Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr.Yahia Farès de Médéa

faculté des sciences

Département de Mathémathique et de l'Informatique



Projet de fin d'étude

présenté en vue de l'obtention du

Diplôme de Master en

Recherche Opérationnelle

Par

MERZOUGUI Kamel et DAHMOUNI Abdennour

Thème

Quelques graphes triangulairement connexes à cycle pleinement prolongeables

Composition du Jury:

M^r.	A. BOUCHOU	M.C.B	U. Dr. Yahia Farès Médéa	Président.
M^r.	A. SAHRAOUI	M.A.A	U. Dr. Yahia Farès Médéa	Encadreur.
M^r.	N. IKHLEF ESCHOUF	M.C.A	U. Dr. Yahia Farès Médéa	Examinateur.
M^r.	R. LEMDANI	M.A.A	U. Dr. Yahia Farès Médéa	Examinateur.

Date de soutenance: 13 Juin 2017

Résumé

Le but de ce mémoire est d'étudier les graphes triangulairement connexes à cycle pleinement prolongeables. Un graphe $G = (V, E)$ est dit triangulairement connexe si pour chaque deux arêtes e_1, $e_2 \in E(G)$, G possède une séquence de 3−cycle C_1,C_2,...,C_k tel que $e_1 \in C_1$ et $e_2 \in C_k$ et $E(C_i) \cap E(C_{i+1}) \neq \phi$ pour $1 \leq i \leq k-1$. Un cycle C dans un graphe est prolongeable dans G si il existe un cycle C' dans G tel que $V(C) \subseteq V(C')$ et $|V(C')| = |V(C)| + 1$, Si il existe un cycle C' nous disons que C peut être étendu à C' ou C' est une extension de C. Un graphe G est dit graphe à cycle prolongeable si G contient au moins un cycle et tout cycle non hamiltonien de G est prolongeable. Un graphe $G = (V, E)$ est dit graphe à cycle pleinement prolongeable si G est un graphe à cycle prolongeable et chaque sommet de G se trouve dans un triangle de G.

Nous nous intéressons en premier lieu à la présentation des résultats antérieurs obtenus dans ce domaine. Notre objectif est basé sur deux axes . Dans le premier, nous considérons les graphes triangulairement connexes et dans le second les graphes à cycle pleinement prolongeables pour lesquels nous parvenons à montrer plusieurs résultats.

Abstract

The purpose of this work is to study the triangularly connected graphs With fully extendable cycle. A graph $G = (V, E)$ is said triangularly connected graph if for each two edges e_1, $e_2 \in E(G)$ there exists a 3−cycles sequence C_1,C_2,...,C_k such as $e_1 \in C_1$ and $e_2 \in C_k$ and $E(C_i) \cap E(C_{i+1}) \neq \phi$ for $1 \leq i \leq k-1$. A cycle C in a graph G is extensible if there exists a cycle C' in G such as $V(C) \subseteq V(C')$ and $|V(C')| = |V(C)| + 1$. In this case, we say that C can be extended to C' or C' is an extension of C. A graph G is cycle extendable graph if G contains at least one cycle and every non hamiltonian cycle in G is extendable. A graph G is fully cycle extendable graph if G is cycle extendable and every vertex of G lies on a triangle of G.

We first focus on the presentation of the previous results obtained in this field. Our contribution concerns two axes in the first, we consider the graphs triangularly connected the second relates to fully extendable cycle graphs which we are able to show several results including a constructive characterization of graphs having this property.

Remerciements

Au terme de ce travail nous tenons à faire louange À «Allah» qui nous a donné la forced'achever cette réalisation.

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à notre promoteur : M. SAHRAOUI Abdelkader pour ses conseils et son aide précieuse.

Nos gratitudes à tous les membres de jury"A. BOUCHOU, N. IKHLEF ESCHOUF, R. LEMDANI" qui nous font l'honneur de juger notre travail.

A tous les enseignants du **Département de Mathémathique et de l'Informatique** sans exception pour leurs efforts fournis durant ces cinq agréables années.

A l'ensemble des étudiants de notre promotion 2016 /2017.

Dedicace

Je dédie ce travail

A ma chère famille, en particulier à mon père et ma mère pour leur soutien durant toute ma formation, pour leur bienveillance, Leurs efforts constants dans mes études, et pour leur encouragement.

A mon frère Abdelkader.

A mon cher binôme Abdennour et sa famille.

A mes amies : Bilal, Fares Kader, Sofiane, hamid, said, kassimo.

