REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE YAHIA FARES DE MEDEA



Faculté de la **T**echnologie

Département du génie mécanique

Mémoire de fin d'études de Master

Filière : Electromécanique
Spécialité : Mécatronique

Conception et analyse d'un robot manipulateur 3R

Présenté par

BENKHETTAR Mohammed

Proposé et Dirigé par

Dr. BOUMAHDI Mouloud

Promotion juin 2020

Remerciements

Je tiens à exprimer ma sincère gratitude à mon encadreur Dr. Mouloud BOUMAHDI, pour sa constante disponibilité, ses précieux conseils, et sa patience pendant toute la durée de ce travail.

Je tiens également à exprimer ma reconnaissance au Dr. Mounir ALLICHE, qui m' a fait l'honneur d'être président de jury.

Je tiens également à exprimer notre profonde gratitude au Dr. Ridha REBHI qui m'a fait l'honneur de participer au jury.

Je tiens aussi à remercier tous ceux qui m'a soutenu et aidé à réaliser ce travail, en particulier ma famille et mes amis

ملخص

في هذا المشروع، تم اقتراح منهجية لتطوير روبوت مناور نوع RRR (دوران ، دوران، دوران). يشمل النهج المتبع الخطوات التالية: (1) إعداد النماذج: الهندسية، الحركية والديناميكية؛ (2) تصميم نموذج الروبوت باستخدام برنامج CAD ؛ (3) المحاكاة للتحقق من حسن سير عمل الروبوت.

وفقا للاختبارات التي أجريت لعدة حالات المرجوة من الجهاز الطرفي، فقد أظهرت النتائج التي تم الحصول عليها عن طريق المحاكاة دقة النماذج الراسخة وفعالية المنهجية المقترحة.

الكلمات الرئيسية : روبوت مناور ، النمذجة الرياضية ,CAD, المحاكاة

RÉSUMÉ

Dans ce projet, une méthodologie pour développer un robot Manipulateur type RRR (rotoïde, rotoïde, rotoïde) est proposée. La démarche suivie comporte les étapes suivantes : (i) Etablissement des modèles : géométrique, cinématique et dynamique ; (ii) Conception de la maquette du robot par un logiciel de CAO ; (iii) simulation et vérification du fonctionnement du robot.

D'après les tests effectués, pour plusieurs situations désirées de l'organe terminal, les résultats obtenus par simulation, ont montré l'exactitude des modèles établis et l'efficacité de la méthodologie proposée.

Mots clés : Robot manipulateur, modélisation mathématique, CAO, simulation,

ABSTRACT

In this project, a methodology for developing a robot type RRR (Rotoid, Rotoid, Rotoid) is proposed. The process involves the following steps: (i) Establishment of the models: geometric, kinematic and dynamic; (ii) Design of the robot model using CAD software; (iii) Simulation and to verify the correct functioning of the robot.

According to tests performed for several desired situations of the end effector, the simulation results showed the correctness of the established models and effectiveness of the proposed methodology.

Key words: robot manipulator, mathematical modeling, CAD, simulation.

NOMENCLATURES

θ_i : (Joint angle)

d_i : (Joint distance)

a_i : (Link length)

α_i : (Link twist)

L_{ext} : couples extérieurs

K : Énergie cinétique totale du robot

V : Énergie potentielle totale du robot

g : forces de gravité

p_x : La position désirée selon l'axe (x)

p_y : La position désirée selon l'axe (y)

p_z : La position désirée selon l'axe (z)

L : Lagrangien du système

(x, y, z) : Les axes des liens dans un repère orthogonal.

m_i : Masse du corps i de la chaîne cinématique.

$M(q)$: Matrice de masse généralisée du système.

H_i : Matrice des pseudo-inerties du corps i

$J(q)$: matrice jacobiénne

${}^i S_i$: Position du centre de masse du corps i exprimée en R_i

$m^i r$: Premier moment du corps i autour de o_i exprimé dans R_i

R_i : Repère du lien i.

R_0 : Repère globale

I^G : Tenseur d'inertie du corps, par rapport à son centre de masse

λ : Vecteur des multiplicateurs de Lagrange.

ω : Vecteur vitesse angulaire du corps

$\dot{X}$: vitesses dans l'espace opérationnel .

$(q, \dot{q}, \ddot{q})$:la postion,les vitesses et les accélération des variables articulaires.

Q :les couples appliqués.

F_{ext} ; forces extérieures.

$c(q, \dot{q}, F_{ext}, L_{ext}, g)$; Les termes gyroscopiques de Coriolis et les forces couples extérieures appliquées sur le corps ainsi que la gravité.

$\ddot{\theta}_i$: L'accélération angulaire du lien i .

$\dot{\theta}_i$: La vitesse angulaire du lien i .
m_i : La masse du lien i .
θ_i : Le déplacement angulaire du lien i .
τ_i : Le couple de l'articulation i .
ddl :degrée de libertée .
D-H : Paramétrage de Denavit_Hartenberg.
OT :organe terminale .
^{i}r Vecteur du centre d'inertie du corps i exprimé dans le repère R_i
T_i^{i-1} : Matrice de transformation homogène

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1: Robot Unimate ……14

Figure1.2: Robot Puma ……14

Figure 1.3 : Robot Sojourner …… ,15

Figure1.4 : Robot aibo ……15

Figure1.5 : Robot Curiosity ……15

Figure 1.6 : Robot Spirit ……15

Figure 1.7 : Robot Nao ……16

Figure 1.8 : Constituants mécaniques des robots ……16

Figure 1.9 : Structure fonctionnelle d'un robot ……17

Figure 1.10 : structure d'un robot cartésien ……19

Figure 1.11 : Structure d'un robot cylindrique ……20

Figure 1.12 : Structure d'un robot sphérique ……20

Figure 1.13 : Structure d'un robot SCARA ……21

Figure 1.14 : Structure d'un robot 3R ……21

Figure 1.15 : liaison linéaire……23

Figure 1.16 : Articulation orthogonale ……23

Figure 1.17 : liaison de rotation ……24

Figure 1.18 : liaison de torsion ……24

Figure 1.19 : liaison tournant ……24

Figure 2.1 : Transformation des repères ……41

Figure 2.2 : Robot à structure ouverte simple ……42

Figure 2.3 : Paramètres géométriques dans le cas d'une structure ouverte simple …….43

Figure 2.4. Robot manipulateur type RRR……..40

Figure 2.5 : Répartition des masses ……..…50

Figure 3.1 : Maquette du robot RRR ……57

Figure 3.2 : Simulation du mouvement du robot ……..57

Figure 3.3 : Situation initiale……59

Figure 3.4: Situation désirée le coude en bas, cas 2……59

Figure 3.5: Situation désirée le coude en haut, cas 2……61

Figure 3.6 : position et couple jonction 01……..61

Figure 3.7 : position et couple de la liaison 02 ……..61

Figure 3.8 : position et couple de la liaison 03 ……..62

Figure 3.9 : position de l'outil terminale au plant (xy) ……62

Figure 3.10 : position de l'outil terminale au plant (xz) du trajectoire ……63

Figure A.1 : liaison rotoide de simulink/matlab……65

Figure A.2 : Elément 0 importé de solidwork vers simulink/matlab……..67

Figure A.3 : Elément 1 importé de solidwork vers simulink/matlab……..68

Figure A.4 : Elément 2 importé de solidwork vers simulink/matlab……..69

Figure A.5 : Elément 3 importé de solidwork vers simulink/matlab……..69

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 2.1. Paramètres Denavit-Hanterberg modifier du robot……..40

Table des matières

Introduction générale 12

Chapitre 1 : Généralités sur les robots 13

1.1. Introduction 13

1.2. Définitions 13

1.3. Historique 14

1.4. Constituants mécaniques des robots 16

1.4.1. L'organe terminal 16

1.4.2. Structure mécanique articulée 16

1.4.3. Articulations 17

1.5. Les éléments constitutifs d'un robot 17

1.5.1 Unité informationnelle 17

1.5.2 Unité opérationnelle 18

1.6. Classification des robots 18

1.6.1. Degrés de liberté 18

1.6.2. Géométrie de l'espace de travail 18

1.6.2.1. Structure cartésienne (PPP) 19

1.6.2.2.la structure cylindrique(RPP)ou (PRP) 19

1.6.2.3. La structure sphérique ou polaire a axe de rotation orthogonale 20

1.6.2.4. La structure dite SCARA 20

1.6.2.5. La structure 3R (anthropomorphe) 21

1.6.3. Caractéristiques du mouvement 21

1.6.4. Technologie d'entraînement 21

1.6.5. Structure cinématique 22
1.7. Types de liaison de robot 22
1.7.1. liaison linéaire 22
1.7.2. Articulation orthogonale 23
1.7.3.Liaison de rotation 23
1.7.4. Liaison de torsion 23
1.7.5. Liaison tournant 24
1.8. Manipulateurs de robots 24
1.8.1. Manipulateurs en série 24
1.8.2. Manipulateurs parallèles 25
1.8.3. Manipulateurs hybrides 25
1.9. Moteurs et actionneurs 26
1.9.1. Entraînement électrique 27
1.9.2. Entraînement hydraulique 27
1.9.3. Entraînement pneumatique 27
1.9.4. Robots à entraînement direct 27
1.10. Conclusion 28
Chapitre 2 : Modélisation du robot Manipulateur, Type RRR 28
2.1 Introduction 29
2.2. Description géométrique 30
2.2.1. Paramétrage géométrique 30
2.3. Modélisation géométrique 32
2.3.1. Modélisation géométrique direct 33
2.3.2. Modélisation géométrique inverse 33
2.4. Modélisation cinématique 34
2.4.1. Modélisation cinématique direct 34
2.4.2. Modèle cinématique inverse 35

2.5. Modélisation dynamique 35
2.5.1. Modélisation dynamique inverse 35
2.5.1.1. Formalisme de Lagrange 35
2.5.1.2. Formalisme de Newton-Euler 38
2.5. 2. Modélisation dynamique direct 38
2. 6. Modélisation du robot manipulateur de type RRR 38
Chapitre 3 : conception et simulation du robot 58
3.1. Introduction 58
3.2. conception de la maquette du robot 59
3.3. simulation du mouvement 60
3.4. vérification de l'exactitude du fonctionnement 61
3.5.conclusion 63
4.Conclusion générale 64
5.Références bibliographique 65
6.Annexe 66

Introduction générale

Actuellement, les robots envahissent différents domaines de l'activité humaine. Dans la vie domestique, nous trouvons le robot subvenir en partie aux travaux ménagers et publiques (robot serveur, robot garde malade, hôtesse d'accueil, etc.) et dans l'industrie , nous trouvons des robot pour: soudure à l'arc, pistolage, assemblage, découpage, polissage, etc.

Les robots industriels sont souvent employés pour servir comme générateur de positions et d'orientations d'un outil dans l'espace. Pour cela, ils sont modélisés par l'établissement de trois types de modèles indispensables : le modèle géométrique, le modèle cinématique et le modèle dynamique. Cette modélisation permet de fournir les équations mathématiques qui permettent ensuite de programmer, commander et exécuter les tâches désirées.

L'objectif de cette étude est de concevoir, d'analyser et de simuler un Robot manipulateur à trois degrés de libertés RRR (Rotoïde, Rotoïde, Rotoïde). Le déroulement de l'étude est mené en cinq étapes principales : modélisation du robot par l'établissement des modèles mathématiques: géométrique, cinématique et dynamique, ensuite, conception de la maquette du robot par un logiciel de CAO, et enfin simulation du fonctionnement du robot,

Cette étude est organisée en trois chapitres.

Le premier chapitre présente des généralités sur le domaine de la robotique et ses applications.

Le Deuxième chapitre présente les modèles mathématiques utilisés pour décrire le mouvement des articulations du robot : géométrique, cinématique et dynamique. Ensuite, la modélisation,

Le dernier chapitre présente la conception et la simulation du robot.

Enfin, ce mémoire se termine par une conclusion générale.

Chapitre 1 : Généralités sur les robots

1.1. Introduction

La robotique est un champ technologique vaste. Elle connaît depuis plusieurs décennies un développement extraordinaire, elle a révolutionné l'industrie et est appelée à faire de même avec la société humaine. L'objectif principal de la robotique est l'automatisation de l'activité humaine afin d'augmenter les facteurs de production et réduire le coût du facteur travail, surtout si le travail est effectué dans des zones dangereuses.

Dans ce chapitre, nous présentons une description générale de la robotique, un bref historique sur l'évolution de la robotique industrielle et un aperçu non exhaustif sur la classification et les constituants des robots.

1.2. Définitions

La robotique peut être définie comme l'ensemble des techniques et études tendant à concevoir des systèmes mécaniques, informatiques ou mixtes, capables de se substituer à l'homme dans ses fonctions motrices, sensorielles et intellectuelles [1]. Plusieurs d'autres définitions du mot robot sont récurrentes.

Selon « Le Petit Larousse », un robot est défini comme étant un appareil automatique capable de manipuler des objets, ou d'exécuter des opérations selon un programme fixe ou modifiable [1].

Selon « Robot Institute of America », Un robot est un manipulateur reprogrammable à fonctions multiples. Il est conçu pour déplacer des matériaux, des pièces, des outils ou des instruments spécialisés suivant des trajectoires variables programmées, en vue d'accomplir des tâches très diverses [2].

Selon «Association Japonaise de Robotique Industrielle », Un robot est un mécanisme permettant d'effectuer, en tout ou en partie, une tâche normalement réalisée par l'homme [2].

Selon « International Standard Organisation (ISO) », un robot est une machine formée par un mécanisme incluant plusieurs degrés de libertés, ayant souvent l'apparence d'un ou plusieurs bras se terminant par un poignet capable de tenir des outils, des pièces ou un dispositif d'inspection [2].

1.3. Historique

Robotique industrielle

1961 : Premier robot industriel mis en place dans une usine de General Motors : UNIMATE (tubes cathodiques de télévision) [4].

1972 : Nissan ouvre la première chaîne de production complétement robotisée.

1978 : PUMA (Programmable Universel Machine for Assembly) développé par General Motors (toujours Utilise) [1].

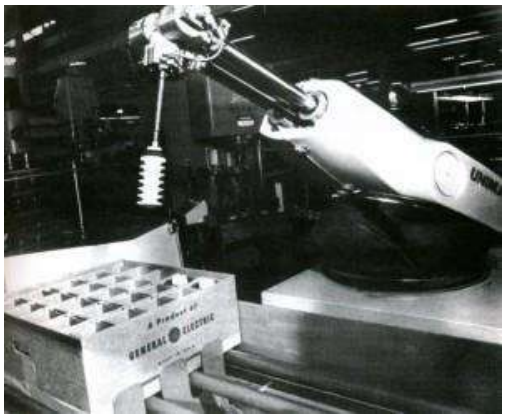


Figure 1.1: Robot Unimate [1].

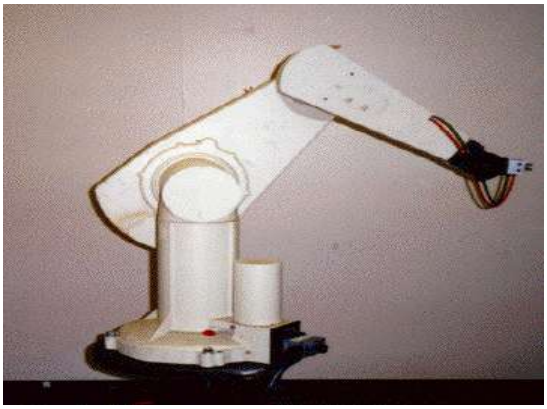


Figure 1.2: Robot Puma [1].

Robots mobiles:

1960-1964: Ouverture des laboratoires d'Intelligence Artificielle au M.I.T., Stanford Research Institute (SRI), Stanford University, University of Edinburgh [1].

Fin des années 60 : Mise en place de "Shakey" premier robot mobile intégrant perception, planification et Exécution [1].

1970 : Standford Cart.

1977 : premier robot mobile français HILARE au LAAS (CNRS Toulouse).

1980-1990

Développement important de l'intelligence artificielle et de la robotique : de nouveaux robots apparaissent constamment [1].

Essor de la robotique mobile

1992 : Mise en place de la compétition annuelle AAAI sur la robotique mobile.

1995 : Mise en place de la RoboCup.

1997 : premier robot mobile extra planétaire sur Mars.

1999 : Lancement d'Aibo.



Figure 1.3 : Robot Sojourner [1].



Figure 1.4 : Robot aibo [1].

Robots d'exploration :

2003 : Projet "Mars Exploration Rover" (Spirit & Opportunity) [1].

2009 : Projet "Mars Science Laboratory" succedant au projet Rover, envoi prévu de Curiosity fin 2011 [4].



Figure 1.5 : Robot Curiosity [1].

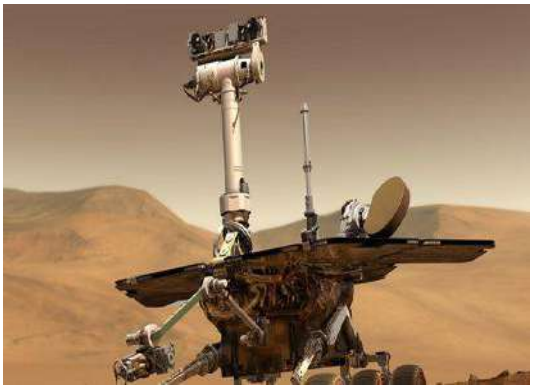


Figure 1.6 : Robot Spirit [1].

2000 : Lancement d'Asimo.

Diversification des compétitions de robotique.

Utilisation de drones en situation réelle (Irak...).

2006 : le projet Aibo n'est plus assez rentable, fin de la production.

2009 : robot Nao utilise a la Robocup Soccer [1].



Figure 1.7 : Robot Nao [1].

1.4. Constituants mécaniques des robots



Figure 1.8 : Constituants mécaniques des robots [4]

1.4.1. L'organe terminal

Sous le terme organe terminal, on regroupe tous dispositif destiné à manipuler des objets (dispositifs de serrage, dispositifs magnétiques, à dépression …) ou à les transformer (outils, torche de soudage, pistolet de peinture…). Il permet au robot d'interagir avec son environnement. Un organe terminal peut être multifonctionnel, c'est-à-dire qu'il est équipé de plusieurs dispositifs ayant des fonctionnalités différentes [4].

1.4.2. Structure mécanique articulée

Le rôle de la structure mécanique articulée est d'amener l'organe terminal dans une situation (position et orientation) désirée, selon des caractéristiques de vitesse et d'accélération prédéterminées. Son architecture est une chaine cinématique de corps, généralement rigides ou supposée comme tels, assemblés par des liaisons appelées articulations. Les chaines peuvent être soit ouvertes simples, soit arborescentes, soit fermées [4].

1.4.3. Articulations

Une articulation lie deux corps successifs en limitant le nombre de degrés de liberté de l'un par rapport à l'autre. Soit m le nombre de degrés de liberté résultant de la mobilité de l'articulation. La mobilité est telle que : $1< m \leq 6$

Lorsque m = 1, ce qui est le cas le plus fréquent en robotique, l'articulation est dite simple, soit rotoïde, soit prismatique [4].

1.5. Les éléments constitutifs d'un robot

La structure fonctionnelle d'un robot comporte une unité dite informationnelle et une unité dite opérationnelle (voir figure 1.9).

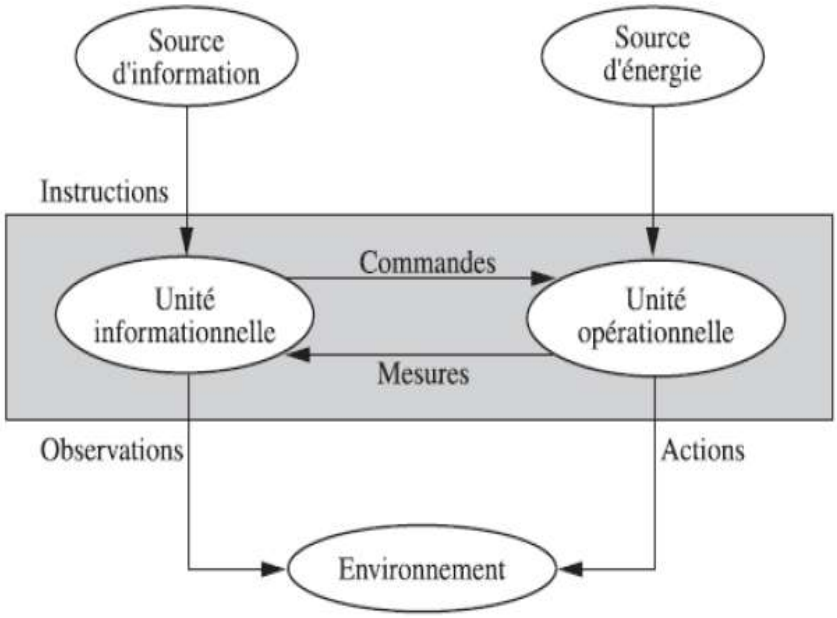


Figure 1.9 : Structure fonctionnelle d'un robot [1].

1.5.1 Unité informationnelle

L'unité informationnelle reçoit les instructions décrivant la tâche à accomplir, les mesures relatives à l'état interne de la structure mécanique qui constitue le bras manipulateur et les observations concernant son environnement. Elle élabore en conséquence les commandes de ses différentes articulations en vue de l'exécution de ses tâches. Les systèmes actuels fonctionnent en interaction permanente selon le cycle information décision- action [1].

1.5.2 Unité opérationnelle

L'unité opérationnelle exerce les actions commandées en empruntant la puissance nécessaire à la source d'énergie. Cette partie, qui constitue le robot physique, intègre la structure mécanique (segments, articulations, architecture,…), les modules d'énergie (amplificateurs, variateurs, servovalves....), les convertisseurs d'énergie (moteurs, Vérins….), les chaines cinématiques de transmission mécanique (réducteurs, vis à billes, courroies crantées ….), les capteurs de proprioceptifs placés sur chaque axe pour mesurer en permanence leur position et leur vitesse, et enfin l'effecteur, ou organe terminal, qui est en interaction avec l'environnement [1].

1.6. Classification des robots

Les robots peuvent être classés en fonction de leurs degrés de liberté, espace de travail de géométrie, caractéristiques de mouvement, technologie d'entraînement et structure cinématique [3].

1.6.1. Degrés de liberté

Les degrés de liberté dans un contexte mécanique, sont des modes spécifiques définis dans lesquels un dispositif mécanique ou un système peut se déplacer. Le nombre de degrés de liberté est égal au nombre total de déplacements indépendants ou d'aspects du mouvement. Une machine peut fonctionner dans deux ou trois dimensions mais avoir plus de trois degrés de liberté.

