\rho_2 g(0)}{2\sqrt{2}k_2^2}\frac{1+sign(\frac{\rho_2}{k_2}+\frac{\rho_1}{k_1})}{\sqrt{\frac{\rho_2}{k_2}+\frac{\rho_1}{k_1}+\left|\frac{\rho_2}{k_2}-\frac{\rho_1}{k_1}\right|}} + O(\frac{1}{\lambda}), \\
r_3 = \lambda\sqrt{\frac{\frac{\rho_2}{k_2}+\frac{\rho_1}{k_1}-\left|\frac{\rho_2}{k_2}-\frac{\rho_1}{k_1}\right|}{2}} + \frac{\rho_2 g(0)}{2\sqrt{2}k_2^2}\frac{1-sign(\frac{\rho_2}{k_2}+\frac{\rho_1}{k_1})}{\sqrt{\frac{\rho_2}{k_2}+\frac{\rho_1}{k_1}-\left|\frac{\rho_2}{k_2}-\frac{\rho_1}{k_1}\right|}} + O(\frac{1}{\lambda}),
\end{cases} \tag{3.75}$$

où $signe\left(\frac{\rho_2}{k_2}-\frac{\rho_1}{k_1}\right)=\frac{\left|\frac{\rho_2}{k_2}-\frac{\rho_1}{k_1}\right|}{\frac{\rho_2}{k_2}-\frac{\rho_1}{k_1}}$. Si $signe(\frac{\rho_2}{k_2}-\frac{\rho_1}{k_1})=1$ alors (3.75) est équivalent à

$$\begin{cases} r_1=\lambda\sqrt{\frac{\rho_2}{k_2}}+\frac{g(0)}{2k_2}\sqrt{\frac{\rho_2}{k_2}}+O(\frac{1}{\lambda}), \\ r_3=\lambda\sqrt{\frac{\rho_1}{k_1}}+O(\frac{1}{\lambda}), \end{cases} \tag{3.76}$$

si $signe(\frac{\rho_2}{k_2}-\frac{\rho_1}{k_1})=-1$, alors (3.75) est équivalent à

$$\begin{cases} r_1=\lambda\sqrt{\frac{\rho_1}{k_1}}+O(\frac{1}{\lambda}), \\ r_3=\lambda\sqrt{\frac{\rho_2}{k_2}}+\frac{g(0)}{2k_2}\sqrt{\frac{\rho_2}{k_2}}+O(\frac{1}{\lambda}). \end{cases}$$

Dans la suite, nous supposons que (3.76) se tient puisque l'analyse suit pareillement. Maintenant, s'insérant (3.76) dans (3.70)et en utilisant le lemme 3.8, nous obtenons

$$F(\lambda)=\frac{\lambda^6}{k_1}\left(\frac{\rho_1}{k_1}-\frac{\rho_2}{k_2}\right)\sinh(r_1)\sinh(r_3)+O(\lambda^5). \tag{3.77}$$

étape 3 Dans cette étape, nous effectuons un développement limité des grandes valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{A}_1$ soit λ soyez une grande valeur propre de $\mathcal{A}_1$, puis de (3.77), λ est grande racine de l'équation asymptotique suivante

$$h(\lambda)=h_0(\lambda)+O(\frac{1}{\lambda})=0, \tag{3.78}$$

où $h_0(\lambda)=\sinh(r_1)\sinh(r_{3)}$. Maintenant, nous prouvons cela

$$h_0(\lambda)=0 \ \textit{si et seulement si} \ r_1=in\pi \ \textit{et} \ r_3=in^{'}\pi, n, n^{'}\in\mathbb{Z}.$$

En effet, supposez cela

$$r_1=in\pi, \ \textit{et} \ r_3\neq in^{'}\pi, n, n^{'}\in\mathbb{Z}.$$

puis

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ (-1)^n & (-1)^n & e^{r_3} & e^{-r_3} \\ f_1 & -f_1 & f_3 & -f_3 \\ (-1)^n f_1 & -(-1)^n f_1 & e^{r_3}f_3 & -e^{-r_3}f_3. \end{pmatrix}$$