Kamel

Dedicace

Je dédie ce travail

A ma chère famille, en particulier à mon père et ma mère pour leur soutien durant toute ma formation, pour leur bienveillance, Leurs efforts constants dans mes études, et pour leur encouragement.

A mon frère Yacine.

A mon cher binôme kamel et sa famille.

A mes amies : Brahim, Ishaq, Omar, Abdelhaq, Khaled, Rhéda, Fares et Lokman.

Abdennour

Table des matières

Résumé **ii**

Abstract **iii**

Remerciements **iv**

Dedicace **v**

Dedicace **vi**

Tables des matières **viii**

Introduction **2**

1 Généralités sur la théorie des graphes **4**

1.1 Définitions et notations relatives à la théorie des graphes 4

1.1.1 Graphes non orientés 4

1.1.2 Voisinages 5

1.1.3 Degré d'un sommet 5

1.1.4 Graphes particuliers 5

1.1.5 Stables, couplages 8

1.1.6 Distance et diamètre 12

1.1.7 Concept de minimalité, maximalité, minimum et maximum 12

1.1.8 Coloration des sommets 12

1.1.9 Ensemble dominant 13

2 Résultats existants sur les graphes triangulairement connexes à cycle pleinement prolongeables **14**

2.1 Graphe hamiltonien 14

2.2 Graphe sans étoile 15

2.3 Connectivité, degré, voisinage et cycle hamiltonien 17

2.4 Graphe à cycle pleinement prolongeable 20

2.5 Graphe triangulairement connexe 21

3 Quelques résultats sur les graphes triangulairement connexes à cycle pleinement prolongeables **23**

3.1 Les graphes roues sont des graphes triangulairement connexes à cycle pleinement prolongeables 23

3.2 Les graphes complet d'ordre n ≥ 4 sont des graphes triangulairement connexes à cycle pleinment prolongeables 27

3.3 Les graphes grilles sont triangulairement connexes à cycle pleinement prolongeables 31

3.4 Les graphes particuliers Icosaédrique et Skeleton sont des graphes triangulairement connexes à cycle pleinement prolongeables 36

Conclusion **42**

Table de figures

Figure 1.1.1: Un graphe simple. 5
Figure 1.1.2: Un graphe partiel et un sous-graphe d'un graphe G 6
Figure 1.1.3: Un cycle C_5 et une chaîne P_n. 7
Figure 1.1.4: Un graphe connexe. 7
Figure 1.1.5 : Un graphe non connexe 8
Figure 1.1.6 : Un graphe complet. 8
Figure 1.1.7: Un graphe biparti et un graphe biparti complet 9
Figure 1.1.8 : Un graphe G et son complémentaire $\bar{G}$. 10
Figure 1.1.9 : L'étoile $K_{1,4}$. 10
Figure 1.1.10 : Une double étoile 11
Figure 1.1.11 : Un arbre 11
Figure 2.1.1: Graphes H_1,H_2 17
Figure 2.3.1: Le graphe G contient un cycle prolongeable $C = \{B, C, G, B\}$. 20
Figure 2.3.2: Le graphe G contient un cycle $C' = \{B, C, F, G, B\}$. 20
Figure 2.4.1: Le graphe contient une chaîne de $3 - cycle$ 22
Figure 3.1.1: graphes roues 24
Figure 3.1.2: Graphe roue W_7 contient une chaîne de 3−cycle. 25
Figure 3.1.3: Graphe W_7 contient un cycle prolongeable $C = \{A, , B, G, A\}$ 26
Figure 3.1.4: Graphe W_7 contient un cycle $C' = \{A, , B, C, G, A\}$. 26
Figure 3.1.5: Présente chaque sommet de graphe roue W_7 se trouve dans un triangle. . 27
Figure 3.2.1: Graphes complet. 28
Figure 3.2.2: Graphe complet K_4 contient une chaîne de $3 - cycle$. 29
Figure 3.2.3: Le graphe complet K_4 contient un cycle prolongeable $C = \{A, B, D, A\}$.. . . 30
Figure 3.2.4: Le graphe complet K_4 contient un cycle $C' = \{A, B, C, D, A\}$. 30
Figure 3.2.5: Présente chaque sommet de graphe complet K_4 se trouve dans un triangle. . 31
Figure 3.3.1: Les grilles où chaque face intérieure contient une corde. 32
Figure 3.3.2: Le graphe G contient une chaîne de $3 - cycle$. 33
Figure 3.3.3: Le graphe G contient un cycle prolongeable $C = \{A, B, I, A\}$ 34
Figure 3.3.4: Le graphe G contient un cycle $C' = \{A, B, D, I, A\}$. 34