1.6.2. Géométrie de l'espace de travail

L'espace de travail du robot est la capacité d'un robot à atteindre une collection de points (espace de travail) qui dépend de la configuration et de la taille de leurs liens et poignets mixte. L'espace de travail peut être trouvé mathématiquement en écrivant des équations définissant articulations du robot, y compris leurs limitations, telles que les plages de mouvements chaque joint. On peut aussi trouver l'alternative en soustrayant tout l'espace qu'elle peut atteindre avec ce qu'il ne peut pas atteindre.

1.6.2.1. Structure cartésienne (PPP)

A trois liaisons prismatique, est la plus ancienne, historiquement, elle découle logiquement de la conception traditionnelle d'une machine-outil a trois axes, type rectifieuse ou fraiseuse par exemple. Cette structure est relativement peu utilisée, sauf dans quelques applications particulières : robots pratiques, robot de magasinage, par exemple [5]

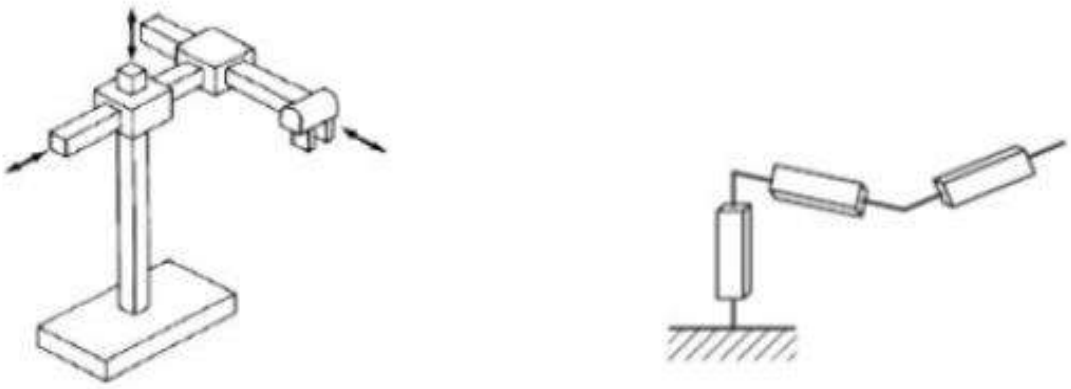


Figure 1.10 : structure d'un robot cartésien [6]

1.6.2.2.la structure cylindrique(RPP)ou (PRP)

Associe une rotation et deux translation . elle présente l'inconvénient d'offrir un volume de travail faible devant un encombrement total important. Elle n'est pratiquement plus utilisée[5]

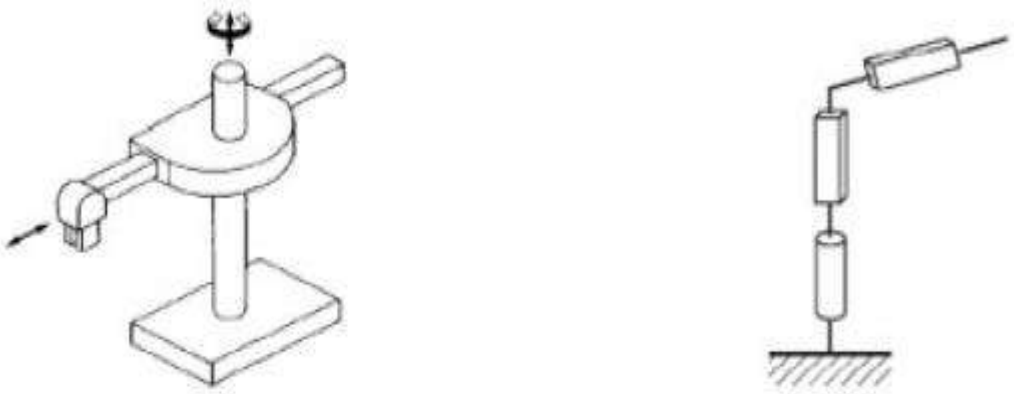


Figure 1.11 : Structure d'un robot cylindrique [6]

1.6.2.3. La structure sphérique ou polaire a axe de rotation orthogonale

Est une structure quasiment abandonnée pour des raisons similaires a l'abandon de la structure cylindrique [5]

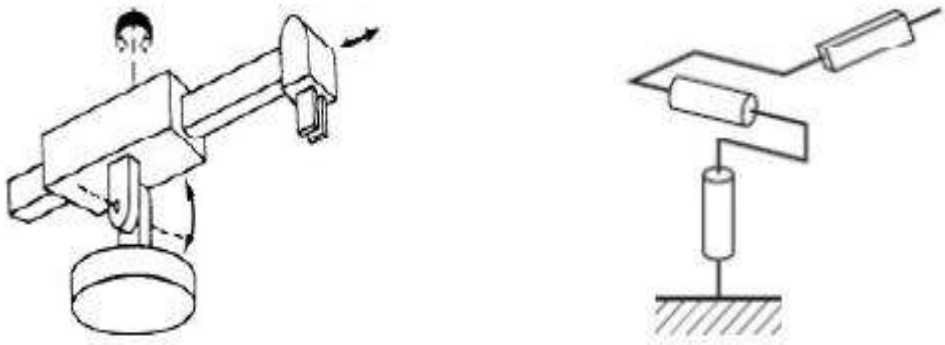


Figure 1.12 : Structure d'un robot sphérique [6]

1.6.2.4. La structure dite SCARA

Aaxes de rotation paralleles est l'un des plus utilisées,en particulier pour des taches de manutention ou d'assemblages tres fréquents dans l'industrie.ce succes commercial est lié au fait que le ratio entre le volume de travail et l'encombrement est tres favorable et aussi que la structure SCARA est tres adaptée a ce type de taches [5]



Figure 1.13 : Structure d'un robot SCARA [6]

1.6.2.5. La structure 3R (anthropomorphe)

Permet d'amener un solide en un point de l'espace par trois rotation ,généralement une a axe vertical et deux a axes horizontaux et parallèles c'est le porteur généraliste par excellence, pouvant se programmer facilement pour différent types de tache et disposant d'un volume de travail conséquent. [5]

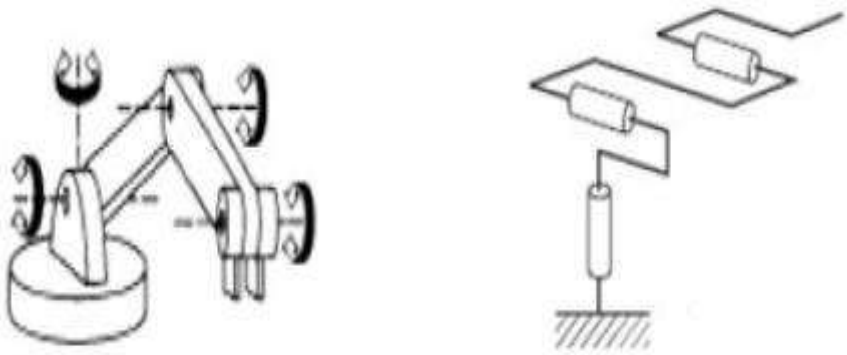


Figure 1.14 : Structure d'un robot 3R [6]

1.6.3. Caractéristiques du mouvement

Si un robot manipulateur possède un «mécanisme plan», il est défini comme «manipulateur planaire». Il manipule un objet sur un plan.

Si un robot manipulateur possède un «mécanisme sphérique», il est défini comme un «manipulateur sphérique».

En outre, si le mouvement d'un corps rigide ne peut pas être défini comme un mouvement plan ou sphérique, le mouvement éventuellement défini comme «mouvement spatial». Si au moins un des liens mobiles d'un mécanisme fait un mouvement spatial général, donc le manipulateur est défini comme «manipulateur spatial» [3].

1.6.4. Technologie d'entraînement

Bien qu'il existe trois technologies d'entraînement principales telles que l'électrique, l'hydraulique et pneumatiques, la plupart des robots manipulateurs utilisent des servomoteurs électriques ou des moteurs pas à pas, au fait que les avantages des moteurs électriques sont plus évidents. L'entraînement hydraulique et pneumatique présente certains avantages, tels que le transport des charges élevées [3].

1.6.5. Structure cinématique

Les robots sont également classés selon leurs structures cinématiques. Si un robot a une structure cinématique de chaîne ouverte, il est défini comme "robot série". Et s'il possède une structure cinématique de chaîne fermée, il est défini comme parallèle. De plus, si un système de robot est constitué des deux types de structure, il est appelé comme «manipulateur hybride».

1.7. Types de liaison de robot

L'articulation a pour but de permettre un mouvement relatif contrôlé entre le lien d'entrée et le lien de sortie. Presque tous les robots industriels ont des liaison joints mécaniques qui peuvent être classé dans l'un des cinq types. Ils comprennent deux types qui fournissent un mouvement linéaire et trois types qui fournissent un mouvement rotatif. Chacune des articulations ont une gamme sur lequel il peut être déplacé [3].

1.7.1. liaison linéaire

Le mouvement relatif entre le lien d'entrée et le lien de sortie est linéaire. Mouvement de glissement, les axes des deux liens étant parallèles.

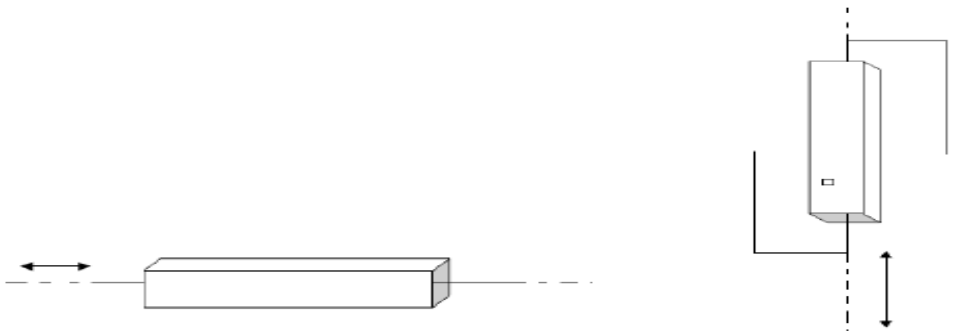


Figure 1.15 : liaison linéaire

1.7.2. Articulation orthogonale

C'est aussi un mouvement de glissement linéaire, mais les liens d'entrée et de sortie sont perpendiculaires les uns aux autres pendant le déménagement.

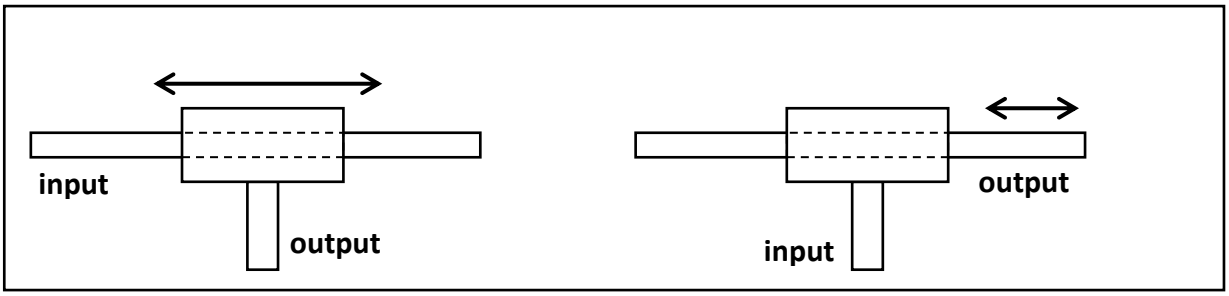


Figure 1.16 : Articulation orthogonale

1.7.3. Liaison de rotation

Ce type permet un mouvement relatif de rotation des articulations, avec l'axe de rotation perpendiculaire aux axes des liaisons d'entrée et de sortie.

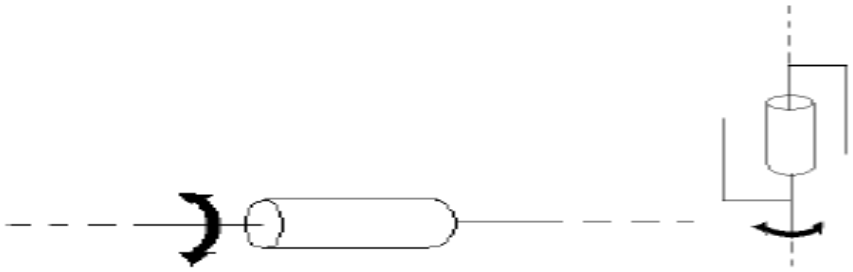


Figure 1.17 : liaison de rotation

1.7.4. Liaison de torsion

Cette articulation implique également un mouvement de rotation, mais l'axe de rotation est parallèle aux axes des deux liens.

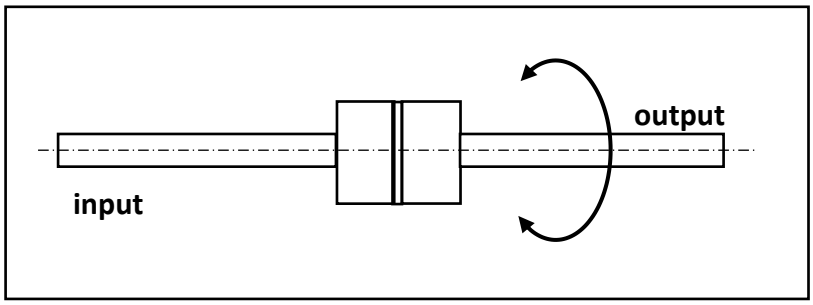


Figure 1.18 : liaison de torsion

1.7.5. Liaison tournant

Dans ce type, l'axe de la liaison d'entrée est parallèle à l'axe de rotation de l'articulation, et l'axe de la liaison de sortie est perpendiculaire à l'axe de rotation [3].

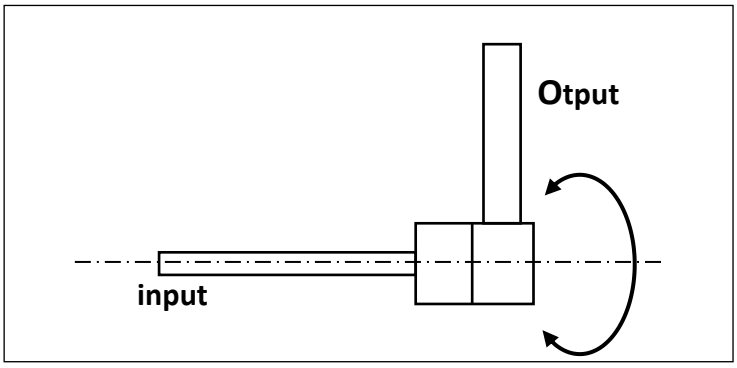


Figure 1.19 : liaison tournant

1.8. Manipulateurs de robots

Un robot manipulateur est un mécanisme, généralement constitué d'une série de segments, articulés ou coulissants les uns par rapport aux autres, pour déplacer des objets. Il existe trois types principaux des manipulateurs de robot. Ce sont des manipulateurs en série, parallèles et hybrides [3].

1.8.1. Manipulateurs en série

Manipulateurs en série constitués d'une série de liens rigides reliés entre eux par les joints sont les robots industriels les plus courants. Leurs articulations sont généralement articulaires révolutionnaires.

La plupart des manipulateurs en série ont une structure de bras anthropomorphique. Cela signifie que ils ont «épaule» (deux premières articulations), un «coude» (troisième articulation) et un «poignet» (dernière trois articulations). Selon le mouvement du corps rigide, placer un objet manipulé dans une position et orientation arbitraires dans l'espace de travail du robot, un robot doit avoir au moins six degrés de liberté.

Par conséquent, la plupart des robots de série ont six joints. Sur d'autre part, robot SCARA qui est l'un des robots les plus courants n'a que quatre degrés de liberté. C'est un robot d'assemblage spécial et utilisé généralement dans des applications « pick and place ».

Avantages d'un manipulateur en série :

• Plus grand espace de travail,

• Simplicité des cinématiques de vitesse et de positions,

• Capable d'atteindre des vitesses et des accélérations élevées,

Inconvénients des manipulateurs en série :

• Les erreurs sont accumulées et amplifiées,

• Pas économe en énergie.

1.8.2. Manipulateurs parallèles

Constitué d'une partie fixe (base) et d'une partie mobile (effecteur terminal). la plate-forme est un mécanisme à chaîne fermée. La plateforme de base est connectée à l'effecteur final par un certain nombre de «jambes». Ces jambes sont reliées aux plates-formes par joints sphériques ou universels. Chaque jambe est contrôlée par un actionneur. Le degré de la liberté dépend du nombre de jambes actionnées. Les avantages les plus importants des manipulateurs parallèles sont les capacités de positionnement précises et des constructions légères parce que les liens ne ressentent que la traction ou la compression, pas de flexion. En plus que, les actionneurs peuvent être placés dans la plate-forme de base, d'où le poids de la construction mobile diminue.

Avantage d'un manipulateur parallèle

• Rigidité structurelle et capacité de charge élevées.

• Capacité de mouvement à large bande passante.

Inconvénients d'un manipulateur parallèle

• Espace de travail limité.

• Perdre complètement la rigidité au singulier.

1.8.3. Manipulateurs hybrides

Si des fonctionnalités telles que la précision, la vitesse élevée, la rigidité sont nécessaires pour un robot, les manipulateurs parallèles deviennent le premier choix de cette application.

Cependant, les robots industriels ont généralement des manipulateurs en série à cinématique ouverte. Chaîne parce que l'espace de travail des manipulateurs parallèles

est très limité et ce travail l'espace n'est pas suffisant pour de nombreuses applications Comme les manipulateurs parallèles et série présentent des avantages différents, le type manipulateur hybride combine ces deux manipulateurs et possède des fonctionnalités de série et manipulateurs parallèles.

En outre, les manipulateurs hybrides surmontent les limites espace de travail des manipulateurs parallèles. Les manipulateurs hybrides sont constitués généralement d'un manipulateur en série et un en parallèle ou de deux manipulateurs en parallèle. La chaîne cinématique d'un manipulateur hybride est composée de deux manipulateurs parallèles différents. Les manipulateurs hybrides peuvent également être utilisés pour augmenter le degré de la liberté du système.

1.9. Moteurs et actionneurs

Chaque articulation du manipulateur est actionnée par un actionneur. Les actionneurs sont des dispositifs qui faire bouger le robot. Les systèmes d'entraînement d'un robot déterminent :

- La capacité de bouger son corps
- La vitesse de fonctionnement
- La force
- Performance dynamique
- Et les types d'applications avec lesquelles le robot peut être utilisé.

Pour la plupart des robots industriels, les actionneurs sont couplés au lien de robot correspondant par un train d'engrenage. L'effet de la réduction de vitesse est en grande partie de découpler le système en réduisant le couplage entre les articulations. Cependant, la présence des engrenages introduit la friction, le jeu et la conformité de la transmission.

Pour les robots à entraînement direct, le les problèmes de jeu, de friction et de conformité dus aux engrenages sont éliminés car aucun des engrenages sont utilisés dans un tel robot. Cependant, le couplage non linéaire entre les liens est significatif, et la dynamique des actionneurs eux-mêmes peut être beaucoup plus complexe.

Les actionneurs couramment utilisés sont :

1. Moteurs pas à pas
2. Servomoteurs CC
3. Servomoteurs AC
4. Pistons hydrauliques
5. Pistons pneumatiques

De loin, les entraînements hydrauliques et électriques sont les plus couramment utilisés sur robots sophistiqués [3].

1.9.1. Entraînement électrique

Les robots de petite et moyenne taille sont généralement alimentés par des entraînements électriques via des engrenages trains utilisant des servomoteurs et des moteurs pas à pas. Les plus couramment utilisés sont les moteurs à courant continu, bien que pour les robots plus grands, les moteurs à courant alternatif peuvent être utilisés.

Avantage :

- Meilleure précision et répétabilité
- Nécessite moins d'espace au sol
- Plus vers des travaux précis tels que des applications d'assemblage

inconvénients

- Généralement pas aussi rapide et puissant que les robots hydrauliques
- Cher pour les robots grands et puissants, peut devenir un risque d'incendie.

1.9.2. Entraînement hydraulique

Les plus gros robots utilisent des entraînements hydrauliques. Système d'entraînement hydraulique peut fournir mouvement de rotation (actionneurs rotatifs à palettes) et mouvement linéaire (pistons hydrauliques).

Avantages

- Plus de ratio poids / force
- Peut aussi actionner à une vitesse supérieure

inconvénients

- Nécessite plus d'espace au sol
- Tendance aux fuites d'huile

1.9.3. Entraînement pneumatique

Entraînement pneumatique peut être appliqué à l'actionnement de dispositifs à piston pour fournir des mouvements linéaires. Les mouvements de rotation peuvent être obtenus par des actionneurs rotatifs.

1.9.4. Robots à entraînement direct

Il utilise des moteurs électriques situés au niveau des articulations du manipulateur.

Avantage

- Élimine le jeu et les défauts mécaniques
- Élimine le besoin d'une transmission d'énergie.

1.10. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une description générale sur la robotique : définitions, historique des robots, classification des robots, éléments constitutifs d'un robot, ainsi que d'autres concepts connexes.

Les informations présentées vont nous servir de déterminer le champ de notre étude qui sera abordé dans les prochains chapitres.

Chapitre 2 : Modélisation du robot Manipulateur, Type RRR

2.1 Introduction

Pour commander un robot ou simuler son comportement on doit disposer des modèles mathématiques. Ces modèles sont établis selon les objectifs visés, les contraintes des tâches à réaliser et les performances recherchées. On distingue trois types de : modèle géométrique, modèle cinématique et modèle dynamique.

L'obtention de ces différents modèles est une tâche ardue. La difficulté varie selon la complexité de la chaine cinématique et le nombre de degrés de liberté du système. Ces modèles, qu'ils seront utilisés en simulation et en commande du robot, devront donner une image réel au comportement géométrique, cinématique ou dynamique du robot dans l'espace opérationnel.

Dans ce chapitre, nous allons présenter le formalisme mathématique de chaque type de modélisation, à savoir :

- Les modèles géométriques direct et inverse qui expriment la situation de l'organe terminal en fonction des variables articulaires du mécanisme et inversement.
- Les modèles cinématiques direct et inverse qui expriment la vitesse de l'organe terminal en fonction des vitesses articulaires et inversement.
- Les modèles dynamiques définissant les équations du mouvement du robot, qui permettent d'établir les relations entre les couples ou forces exercées par les actionneurs et les positions, vitesses et accélérations des articulations.