En utilisant l'élimination gaussienne ($L_2-(-1)^nL_1\longrightarrow L_2$ *et* $L_4-(-1)^nL_3\longrightarrow L_4$), M est équivalent à la matrice suivante, dénotée par

$$\widetilde{M}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & e^{r_3}-(-1)^n & e^{-r_3}-(-1)^n \\ f_1 & -f_1 & f_3 & -f_3 \\ 0 & 0 & f_3(e^{r_3}-(-1)^n) & -f_3e^{-r_3}-(-1)^n \end{pmatrix} \tag{3.79}$$

par conséquent,

$$\begin{cases} (e^{r_3} - (-1)^n)c_3 + (e^{-r_3} - (-1)^n)c_4 = 0, \\ (e^{r_3} - (-1)^n)c_3 f_3 + (e^{-r_3} - (-1)^n)c_4 f_4 = 0. \end{cases}$$

De (3.68), nous pouvons vérifier que $f_1 \neq 0$ et $f_3 \neq 0$ pour λ assez grand.
Depuis $r_3 \neq in^{'}\pi$ pour tout $n^{'} \in \mathcal{Z}$, puis

$$c_3 = c_4 = 0.$$

depuis (3.79), nous avons

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 f_1 + c_2 f_1 = 0. \end{cases}$$

Depuis $f_1 \neq 0$, nous obtenons

$$c_1 = c_2 = 0 \; et \; v^2 = 0$$

ce qui est une contradiction avec $\|U\|_{\mathcal{H}_1} = 0$. De même si

$$r_1 \neq in\pi \; et \; r_3 = in^{'}\pi, n, n^{'} \in \mathbb{Z},$$

on obtient $v^2 = 0$. Nous concluons que

$$h_0(\lambda) = 0 \Leftrightarrow r_1 = in\pi \; et \; r_3 = in^{'}\pi, n, n^{'} \in \mathbb{Z}.$$

Alors l'équation asymptotique (3.76), les grandes racines de h_0 satisfont les équations asymptotiques suivantes

$$\mu_n^{(0)} = in\pi\sqrt{\frac{k_2}{\rho_2}} - \frac{g(0)}{2k_2} + O\left(\frac{1}{n}\right), \forall |n| \geq n_0$$

et

$$\mu_{n'}^{(1)} = in^{'}\pi\sqrt{\frac{k_1}{\rho_1}} + O\left(\frac{1}{n}\right), \forall |n^{'}| \geq n_0^{'}.$$

Après, avec l'aide du théorème de Rouché et d'utiliser l'équation asymptotique (3.78), il est facile de voir que les grandes racines de h, λ_n^0 et λ_n^1, sont fermées à ceux de h_0.

Théorème 3.3. *:Sous l'hypothèse (H) et (H'), le système (3.57)-(3.58) n'est pas uniformément stable dans l'espace d'énergie $\mathcal{H}_1$*

Pour la preuve du théorème 3.3, nous visons à prouver qu'un nombre infini de valeurs propres de $\mathcal{A}_1$ d'approche de l'axe imaginaire ce qui empêche le système de Timoshenko (3.57)-(3.58) d'être exponentiellement stable.

Preuve

depuis la proposition 3.1 l'opérateur $\mathcal{A}_1$ a deux branches des valeurs propres, l'énergie correspondance à la première branche λ_n^0 est exponentiellement stable et l'énergie correspondant à la deuxième branche des valeurs propres λ_n^1, n'a aucun stabilisation exponentiel.

Par conséquent toute l'énergie du système de Timoshenko (3.57) -(3.58) n'a aucun stabilisation exponentiel quand $\frac{\rho_1}{k_1} \neq \frac{\rho_2}{k_2}$

3.4 Stabilité polynômial dans le cas général

Dans cette partie, nous montrons que le système (2.3)-(2.4) est polynomial stable si (3.22) n'est pas satisfait.

Nous prouvons les théorèmes suivants.

Théorème 3.4. *: Sous l'hypothèse (H), si*

$$\frac{\rho_1}{k_1} \neq \frac{\rho_2}{k_2} \text{ et } k_1 \neq k_2, \tag{3.80}$$

il existe alors $c > 0$ tels que pour chaque $U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, nous prenons

$$E(t) \leq \frac{c}{\sqrt{t}} \|U^0\|^2_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}, t > 0.$$

Théorème 3.5. *: Sous l'hypothèse (H), si*

$$\frac{\rho_1}{k_1} \neq \frac{\rho_2}{k_2} \text{ et } k_1 = k_2, \tag{3.81}$$

il existe alors $c > 0$ tels que pour chaque $U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, nous prenons

$$E(t) \leq \frac{c}{t} \|U^0\|^2_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}, t > 0.$$

Puisque $i\mathbb{R} \subseteq \rho(\mathcal{A})$, puis pour la preuve du théorème 3.4 et du théorème 3.5, nous doit toujours prouver que

(H3)

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \|(i\lambda Id - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = O(|\lambda|^l)$$

où l=4 si la condition (3.80)est vérifiée et l = 2 si la condition (3.81) est vérifiée.