Figure 3.3.5: Présente chaque sommet de graphe G se trouve dans un triangle . . 35
Figure 3.4.1: Le graphe Skeleton. 36
Figure 3.4.2: Le graphe Icosaédrique. 37
Figure 3.4.3: Le graphe Icosaédrique contient une chaine de $3 - cycle$. 39
Figure 3.4.4 : Le graphe Icosaédrique cotient un cycle prolongeable $C = \{D, J, L, D\}$. . . 39
Figure 3.4.5 : Le graphe Icosaédrique cotient un cycle $C' = \{D, J, K, L, D\}$. 40
Figure 3.4.6: Présente chaque sommet de graphe Icosaédrique se trouve dans un triangle. 40

Introduction

Les chercheurs s'accordent à considérer que la théorie des graphes est née en 1736 avec les travaux d'Euler (1707-1783) et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes comme celui des ponts de la ville russe de konigsberg dont les habitants se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir au point de départ. Jusqu'à présent, le moyen le plus commode lorsqu'on veut représenter certaines situations où des relations existent entre les éléments d'un même système, est de dessiner un schéma incluant des points et des trajets unissant ces points. Ce dessin est appelé graphe, les points et les traits sont appelés respectivement sommets et arêtes (arcs, si les traits ont une orientation).

Parmi les branches les plus étudiées de la théorie des graphes on trouve la connexité Un graphe G est dit connexe si pour tout pair de sommets distincts du graphe il existe une chaîne les reliant. Une composante connexe d'un graphe est un sous graphe connexe.

Notre objectif dans ce travail est de trouver des exemples de graphes triangulairement connexes à cycle pleinement prolongeables. Pour ce faire, notre mémoire porte sur trois chapitres.

Le premier chapitre comporte deux parties, dans la première nous donnons les différentes notions de base de la théorie des graphes. Dans la seconde nous donnons un aperçu sur les graphes sans étoile, les graphes triagulairement connexes et les graphes à cycle pleinement prolongeabeles.

Le chapitre deux est consacré à la présentation des résultats existants pour les graphes sans étoile, graphe hamiltonien, connexité, degré, voisinage, cycle hamiltonien. Nous nous intéressons aux graphes triagulairement connexes et les graphes à cycle pleinement prolongeabeles.

Dans le chapitre trois, nous présentons ce que nous avons pu trouver comme exemple de graphes triagulairement connexes à cycle pleinement prolongeabeles. Nous entamons, en premier lieu, la vérification que les graphes roues, les graphes complets d'ordre $n \geq 4$, et les graphes grilles où chaque face intérieure contient une corde ainsi que les graphes particuliers Icosaédrique et Skeleton sont des triagulairement connexes à cycle pleinement prolongeabeles.

Chapitre 1

Généralités sur la théorie des graphes

Ce chapitre est consacré aux généralités. Nous y faisons un bref passage sur les notions usuelles de la théorie des graphes. Nous introduisons ensuite quelques concepts généraux des quelques graphes triangulairement connexes à cycle pleinement prolongeables.

1.1 Définitions et notations relatives à la théorie des graphes

1.1.1 Graphes non orientés

Un graphe $G = (V, E)$ est défini par deux ensembles finis V et E dits ensembles des sommet et d'arêtes respectivement. Le cardinal de V est appelé l'ordre de G, noté par $n(G)$, et le cardinal de E est appelé la taille de G, noté par $m(G)$. Une arête $e \in E$ est un couple de sommets (u,v), elle est notée par $e = uv$, ou u et v sont les extrémités de e. On dira dans ce cas que u et v sont adjacents et que e est incidente a u et v. Une arête $e = uv$ est une boucle si les extrémités u et v sont confondues. Un graphe est dit simple s'il est sans boucles est sans arêtes multiples. Dans ce mémoire, tous les graphes considérés sont simples et finis. Par exemple, la figure 1.1.1 montre un graphe simple $G = (V,E)$ avec $V\ (G) = \{A,B,C,D,E\}$ et $E(G) = \{AB,BC,CD,DE,EA,BD\}$.