2.2. Description géométrique

La description géométrique fait appel aux matrices de transformation homogène de dimension (4x4). Une matrice homogène ${}^{i}T_{j}$ représente la transformation permettant de passer du repère R_i au repère R_j.

$$ {}^{i}T_{j} = T_{ij} = \left| {}^{i}\vec{s}_{j} \quad {}^{i}\vec{n}_{j} \quad {}^{i}\vec{a}_{j} \quad {}^{i}\vec{P}_{j} \right| = \begin{vmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left| \begin{matrix} & {}^{i}A_{j} & & {}^{i}\vec{P}_{j} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right| \qquad (2.1) $$

Où ${}^{i}\vec{s}_{j}, {}^{i}\vec{n}_{j}, {}^{i}\vec{a}_{j}$ sont les vecteur unitaires suivent les axes x_j, y_j, z_j du repère R_j exprimés dans le repère R_i. Ils représentent les cosinus directeurs de la matrice d'orientation ${}^{i}A_{j}$;

${}^{i}\vec{P}_{j}$ Est le vecteur exprimant l'origine du repère R_j, avec ${}^{i}\vec{P}_{j} = \overrightarrow{O_i O_j}$;

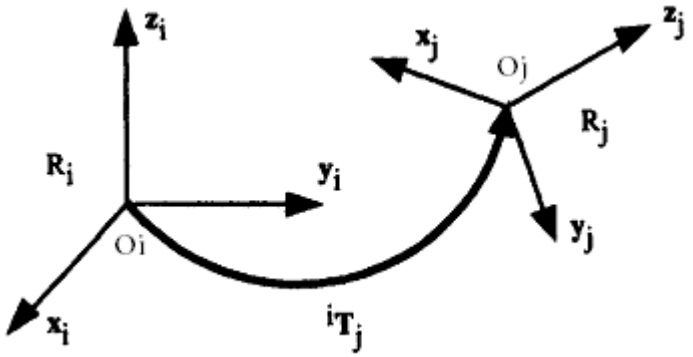


Figure 2.1 : Transformation des repères

2.2.1. Paramétrage géométrique

La modélisation des robots exige une méthode adéquate pour la description de leur morphologie. Plusieurs méthodes et notations ont été proposées. Dans le cas des architectures ouvertes simples de systèmes mécaniques articulés, la méthode de Denavit-Hartenberg modifier est la plus répandue [7].

Une structure ouverte simple est composée de n+1 corps notés C_0, …, C_n et de n articulations. Le corps C_0 désigne la base du robot et le corps C_n le corps qui porte l'organe terminal. L'articulation j connecte le corps C_j au corps C_{j-1} (voir la figure 2.2).

La méthode de description de Denavit-Hartenberg est fondée sur les règles et conventions suivantes :

- Les corps sont supposés parfaitement rigides. Ils sont connectés par des articulations considérées comme idéales (pas de jeu mécanique, pas d'élasticité), soit rotoïdes, soit prismatiques ;

– Le repère Rj est lié au corps Cj ;

– l'axe z_j est porté par l'axe de l'articulation j;

– l'axe x_j est porté par la perpendiculaire commune aux axes z_j et z_{j-1}.

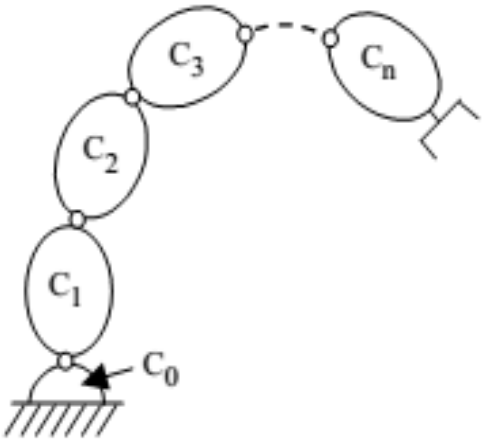


Figure 2.2 : Robot à structure ouverte simple

Le passage du repère R_{j-1} au repère R_j s'exprime en fonction des quatre paramètres géométriques suivants (voir la figure 2.3.) :

- a_i :(Link length) est la distance entre z_{i-1} et z_i le long de l'axe x_i, a_i est la longueur cinématique du lien i ;
- α_i :(Link twist) est la rotation de l'axe z_{i-1} autour x_i pour devenir parallèle à l'axe z_i ;
- d_i : (Joint distance) est la distance entre x_{i-1} et x_i le long de l'axe x_{i-1} ;
- θ_j : (Joint angle) angle entre les axes x_{i-1} et x_i correspondant à une rotation autour de z_i.

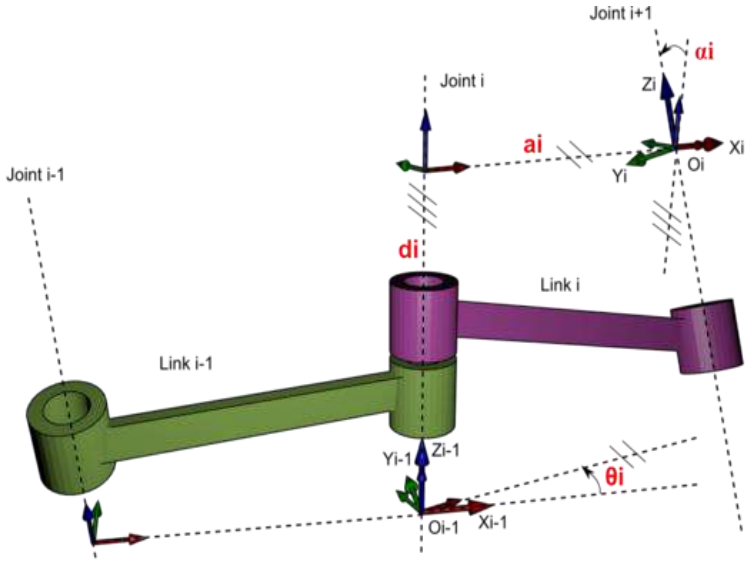


Figure 2.3 : Paramètres géométriques dans le cas d'une structure ouverte simple

La matrice de transformation définissant le repère R_i dans le repère R_{i-1} est donnée par (figure 2.3) :

$$^{i-1}T_i = Trans_{z_{i-1}}(d_i).Rot_{z_{i-1}}(\theta_i).Trans_{x_i}(a_i).Rot_{x_i}(\alpha_i) \qquad (2.2)$$

Où **Rot** (**u**, α) et **Trans** (**u**, d) sont des matrices de transformation homogène (4x4) représentant respectivement une rotation α autour de l'axe **u** et une translation d le long de **u**.

$$^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i}c_{\alpha_i} & s_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\theta_i}c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i}s_{\alpha_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.3)$$

2.3. Modélisation géométrique

La modélisation géométrique permet d'exprimer la situation de l'organe terminal en fonction des variables articulaires du mécanisme et inversement. On distingue deux types de modélisation :

- Modélisation géométrique direct ;
- Modélisation géométrique inverse.

2.3.1. Modélisation géométrique direct

Le modèle géométrique direct permet de déterminer la position et l'orientation de l'organe terminal du manipulateur par rapport à un repère de référence en fonction des variables articulaires, le modèle s'écrit :

$$X = f(q) \qquad (2.4)$$

Avec $q = (q_1, q_{2,} \ldots\ldots\ldots, q_n)^T \in R^n$: Vecteur des variables articulaires

$X = (x_1, x_{2,} \ldots\ldots\ldots, x_n)^T \in R^m$: Vecteur des variables opérationnelles, m ≤ n.

Si le manipulateur se déplace dans l'espace on pose m=6 (3 coordonnées pour la position et 3 coordonnées pour la rotation).

S'il se déplace dans un plan on pose m=2 et si en plus il est concerné par la rotation on pose m= 3.

La position de l'organe terminal peut être définie par des cordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques. Le choix d'une structure particulière est guidé par les caractéristiques du robot, ainsi que par celle de la tâche à réaliser.

Dans le cas d'une chaîne ouverte simple, le modèle géométrique direct peut être représenté par la matrice de transformation ${}^0T_n$:

$$ {}^0T_n = {}^0T_1(q_1)\,{}^1T_2(q_2)\ldots.{}^{n-1}T_n(q_n) \qquad (2.5)$$

2.3.2. Modélisation géométrique inverse

Le modèle géométrique inverse permet de déterminer le vecteur des variables articulaires à partir du vecteur de coordonnées opérationnelles, le modèle s'écrit : [7]

$$q = f^{-1}(x) \qquad (2.6)$$

Parmi les méthodes utilisées pour déterminer le modèle géométrique inverse on cite :

• **Les méthodes géométriques** : Elles permettent de déterminer le vecteur q par utilisation des transformations géométriques en prenant avantage de la structure particulière du manipulateur considéré.

• **Les méthodes algébriques** : Elles permettent de déterminer le vecteur q en effectuant des transformations algébriques sur l'équation (2.5). Parmi les méthodes utilisées, on cite la méthode de Paul.

Soit U_0 la situation désirée pour l'organe terminal, telle que :

$$U_0 = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & p_x \\ s_y & n_y & a_y & p_y \\ s_z & n_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

La méthode de PAUL consiste à résoudre un système d'équations obtenu par pré multiplier successivement les deux membres de l'équation (2.8) par les matrices homogènes inverse ; ${}^{i}T_{i-1}$ avec (i=1….n-1).

$$U_0 = {}^{0}T_n \tag{2.8}$$

Lors de la résolution du problème géométrique inverse on rencontre pratiquement les situations suivantes :

- Solutions en nombre fini, lorsqu'elles peuvent être calculées sans ambiguïté.
- Aucune solution possible lorsque la position désirée ne peut être atteinte par le manipulateur.
- Plusieurs solutions possibles lorsque le manipulateur est redondant ou lorsqu'il passe par une configuration singulière.

2.4. Modélisation cinématique

La modélisation cinématique permet d'exprimer la vitesse de l'organe terminal en fonction des vitesses articulaires et inversement.

2.4.1. Modélisation cinématique direct

Le modèle cinématique direct permet de déterminer la vitesse de l'organe terminal dans l'espace opérationnel en fonction de la vitesse des variables articulaires. Le modèle est décrit par l'équation : [7]

$$\dot{X} = J(q)\dot{q} \tag{2.9}$$

$J(q) \in R^{m*n}$ Est la matrice jacobéenne.

L'une des méthodes utilisées pour le calcul de la matrice jacobéenne est la dérivation du modèle géométrique direct (2.4), à partir de la relation suivante :

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i(q)}{\partial q_i} \quad \text{Avec i=1, …, m ; j=1, …, n} \tag{2.10}$$

Avec J_{ij} est l'élément (i, j) de la matrice jacobienne $J(q)$.

2.4.2. Modèle cinématique inverse

Le modèle cinématique inverse permet de déterminer la vitesse des variables articulaires en fonction de la vitesse des variables opérationnelles. Pour les manipulateurs non redondants (n=m), le modèle s'écrit : [7]

$$\dot{q} = J^{-1}(q)\dot{X} \tag{2.11}$$

La solution de l'équation (2.11) existe si J est de rang plein, cela est valable tant que le manipulateur ne passe pas par une configuration singulière.

Pour les manipulateurs redondants, le modèle cinématique inverse admet plusieurs solutions possibles. Le choix d'une solution parmi plusieurs est guidé par l'optimisation d'une fonction objective.

2.5. Modélisation dynamique

La modélisation dynamique définit les équations du mouvement du robot, qui permettent d'établir les relations entre les couples ou forces exercées par les actionneurs et les positions, vitesses et accélérations des articulations.

2.5.1. Modélisation dynamique inverse

Le modèle dynamique (appelé modèle dynamique inverse) exprime les couples exercés par les actionneurs en fonction des positions, vitesses et accélérations des articulations, les formalismes les plus utilisés pour les calculs du modèle dynamique inverse sont :

- Formalisme de Lagrange ;
- Formalisme de newton-Euler.

2.5.1.1. Formalisme de Lagrange

Le formalisme de Lagrange décrit les équations du mouvement en termes de travail et d'énergie du robot. La forme générale représentant le mouvement d'un robot manipulateur constitue de *n* degrés de liberté et de *n* articulations, s'écrit suivant Lagrange : [8]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = \tau_i \quad \text{Avec i= 1, ..., n} \tag{2.12}$$

L : Fonction lagrangienne de robot égale à : L = K – V

K : Energie cinétique totale du robot manipulateur.

V : Energie potentielle totale du robot manipulateur.

χ : Vecteur des positions articulaires.

$\dot{\chi}$: Vecteur des vitesses articulaires.

Pour le calcul du modèle dynamique d'une chaîne cinématique, on définit les paramètres suivants pour chaque corps i de la chaîne cinématique : [8]

m_i : Masse du corps i de la chaîne cinématique.

${}^i r = [{}^i r_X, {}^i r_y, {}^i r]^T$ Vecteur du centre d'inertie du corps i exprimé dans le repère R_i.

$m\,{}^i r = [m\,{}^i r_X, m\,{}^i r_y, m\,{}^i r]^T$: Premier moment du corps i autour de o_i exprimé dans R_i

${}^i I_i = \begin{bmatrix} {}^i I_{ixx} & -{}^i I_{ixy} & -{}^i I_{ixz} \\ -{}^i I_{ixy} & {}^i I_{iyy} & -{}^i I_{iyz} \\ -{}^i I_{izx} & -{}^i I_{izy} & {}^i I_{izz} \end{bmatrix}$: Tenseur d'inertie du corps i en o_i, exprimé dans R_i

Où :

${}^i I_{ixx} = \int ({}^i r_y^2 + {}^i r_z^2) dm_i$ *: Moment d'inertie.*

${}^i I_{ixy} = \int {}^i r_X \, {}^i r_y dm_i$ *: Produit d'inertie.*

${}^i S_i = [{}^i S_{ix}, {}^i S_{iy}, {}^i S_{iz}]^T$ *: Position du centre de masse du corps i exprimée en* R_i

$H_i = \int {}^i r \, {}^i r^T dm_i$ *: Matrice des pseudo-inerties du corps i.*

$$H_i = \begin{bmatrix} \frac{-{}^i I_{ixx} + {}^i I_{iyy} + {}^i I_{izz}}{2} & I_{ixy} & I_{ixz} & m_i S_{ix} \\ I_{ixy} & \frac{{}^i I_{ixx} - {}^i I_{iyy} + {}^i I_{izz}}{2} & I_{iyz} & m_i S_{iy} \\ I_{ixz} & I_{iyz} & \frac{{}^i I_{ixx} + {}^i I_{iyy} - {}^i I_{izz}}{2} & m_i S_{iz} \\ m_i S_{ix} & m_i S_{iy} & m_i S_{iz} & m_i \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

L'énergie cinétique du corps *i* est donnée par :

$$K_i = \frac{1}{2}\int {}^0\dot{r}^{T\,0}\dot{r}\ dm \tag{2.14}$$

$$K_i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i} trace\left(\frac{\partial^0 T_i}{\partial q_i} H_i \frac{\partial^0 T_i^T}{\partial q_k}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k \tag{2.15}$$

trace : signifie trace de la matrice ; elle est égale à la somme des éléments de la diagonale.

L'énergie de potentiel du corps i est donnée par :

$$V_i = -m_i g^T T_i^i S_i \tag{2.16}$$

$g = \left[g_x, g_y, g_z, 0\right]^T$: est le vecteur des accélérations de la gravité exprimé dans R_0

Le Lagrangien pour l'ensemble des corps du manipulateur est :

$$L = \sum_{i=1}^{n}(K_i - V_i) \tag{2.17}$$

$$\tau = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} trace\left(\frac{\partial^0 T_k}{\partial q_j} H_k \frac{\partial^0 T_k^T}{\partial q_i}\right)\ddot{q}_j + \sum_{k=i}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{m=1}^{k} trace\left(\frac{\partial^{20} T_k}{\partial q_j \partial q_m} H_k \frac{\partial^0 T_k^T}{\partial q_i}\right)\dot{q}_j\dot{q}_m - \sum_{j=1}^{n} m_j g^T \frac{\partial^0 T_j}{\partial q_i}^j S_j \tag{2.18}$$

Le modèle obtenu peut être mis sous la forme matricielle suivante :

$$\tau = M(q)\ddot{q} + N(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) \tag{2.19}$$

Où :

$$M_{ij} = \sum_{k=\max(i,j)}^{n} trace\left(\frac{\partial^0 T_k}{\partial q_j} H_k \frac{\partial^0 T_k^T}{\partial q_i}\right) \tag{2.20}$$

$$N(q,\dot{q}) = \sum_{k=\max(i,j,m)}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{m=1}^{k} trace\left(\frac{\partial^{20} T_k}{\partial q_j \partial q_m} H_k \frac{\partial^0 T_k^T}{\partial q_i}\right)\dot{q}_j\dot{q}_m \tag{2.21}$$

$$G(q) = \sum_{j=1}^{n} m_j g^T \frac{\partial^0 T_j}{\partial q_i}^j S_j \tag{2.22}$$

$M(q)$: Matrice d'inertie du manipulateur, symétrique et régulière.

$N(q,\dot{q})\dot{q}$: Vecteur des termes de Coriolis et centrifuges.

$G(q)$: Vecteur des actions de la gravité.

2.5.1.2. Formalisme de Newton-Euler

Le formalisme de Newton-Euler est basé sur les théorèmes généraux de la mécanique. il exprime le torseur dynamique en Gi des efforts extérieurs sur un corps i par les équations suivantes :

$$F_i = M_i \dot{V}_{Gi} \tag{2.23}$$

$$M_{Gi} = I_{Gi}\dot{\omega}_i + \omega_i \wedge (I_{Gi}\omega_i) \tag{2.24}$$

Cette méthode permet d'établir directement le modèle dynamique inverse (2.12) sans avoir à calculer explicitement les matrices M, N et G de l'équation (2.19). Les paramètres inertiels utilisés sont Mj, Sj et IGj :

Mj moment des efforts extérieurs exercés sur le corps Cj autour de Oj ;

Sj vecteur ayant pour origine Oj et pour extrémité le centre de masse du corps Cj. Il est égal à OjGj ;

IGj matrice d'inertie du corps Cj par rapport à un repère parallèle à Rj et d'origine Gj ;

2.5. 2. Modélisation dynamique direct

Le modèle dynamique direct exprime la position, la vitesse et l'accélération des articulations en fonction du couple appliqué, il est obtenu par inversion du modèle précédent, il s'écrit comme suit:

$$\ddot{q} = M^{-1}(q)(\tau - N(q,q) - G(\dot{q}) - \tau_f) \tag{2.25}$$

2. 6. Modélisation du robot manipulateur de type RRR

Dans notre étude, nous avons considéré un Robot manipulateur de type RRR à trois degrés de liberté (trois liaisons rotoïdes) (figure 2.4).

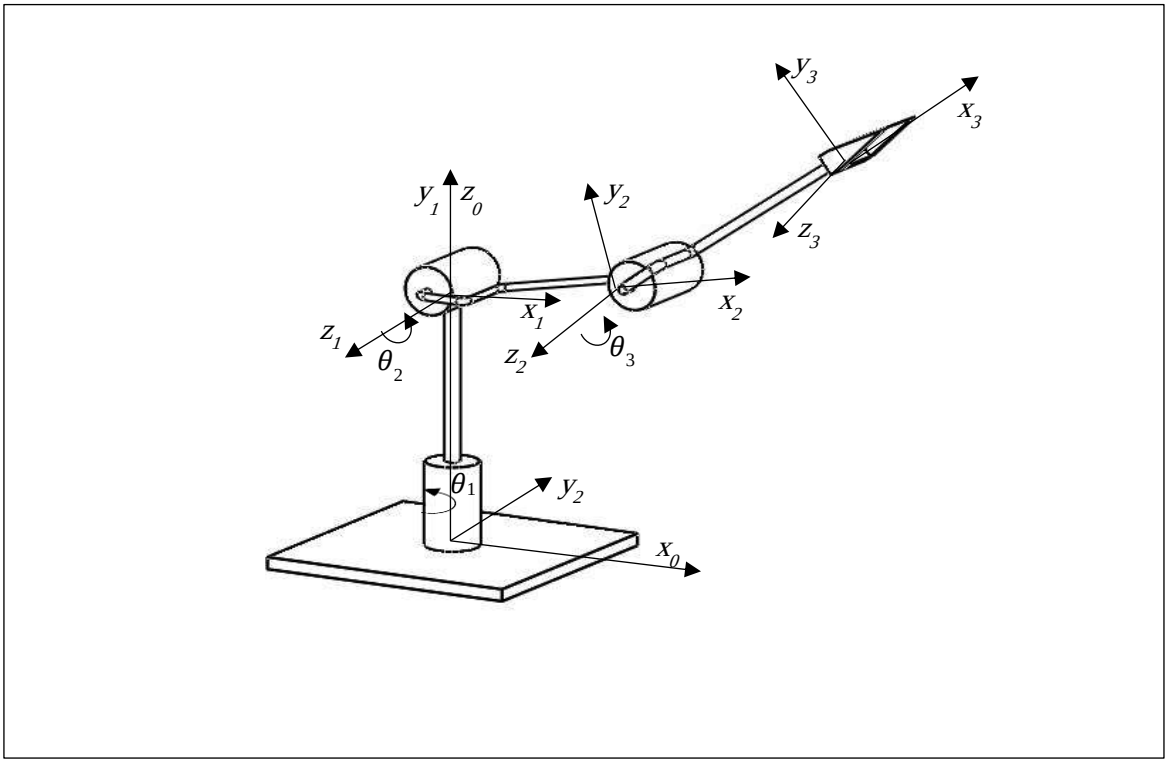


figure 2.4 robot manipulateur type RRR

Tableau 2.1. Paramètres Denavit-Hanterberg modifier du robot

Paramètre Corps i	α_i	a_i	d_i	θ_i
1	$\frac{\pi}{2}$	0	d_1=10cm	θ_1
2	0	a_2=15cm	0	θ_2
3	0	a_3=15cm	0	θ_3

Relations géométriques

A partir du tableau 2.1 et l'utilisation de l'équation (2.3), on en déduit les relations géométriques suivantes :

$$ {}^{0}T_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.26) $$

$$^{1}T_{2}=\begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2C_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$^{2}T_{3}=\begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & a_3C_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & a_3C_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Sachant que : Cos θ_i=C_i ; Sin θ_i=S_i ; Cos (θ_i+ θ_j)=C_{ij} ; Sin (θ_i+ θ_j)=S_{ij}.

Calcul du modèle géométrique direct

Le modèle géométrique directe est exprimé comme suit :

$$^{0}T_{3}=^{0}T_{1}\,^{1}T_{2}\,^{2}T_{3} \quad (2.28)$$

Par multiplication successive des relations (2.25), (2.26) et (2.27), l'équation (2.28) devient

$$^{0}T_{3}=\begin{bmatrix} C_1C_{23} & -C_1S_{23} & S_1 & a_3C_1C_{23}+a_2C_1C_2 \\ S_1C_{23} & -S_1S_{23} & -C_1 & a_3S_1C_{23}+a_2S_1C_2 \\ S_{23} & C_{23} & 0 & a_3S_{23}+a_2S_2+d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Donc les cordonnes de l'outil terminal (P_x P_y P_z) sont .

$P_x= a_3 C_1C_{2\,3} + a_2C_1C_2$

$P_y= a_3 S_1C_{2\,3} + a_2S_1C_2$

$P_z= a_3 S_{2\,3} + a_2S_2 + d_1$

Vérification de la géométrie directe.