Par un argument de contradiction, supposez qu'il existe un suite des nombres réel $(\lambda_n)_n$, avec $\lambda_n \to +\infty$ et d'un suite des vecteurs

$$U_n = (v_n^1, v_n^2, v_n^3, v_n^4, v_n^5, v_n^6, v_7)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \; avec \; \|U_n\|_{\mathcal{H}} = 1 \tag{3.82}$$

tel que

$$\lambda_n^1(i\lambda_n U_n - \mathcal{A}U_n) = (f_n^1, f_n^2, f_n^3, f_n^4, f_n^5, f_n^6, f_n^7)^T \to 0 \in \mathcal{H}. \tag{3.83}$$

D'une manière équivalente, nous avons

$$i\lambda_n v_n^1 - v_n^4 = h_n^1, \tag{3.84}$$

$$i\lambda_n v_n^2 - v_n^5 = h_n^2, \tag{3.85}$$

$$i\lambda_n v_n^3 - v_n^6 = h_n^3, \tag{3.86}$$

$$\rho_1\lambda_n^2 v_n^1 + k_1[(v_n^1)_x + v_n^2 + lv_n^3]_x + lk_3[(v_n^3)_x - lv_n^1] = h_n^4, \tag{3.87}$$

$$\rho_2\lambda_n^2 v_n^2 + \widetilde{k_2}(v_n^2)_{xx} - k_1[(v_n^1)_x + v_n^2 + lv_n^3] + \int_0^{+\infty} g(s)(v_n^7)_{xx}ds = h_n^5, \tag{3.88}$$

$$\rho_1\lambda_n^2 v_n^3 + k_3[(v_n^3)_x - lv_n^1]_x - lk_1[(v_n^1)_x + v_n^2 + lv_n^3] = h_n^6, \tag{3.89}$$

$$i\lambda_n v_n^7 + (v_n^7)_s - i\lambda_n v_n^2 = h_n^7, \tag{3.90}$$

où

$$\begin{cases} \lambda_n^l h_n^1 = f_n^1, \lambda_n^l h_n^2 = f_n^2, \lambda_n^l h_n^3 = f_n^3, \lambda_n^l h_n^7 = f_n^7 - f_n^2, \\ \lambda_n^l h_n^4 = -\rho_1(f_n^4 + i\lambda_n f_n^1), \lambda_n^l h_n^5 = -\rho_2(f_n^5 + i\lambda_n f_n^2), \lambda_n^1 h_n^6 = -\rho_1(f_n^6 + i\lambda_n f_n^3), \end{cases}$$

Dans ce suit nous examinerons la condition (H3) en trouvant une contradiction avec (3.82) comme $\|U_n\|_{\mathcal{H}} = o(1)$.

pour assurer la clarté, nous divisons la preuve en plusieurs lemmes.

De(3.84)-(3.86), nous remarquons que

$$\|v^1\| = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \|v^2\| = O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \|v^3\| = O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{3.91}$$

Par conséquent, de (3.87)-(3.89), nous remarquons que

$$\|v_{xx}^1\| = O(\lambda), \left\|v_{xx}^2 + \int_0^{+\infty} g(s)v_{xx}^7 ds\right\| = O(\lambda), \|v_{xx}^3\| = O(\lambda) \tag{3.92}$$

Lemme 3.9. *soit $l \geq 0$. Sous l'hypothèse (H) nous avons*

$$\int_0^L \int_0^{+\infty} g(s)|v_x^7|^2 dsdx = o\left(\frac{1}{\lambda^l}\right).$$

Preuve :

de la produit scalaire de (3.83) avec U dans $\mathcal{H}$, d'aprés (2.9) et la raison que U est uniformément borné dans $\mathcal{H}$ nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^L \int_0^{+\infty} g'(s)|v_x^7|^2 dsdx &= \Re(< \mathcal{A}U, U >_{\mathcal{H}}) \\ &= -\Re(< i\lambda U - \mathcal{A}U, U >_{\mathcal{H}}) \\ &= o\left(\frac{1}{\lambda^l}\right). \end{aligned} \tag{3.93}$$

En utilisant la condition (H) dans (3.93), nous obtenons

$$\int_0^L \int_0^{+\infty} g(s)|v_x^7|^2 dsdx = o\left(\frac{1}{\lambda^l}\right).$$