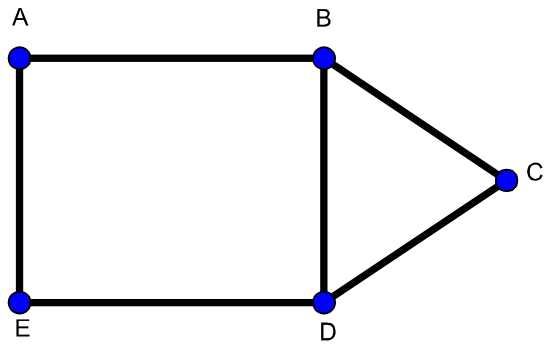


Figure 1.1.1:Graphe simple

1.1.2 Voisinages

Soit v un sommet de G. Le voisinage ouvert de v est $N_G(v) = \{u \in V, uv \in E\}$ et le voisinage fermé de v est $N_G\,[v] = N_G\,(v) \cup \{v\}$. Pour un sous-ensemble $S \subset V$, le voisinage ouvert de S est $N_G\,(S) = \cup_{v \in S} N(v)$, et le voisinage fermé est$N_G[S] = \cup_{v \in S} N(v) \cup S$. Pour le graphe G de la Figure 1.1.1, le voisinage ouvert du sommet a est $N_G(A) = \{B, E\}$ et son voisinage fermé est $N_G\,[A] = \{B, E, A\}$.

1.1.3 Degré d'un sommet

Le degré d'un sommet $v \in V$, noté $deg_G(v)$, est égal au cardinal de son voisinage ouvert. Un sommet de degré nul sera dit un sommet isolé, un sommet de degré égal à un sera dit sommet pendant. Un sommet adjacent à un sommet pendant sera dit sommet support. On notera par $\Delta(G)$ et $\delta(G)$, respectivement le degré maximum et le degré minimum dans G.

Pour le graphe G de la figure 1.1.1, le degré du sommet a est $deg_G(A) = 2$, le degré maximun de G est $\Delta(G) = 3$ et le degré minimum de G est $\delta(G) = 2$.

1.1.4 Graphes particuliers

Sous-graphe et graphe partiel

Soit $G = (V, E)$ un graphe. On appelle sous-graphe de G, un graphe $H = (U, F)$ tel que $U \subseteq V$ et $F \subseteq E$. Pour un sous-ensemble $A \subseteq V$, le sous-graphe induit par A, noté $G[A]$

ou simplement $\langle A \rangle$, est le graphe ayant A pour ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles de E ayant leurs deux extrémités dans A. Etant donné un graphe H , on dit que G est sans H si H n'est pas un des sous-graphes induits de G. Un graphe partiel de G est un graphe obtenu en enlevant une ou plusieurs arêtes de G. Autrement dit, un graphe partiel de G est un graphe H ayant le même ensemble de sommets, et ayant comme ensemble d'arêtes, un sous-ensemble de $E(G) : E(H) \subset E(G)$.

Voir la figure 1.1.2 .

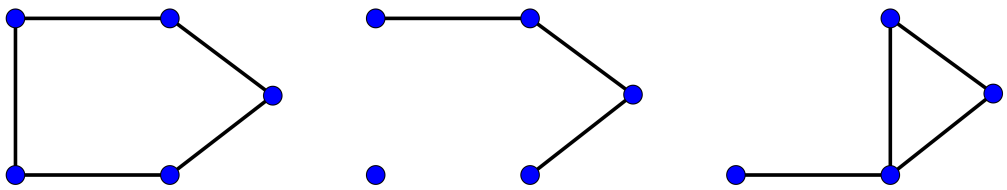


Figure 1.1.2: Un graphe partiel et un sous-graphe d'un graphe G

Chaîne

Une chaîne C dans un graphe $G = (V, E)$ est une séquence finie $[v_1, v_2, ..., v_k]$ de sommets telle que pour chaque $1 \leq i \leq k-1$,v_i v_{i+1} soit une arête de G. Les sommets v_1 et v_k sont appelés respectivement extrémité initiale et extrémité finale de la chaîne C. La longueur d'une chaîne est le nombre de ses arêtes. Une Chaîne est dite élémentaire (respectivement, simple) si tout ses sommets sont distincts (respectivement, toutes ses arêtes sont distinctes). Une corde est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une chaîne. Une chaîne minimale induite par n sommets, notée par P_n, est une chaine élémentaire sans cordes.

Cycle

Un cycle est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues. Un cycle élémentaire C_n induit par n sommets est un cycle dont les sommets sont distincts.

Voir la figure 1.1.3.

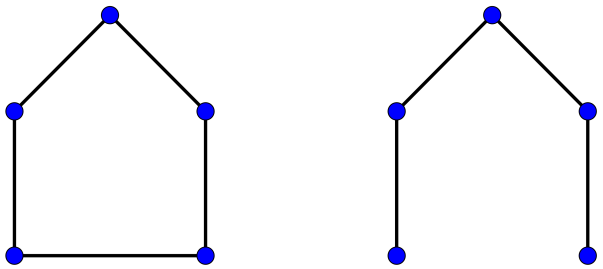


Figure 1.1.3 : Un cycle C_5 et une chaîneP_n

Graphe connexe

Un graphe $G = (V, E)$ est dit connexe, si toute paire de sommets $(u, v) \in V^2$ est reliée par une chaîne. Une composante connexe d'un graphe G est un sous-graphe connexe.