Cas1 :

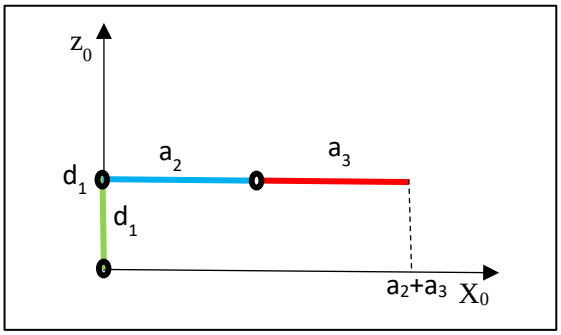
$\theta_1= 0$; $\theta_2 = 0$; $\theta_3 = 0$;

Position d'élément terminal :

P =(p_x p_y p_z)

$P_x = a_3 \cos(0)\cos(0+0)+a_2 \cos(0)\cos(0)=a_3+a_2$

$P_y = a_3 \sin(0)\cos(0+0)+ a_2 \sin(0)\cos(0) = 0$

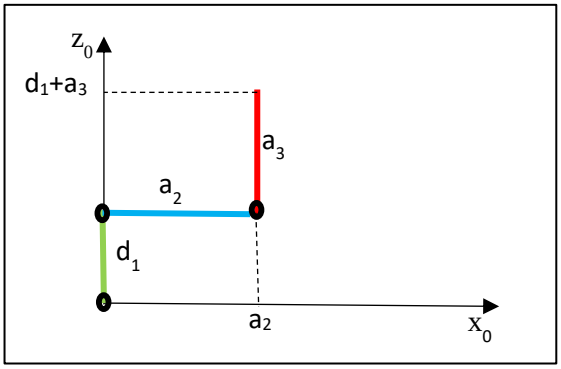


$P_z = a_3 \sin(0+0)+a_2 \sin(0) + d_1 = d_1$

$P=[a_3+a_2 ,0 ,d_1]$

Cas 2 :

$\theta_1 = 0$; $\theta_2 = 0$; $\theta_3 = \frac{\pi}{2}$;



Position d'élément terminal :

$P = (p_x\ p_y\ p_z)$

$P_x = a_3 \cos(0)\cos(0+\frac{\pi}{2})+a_2 \cos(0)\cos(0)=a_2$

$P_y = a_3 \sin(0)\cos(0+\frac{\pi}{2})+ a_2 \sin(0)\cos(0) = 0$

$P_z = a_3 \sin(0+\frac{\pi}{2})+a_2 \sin(0) + d_1 = a_3 + d_1$

$P=[a_2 ,0 ,d_1+a_3]$

Calcul du modèle géométrique inverse

Soit U_0 la situation désirée pour l'organe terminal, telle que :

$$U_0 = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & p_x \\ s_y & n_y & a_y & p_y \\ s_z & n_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

A partir de l'équation (2.28) et par identification des éléments de deux matrices, on obtient :

$$U_0 = {}^0T_n$$

$$\begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_x \\ s_y & n_y & a_y & P_y \\ s_z & n_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1C_{23} & -C_1S_{23} & S_1 & a_3C_1C_{23} + a_2C_1C_2 \\ S_1C_{23} & -S_1S_{23} & -C_1 & a_3S_1C_{23} + a_2S_1C_2 \\ S_{23} & C_{23} & 0 & a_3S_{23} + a_2S_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

De la matrice (2.31) on a les cordonnés de l'outil terminale $(P_x\, P_y\, P_z)$

$$P_x = a_3\, C_1C_{2\,3} + a_2C_1C_2 \tag{2.32}$$

$$P_y = a_3\, S_1C_{2\,3} + a_2S_1C_2 \tag{2.33}$$

$$P_z = a_3 S_{2\,3} + a_2 S_2 + d_1 \quad (2.34)$$

Calcul de l'angle θ_3

En élèvent au carré les équations (2.32) (2.33)et (2.34)on obtient

$$(P_x)^2 = C_1^2((a_3 C_{2\,3})^2 + (a_2 C_2)^2 + 2a_3 a_2 C_2 C_{2\,3}) \quad (2.35)$$

$$(P_y)^2 = S_1^2((a_3 C_{2\,3})^2 + (a_2 C_2)^2 + 2a_3 a_2 C_2 C_{2\,3}) \quad (2.36)$$

$$(P_z - d)^2 = (a_3 S_{2\,3})^2 + (a_2 S_2)^2 + 2a_3 a_2 S_2 S_{2\,3} \quad (2.37)$$

En addition de les équations (2.35) et (2.36).

$$(P_x)^2 + (P_y)^2 = (a_3 C_{2\,3})^2 + (a_2 C_2)^2 + 2a_3 a_2 C_2 C_{2\,3} \quad (2.38)$$

En addition de les équations (2.37) et (2.38) .

$$(P_x)^2 + (P_y)^2 + (P_z - d)^2 = (a_3)^2 + (a_2)^2 + 2a_3 a_2 C_2 C_{2\,3} + 2a_3 a_2 S_2 S_{2\,3} \quad (2.39)$$

$$2a_3 a_2 (C_2 C_{2\,3} + S_2 S_{2\,3}) = (P_x)^2 + (P_y)^2 + (P_z - d)^2 - ((a_3)^2 + (a_2)^2) \quad (2.40)$$

En intègre le signe (-) dans le sinus et le cosinus , on a :

$$2a_3 a_2 (C(-\theta_2).C(\theta_2 + \theta_3) - S(-\theta_2).S(\theta_2 + \theta_3)) = (P_x)^2 + (P_y)^2 + (P_z - d)^2 - ((a_3)^2 + (a_2)^2) \quad (2.41)$$

D'ou

$$C(-\theta_2 + \theta_2 + \theta_3) = C(\theta_3) = \frac{Px^2 + Py^2 + (Pz - d)^2 - (a_3{}^2 + a_2{}^2)}{2a_2 a_3} \quad (2.42)$$

Donc :

$$\theta_3 = \cos^{-1}\left(\frac{Px^2 + Py^2 + (Pz - d)^2 - (a_3{}^2 + a_2{}^2)}{2a_2 a_3}\right) \quad (2.43)$$

$$\theta_3 = \mathrm{ATAN2}(\pm\sqrt{1 - c^2(\theta_3)}, c(\theta_3)) \quad (2.44)$$

Calcul de l'angle θ_2

On fait le racine carré sur l'équation (2.38).

$$\sqrt{p_x^2 + p_y^2} = a_3 C_{2\,3} + a_2 C_2 \quad (2.45)$$

Et de l'équation (2.34) on a.

$$P_z - d_1 = a_3 S_{2\,3} + a_2 S_2 \quad (2.46)$$

Les équations (2.45) et (2.46) construit un système de deux d'équation de deux inconnus.

$$\begin{cases}(a_2+a_3C_3).S_2+a_3S_3.C_2 = Pz-d_1 & (2.47)\\ -a_3S_3.S_2+(a_2+a_3C_3).C_2 = (Px^2+Py^2)^{1/2} & (2.48)\end{cases}$$

On met

$A_1=(a_2+a_3C_3)$, $A_2= a_3S_3$, $B_1= a_3S_3$, $B_2= (a_2+a_3C_3)$

Ce que nous donne .

$$\begin{cases}A_1.S_2+B_1.C_2 = Pz-d_1 & (2.49)\\ -A_2.S_2+B_2.C_2 = (Px^2+Py^2)^{\frac{1}{2}} & (2.50)\end{cases}$$

Donc , $\sin\theta_2= \left(\frac{B_1(Px^2+Py^2)^{1/2}-B_2(Pz-d_1)}{A_1.B_2-A_2.B_1}\right)$

Ça implique $\theta_2= \sin^{-1}\left(\frac{a_3S_3(Px^2+Py^2)^{1/2}-(a_2+a_3C_3)(Pz-d_1)}{(a_2+a_3C_3)^2+(a_3S_3)^2}\right)$ (2.51)

$$\cos\theta_2= \left(\frac{A_1(Px^2+Py^2)^{1/2}+A_2(Pz-d_1)}{A_1.B_2-A_2.B_1}\right)$$

Ça implique $\theta_2= \cos^{-1}\left(\frac{(a_2+a_3C_3)(Px^2+Py^2)^{\frac{1}{2}}+a_3S_3(Pz-d_1)}{(a_2+a_3C_3)^2+(a_3S_3)^2}\right)$ (2.51)

$$\theta_2=ATAN_2(\pm S(\theta_2),C(\theta_2))$$

Calcul de l'angle θ_1

De l'équation (2.32) on a.

$$Cos(\theta_1)= \left(\frac{Px}{a_3C_{23}+a_2C_2}\right) \;;\; \theta_1= \cos^{-1}\left(\frac{Px}{a_3C_{23}+a_2C_2}\right) \quad (2.52)$$

De l'équation (2.33) on a.

$$\sin(\theta_1)= \left(\frac{Py}{a_3C_{23}+a_2C_2}\right) \;;\; \theta_1=\sin^{-1}\left(\frac{Py}{a_3C_{23}+a_2C_2}\right) \quad (2.53)$$

Donc

$$\theta_1 =ATANG\,(P_y\;,\;P_x) \quad (2.54)$$

Résultat

$\theta_3= \cos^{-1}\left(\frac{Px^2+Py^2+(Pz-d_1)^2-(a_3^2+a_2^2)}{2a_2a_3}\right)$

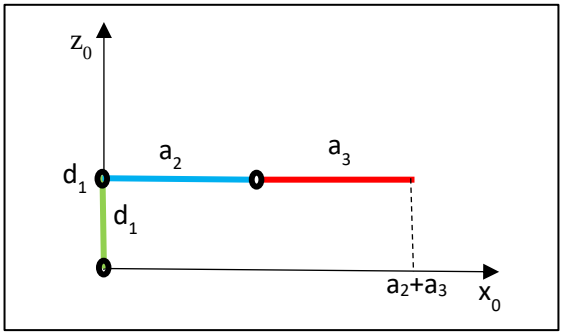
$\theta_2= \cos^{-1}\left(\frac{(a_2+a_3C_3)(Px^2+Py^2)^{\frac{1}{2}}+a_3S_3(Pz-d_1)}{(a_2+a_3C_3)^2+(a_3S_3)^2}\right)$

$\theta_2= \sin^{-1}\left(\frac{a_3S_3(Px^2+Py^2)^{1/2}-(a_2+a_3C_3)(Pz-d_1)}{(a_2+a_3C_3)^2+(a_3S_3)^2}\right)$

$\theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{Px}{a_3C_{23}+a_2C_2}\right)$

$\theta_1 = \sin^{-1}\left(\frac{Py}{a_3C_{23}+a_2C_2}\right)$

Vérification de la géométrie inverse



Cas1 :

$E = [p_x\ p_y\ p_z] = [a_2+a_3, 0, d_1]$

$\theta_3 = \cos^{-1}\left(\frac{(a_2+a_3)^2+0^2+(d_1-d_1)^2-(a_3^2+a_2^2)}{2a_2a_3}\right)$

$= \cos^{-1}(1) \quad \Rightarrow \theta_3 = 0$

$\theta_2 = \sin^{-1}\left(\frac{a_3*0((a_2+a_3)^2+0^2)^{1/2}-(a_2+a_3*1)(d_1-d_1)}{(a_2+a_3C_3)^2+(a_3S_3)^2}\right) = \sin^{-1}(0) \quad \Rightarrow \theta_2 = 0$

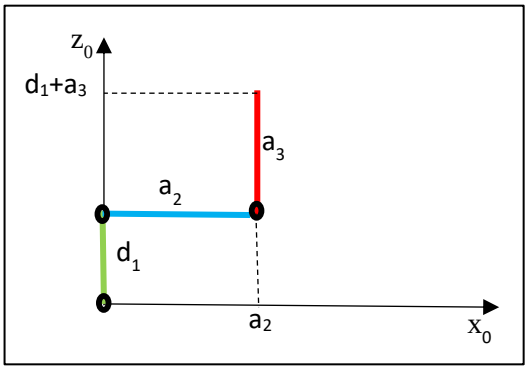
$\theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{a_2+a_3}{a_2+a_3}\right) = \cos^{-1}(1) \quad \Rightarrow \theta_1 = 0$

Ces résultats de calcul sont compatibles avec la situation désirée de l'organe terminal.

Cas2 :

$E = [p_x, p_y, p_z] = [a_2, 0, a_3+d_1]$

La coude en bas



$\theta_3 = \cos^{-1}\left(\frac{a_2^2+0^2+((a_3+d_1-d_1)^2-(a_2^2+a_3^2)}{2a_2a_3}\right)$

$= \cos^{-1}(0) \quad \Rightarrow \theta_3 = \frac{\pi}{2}$

$\theta_2 = \sin^{-1}\left(\frac{a_3*1(a_2^2+0^2)^{\frac{1}{2}}-(a_2+a_3*0)(a_3+d_1-d_1)}{(a_2+a_3*0)^2+(a_3*1)^2}\right) = \sin^{-1}(0) \quad \Rightarrow \theta_2 = 0$

$\theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{Px}{a_3C_{23}+a_2C_2}\right)$

$\theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{a_2}{a_3*0+a_2*1}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{a_2}{a_2}\right) \quad / \quad a_1 = a_2$

$= \cos^{-1}(1) \quad \Rightarrow \theta_1 = 0$

Ces résultats de calcul sont compatibles avec la situation désirée de l'organe terminal.

Le coude en haut :

Calcule de l'angle (θ_3)

Pour avoir le coude en haut on met le signe négative(-) à (θ_3)

$\theta_3 = -\cos^{-1}\left(\frac{a_2^2+0^2+((a_3+d_1-d_1)^2-(a_2^2+a_3^2)}{2a_2a_3}\right) = -\cos^{-1}(0) \quad \Rightarrow \theta_3 = -\frac{\pi}{2}$

Calcule de l'angle θ_2

si on utilise la solution de l'angle (θ_2) en fonction de($\sin^{-1}$) on a un configuration singulier.

et tell que la fonction (sin) est impaire : sin (60)=sin(120)

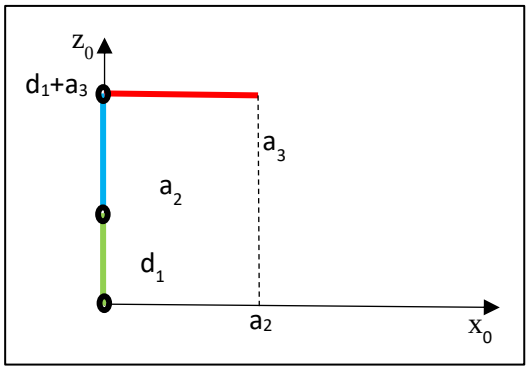
$\theta_2 = \sin^{-1}\left(\frac{a_3S_3(Px^2+Py^2)^{1/2}-(a_2+a_3C_3)(Pz-d_1)}{(a_2+a_3C_3)^2+(a_3S_3)^2}\right)$

$\theta_2 = \sin^{-1}\left(\frac{a_3*-1(a_2^2+0^2)^{\frac{1}{2}}-(a_2+a_3*0)(a_3+d_1-d_1)}{(a_2+a_3*0)^2+(a_3*(-1))^2}\right)$

$=\sin^{-1}\left(\frac{-2(a_2a_3)}{a_2^2+a_3^2}\right)$ on a :$a_2=a_3$

donc

$\theta_2=\sin^{-1}(-1) \Rightarrow \theta_2 = -\frac{\pi}{2}$



Ces résultats ne sont pas compatibles avec la situation désirée de l'organe terminal.

Mais si on utilise la solution de l'angle (θ_2) en fonction de ($\cos^{-1}$) On a :

$\theta_2 = \cos^{-1}\left(\frac{(a_2+a_3*0)(a_2^2+0^2)^{\frac{1}{2}}+a_3*(-1)*(d+a_3-d_1)}{(a_2+a_3*0)^2+(a_3*(-1))^2}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\frac{a_2^2-a_3^2}{a_2^2+a_3^2}\right) = \cos^{-1}(0) \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{2}$

$\theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{Px}{a_3C_{23}+a_2C_2}\right)$

$\theta_1=\cos^{-1}\left(\frac{a_2}{a_3*0+a_2*1}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{a_2}{a_2}\right)$ / $a_1=a_2$

$=\cos^{-1}(1) \Rightarrow \theta_1 = 0$

Calcul du modèle cinématique direct

Le modèle cinématique direct est donnée par l'équation (2.9), à savoir :

$$\dot{X} = J(q)\dot{q}$$

Avec $J(q) \in R^{m*n}$ est la matrice jacobéenne.

A partir des expressions (2.32), (2.33), et(2.34), on note :

$$f_1=P_x=a_3\,C_1C_{2\,3}+a_2C_1C_2 \tag{2.55}$$

$$f_2=P_y=a_3\,S_1C_{2\,3}+a_2S_1C_2 \tag{2.56}$$

$$f_3=P_z=a_3\,S_{2\,3}+a_2S_2+d_1 \tag{2.57}$$

La matrice jacobéenne est :

$$J(q)=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_1}{\partial d_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_2}{\partial d_1} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \theta_2} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta_3} & \frac{\partial f_3}{\partial d_1} \end{bmatrix} \tag{2.58}$$

Par dérivation des expressions (2.32), (2.33), et (2.34), on obtient :

$$J(q)=\begin{bmatrix} -(a_3\,S_1C_{2\,3}+a_2S_1C_{2\,3}) & -(a_3\,C_1S_{2\,3}+a_2C_1S_{2)} & -a_3\,C_1S_{2\,3} \\ a_3\,C_1C_{2\,3}+a_2C_1C_2 & -(a_3\,S_1S_{2\,3}+a_2S_1S_2) & -a_3\,S_1S_{2\,3} \\ 0 & a_3\,C_{2\,3}+a_2C_2 & a_3\,C_{2\,3} \end{bmatrix} \tag{2.59}$$

Donc, le modèle cinématique direct est exprimée comme suit :

$$\dot{X}=\begin{bmatrix} -(a_3\,S_1C_{2\,3}+a_2S_1C_{2\,3}) & -(a_3\,C_1S_{2\,3}+a_2C_1S_{2)} & -a_3\,C_1S_{2\,3} \\ a_3\,C_1C_{2\,3}+a_2C_1C_2 & -(a_3\,S_1S_{2\,3}+a_2S_1S_2) & -a_3\,S_1S_{2\,3} \\ 0 & a_3\,C_{2\,3}+a_2C_2 & a_3\,C_{2\,3} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \tag{2.60}$$

Calcul du modèle Cinématique inverse

Le modèle cinématique inverse est donnée par l'équation (2.11), à savoir :

$$\dot{q}=J^{-1}(q)\,\dot{X}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} & j_{2\,3} \\ j_{31} & j_{32} & j_{3\,3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{P}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{bmatrix} \tag{2.61}$$

$$\dot{\theta}_1=j_{11*}\dot{p}_x+j_{12*}\dot{p}_y+j_{13*}\dot{p}_y \tag{2.62}$$

$$\dot{\theta}_2=j_{21*}\dot{p}_x+j_{22*}\dot{p}_y+j_{23*}\dot{p}_y \tag{2.63}$$

$$\dot{\theta}_3=j_{31*}\dot{p}_x+j_{32*}\dot{p}_y+j_{33*}\dot{p}_y \tag{2.64}$$

On met : $a_3=a_2=a$

$J_{11} = -S_1/(a\, C_{23}\, C_1^2 + 2aC_{23}S_1^2 + aC_1^2C_2)$

$J_{12}=C_1 \ / \ (a\, C_{23}\, C_1^2 + 2\, a\, C_{23}\, S_1^2 + a\, C_1^2C_2$

$j_{13}= 0$

$J_{21} =(C1(C_{223}+C_{2233}+C_3+1))/(2\, a\, C_1^2\, S_2 - 2\, S_2+2C_3^2S_2+C_1^2C_2\, S_3-C_1^2C_3^2S_2$

$+2C_2C_3S_3 -C_1^2C_2C_3S_3)))$

$J_{22}= (S_1(C_{2233}+1))/(a(C_1^2S_2-2\, S_2+2\, C_3^2S_2+C_1^2C_2S_3-C_1^2C_3^2S_2+2\, C_2C_3S_3-C_1^2C_2C_3S_3))$

$J_{23} = S_{23}/(a\, S_3)$

$J_{31} = -(C_1(C_3+1)(C_{223}+1))/(a\,(C_1^2S_2-2S_2+2C_3^2S_2+C_1^2C_2S_3-C_1^2C_3^2S_2+2C_2C_3S_3-C_1^2C_2C_3S_3))$

$J_{32}= -(S_1(C_{223}+C_{2233}+C_3+1))/(a(C_1^2S_2-2S_2+2C_3^2S_2+C_1^2C_2S_3-C_1^2C_3^2S_2+2C_2C_3S_3-C_1^2C_2C_3S_3))$

$J_{33} = -(S_{23}+S_1)/(a\, S_3)$

Calcul du modèle dynamique selon le formalisme de Lagrange :

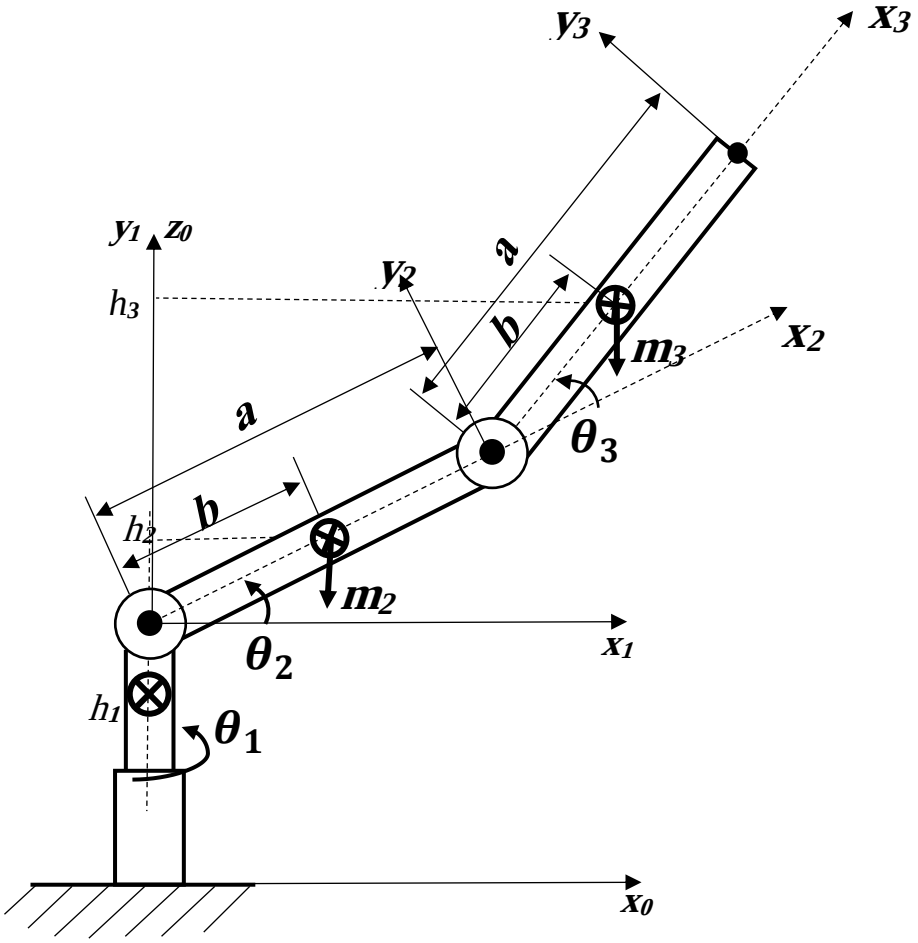


Figure 2.5 : Répartition des masses

L'énergie cinétique et potentiel des éléments du robot :