Lemme 3.10. *:soit $l \geq 0$. Sous l'hypothèse (H) nous avons*

$$\int_0^L |v_x^2|^2 dx = o\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{l}{2}}}\right). \tag{3.94}$$

Preuve :

On multipliant (3.90) par $\overline{v}^2$ dans $L_g^2(\mathbb{R}_+, H_0^1)$. alors, en utilisant la raison que,

$$\|v^2\|_g^2 = g_0\|v_x^2\|^2,$$

v_x^2 est uniformément borné dans $L^2(0,L)$, f^2 converge vers zéro dans $H_0^1(0,L)$ et f^7 converge vers zéro dans $L_g^2(\mathbb{R}_+, H_0^1)$ nous obtenons

$$g_0\lambda \int_0^L |v_x^2|^2 dx = \lambda \int_0^L g(s)v_x^7\overline{v_x^2} dsdx - i\int_0^L \int_0^{+\infty} g(s)v_x^7\overline{v_{xs}^2} dsdx + o\left(\frac{1}{\lambda^l}\right). \tag{3.95}$$

Depuis l'équation (3.82) et du lemme 3.9, on a

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^L \int_0^{+\infty} g(s)v_x^7\overline{v_x^2} dsdx &\leq \lambda \int_0^{+\infty} g(s)\left((\int_0^L (v_x^7)^2 dx)^{\frac{1}{2}}\|v_x^2\|^2 dx\right) ds \\ &= o(1) \end{aligned}$$

donc nous obtenons

$$\lambda \int_0^L \int_0^{+\infty} g(s)v_x^7\overline{v_x^2} dsdx = o\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{l}{2}-1}}\right). \tag{3.96}$$

S'appliquant l'intégration par partie

$$\int_0^L \int_0^{+\infty} g(s) v_{xs}^7 \overline{v_x^2} ds dx = \int_0^L \int_0^{+\infty} -g'(s) v_x^7 \overline{v_x^2} ds dx$$

et l'inégalité du Hölder dans $L^2(0,L)$ et $L^2(0,+\infty)$:

$$\int_0^L \int_0^{+\infty} g(s) v_{xs}^7 \overline{v_x^2} ds dx \leq \lim_{s\to 0} \sqrt{g(s)} \left(\int_0^L \int_0^{+\infty} -g^{'}(s) |v_x^7|^2 ds dx \right)^{\frac{1}{2}} \|v_x^2\|.$$

Puis, en utilisant (3.93), v_x^2 est uniformément borné dans $L^2(0,L)$ et $\lim_{s\to 0} \sqrt{g(s)}$ existe, nous obtenons

$$\begin{aligned} \left| \int_0^L \int_0^{+\infty} g(s) v_{xs}^7 \overline{v_x^2} ds dx \right| &\leq \lim_{s\to 0} \sqrt{g(s)} \left(\int_0^L \int_0^{+\infty} g(s) |v_{xs}^7|^2 ds dx \right)^{\frac{1}{2}} \|v_x^2\| \\ &\leq \lim_{s\to 0} \sqrt{g(s)} \left(\int_0^L \int_0^{+\infty} -g^{'}(s) |v_x^7|^2 ds dx \right)^{\frac{1}{2}} \|v_x^2\| \qquad (3.97) \\ &= o\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{l}{2}}} \right). \end{aligned}$$

En insérant (3.96) et (3.97) dans (3.95), nous déduisons l'évaluation de (3.94).

Lemme 3.11. *: Sous l'hypothèse (H) nous avons*

$$\int_0^L |v_x^2|^2 dx = o\left(\frac{1}{\lambda^l} \right).$$

Preuve :

soit $l_N = \frac{l}{2} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2^k}$. Depuis $\lim_{N\to+\infty} l_N = l$, il est assez pour prouver par induction sur $N \in \mathbb{N}$ que

$$\int_0^L |v_x^2|^2 dx = o\left(\frac{1}{\lambda^{l_N}} \right). \qquad (3.98)$$

Quand N = 0, l'évaluation (3.98) se tient par lemme 3.10.