Le graphe G de la figure 1.1.4 est connexe et le graphe de la figure 1.1.5 n'est pas connexe.

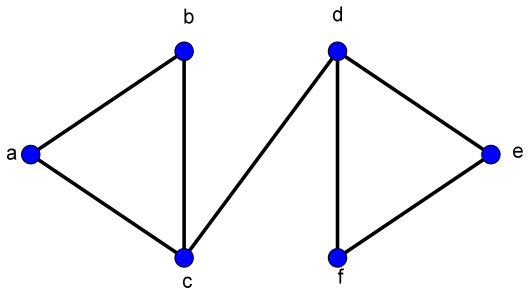


Figure 1.1.4: Un graphe connexe

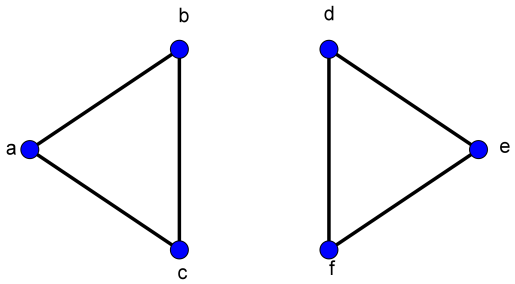


Figure 1.1.5 : Un graphe non connexe

Graphe complet

Le graphe complet d'ordre n, noté par K_n est le graphe dans lequel deux sommets quelconques sont adjacents. Dans un graphe complet chaque sommet est de degré $n-1$.

le graphe de la figure 1.1.6. est complet

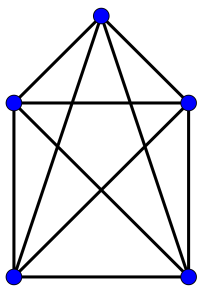


Figure 1.1.6 : Un
graphe complet

1.1.5 Stables, couplages

- Un stable S (appellé aussi ensemble indépendant) dans un graphe G est un sous ensemble de sommets de V deux à deux non adjacents. $\alpha(G) = max\{|S| : S$ est un stable de $G\}$ est appellé nombre de stabilité de G.

- Soit $G = (V, E)$ un graphe, un couplage M dans un graphe G est un sous ensemble d'arêtes deux à deux non adjacents, on note par $\beta(G)$ la taille d'un couplage maximum dans G. Un sommet x de G est dit saturé par le couplage M s'il existe une arête de M incidente à x.

Un couplage qui sature tous les sommets de G est appellé couplage parfait dans G, si non, x est dit insaturé par M.

Graphe biparti et graphe biparti-complet

Un graphe $G = (V, E)$ est dit **biparti** si V peut se partitionner en deux sous-ensembles V_1 et V_2 tels que chaque arête admet une éxtrimité dans V_1 et une éxtrimité dans V_2. Un graphe **biparti complet** est un graphe biparti tel que tous les sommets de V_1 sont adjacents à tout les sommets de V_2 , si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$ le graphe biparti complet est noté par $K_{p,q}$.

Voir la figure 1.1.7.

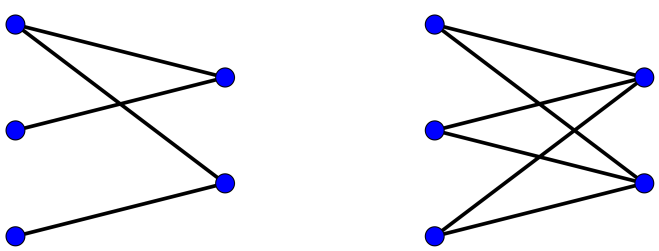


Figure 1.1.7 : Un graphe biparti et un graphe biparti complet

Clique

Une clique est un sous-graphe complet d'un graphe G. Une clique de p sommets est notée K_p .

Graphe complémentaire

Le complémentaire du graphe $G = (V, E)$ est le graphe $\bar{G} = (V, \bar{E})$ de même ensemble de sommets V tel que deux sommets sont adjacents dans $\bar{G}$ si et seulement s'ils ne le sont pas dans G.

Voir la figure 1.1.8.