Elément (1)

L'énergie cinétique

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 \quad (2.65)$$

le centre de masse de l'élément(1) dans le repère R_0

$$x_1=0,\ y_1=0,\ z_1=d1$$

la vitesse de centre de masse de l'élément (1) dans le repère R_0

$$v_1=\dot{x}_1 \overrightarrow{x_0} + \dot{y}_1 \overrightarrow{y_0} + \dot{z}_1 \overrightarrow{z_0} \quad (2.66)$$

$$=0 \overrightarrow{x_0}+0\overrightarrow{y_0}+0\overrightarrow{z_0} \quad (2.67)$$

donc : $v_1 = 0$; $v_1^2 = 0$

la vitesse angulaire de centre de masse de l'élément (1) dans le repère R_0

$$\overrightarrow{\omega_1}= \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_0} \quad (2.68)$$

$$\omega_1^2=\dot{\theta}_1^2 \quad (2.69)$$

le moment d'inertie I_1 :calculer par le programme SolidWorks

Donc :

$$E_{c1} = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 \quad (2.70)$$

L'énergie potentiel

$E_{p1} = m_1 g h_1 = \text{constant}$; tell que : h_1=constant

Elément (2)

L'énergie cinétique

$$E_{c2} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 \quad (2.71)$$

le centre de masse de l'élément (2) dans le repère R0

$$x_2= b_2 \cos\theta_2 \cos\theta_1 \quad (2.72)$$

$$y_2= b_2 \cos\theta_2 \sin\theta_1 \quad (2.73)$$

$$z_2= d_1+b_2 \sin\theta_2 \quad (2.74)$$

la vitesse de centre de masse de l'élément (2) dans le repère R_0

$$v_2= \dot{x}_2 \overrightarrow{x_0} + \dot{y}_2 \overrightarrow{y_0} + \dot{z}_2 \overrightarrow{z_0} \quad (2.75)$$

$$= (- b_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2\cos\theta_1 - b_2\dot{\theta}_1 \cos\theta_2\sin\theta_1)\ \overrightarrow{x_0}$$

$$+(- b_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2\sin\theta_1 + b_2\dot{\theta}_1 \cos\theta_2\cos\theta_1)\overrightarrow{y_0}$$

$$+(b_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2)\ \overrightarrow{z_0} \quad (2.76)$$

Donc $v_2^2=\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2+ \dot{z}_2^2$ (2.77)

$$\dot{x}_2^2 = (b_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2\cos\theta_1)^2+(b_2\dot{\theta}_1 \cos\theta_2\sin\theta_1)^2$$
$$+2(b_2 \dot{\theta}_2 \sin\theta_2\cos\theta_1 * b_2 \dot{\theta}_1 \cos\theta_2\sin\theta_1) \quad (2.78)$$

$$\dot{y}_2^2 = (b_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2\sin\theta_1)^2+(b_2\dot{\theta}_1 \cos\theta_2\cos\theta_1)^2$$
$$-2 (b_2\dot{\theta}_2 \sin\theta_2\sin\theta_1 * b_2\dot{\theta}_1 \cos\theta_2\cos\theta_1) \quad (2.79)$$

$$\dot{z}_2^2 = (b_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2)^2 \quad (2.80)$$

$$v_2^2= (b_2\dot{\theta}_2)^2+(b_2\dot{\theta}_1 \cos\theta_2)^2 \quad (2.81)$$

la vitesse angulaire de centre de masse de l'élément (2) dans le repère R_0

$$\overrightarrow{\omega_2}= \dot{\theta}_1 \overrightarrow{z_0}+\dot{\theta}_2 \overrightarrow{z_1} \quad (2.82)$$

Donc $\omega_2^2=\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2$ (2.83)

le moment d'inertie I_2:calculer par le programme SolidWorks

Donc :

$$E_{c2} = \frac{1}{2} m_2 ((b_2\dot{\theta}_2)^2+(b_2\dot{\theta}_1 \cos\theta_2)^2)+ \frac{1}{2} I_2(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2) \quad (2.84)$$

L'énergie potentiel :

$E_{p2} = m_2 g h_2$; tell que : $h_2= d_1+b_2 \sin\theta_2$

$$E_{p2} = m_2 g (d_1+b_2 \sin\theta_2) \quad (2.85)$$

Elément (3)

le centre de masse de l'élément (3) dans le repère R_0

$$x_3= \cos\theta_1 (a_2 \cos\theta_2 + b_3 \cos(\theta_2+\theta_2)) \quad (2.86)$$

$$y_3= \sin\theta_1(a_2 \cos\theta_2 + b_3 \cos(\theta_2+\theta_2)) \quad (2.87)$$

$$z_3= d_1+a_2 \sin\theta_2 +b_3 \sin(\theta_2+\theta_3)) \quad (2.88)$$

la vitesse de centre de masse de l'élément (3) dans le repère R_0

$$v_3= \dot{x}_3 \overrightarrow{x_0}+ \dot{y}_3 \overrightarrow{y_0} + \dot{z}_3 \overrightarrow{z_0}$$
$$= (- \dot{\theta}_1 \sin\theta_1(a_2 \cos\theta_2 + b_3 \cos(\theta_2+\theta_2)) - \cos\theta_1 (a_2 \dot{\theta}_2\sin\theta_2+b_3(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3)\sin(\theta_2+\theta_3))) \overrightarrow{x_0}$$
$$+(\dot{\theta}_1 \cos\theta_1(a_2 \cos\theta_2 + b_3 \cos(\theta_2+\theta_2)) - \sin\theta_1 (a_2 \dot{\theta}_2\sin\theta_2 +b_3(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3)\sin(\theta_2+\theta_3))) \overrightarrow{y_0}$$
$$+(a_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2+b_3 (\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3) \cos (\theta_2+\theta_3))\ \overrightarrow{z_0} \quad (2.89)$$

$$v_3^2=\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2+ \dot{z}_3^2 \quad (2.89)$$

$$\dot{x}_3^2 = (\dot{\theta}_1 \sin\theta_1(a_2 \cos\theta_2 + b_3 \cos(\theta_2+\theta_3)))^2+(\cos\theta_1 (a_2 \dot{\theta}_2\sin\theta_2 +b_3(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3)\sin(\theta_2+\theta_3)))^2$$
$$-2(- \dot{\theta}_1 \sin\theta_1(a_2 \cos\theta_2 + b_3 \cos(\theta_2+\theta_3))* \cos\theta_1 (a_2 \dot{\theta}_2\sin\theta_2 +b_3(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3)\sin(\theta_2+\theta_3)))$$

(2.90)

$$\dot{y}_3^2 =(\dot{\theta}_1 \cos\theta_1(a_2 \cos\theta_2 + b_3 \cos(\theta_2+\theta_3)))^2+ (\sin\theta_1 (a_2 \dot{\theta}_2\sin\theta_2 +b_3(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3)\sin(\theta_2+\theta_3)))^2$$
$$-2(\dot{\theta}_1 \cos\theta_1(a_2 \cos\theta_2 + b_3 \cos(\theta_2+\theta_3))* \sin\theta_1 (a_2 \dot{\theta}_2\sin\theta_2 +b_3(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3)\sin(\theta_2+\theta_3)))$$

(2.91)

$$\dot{z}_3^2=(a_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2)^2+(b_3 (\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3) \cos (\theta_2+\theta_3)))^2$$
$$+2(a_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2 * b_3 (\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3) \cos (\theta_2+\theta_3))) \quad (2.92)$$

$$v_3^2=(\dot{\theta}_1 (a_2 \cos\theta_2 + b_3 \cos(\theta_2+\theta_3)))^2+ (a_2\dot{\theta}_2)^2+ (b_3 (\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3))^2+ a_2\dot{\theta}_2 b_3 (\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3) \cos (\theta_2-\theta_3))$$

(2.93)

la vitesse angulaire de centre de masse de l'élément (3) dans le repère R_0

$$\vec{\omega}_3= \dot{\theta}_1 \vec{z_1}+\dot{\theta}_2 \vec{z_2}+\dot{\theta}_3 \vec{z_3} \quad (2.94)$$

De ${}^0T_1$ On a

$$\vec{z_1} = C_1 \vec{x_0} - S_1 \vec{y_0}$$

De ${}^0T_2$ On a

$$\vec{z_1} = C_1 \vec{x_0} - S_1 \vec{y_0}$$

donc :

$$\vec{\omega}_3= \dot{\theta}_1 \vec{z_0}+(\dot{\theta}_2 +\dot{\theta}_3)\vec{z_1} \quad (2.95)$$

Ce qui donne :

$$\vec{\omega}_3= \dot{\theta}_1 \vec{z_0}+(\dot{\theta}_2 +\dot{\theta}_3)\vec{z_1} \quad (2.96)$$

d'où $\vec{z_0} \perp \vec{z_1}$

$$\omega_3^2=\dot{\theta}_1^2+(\dot{\theta}_2 +\dot{\theta}_3)^2 \quad (2.97)$$

le moment d'inertie I_2: du programme SolidWorks

Donc :

$$E_{c3} =\frac{1}{2} m_3((\dot{\theta}_1(a_2 \cos\theta_2+b_3 \cos(\theta_2+\theta_3)))^2+(a_2\dot{\theta}_2)^2+(b_3(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3))^2+a_2\dot{\theta}_2 b_3(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3)\cos (\theta_2-\theta_3))$$

$$+\frac{1}{2} I_3(\dot{\theta}_1^2+(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3)^2) \quad (2.98)$$

L'énergie potentiel :

$$E_{p3} = m_3 g h_3 ; \qquad \text{tell que : } h_3 = d_1+a_2 \sin\theta_2 + b_3 \sin(\theta_2+\theta_3)$$

$$E_{p3} = m_3 g (d_1+a_2 \sin\theta_2 + b_3 \sin(\theta_2+\theta_3)) \quad (2.99)$$

L'énergie cinétique total

$$E_{cT} = E_{c1}+E_{c2}+E_{c3}$$

$$E_{cT} = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 ((b_2\dot{\theta}_2)^2+(b_2\dot{\theta}_1 \cos\theta_2)^2)+\frac{1}{2} I_2(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2)$$

$$+\frac{1}{2} m_3((\dot{\theta}_1(a_2 \cos\theta_2+b_3 \cos(\theta_2+\theta_3)))^2+(a_2\dot{\theta}_2)^2+(b_3(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3))^2+a_2\dot{\theta}_2 b_3(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3)\cos(\theta_2-\theta_3))$$

$$+\frac{1}{2} I_3(\dot{\theta}_1^2+(\dot{\theta}_2^2+\dot{\theta}_3^2)) \quad (2.100)$$

L'énergie potentiel total :

$$E_{pT} = E_{p1} + E_{p2} + E_{p3}$$

$$E_{pT} = -m_2 g (d_1+b_2 \sin\theta_2) - m_3 g (d_1+a_2 \sin\theta_2 + b_3 \sin(\theta_2+\theta_3)) \quad (2.101)$$

Calcul de Lagrange :

$$L=K-V \qquad k=E_{cT} ; \quad V=E_{pT}$$

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 ((b_2\dot{\theta}_2)^2+(b_2\dot{\theta}_1 \cos\theta_2)^2)+\frac{1}{2} I_2(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2) + \frac{1}{2} m_3((\dot{\theta}_1(a_2 \cos\theta_2+b_3 \cos(\theta_2+\theta_3)))^2+(a_2\dot{\theta}_2)^2+(b_3(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3))^2+a_2\dot{\theta}_2 b_3(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3)\cos(\theta_2-\theta_3))+\frac{1}{2} I_3(\dot{\theta}_1^2+(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3)^2)$$

$$+m_2 g(d_1+b_2 \sin\theta_2)+ m_3 g (d_1+a_2 \sin\theta_2 + b_3 \sin(\theta_2+\theta_3)) \quad (2.103)$$

Nous appliquons maintenant l'équation **d'Euler-Lagrange** pour déterminer le modèle dynamique correspondant au robot étudier, soit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta} i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \theta i}\right) = \tau_i \quad \text{avec i= 1,.....,n.}$$

Le couple de l'élément (1): τ_1

$$L = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 ((b_2\dot{\theta}_2)^2+(b_2\dot{\theta}_1 \cos\theta_2)^2)+\frac{1}{2} I_2(\dot{\theta}_1^2+\dot{\theta}_2^2) + \frac{1}{2} m_3((\dot{\theta}_1(a_2 \cos\theta_2+b_3 \cos(\theta_2+\theta_3)))^2+(a_2\dot{\theta}_2)^2+(b_3(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3))^2+a_2\dot{\theta}_2 b_3(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3)\cos(\theta_2-\theta_3))+\frac{1}{2} I_3(\dot{\theta}_1^2+(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3)^2)$$

$$+m_2 g(d_1+b_2 \sin\theta_2)+ m_3 g (d_1+a_2 \sin\theta_2 + b_3 \sin(\theta_2+\theta_3)) \quad (2.104)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta} 1} = m_2\dot{\theta}_1 (b_2 \cos\theta_2)^2+m_3\dot{\theta}_1(a_2 \cos\theta_2 + b_3 \cos(\theta_2+\theta_3))^2 + I_1\dot{\theta}_1+I_2\dot{\theta}_1+I_3\dot{\theta}_1 \quad (2.105)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}1}\right)= \ddot{\theta}_1 \ (m_2 (b_2 \cos\theta_2)^2+ m_3 (a_2 \cos\theta_2 + b_3 \cos (\theta_2+\theta_3))^2 +(I_1+I_2+I_3))$$

$$+\dot{\theta}_1 \ (-2m_2b_2^2\dot{\theta}_2\sin\theta_2\cos\theta_2$$

$$+2m_3(-a_2 \dot{\theta}_2\sin\theta_2-b_3(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3)\sin(\theta_2+\theta_3))(a_2 \cos\theta_2+b_3\cos(\theta_2+\theta_3)))) \quad (2.106)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta 1} = 0 \quad (2.107)$$

Donc :

$$\tau_1= \ddot{\theta}_1 \ (m_2 (b_2 \cos\theta_2)^2+ m_3 (a_2 \cos\theta_2 + b_3 \cos (\theta_2+\theta_3))^2 +(I_1+I_2+I_3))$$

$$+ \dot{\theta}_1 (-2m_2b_2^2\dot{\theta}_1\sin\theta_2\cos\theta_2+2m_3(-a_2 \dot{\theta}_2\sin\theta_2-$$
$$b_3(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3)\sin(\theta_2+\theta_3))(a_2\cos\theta_2+b_3\cos(\theta_2+\theta_3)))) \quad (2.108)$$

Le couple de l'élément (2): τ_2

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}2} =m_2b_2^2\dot{\theta}_2 +m_3 \ (a_2^2\dot{\theta}_2+b_3^2(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3)$$

$$+\frac{1}{2} a_2b_3(2\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3) \cos (\theta_2-\theta_3))+ I_2\dot{\theta}_2+ I_3(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3) \quad (2.109)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}2}\right)= \ddot{\theta}_2(I_2+ I_3 +m_2b_2^2+m_3 \ (a_2^2+b_3^2 +a_2b_3\cos (\theta_2-\theta_3))+\ddot{\theta}_3(I_3+b_3^2 +\frac{1}{2} m_3 \ a_2b_3\cos (\theta_2-\theta_3)$$
$$-\dot{\theta}_2 \ \frac{1}{2} m_3(a_2b_3 \ (2\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3) \sin(\theta_2-\theta_3)) +\frac{1}{2} \ \dot{\theta}_3 \ m_3(a_2b_3 \ (2\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_3) \sin(\theta_2-\theta_3)) \quad (2.110)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta 2} = \ =\dot{\theta}_1^2(- m_2 b_2^2\sin\theta_2\cos\theta_2+m_3 (-a_2 \sin\theta_2-b_3 \sin(\theta_2+\theta_3))(a_2 \cos\theta_2+b_3 \cos(\theta_2+\theta_3))$$

$$- \dot{\theta}_2 \frac{1}{2} m_3(a_2b_3(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3)\sin(\theta_2-\theta_3)) +m_2 gb_2 \cos\theta_2+ m_3 g (a_2 \cos\theta_2 +b_3\cos(\theta_2+\theta_3)) \quad (2.111)$$

Donc :

$$\tau_2= \ddot{\theta}_2(I_2+ I_3 +m_2b_2^2+ m_3 \ (a_2^2+b_3^2 +a_2b_3\cos (\theta_2-\theta_3))+\ddot{\theta}_3(I_3+b_3^2 +\frac{1}{2} m_3 \ a_2b_3\cos (\theta_2-\theta_3)$$
$$\dot{\theta}_1^2(- m_2 b_2^2\sin\theta_2\cos\theta_2+m_3 (-a_2 \sin\theta_2-b_3 \sin(\theta_2+\theta_3))(a_2 \cos\theta_2+b_3 \cos(\theta_2+\theta_3))$$

$$-\dot{\theta}_2 (m_3(a_2b_3 (\frac{3}{2} \dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3) \sin(\theta_2-\theta_3)))+ \dot{\theta}_3 (-m_3(a_2b_3(2\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_3) \sin(\theta_2-\theta_3)))$$

$$+ m_2 gb_2 \cos\theta_2+ m_3 g (a_2 \cos\theta_2 +b_3\cos(\theta_2+\theta_3)) \quad (2.113)$$

Le couple de l'élément (3) :τ_3

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}3} =\frac{1}{2} \ m_3[b_3^2(2(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3)+ a_2b_3\dot{\theta}_2 \cos (\theta_2-\theta_3))] + I_3 (\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3) \quad (2.114)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}3}\right)= \frac{1}{2} m_3 \ [b_3^2 \ (2(\ddot{\theta}_2+\ddot{\theta}_3)+ a_2b_3\ddot{\theta}_2 cos \ (\theta_2-\theta_3))+\dot{\theta}_3 a_2b_3\dot{\theta}_2 \sin \ (\theta_2-\theta_3))- \dot{\theta}_2^2 \ a_2b_3cos(\theta_2-\theta_3)]$$
$$+ I_3 (\ddot{\theta}_2+\ddot{\theta}_3) \quad (2.115)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_3} = \frac{1}{2} m_3(\dot{\theta}_1^2(-2b_3^2 \sin(\theta_2+\theta_3) \cos(\theta_2+\theta_3)-2a_2b_3 \cos\theta_2 \sin(\theta_2+\theta_3))$$

$$+ a_2\dot{\theta}_2 b_3 (\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3) \sin(\theta_2-\theta_3))+m_3g(b_3\cos(\theta_2+\theta_3)) \quad (2.116)$$

Donc :

$$\tau_3= \ddot{\theta}_2(m_3 b_3^2+\frac{1}{2}a_2b_3\cos(\theta_2-\theta_3)+ I_3)+ \ddot{\theta}_3(m_3 b_3^2 + I_3)$$

$$+\dot{\theta}_1 m_3(\dot{\theta}_1(-b_3^2 \sin(\theta_2+\theta_3)\cos(\theta_2+\theta_3)- a_2b_3\cos\theta_2 \sin(\theta_2+\theta_3)))$$

$$+\dot{\theta}_2 m_3a_2 b_3 \dot{\theta}_2\sin(\theta_2-\theta_3) +\dot{\theta}_3 m_3a_2 b_3 \dot{\theta}_2\sin(\theta_2-\theta_3)$$
$$+2 m_3a_2b_3\cos\theta_2 \sin(\theta_2+\theta_3)+ m_3g(b_3\sin(\theta_2+\theta_3)) \quad (2.117)$$

A partie des ’équations (2.108).(2.113) et (2.117).nous avons :

$$\begin{cases}\tau1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta_1}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \\ \tau2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta_2}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} \\ \tau3 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta_3}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_3}\end{cases} \quad (2.118)$$

Ce qui donne :

$$\tau_i=[M]*[\ddot{\theta}_l]+[C]*[\dot{\theta}_l]+g_i \quad (2.119)$$

tell que
M : la matrice d’inertie.
C :la matrice de termes Coriolis et centrifuge
g :le vecteur des termes de force de gravité

$$\begin{bmatrix}\tau_1\\ \tau_2\\ \tau_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13}\\ M_{21} & M_{22} & M_{23}\\ M_{31} & M_{32} & M_{33}\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}\ddot{\theta_1}\\ \ddot{\theta_2}\\ \ddot{\theta_3}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13}\\ h_{21} & h_{22} & h_{23}\\ h_{31} & h_{32} & h_{33}\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}\dot{\theta_1}\\ \dot{\theta_2}\\ \dot{\theta_3}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1\\ g_2\\ g_3\end{bmatrix} \quad (2.120)$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases}\tau1 = M_{11}\ddot{\theta_1} + M_{12}\ddot{\theta_2} + M_{13}\ddot{\theta_3} + h_{11}\dot{\theta_1} + h_{12}\dot{\theta_2} + h_{13}\dot{\theta_3} + g_1 \\ \tau2 = M_{21}\ddot{\theta_1} + M_{22}\ddot{\theta_2} + M_{23}\ddot{\theta_3} + h_{21}\dot{\theta_1} + h_{22}\dot{\theta_2} + h_{23}\dot{\theta_3} + g_2 \\ \tau3 = M_{31}\ddot{\theta_1} + M_{32}\ddot{\theta_2} + M_{33}\ddot{\theta_3} + h_{31}\dot{\theta_1} + h_{32}\dot{\theta_2} + h_{33}\dot{\theta_3} + g_3\end{cases} \quad (2.116)$$

Tell que :
$M_{11} = m_2 (b_2 \cos\theta_2)^2 + m_3 (a_2\cos\theta_2 + b_3\cos(\theta_2+\theta_3))^2$
$M_{12} = 0$
$M_{13} = 0$
$M_{21} = 0$
$M_{22} = I_2 + I_3 + m_2b_2^2 + m_3 (a_2^2+b_3^2 +a_2b_3\cos(\theta_2-\theta_3)$
$M_{23} = I_3+b_3^2 + \frac{1}{2} m_3 a_2b_3\cos(\theta_2-\theta_3)$
$M_{31} = 0$
$M_{32} = m_3 b_3^2+\frac{1}{2}a_2b_3\cos(\theta_2-\theta_3)+ I_3+ \ddot{\theta}_3(m_3 b_3^2 + I_3)$
$M_{33} = m_3 b_3^2 + I_3$

$$h_{11} = -2m_2 b_2^2 \dot{\theta}_1 sin\theta_2 cos\theta_2 + 2m_3(-a_2 \dot{\theta}_2 sin\theta_2 - b_3(\dot{\theta}_2+\dot{\theta}_3)sin(\theta_2+\theta_3))(a_2 cos\theta_2 + b_3 cos(\theta_2+\theta_3)) + (I_1+I_2+I_3))$$

$$h_{12} = 0$$

$$h_{13} = 0$$

$$h_{21} = -m_2 b_2^2 \dot{\theta}_1 sin\theta_2 cos\theta_2 + m_3(\dot{\theta}_1(-a_2 sin\theta_2 - b_3 sin(\theta_2+\theta_3))(a_2 cos\theta_2 + b_3 cos(\theta_2+\theta_3))$$

$$h_{22} = m_3(a_2 b_3 (2\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_3) \sin(\theta_2 - \theta_3)) + \dot{\theta}_3 (-m_3(a_2 b_3 \dot{\theta}_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)))$$

$$h_{23} = -m_3(a_2 b_3 \dot{\theta}_3 \sin(\theta_2 - \theta_3))$$

$$h_{31} = m_3(\dot{\theta}_1(-b_3^2 sin(\theta_2+\theta_3) cos(\theta_2+\theta_3)))$$

$$h_{32} = m_3 a_2 b_3 \dot{\theta}_2 sin(\theta_2 - \theta_3)$$

$$h_{33} = \dot{\theta}_3 m_3 a_2 b_3 \dot{\theta}_2 sin(\theta_2 - \theta_3)$$

$$g_1 = 0$$

$$g_2 = m_2 g b_2 cos\theta_2 + m_3 g (a_2 cos\theta_2 + b_3 cos(\theta_2+\theta_3))$$

$$g_3 = 2 m_3 a_2 b_3 cos\theta_2 sin(\theta_2+\theta_3) + m_3 g(b_3 sin(\theta_2+\theta_3)))$$

2.7.Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différents modèles utilisés pour décrire les mouvements des articulations d'une structure ouverte simple, ensuite, nous avons établis les différents modèles mathématiques permettant la programmation et le contrôle du robot.