Supposez que (3.98) se tient pour N-1 ; c-à-d,

$$\lambda^{l_{N-1}} \int_0^L |v_x^2|^2 dx = o(1). \qquad (3.99)$$

En multipliant (3.90) par $\lambda^{l_N} \overline{v^2}$ dans $L_g^2(\mathbb{R}_+, H_0^1)$,

on utilise alors la raison que

$$\|v^2\|_g^2 = g_0 \|v_x^2\|^2,$$

v_x^2 est uniformément borné dans $L^2(0,L)$, f^2 converge vers zéro dans $H_0^1(0,L)$, f^7 converge vers zéro dans $L_g^2(\mathbb{R}_+, H_0^1)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\lambda^{l_N} g_0 \int_0^L |v_x^2|^2 dx &= \int_0^L \int_0^{+\infty} g(s)\lambda^{\frac{l}{2}} v_x^7 \lambda^{l_N - \frac{l}{2}} \overline{v_x^2} ds dx \\ &\quad -\frac{i}{\lambda}\int_0^L \int_0^{+\infty} g(s)\lambda^{\frac{l}{2}} v_{xs}^7 \lambda^{l_N - \frac{l}{2}} \overline{v_x^2} ds dx + o\left(\frac{1}{\lambda^{l+1-l_N}}\right),\end{aligned}$$

en utilisant la raison que $l_N - \frac{l}{2} = \frac{l_{N-1}}{2}$, lemme 3.9, (3.97) et (3.99), nous obtenons

$$\lambda^{l_N}\int_0^L |v_x^2|^2 = o(1).$$

Lemme 3.12. *: soit $2 \le l \le 4$. Sous l'hypothèse (H), nous avons*

$$\int_0^L \varsigma |v_x^1|^2 dx = o\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{l}{2}-1}}\right),$$

où ς est la fonction de coupure définie dans la section 3.2.

Preuve :

Depuis $l \ge 2$, du lemme 3.9 et du lemme 3.11 nous avons

$$\int_0^L |v_x^2|^2 = o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \text{ et } \int_0^L \int_0^{+\infty} g(s)|v_x^7|^2 ds dx = o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

en multipliant (3.88) par $\varsigma\overline{v_x^1}$. Puis, En utilisant (3.91), (3.100), et la raison que v_x^1 est uniformément borné dans $L^2(0,L)$, f^2 converge vers zéro dans $H_0^1(0,L)$, f^5 converge vers zéro dans $L^2(0,L)$ nous obtient

$$\int_0^L \varsigma |v_x^1|^2 dx = o(1) \tag{3.100}$$

Après, se multipliant (3.88) par $\lambda^{\frac{l}{2}-1}\varsigma\overline{v_x^1}$ dans $L^2(0,L)$. En utilisant alors la raison que v_x^1 est uniformément borné dans $L^2(0,L)$, f^2 converge vers zéro dans $H_0^1(0,L)$ *et* f^5 converge vers zéro dans $L^2(0,L)$, nous obtient

$$\begin{aligned}&- \quad k_1\lambda^{\frac{l}{2}-1}\int_0^L \varsigma|v_x^1|^2 dx - \rho_2\int_0^L \varsigma\lambda^{\frac{l}{2}} v_x^2 \overline{\lambda v^1} dx - \rho_2\int_0^L \varsigma' \lambda^{\frac{l}{2}} v^2 \overline{\lambda v^1} dx \\ &- \quad \int_0^L \lambda^{\frac{l}{2}}\left(\widetilde{k}_2 v_x^2 + \int_0^{+\infty} g(s)v_x^7 ds\right)\varsigma\lambda^{-1}\overline{v_{xx}^1} dx - \int_0^L \lambda^{\frac{l}{2}-1}\left(\widetilde{k}_2 v_x^2 + \int_0^{+\infty} g(s)v_x^7 ds\right)\varsigma'\overline{v_x^1} dx \\ &- \quad k_1\int_0^L \lambda^{\frac{l}{2}-1}(v^2 + lv^3)\varsigma\overline{v_x^1} dx = o\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{l}{2}}}\right).\end{aligned}$$

Depuis $l \leq 4$, en raison de (3.91), nous avons

$$\lambda^{\frac{l}{2}-1} \int_0^L (v^2 + lv^3)dx = O(1).$$

De (3.82), (3.83), (3.91), (3.101), lemme 3.9, et lemme 3.11 que nous obtenons

$$\int_0^L \varsigma |v_x^1|^2 dx = o\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{l}{2}-1}}\right).$$

Lemme 3.13. . *pour* $2 \leq l \leq 4$ *Sous l'hypothèse (H), nous avons*

$$\int_0^L \varsigma |v_x^1|^2 dx = o\left(\frac{1}{\lambda^{l-2}}\right), \text{ et } \int_0^L \varsigma |v^1|^2 dx = o\left(\frac{1}{\lambda^l}\right). \tag{3.101}$$

Preuve :

pour $l_N = \frac{l-2}{2} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2^k}$, depuis $\lim_{N\to 0} \frac{l-2}{2} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2^k} = l-2$, nous prouvons par induction sur $N \in \mathbb{N}$

$$\int_0^L \varsigma |v_x^1|^2 dx = o(\frac{1}{\lambda^{l_N}}). \tag{3.102}$$

Si N = 0, l'évaluation (3.103) se tient par Lemme 3.12.