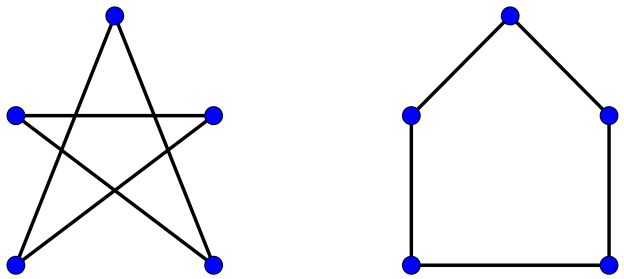


Figure 1.1.8: Un graphe G et son complémentaire $\bar{G}$

Graphe régulier

Un graphe dont tous les sommets ont le même degré est dit régulier, si le degré est k, alors on dit que le graphe est k-régulier.

Étoile

Une étoile est un cas particulier d'un graphe biparti complet dans lequel $|V_1| = 1$ et $|V_2| = s$. Dans ce cas, elle est notée par $K_{1,s}$. Le sommet de V_1 est appelé centre de l'étoile. En particulier l'étoile $K_{1,3}$ est appelé aussi griffe.

Voir la figure 1.1.9 .

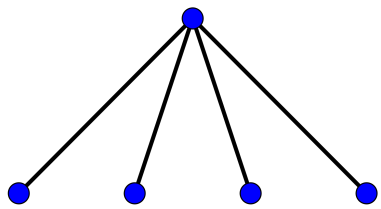


Figure 1.1.9 : L'étoile $K_{1,4}$

Double étoile

Une double étoile est le graphe formé par les deux étoiles $K_{1,r}$ et $K_{1,s}$, avec une arête reliant les deux centres.

Voir la figure 1.1.10.

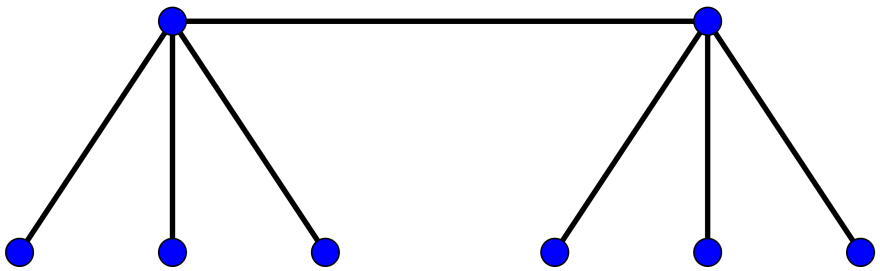


Figure 1.1.10 : Une double étoile

Arbre

Un arbre est un graphe connexe sans cycles il contient exactement $(n-1)$ arête. Un graphe sans cycles mais non-connexe est appelé forêt. Voir la figure 1.1.11.

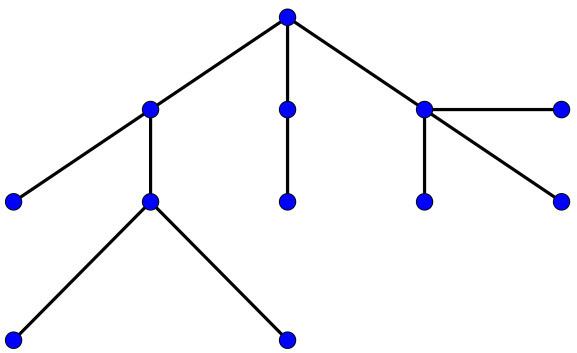


Figure 1.1.11 : Un arbre

1.1.6 Distance et diamètre

Dans un graphe connexe G, la distance entre deux sommets u et v est notée $d(u, v)$ et c'est le nombre d'arêtes d'une plus courte chaîne entre u et v. Le diamètre du graphe G est noté $Diam(G) = \max_{uv \in V}(d(u, v))$.

1.1.7 Concept de minimalité, maximalité, minimum et maximum

Un sous-ensemble D de V est dit minimal par rapport à une propriété P s'il n'existe pas un sous−ensemble $D' \subset D$ qui vérifie la propriété P. Un sous-ensemble D de V est dit maximal par rapport à une propriété P si aucun sous−ensemble de V contenant D et différent de D ne vérifie la propriété P. Un sous-ensemble D de V est dit minimum ou de taille minimale par rapport à une propriété P s'il n'existe aucun sous-ensemble $D' \subseteq D$ qui vérifie la propriété P et $|D'| < |D|$.Un sous−ensemble D de V est dit maximum ou de taille maximale par rapport à une propriété P s'il n'existe aucun sous-ensemble $D' \subseteq V$ qui vérifie la propriété P et $|D'| > |D|$.