Le modèle dynamique est nécessaire pour déterminer la géométrie et la masse des éléments du robot et pour déterminer les couples des actionneurs (ou moteurs d'entrainement).

Chapitre 3 : conception et simulation du robot manipulateur de type RRR

3.1 :Introduction :

Dans ce chapitre, on procède à la conception, la simulation du robot manipulateur et la comparaison des résultats obtenus des modèles cinématiques avec les résultats issus du logiciel Solidworks et MATLAB/Simulink. Le modélisation dynamique du robot nous permet de contrôler les actionneurs et de choisir les moteurs nécessaires.

3.2. Conception de la maquette du robot

La démarche de conception de la maquette du robot consiste à suivre les étapes suivantes :

1. Choix des dimensions pour les éléments constitutifs du système mécanique ;
2. Conception des éléments du robot: choix des matériaux et des caractéristiques géométrique(centre de masse, matrice d'inertie).
3. Assemblage des éléments ;
4. Associer à chaque élément un repère cartésien

.

3.3. Simulation du mouvement

L'objectif de la simulation est de vérifier l'exactitude des résultats de la modélisation des mouvements et de vérifier aussi le bon fonctionnement du robot. Pour ce faire, nous avons utilisé le logiciel MATLAB_SIMULINK.

La démarche de simulation des mouvements consiste à suivre les étapes suivantes :

1. Lancer le logiciel SolidWorks ;
2. Ouvrir le fichier de la maquette ;
3. Lancer le logiciel MATLAB, ensuite lancer SIMULINK ;
4. A partir du menu SolidWorks, choisir SIMSCAPE/ Export ;
5. Vérifier la création des fichiers : *.stl ;
6. Dans la fenêtre de commande de MATLAB, saisir : smimport
7. Vérifier la création d'un fichier : *.xml;
8. Ouvrir le fichier *.xml par SIMULINK ;
9. Choisir les paramètres des articulations ;

10. Ouvrir la bibliothèque de SIMULINK, puis ajouter les éléments suivants :
    From workspece, , convertiseur s_py, convertiseur py s, scope.
11. Rèaliser un programme de mouvement du robot au MATLAB.
12. Cliquer sur le bouton exécuter du simulink

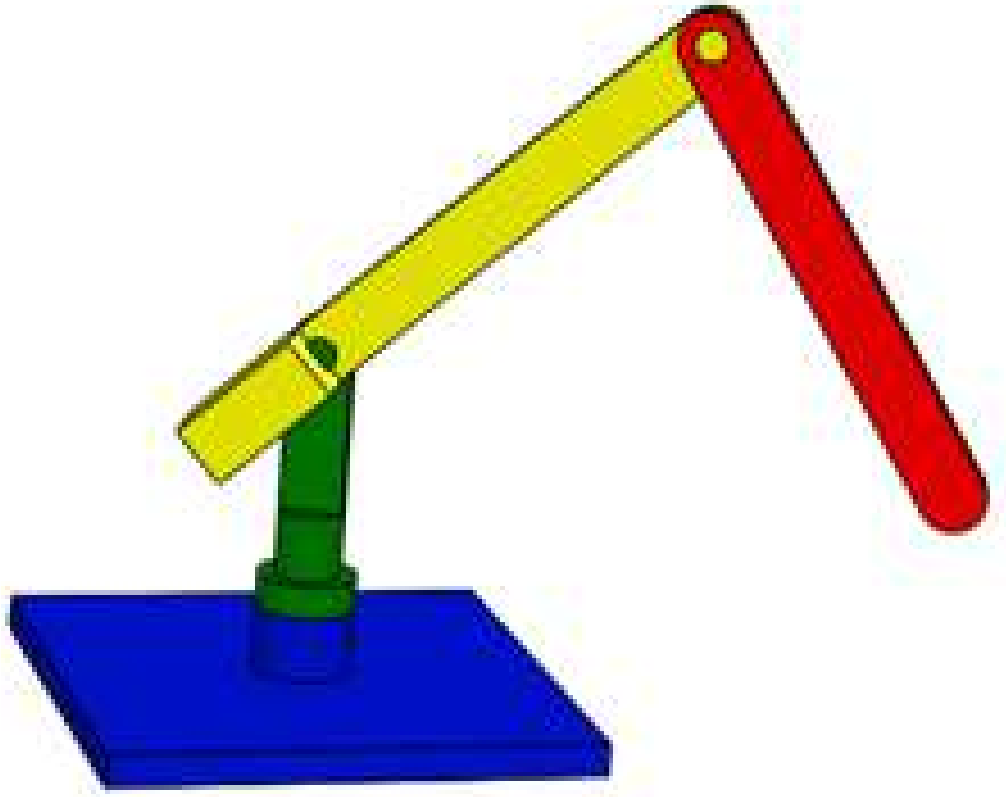


Figure 3.1 : Maquette du robot RRR

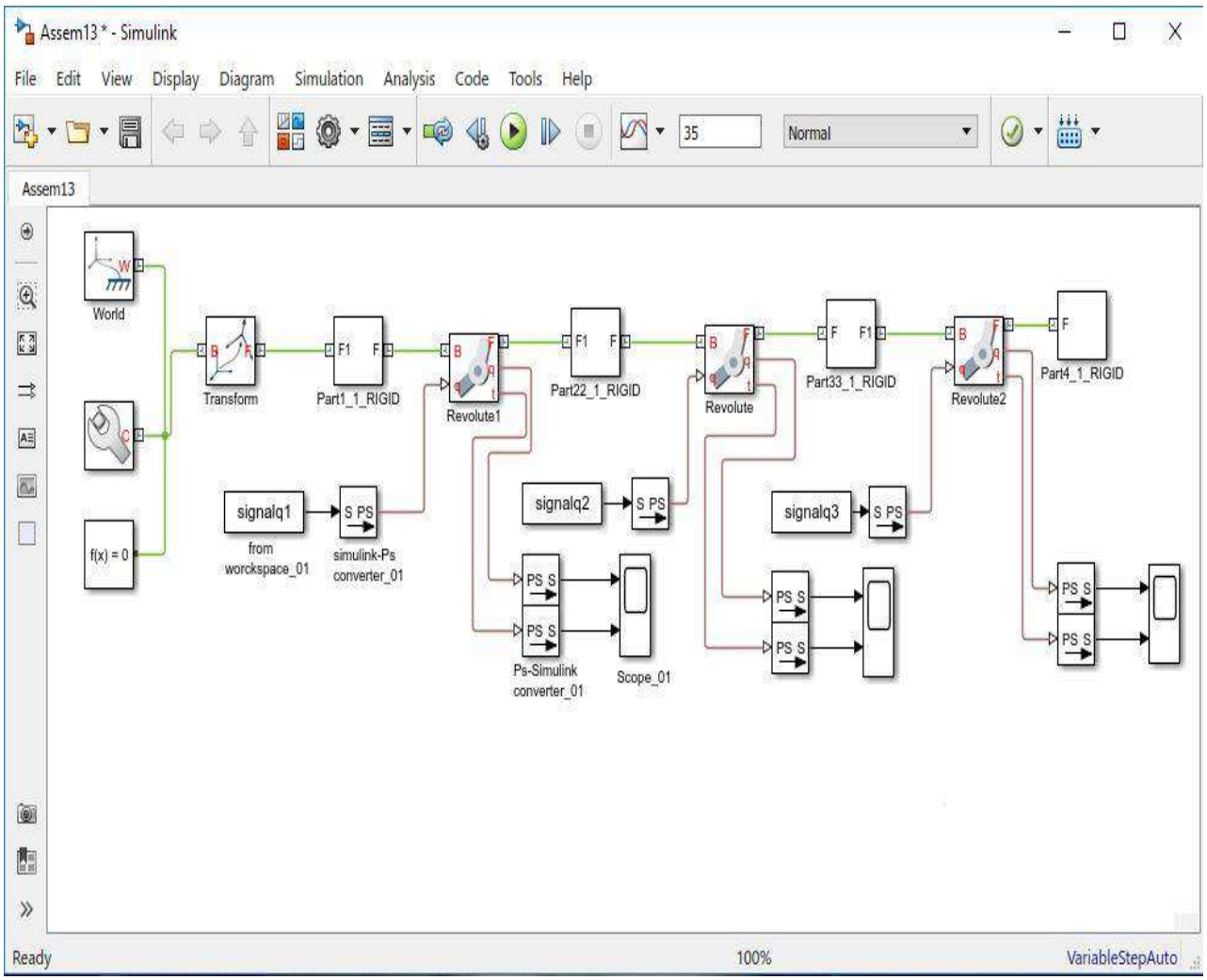


Figure 3.2 : Simulation du mouvement du robot

3.4. Vérification de l'exactitude du fonctionnement

Pour vérifier le bon fonctionnement du programme de simulation, nous avons choisi trois situations désirées de l'organe terminal.

Cas 1 : Situation désirée de l'organe terminal (OT): Point 01:(Px=0. 30, Py = 0, Pz=0.10)

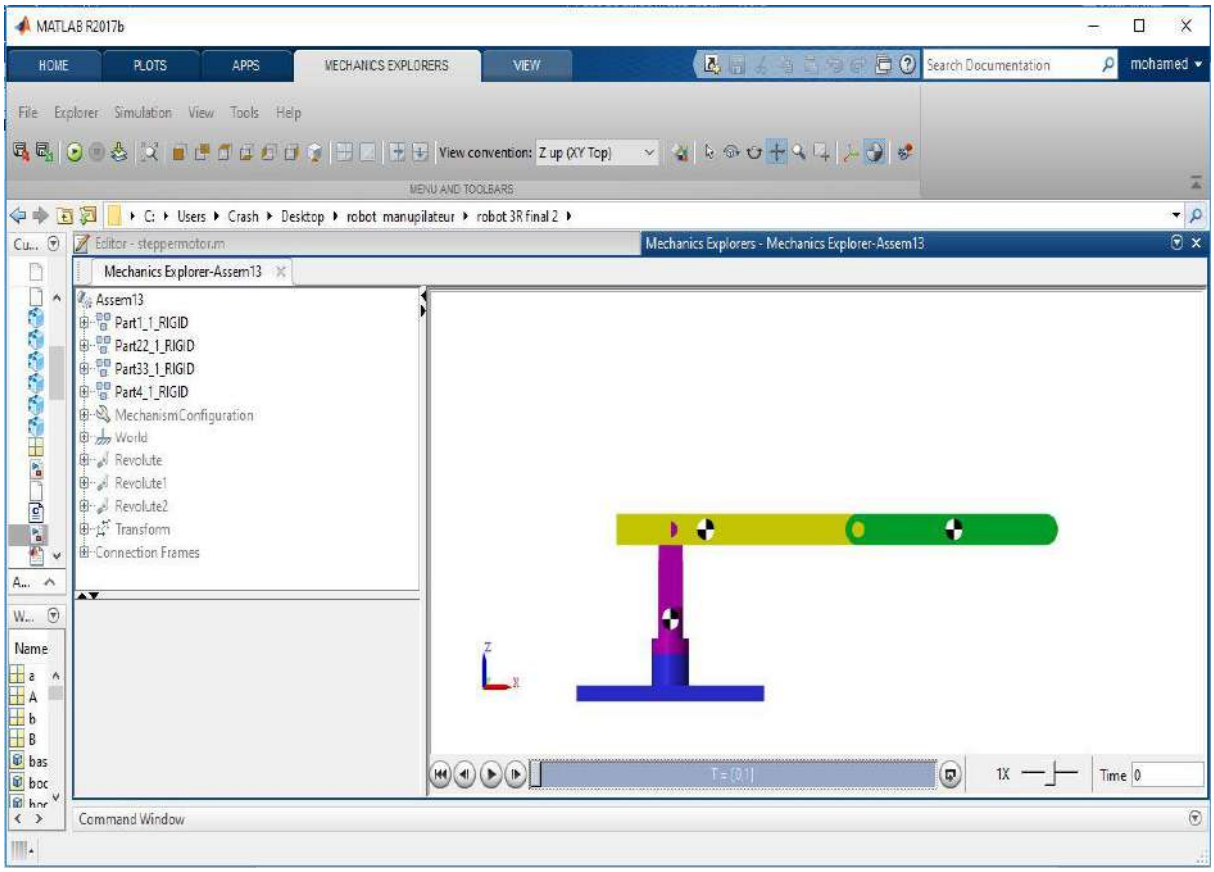


Figure 3.3 : Situation initiale

Cas 2 : Situation désirée de l'OT du: Point 01:(Px=0.30 , Py =0 , Pz =0.10)

vers le point 02 :(Px=0.15 , Py =0.15 , Pz =0.10)

selon une segment pendant cinq seconde à l'utilisation de la géométrie inverse

le coude en bas

Temps : t ϵ [0 5] s

équation du mouvement

$x(t)=0.30-0.6*t^2$

$y(t)=0.6*t^2$

$z(t)=0.10$

$$\theta_3 = \cos^{-1}\left(\frac{Px^2+Py^2+(Pz-d_1)^2-(a_3^2+a_2^2)}{2a_2a_3}\right)$$

$$\theta_2 = \sin^{-1}\left(\frac{a_3S_3(Px^2+Py^2)^{1/2}-(a_2+a_3C_3)(Pz-d_1)}{(a_2+a_3C_3)^2+(a_3S_3)^2}\right)$$

$$\theta_1 = \cos^{-1}\left(\frac{Px}{a_3C_{23}+a_2C_2}\right)$$

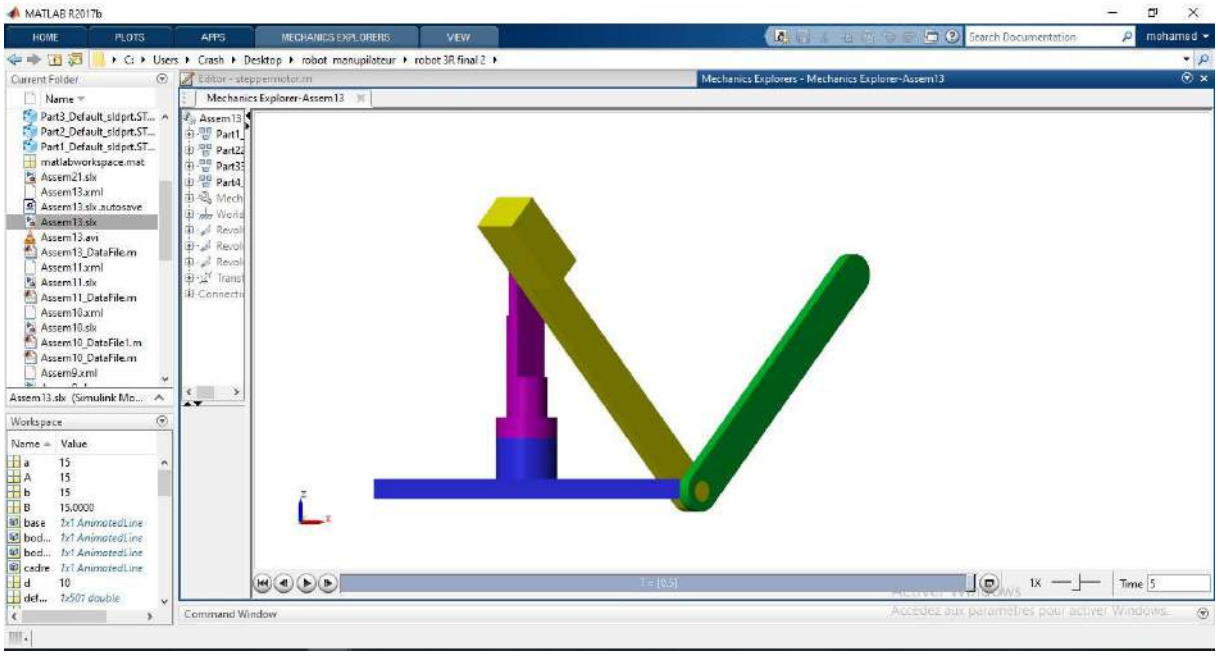


Figure 3.4 : Situation désiré, le coude en bas, cas 2

le coude en haut

Temps : t ϵ [0 5] s

équation du mouvement

$x(t)=0.30-0.6*t^2$

$y(t)=0.6*t^2$

$z(t)=0.10$

$$\theta_3=-\cos^{-1}\left(\frac{Px^2+Py^2+(Pz-d_1)^2-(a_3{}^2+a_2{}^2)}{2a_2a_3}\right)$$

$$\theta_2=\cos^{-1}\left(\frac{(a_2+a_3C_3)(Px^2+Py^2)^{\frac{1}{2}}+a_3S_3(Pz-d_1)}{(a_2+a_3C_3)^2+(a_3S_3)^2}\right)$$

$$\theta_1=\cos^{-1}\left(\frac{Px}{a_3C_{23}+a_2C_2}\right)$$

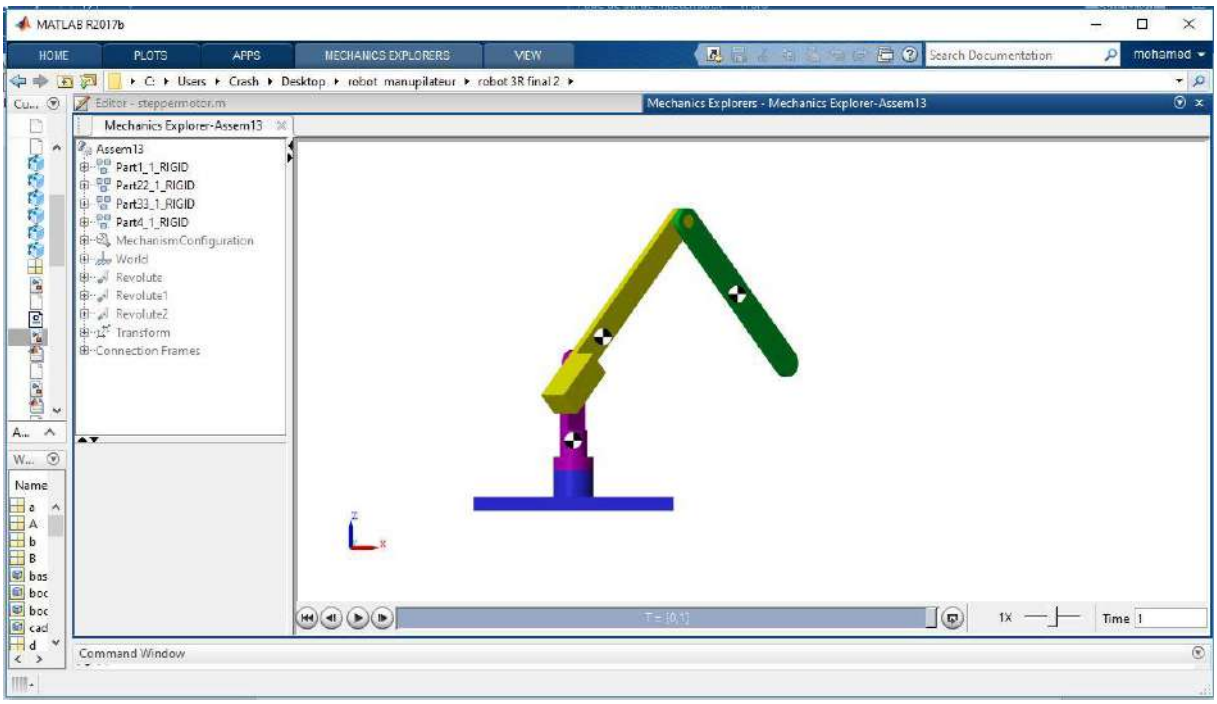


Figure 3.5 : Situation désiré, le coude en haut, cas 2

La simulation du ronot nous a permis de tracer les courbes de la position et du couple de chaque liaison dans la situation du coude en haut.