On suppose que

$$\lambda^{l_{N-1}} \int_0^L \varsigma |v_x^1|^2 dx = o(1). \tag{3.103}$$

En multipliant (3.87) par $\lambda^{l_{N-1}} \varsigma \overline{v^1}$ dans $L^2(0, L)$.

Puis, en utilisant le raison que v^1 est uniformément borné dans $L^2(0, L), f^1$ converge vers zéro dans $H_0^1(0, L)$ *et* f^4 converge vers zéro dans $L^2(0, L)$, on obtient

$$\begin{aligned} &\rho_1 \lambda^{l_{N-1}+2} \int_0^L \varsigma |v^1|^2 dx - k_1 \lambda^{l_{N-1}} \int_0^L \varsigma |v_x^1|^2 dx + k_1 \int_0^L \lambda^{\frac{l_{N-1}}{2}} (\varsigma v_x^2 - \varsigma' v_x^1) \lambda^{\frac{l_{N-1}}{2}} \overline{v^1} dx \\ &-l(k_1 + k_3) \int_0^L \lambda^{\frac{l_{N-1}}{2}} v^3 \lambda^{\frac{l_{N-1}}{2}} (\varsigma v^1)_x dx - lk_3 \lambda^{l_{N-1}} \int_0^L \varsigma |v^1|^2 dx = o\left(\frac{1}{\lambda^{l-l_{N-1}}}\right). \end{aligned}$$

Comme $\frac{l_{N-1}}{2} \leq 1$, de (3.91), (3.104) et lemme 3.11, nous obtenons

$$\lambda^{l_{N-1}+2} \int_0^L \varsigma |v^1|^2 dx = o(1). \tag{3.104}$$

D' autre part, en utilisant (3.105) et le lemme 3.11, nous obtenons de (3.87) que

$$\lambda^{-1+\frac{l_{N-1}}{2}} \int_0^L \varsigma |v_{xx}^1|^2 dx = O(1). \tag{3.105}$$

En multipliant (3.88) par $\lambda^{l_N}\varsigma\overline{v_x^1}$ dans $L^2(0,L)$.

Puis, en utilisant la raison que $l_N = \frac{l-2}{2} + \frac{l_{N-1}}{,}$ v_x^1 est uniformément borné dans $L^2(0,L)$, f^2 converge vers zéro dans $H_0^1(0,L)$ *et* f^5 converge vers zéro dans $L^2(0,L)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
- \quad & \rho_2\int_0^L \lambda^{\frac{1}{2}} v_x^2 \lambda^{l+\frac{l_{N-1}}{2}}\varsigma\overline{v^1}dx - \rho_2\int_0^L \lambda^{\frac{1}{2}} v^2\lambda^{l+\frac{l_{N-1}}{2}}\varsigma'\overline{v^1}dx - k_1\lambda^{l_N}\int_0^L \varsigma|v_x^1|^2dx \\
- \quad & \int_0^L \lambda^{\frac{1}{2}}\left(\widetilde{k}_2 v_x^2 + \int_0^{+\infty} g(s)v_x^7 ds\right)\lambda^{-1+\frac{l_{N-1}}{2}}(\varsigma\overline{v_{xx}^1} + \varsigma'\overline{v_x^1})dx \\
- \quad & k_1\int_0^L \lambda^{\frac{1}{2}-1}(v^2 + lv^3)\lambda^{\frac{l_{N-1}}{2}}\varsigma\overline{v_x^1}dx = o\left(\frac{1}{\lambda^{l-l_N}}\right).
\end{aligned}$$

En utilisant la raison que $2 \le l \le 4$, (3.83), (3.91), (3.104), (3.105), (3.106), lemme 3.9, et lemme 3.11, nous obtenons (3.103). Par conséquent

$$\int_0^L \varsigma|v_x^1|^2dx = o\left(\frac{1}{\lambda^{l-2}}\right). \tag{3.106}$$

En conclusion, en multipliant (3.87) par $\lambda^{l-2}\varsigma\overline{v^1}$ dans $L^2(0,L)$.