1.1.8 Coloration des sommets

On appelle coloration des sommets d'un graphe toute attribution d'une couleur à chaque sommet. Une coloration utilisant k couleur est appelée une $k-$coloration. Une coloration est propre si chaque deux sommets voisins portent des couleurs différentes. Etant donné un graphe $G = (V, E)$. Une $k-$coloration propre des sommets de G peut être vue comme une partition de V en k stables. Une coloration triviale de G consiste à attribuer à chacun de ses sommets une couleur différente. Ainsi, tout graphe à n sommets admet une $n-$coloration. Donc il est naturel de se demander quel est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer G. D'où la définition du nombre chromatique de G.

Le **nombre chromatique** d'un graphe G, noté $\chi(G)$, est le plus petit nombre de couleurs nécessaires à une coloration propre des sommets de G.

1.1.9 Ensemble dominant

Un sous−ensemble de sommets D de V est dit ensemble dominant de G si tout sommet de $V - D$ possède au moins un voisin dans D. Le cardinal minimum d'un ensemble dominant minimal de G, appelé nombre de domination inferieure, est noté $\gamma(G)$. Et tout ensemble dominant de cardinal $\gamma(G)$ est appelé $\gamma(G)$−ensemble. Un graphe G peut avoir plusieurs $\gamma(G)$−ensembles.

Il existe plusieurs définitions d'un ensemble dominant équivalentes à la définition précédente. Par exemple:

• Un ensemble $D \subseteq V$ est un ensemble dominant dans G si pour tout sommet $v \in V$, $|N(v) \cap D| \geq 1$.

• Un ensemble $D \subseteq V$ est un ensemble dominant dans G si $N[D] = V$.

La domination stable

Un ensemble dominant stable de G est un ensemble dominant $D \subseteq V$ tel que le sous−graphe induit par D est stable. Le nombre de domination stable de G, noté $i(G)$, est le cardinal minimum d'un dominant stable.

Chapitre 2

Résultats existants sur les graphes triangulairement connexes à cycle pleinement prolongeables

Le présent chapitre est consacré aux résultats antérieurs obtenus sur les graphes triangulairement connexes à cycle pleinement prolongeables. Nous commençons par définir les concepts les graphes sans étoilés, les graphes tiangulairement connexes et les cycles pleinement prolongeables.

2.1 Graphe hamiltonien

Définition 2.1.1 *Un cycle qui passe par tous les sommets une seule fois d'un graphe est un* ***cycle hamiltonien****.*

Définition 2.1.2 *Un* ***chemin hamiltonien*** *est un chemin qui contient tous les sommets d'un graphe.*

Définition 2.1.3 *Un graphe qu'a un cycle hamiltonien est un* ***graphe hamiltonien****.*

- Un graphe possédant un sommet de degré 1 ne peut être hamiltonien.
- Les graphes complets K_n sont hamiltoniens.

Théorème 2.1.1 *[1]Soit $G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre $n \geq 3$. Si pour toute paire (x, y) de sommets non adjacents, on a $d(x) + d(y) \geq n$, alors G est hamiltonien.*

Corollaire 2.1.1 *[1] Soit $G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre $n \geq 3$. Si pour tout sommet x de G, on a $d(x) \geq n/2$, alors G est hamiltonien.*

2.2 Graphe sans étoile

Définition 2.2.1 *Un graphe G est dit sans étoile s'il n'ademet pas de sous-graphe isomorphe à $K_{1,3}$.*

Quelques graphes sans étoile

parmi les graphes sans étoile, on cite

1. **Graphe adjoint d'un graphe**

   Soit $G = (X, E)$ un graphe. Le graphe adjoint de G, noté $L(G)$, est le graphe obtenu en associant un sommet à chaque arête de G et en reliant deux sommet de $L(G)$ par une arête si elles sont adjacentes dans G.

   Beineke [2][3] a donné une caractérisation de ces graphes par les sous-graphes exclus dont le graphe $K_{1,3}$.

2. **Complément de graphe sans triangle**

   Le graphe G est un complément d'un graphe sans triangule si et seulement si son nombre de l'independence satisfait $\alpha(G) \leq 2$ et que chaque tel graphe est sans étoile.

3. **Graphe d'inflation**

   Par l'inflation de graphe H nous signifions un graphe qui est obtenu en remplaçant chaque sommet x par un graphe complet $K_{d(x)}$ et en reliant chaque arête à un sommet différent de $K_{d(x)}$. Clairement l'inflation de chaque graphe H est un graphe sans étoile.