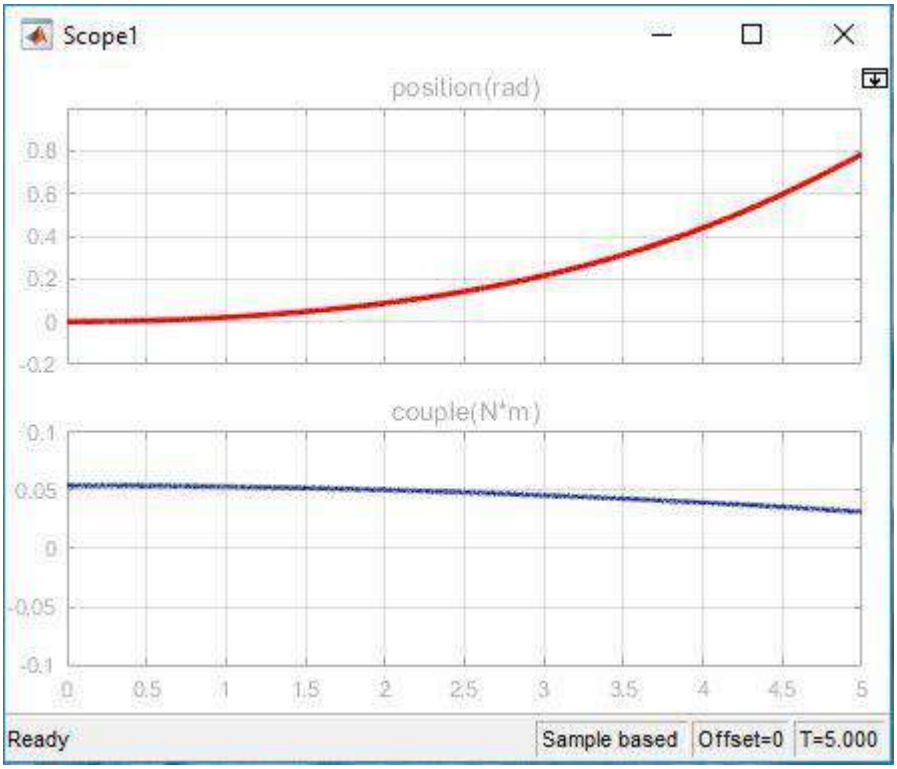


Figure 3.6 : position et couple de la liaison (1) .

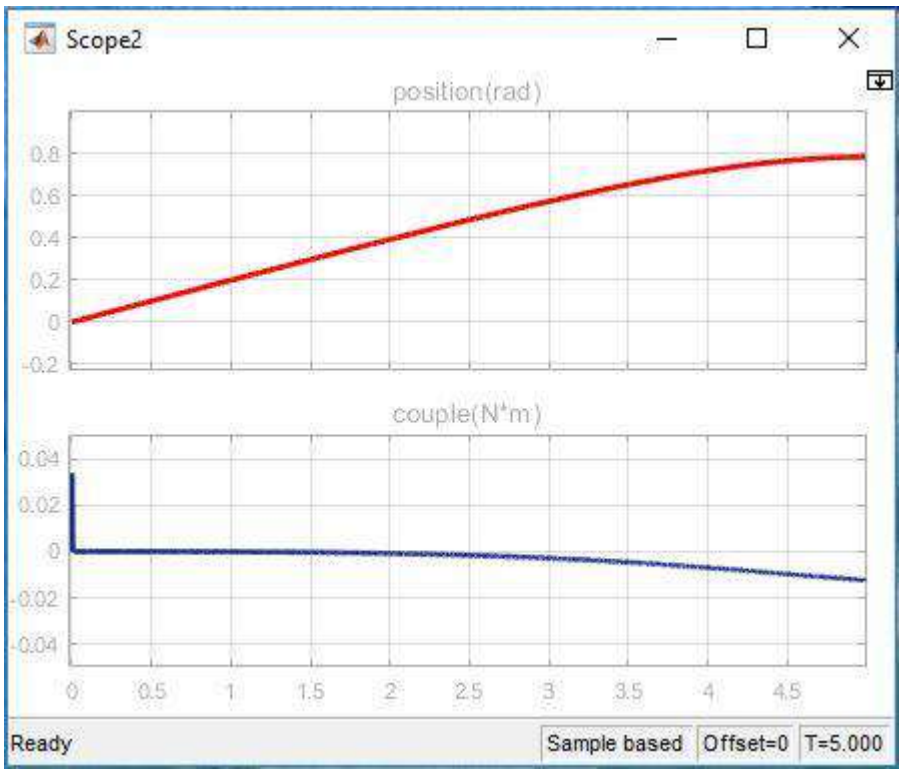


Figure 3.7 : position et couple liaison (2) .

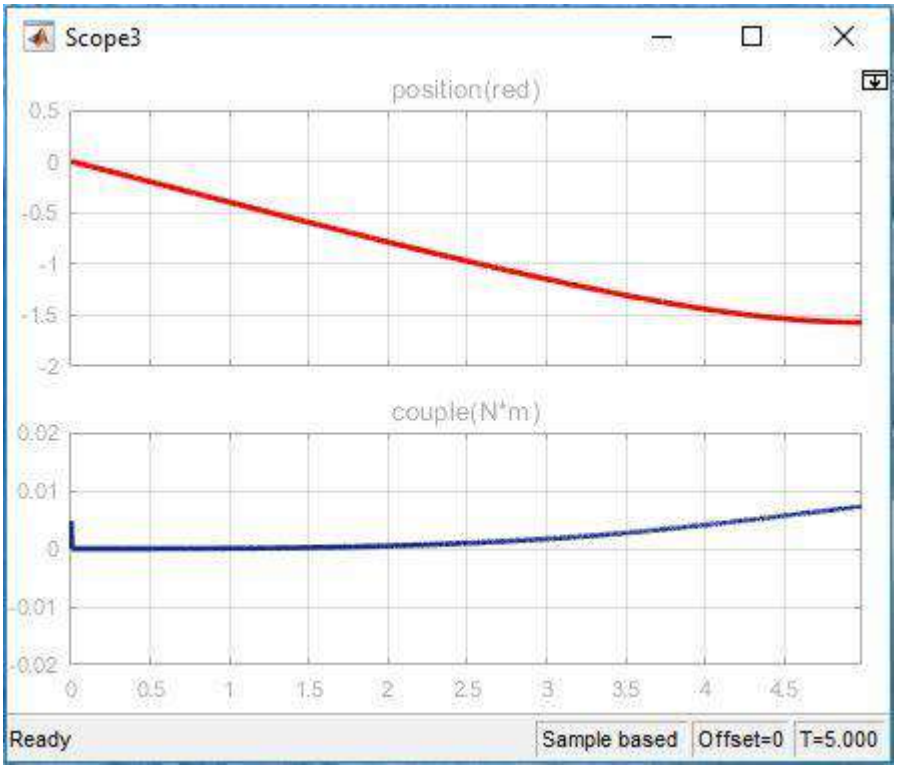


Figure 3.8 : position et couple de la liaison (3)

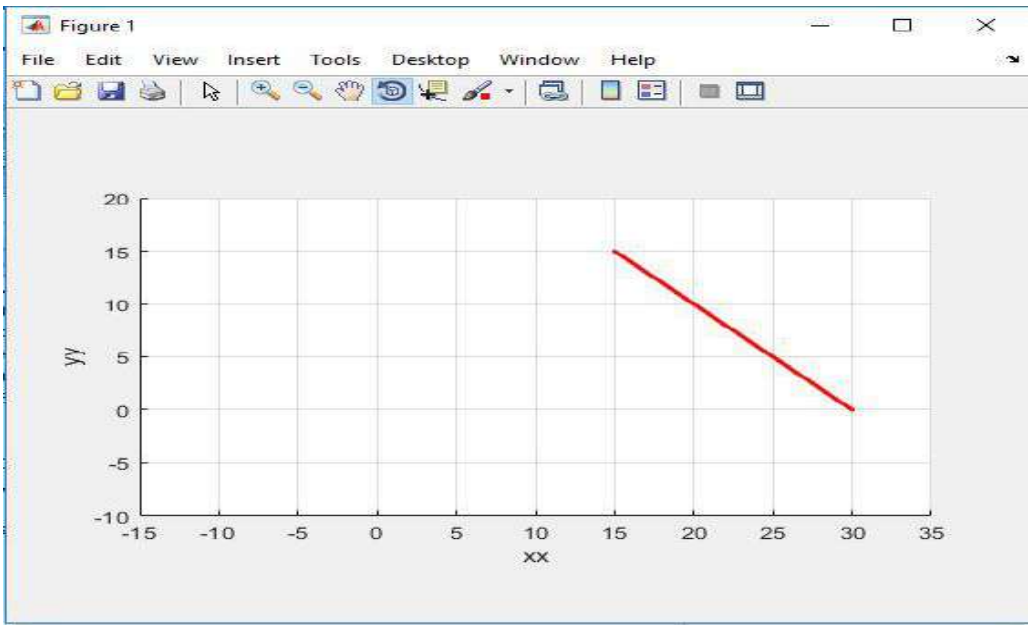


Figure 3.9 : position de l'outil terminale au plant (xy)

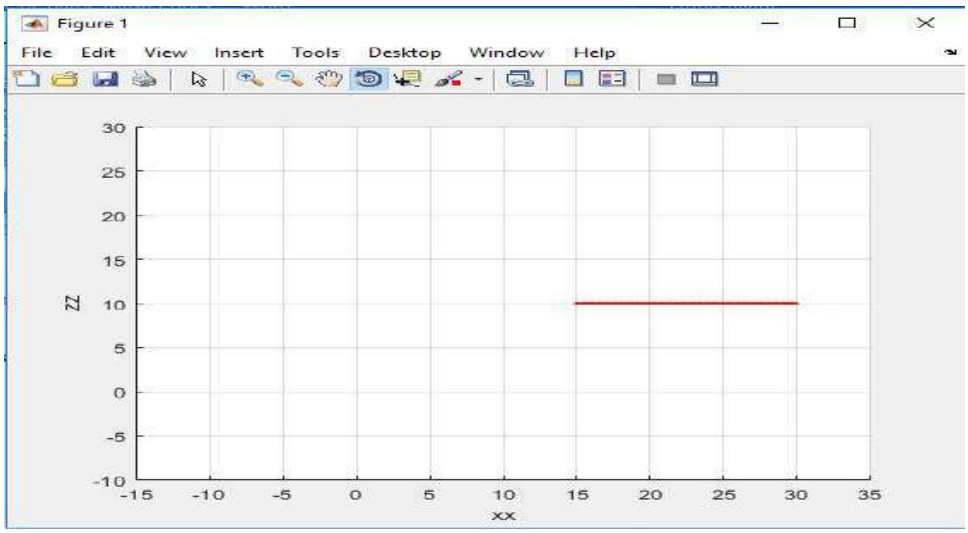


Figure 3.10 : position de l'outil terminale au plant (xz) du trajectoire

A partir des graphes des figures 3.6, 3.7, et 3.8, qui représentent les résultats de la simulation par SIMULINK, nous avons constaté que les situations désirées calculées manuellement et celles obtenues par simulation sont identiques. Ces résultats montrent l'exactitude des modèles établis et le bon fonctionnement du robot.

3.5. Conclusion

Après la conception de la maquette du robot par le logiciel SolidWorks, nous avons développé un programme de simulation par l'utilisation du logiciel MATLAB/SIMULINK.

Les résultats de simulation ont montré l'exactitude des modèles établis et le bon fonctionnement du robot.

4. Conclusion générale

Le présent travail a pour objectif de développer un robot manipulateur type RRR. Pour ce faire, nous avons suivi une méthodologie pour simplifier le processus de développement de ce robot.

La démarche suivie comporte les grandes étapes suivantes :

(i) établissement des différents modèles (direct et inverse): géométrique, cinématique et dynamique. Ces modèles permettent de programmer et contrôler le robot ;

(ii) conception de la maquette du robot par l'utilisation du logiciel SolidWORKS ;

(iii) simulation du système mécanique par l'utilisation de la maquette du robot et du logiciel SIMULINK/MATLAB afin de vérifier l'exactitude des modèles établis et le bon fonctionnement du robot ;

Dans la dernière étape, nous avons testé notre robot pour plusieurs situations désirées de l'organe terminal. Les résultats issus de ces tests ont montré que les situations de l'organe terminal calculées par le programme de simulation et celles issues du mouvement du robot sont identiques. Ceci signifie l'exactitude des modèles établis et l'efficacité de la méthodologie proposée pour le développement d'un robot.

Notre projet nous a permis d'approfondir nos connaissances théoriques et pratiques dans le domaine des robots qui envahissent les différents domaines de l'activité humaine.

5. Références

[1] Jean-Louis Boimond, Robotique, Université Angers année 2008-2009.

[2] Djoudi Achraf, Analyse des structures et méthodes de calcul de la portée d'un robot, mémoire de master, Université de Biskra, 2017.

[3] Alper Erdem Demirci, design and analysis of a scara robot, Décembre, 2012 İZMİR

[4] Arbouche Kaddour, commande adaptative du robot manipulateur rigide, Khemis Miliana, 2014/2015

[5] Fodil Rosa, Sayah Kenza, Réalisation et Commande d'un Bras manipulateur à Quatre Degrés de liberté, mémoire de master**,** universite de boumerdes, Juin 2017 .

[6] R. Gourdeau, ELE4203 — Robotique : Modélisation des Robots Manipulateurs, Département de génie ´électrique, Ecole Polytechnique de Montréal, 4 novembre 2010.

[7] Fernini Brahim, Etude, Analyse Et Modélisation Des Robots Manipulateurs Application Aux Robots Sériels, thèse de doctorat, Université De Saad Dahlab De Blida, juin 2017.

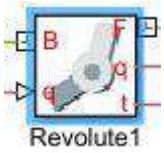
[8] MAKHLOUFI Fateh, Modélisation Et Commande Des Robots Manipulateurs Par Les Outils De L'intelligence Artificielle, thèse de doctorat, Université Badji-Mokhtar-Annaba, 2015.

[10] Takhi Hocine et Attachi Redouane Cherif, Conception et réalisation d'un robot mobile à base d'Arduino, mémoire de master, Université Amar Telidji- Laghouat ,2014/2015.

[11] M.A Djeddou, A Touati, Conception et analyse d'un robot SCARA, mémoire de master, Université de Médéa, 2019.

A. ANNEX

Les caractéristiques de la liaison rotoide exporté du solidworks vers simulink/matlab



On ouvre le block de la liaison et on fait les modifications désiré soit :position ou couple ou les deux au même temps

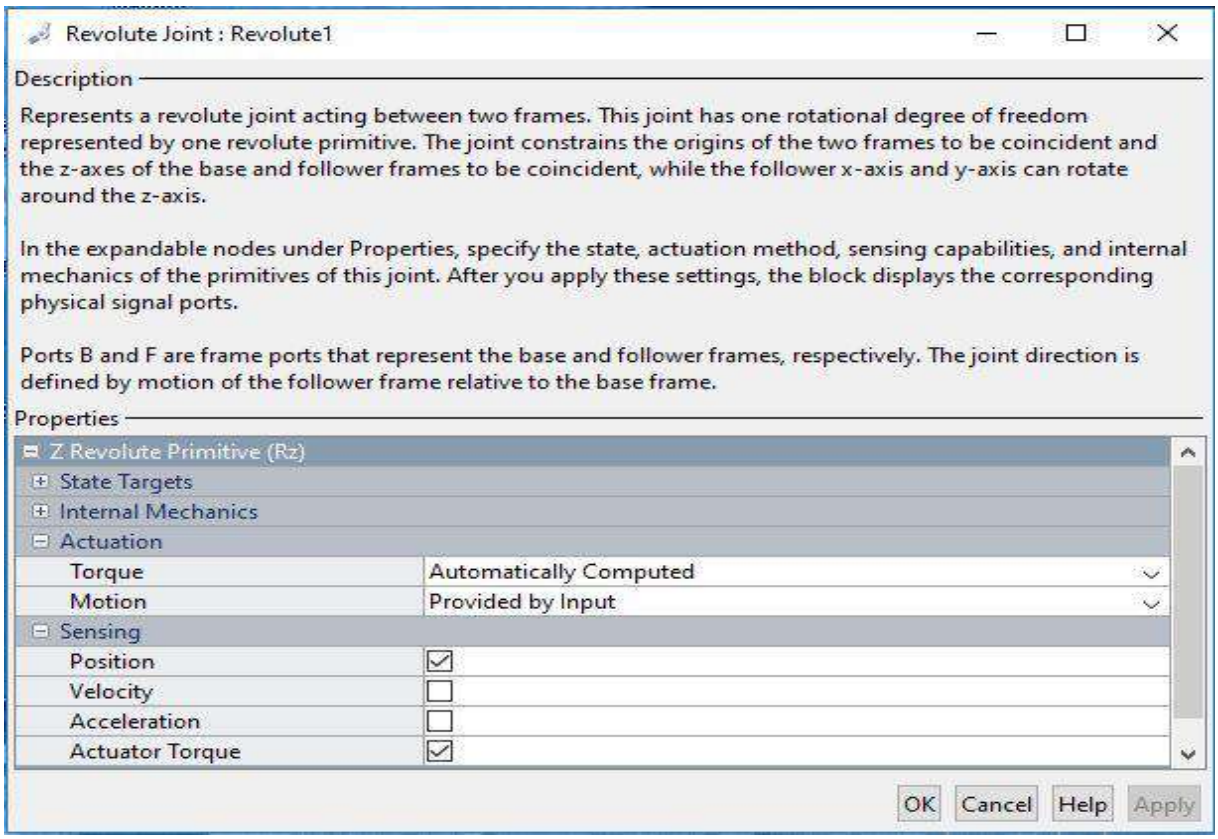


Figure A.1.bloco liaison rotoide de simulink/matlab

Les éléments du robots exportés du solidworks vers simulink /matlab

Les éléments du robot sont exportés avec tout ces caractéristique (masse, centre de masse, moment d'inertie , produit d'inertie el la forme géométrique.

Elément 0.(base)