Puis, en utilisant (3.83), (3.91), (3.107), et lemme 3.11, nous obtenons la deuxième évaluation de (3.102)

Lemme 3.14. *: pour $2 \le l \le 4$. Sous l'hypothèse (H) nous avons*

$$l(k_1+k_3)\int_0^L \varsigma|v_x^3|^2dx + (k_3-k_1)\mathfrak{R}\left\{\int_0^L \lambda\varsigma v_x^1\lambda^{-1}\overline{v_{xx}^3}dx\right\} = o(1) \tag{3.107}$$

Preuve.

En multipliant (3.87) par $\varsigma\overline{v_x^3}$ dans $L^2(0,L)$.

Puis, en utilisant (3.91), le lemme 3.11, le lemme 3.13, v_x^3 est uniformément borné dans $L^2(0,L)$, f^1 converge vers zéro dans $H_0^1(0,L)$ *et* f^4 converge vers zéro dans $L^2(0,L)$, nous obtenons

$$\rho_1\int_0^L \lambda^2 v^1\varsigma\overline{v_x^3}dx + l(k_1+k_3)\int_0^L \varsigma|v_x^3|^2dx - k_1\int_0^L \lambda\varsigma v_x^1\lambda^{-1}\overline{v_{xx}^3} = o(1). \tag{3.108}$$

Se multiplier (3.89) par $\varsigma\overline{v_x^1}$ dans $L^2(0,L)$. Puis, en utilisant (3.91), le lemme 3.13, v_x^1 est uniformément borné dans $L^2(0,L)$, f^3 converge vers zéro dans $H_0^1(0,L)$ *et* f^6 converge vers zéro dans $L^2(0,L)$, nous obtenons

$$-\rho_1\int_0^L \lambda^2\overline{v^1}\varsigma v_x^3dx + k_3\int_0^L \lambda\varsigma\overline{v_x^1}\lambda^{-1}v_{xx}^3dx = o(1). \tag{3.109}$$

S'additionne (3.109) avec (3.110), prend alors la partie réel de l'équation, nous obtenons (3.108).

Preuve du théorème 3.4

si (3.83) est vérifie , on prend l = 4 dans le lemme 3.9, le lemme 3.11, et le lemme 3.13, nous obtenons

$$\int_0^L \int_0^{+\infty} g(s)|v_x^7|^2 ds dx = o\left(\frac{1}{\lambda^4}\right), \ \int_0^L |v_x^2|^2 dx = o\left(\frac{1}{\lambda^4}\right), \tag{3.110}$$

et

$$\int_0^L \varsigma|v_x^1|^2 dx = o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \ \int_0^L \varsigma|v^1|^2 dx = o\left(\frac{1}{\lambda^4}\right). \tag{3.111}$$

En utilisant (3.111) et (3.92), nous obtenons

$$\int_0^L \lambda\varsigma v_x^1 \lambda^{-1}\overline{v_{xx}^3} dx = o(1). \tag{3.112}$$

Depuis lemme 3.14 et (3.112), nous obtenons

$$\int_0^L \varsigma|v_x^3|^2 dx = o(1). \tag{3.113}$$

Après, se multipliant (3.89) par $\varsigma\overline{v^3}$ dans $L^2(0, L)$. Puis, en utilisant (3.111), (3.112), (3.114), v^3 est uniformément borné dans $L^2(0, L)$, f^3 converge vers zéro dans $H_0^1(0, L)$ *et* f^6 converge vers zéro dans $L^2(0, L)$, nous obtenons

$$\int_0^L \varsigma|v^3|^2 dx = o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \tag{3.114}$$

conclusion, en utilisant (3.111), (3.112), (3.114) et (3.115), nous obtenons $\|U\|_{\mathcal{H}} = o(1)$ plus de $(\alpha + \epsilon, \beta - \epsilon)$.

Alors en appliquant le lemme 3.5, nous déduisons $\|U\|_{\mathcal{H}} = o(1)$, plus de (0,L) qui contredit (3.82).

Ceci implique que

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \left\|(i\lambda Id - \mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = O(\lambda^4)$$

Le résultat suit de [1].