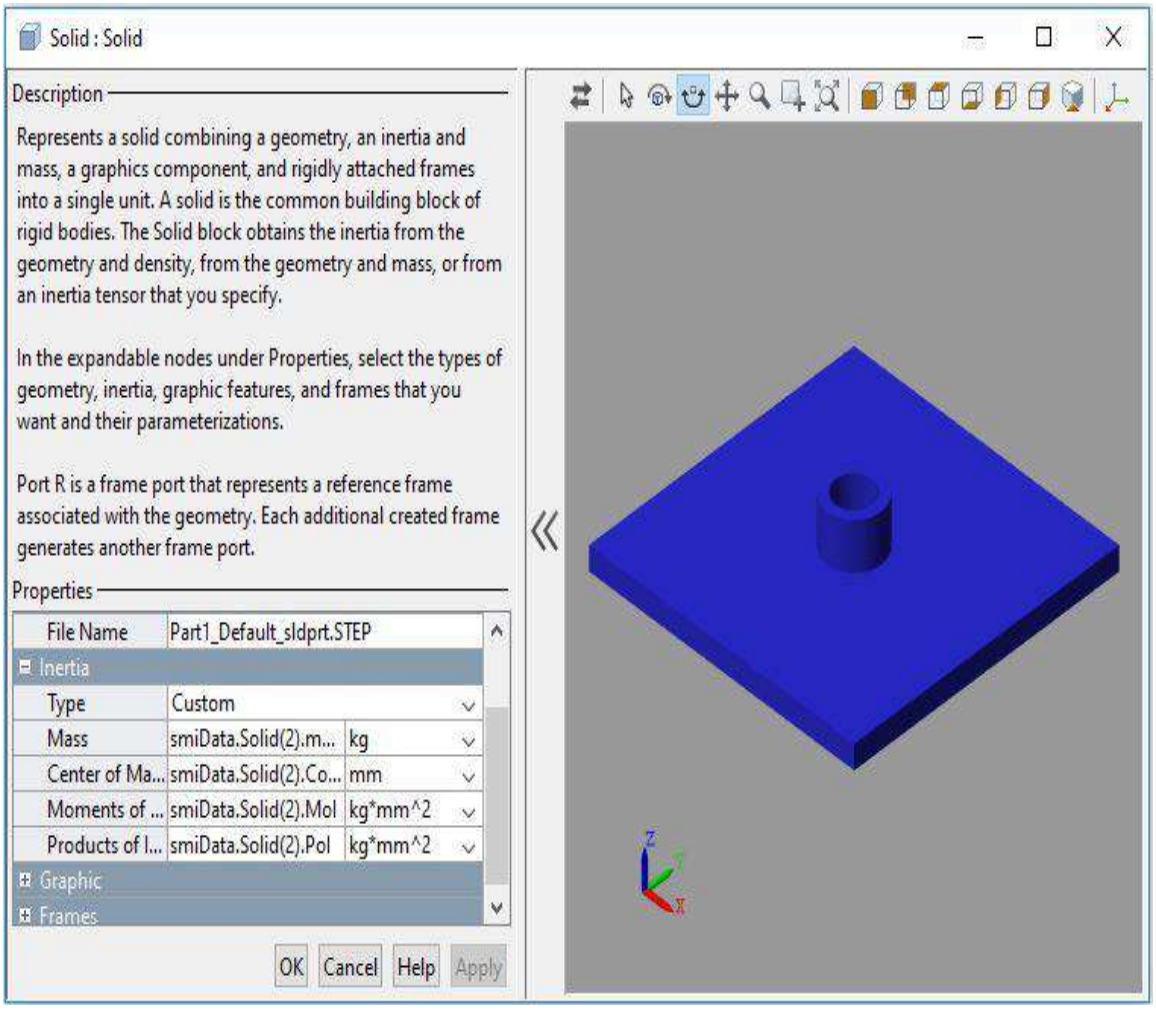


Figure A.2. Elément 0 importé de solidwork vers simulink/matlab

Elemont 01

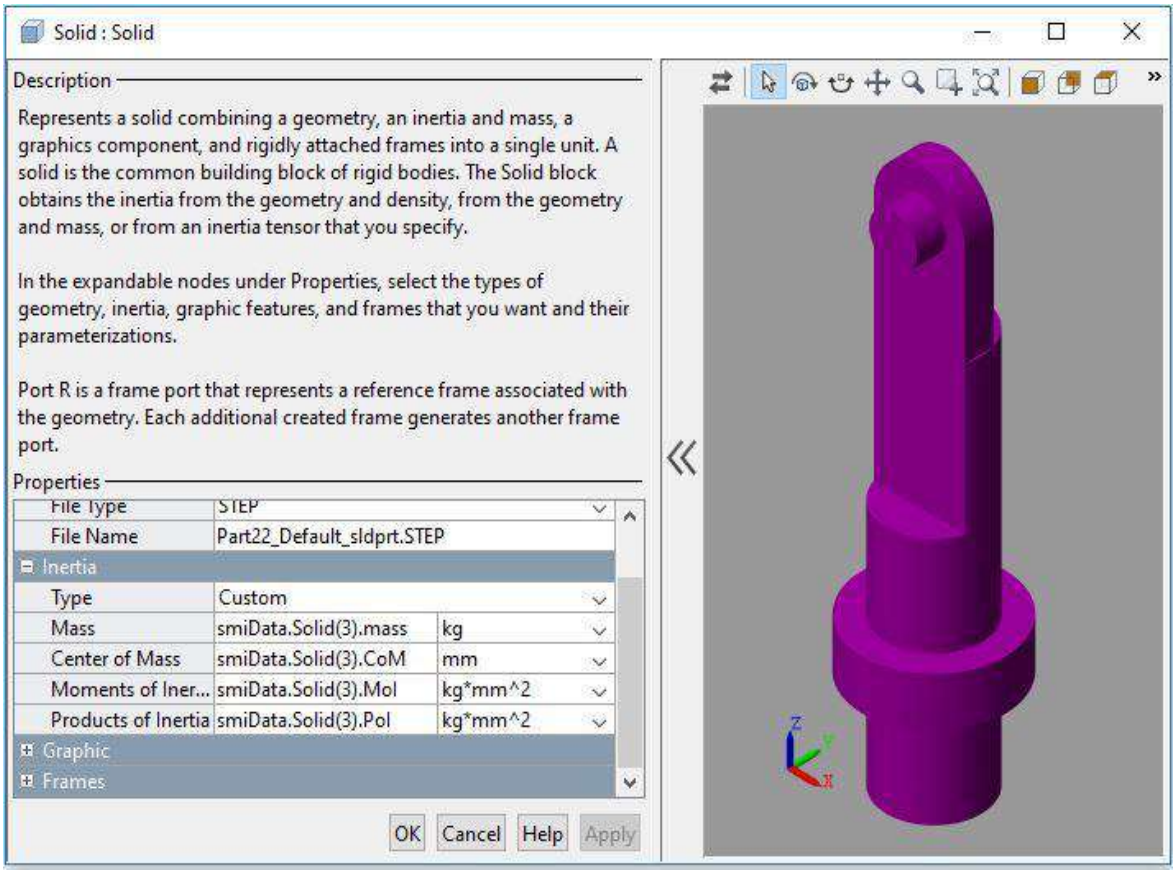


Figure A.3. Elément 1 importé de solidwork vers simulink/matlab

Elemont 02

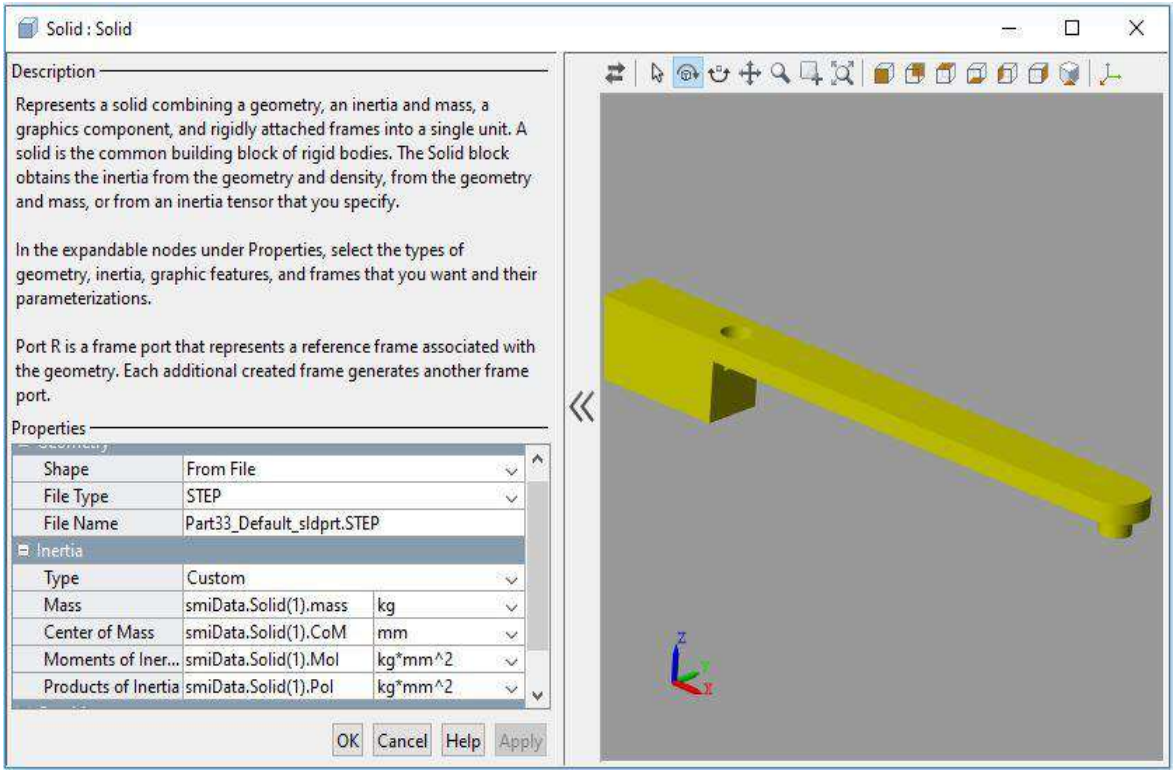


Figure 6.2. Elément 2 importé de solidwork vers simulink/matlab

Elemont 03

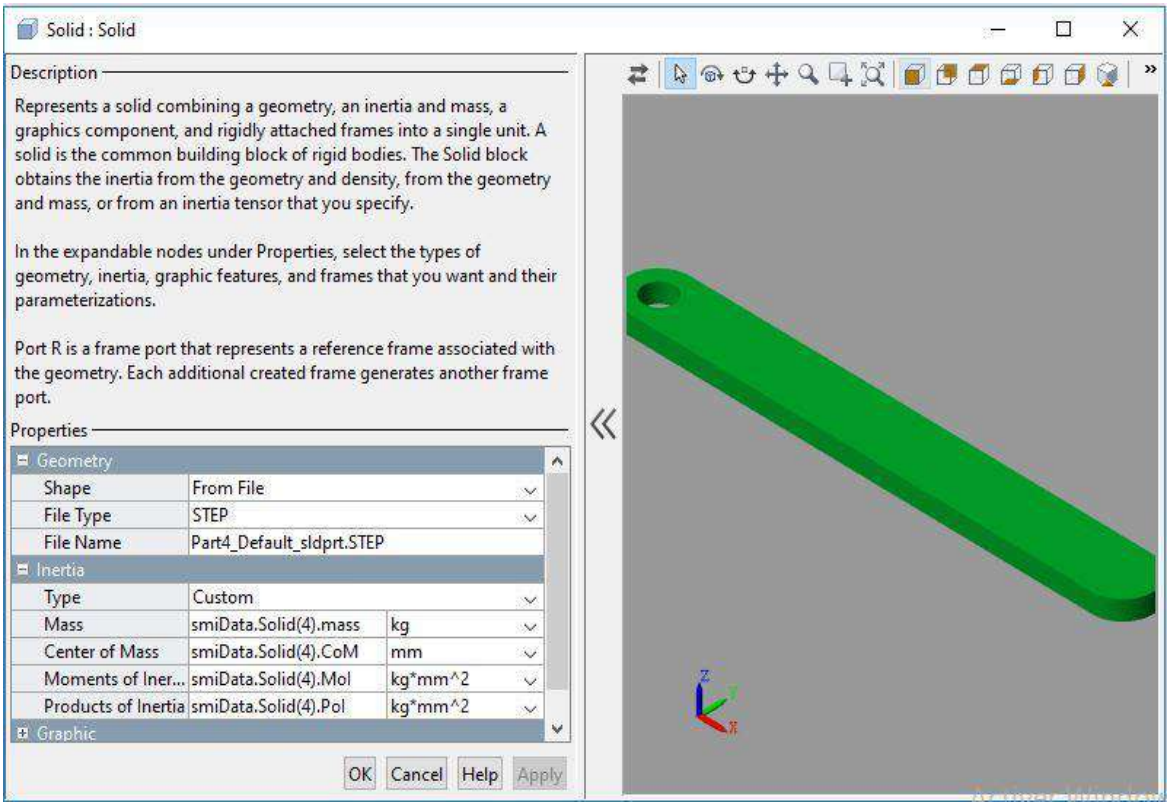
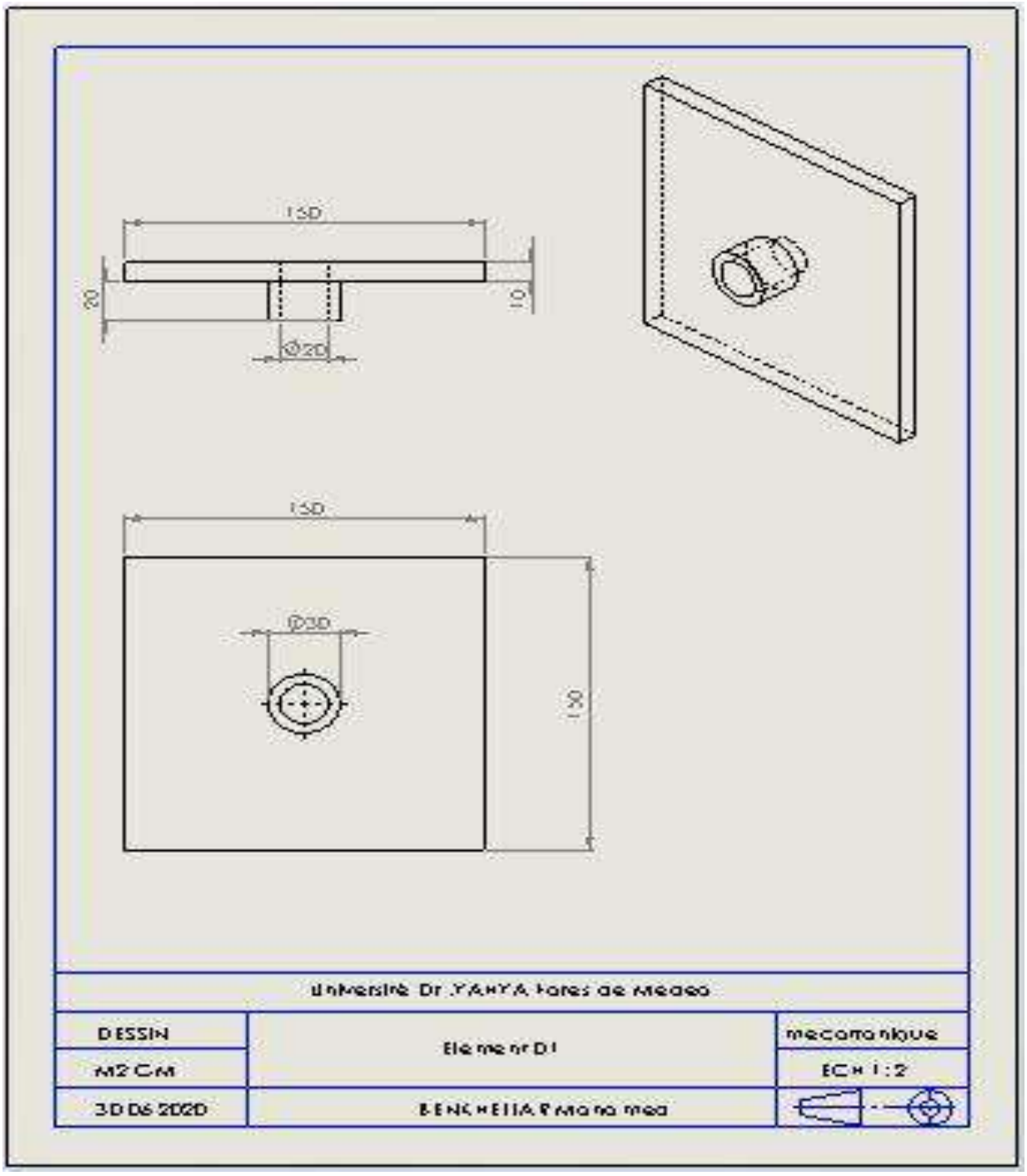
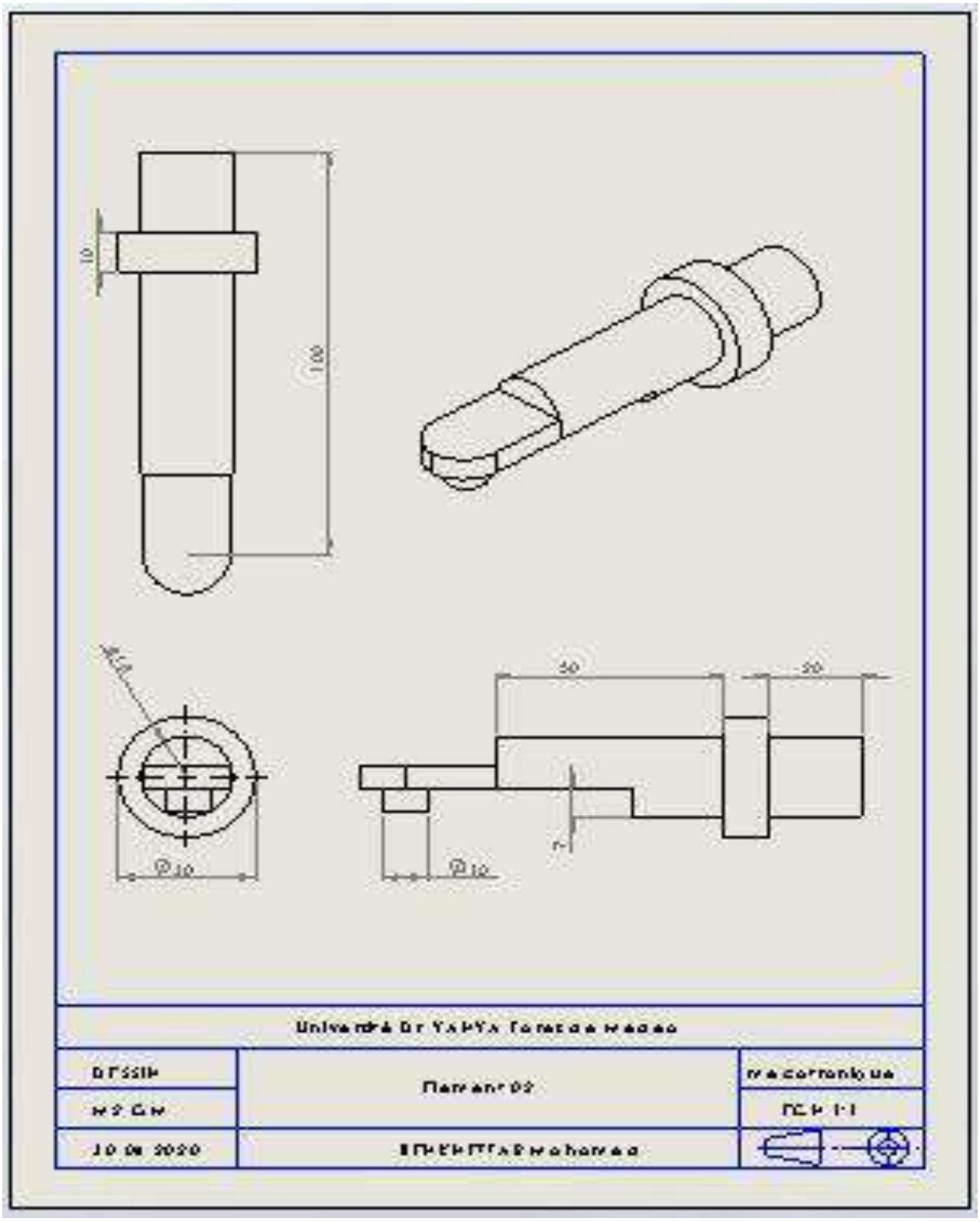
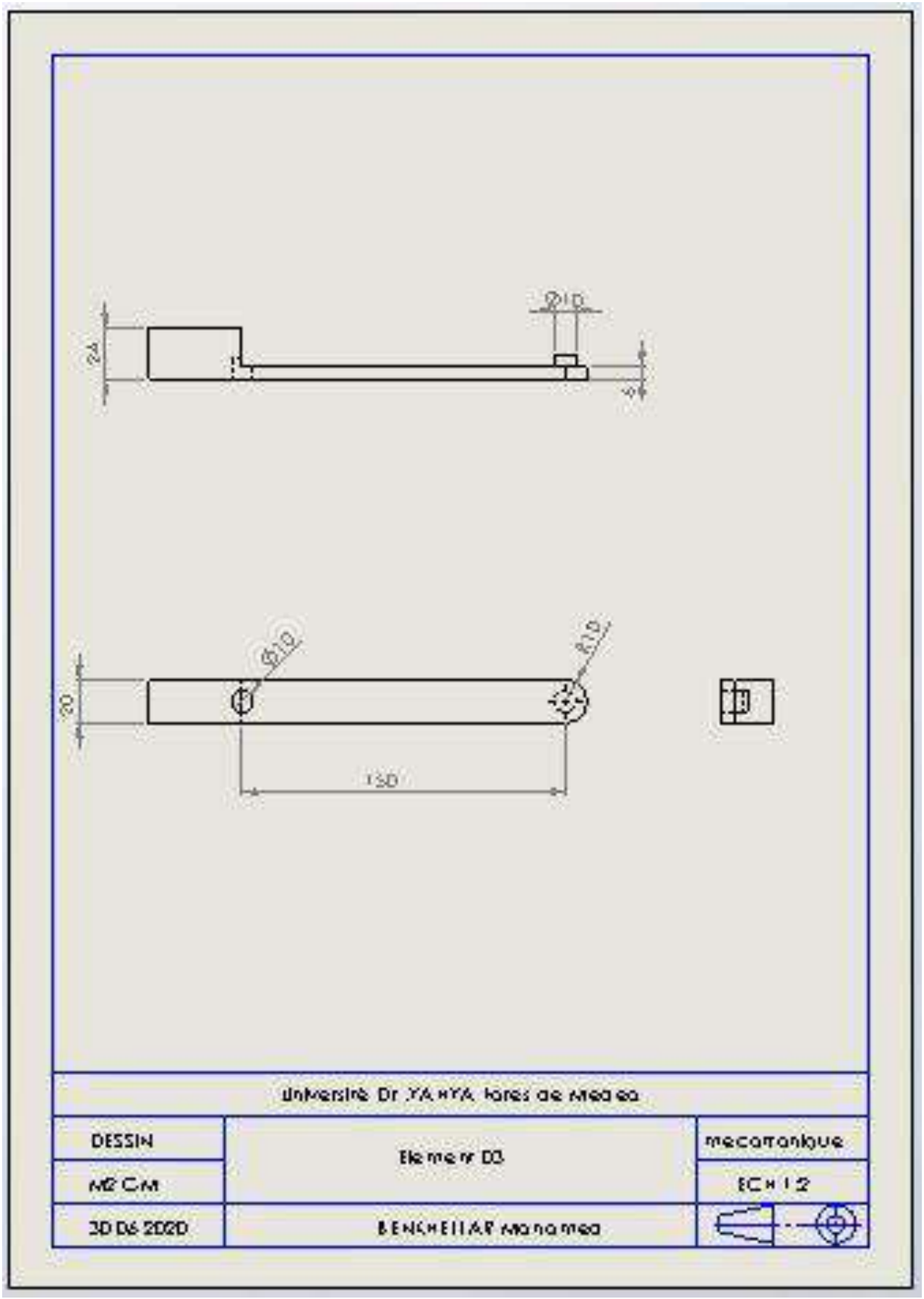


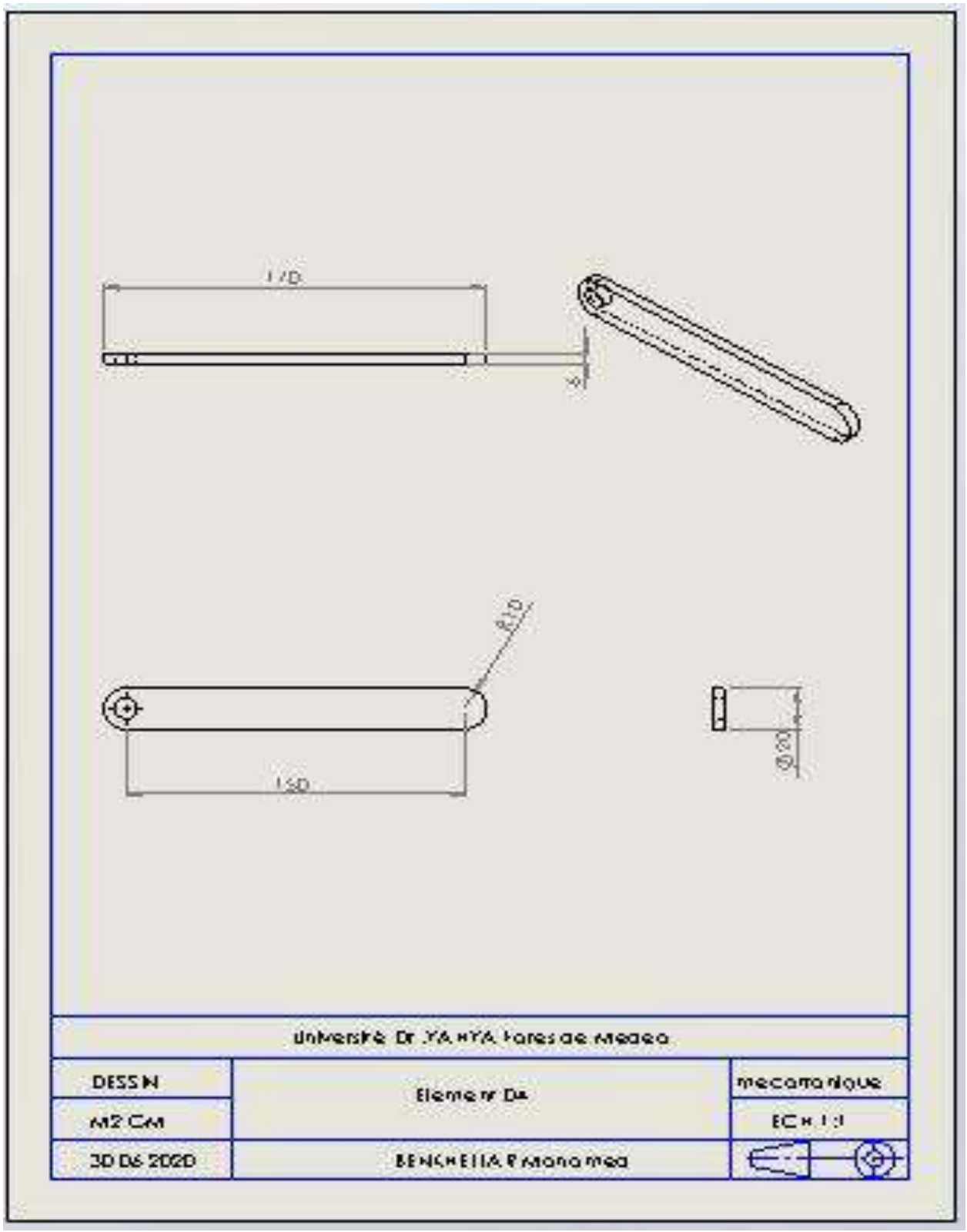
Figure A.2. Element 3 importé de solidwork vers simulink/matlab

Dessin de définition des éléments 1,2,3et4.




10
100
50
50
Ø10
Ø10


Ø10
24
10
Ø10
R10
20
130
Universite Dr YAHYA fares de medea
DESSIN
Element 03
mecanique
M2 CM
ECH 1 2
3D 06 2020
BENCHEIKH Mohamed


1/2
R10
1/2
Universite Dr YAHYA Farès de Medea
DESSIN
Element De
mecanique
M2 CM
ECH 1:1
30 06 2020
BENCHETIA P Manamea