Preuve du théorème 3.5 :

si (3.81) prise , on prend l = 2 dans le lemme 3.14, nous obtenons

$$\int_0^L \varsigma|v_x^3|^2 dx = o(1) \tag{3.115}$$

D'ailleurs, du lemme 3.9, du lemme 3.11, et du lemme 3.13, nous obtenons

$$\int_0^L \int_0^{+\infty} g(s)|v^7|^2 ds dx = o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \ \int_0^L |v_x^2|^2 dx = o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \tag{3.116}$$

et

$$\int_0^L \varsigma|v_x^1|^2 dx = o(1), \ \int_0^L \varsigma|v^1|^2 dx = o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \tag{3.117}$$

Après, en multipliant (3.89) par $\varsigma\overline{v^3}$ dans $L^2(0,L)$. Puis, en utilisant (3.116), (3.117), (3.118), v^3 est uniformément borné dans $L^2(0,L)$, f^3 converge vers zéro dans $H_0^1(0,L)$ *et* f^6 converge vers zéro dans $L^2(0,L)$, nous obtenons

$$\int_0^L \varsigma|v^3|^2 dx = o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \tag{3.118}$$

En conclusion, en utilisant (3.116), (3.117), (3.118) et (3.119), nous obtenons $\|U\|_{\mathcal{H}} = o(1)$ plus de $(\alpha+\epsilon, \beta-\epsilon)$. Alors en appliquant le lemme 3.5, nous déduisons $\|U\|_{\mathcal{H}} = o(1)$, plus de (0,L) qui contredit (3.82). Ceci implique que

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \left\|(i\lambda Id - \mathcal{A})^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = O(\lambda^2).$$

Le résultat suit de [1].

3.5 conclusion

Dans ce mémoire, nous avons fournis un résultat de stabilisation exponentielle et de stabilisation polynomiale pour le système Bresse avec un contrôle de type de mémoire infinie. C'est une étape vers la compréhension complète de stabilisation aux limites d'un tel système. En effet, nous avons espéré pouvoir obtenir des résultats similaires comme ceux existant pour les modèles de type Timochinko ($\omega = 0$), mais il semblait pour le moment qu'il existe plus de difficultés mathématiques pour le modèle de Bresse.

Bibliographie

[1] A. Borichev and Y. Tomilov. *Optimal polynomial decay of functions and operator semi groups.* Math. Ann., 347(2) :455–478. 2010.

[2] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations,* volume 44 of Applied Math. Sciences. Springer-Verlag, New York, 1983.

[3] D. Hugo, F. Sare, and R. Racke. *On the stability of damped timoshenko systems-cattaneo versus fourier law.* Archive for Rational Mechanics and Analysis, 194(1) :221–251, 2009.

[4] F. ABDALLAH, M. GHADER, AND A. WEHBE, Stability results of a distributed problem involving Bresse system with history and/or Cattaneo law under fully Dirichlet or mixid boundary conditions. arX1v :l60l.00l66vl [math.AP] 2 Jan 2016

[5] F. L. Huang. *Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces.* Ann. Differential Equations, 1(1) :43–56, 1985.

[6] H. BREZIS. *ANALYSE FONCTIONNELLE Théorie et applications*,Université Pierre et Marie Curie et Ecole Polytechnique, MASSON 1987

[7] J. Prüss. *On the spectrum of c_0-semigroups.* Trans. Amer. Math. Soc, 284(2) :847–857, 1984.

[8] J-H SAIAC. *Méthode des éléments finis. Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Polycopié des cours de Calcul Scientifique CSC108 et CSC109

[9] J. RAYMOND. *Equations d'évolution*

[10] K. Hafssa. *Propriétés du semi-groupe engendré par un opérateur m-dissipatif.* 2015/2016

[11] M. Ferhat and A. Hakem. *WELL-POSEDNESS AND ASYMPTOTIC STABI-*

*LITY OF SOLUTIONS TO A BRESSE SYSTEM WITH TIME VARYING DELAY TERMS AND INFINITE MEMORIES.*Ser. Math. Inform. Vol. 31, No 1 (2016), 97–124

[12] M. Santos, A. Soufyane, and D. Junior.*Asymptotic behavior to the bresse system with past history.*Quart. Appl. Math., 73(1) :23–54, 2015.

[13] N. Najdi and A. Wehbe.*Weakly locally thermal stabilization of bresse system.*Electron. J. Diff. Equ, 2014(182) :1–19, 2014.

[14] N. Najdi. *Etude de la stabilisation exponentielle et polynomiale de certains systèmes d'équations couplées par des contrôles indirects bornés ou non bornés*. Le 08/07/2016, à Valenciennes

[15] R. Herbin. *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*,3 décembre 2008

[16] W. Arendt and C. J. K. Batty,*Tauberian theorems and stability of one-parameter semigroups.* Trans. Amer. Math. Soc., 306(2) :837–852. 1988.

[17] Z. Liu and B. Rao.*Characterization of polynomial decay rate for the solution of linear evolution equation.*Z. Angew. Math. Phys., 56 :630–644, 2005.