4. **Graphe comparable**

   Un graphe simple $G = (X, E)$ est appelé graphe comparable si c'est possible de diriger ses arêtes afin que le graphe résultant graphique 1-graphe (X, E) satisfait:

$(x, y) \in U, (y, z) \in U \quad \Rightarrow (x, z) \in U \quad$ (transitivité)

$(x, y) \in U \quad \Rightarrow (y, x) \notin U \quad$ (anti-symétrique)

Clairement un graphe biparti est un graphe comparable autrement chaque sous-graphe d'un graphe comparable est un graphe comparable.

5. **Graphe milieu**

Le graphe milieu de H est obtenu en insérant un sommet x dans le milieu de chaque arête e_i, $1 \leq i \leq |E(H)|$ et ajoutant l'arête $x_i x_j$ pour $1 \leq i \leq j \leq |E(H)|$ si et seulement si e_i et e_j ont un sommet commun, le graphe milieu de chaque graphe est un graphe sans étoile, c'est facile de voir que tout graphe inflation et tout graphe du milieu sont des graphes adjoints mais de l'autre côté le graphe H_1 et le graphe H_2 dans la figure 2.1.1 sont des exemples le complément d'un graphe sans triangle et d'un graphe comparable qui n'est pas des graphes d'adjoints.

6. **Graphe quasi-adjoint**

Soit $G = (X, E)$ un graphe. G est dit quasi−adjoint si le voisinage de tout sommet peut être partionné en deux cliques, ce qui est équivalent à dire que le complémentaire de voisinage de tout sommet (au sens des arêtes) est biparti. J.F. Morras a défini un graphe presque biparti comme étant un graphe tel que le sous−graphe constuit sur les sommets non voisins d'un sommet quelconque soit biparti. Un graphe quasi−adjoint est donc le complémentaie d'un graphe presque biparti. Il est évident qu'un graphe quasi-adjoint est un graphe sans étoile. La réciproque n'est pas vraie:en effet, le graphe sans étoile de la figure H_1 n'est pas un graphe quasi−adjoint par ailleurs tout graphe adjoint est un graphe quasi−adjoint: en effet, soit $G = (X, E)$ un graphe dont le graphe adjoint est $L(G)$ soient x un sommet de $L(G)$ et (x_1, x_2) l'arête de G associée à x le voisinage de x est l'ensemble des sommets qui correspondent aux arêtes de G qui sont adjacents à l'arête (x_1, x_2) il peut donc être partitionée en deux cliques. C'est facile de vérifier que cette famille contient tout graphe adjoint et aussi tout graphe milieu et inflation néanmoins quelques graphes complément sans triangle, le graphe qausi-adjoint de la figure H_2 n'est pas un graphe adjoint.

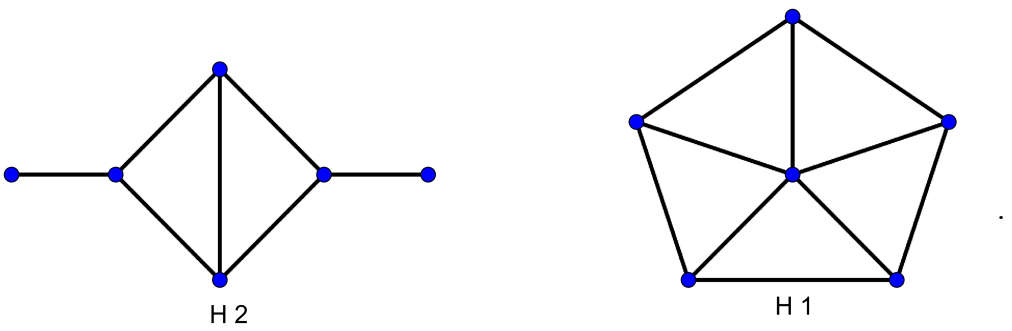


Figure 2.1.1: Graphe H_1, H_2

Théorème 2.2.1 *[4] Si G est un graphe sans étoile, alors $\gamma(G) = i(G)$.*

Théorème 2.2.2 *[5] Soit G un graphe connexe sans étoile, avec $\alpha(G) \geq 3$. Alors $\chi(G) \leq 2\omega(G)$.*

Théorème 2.2.3 *[5] Soit G un graphe connexe sans étoile , avec $\alpha(G) \geq 3$. Alors $\Delta(G) \leq 4(\omega(G) - 1)$, et par conséquent $\chi(G) \leq 4(\omega(G) - 1)$.*

Théorème 2.2.4 *[5]Soit G un graphe connexe sans étoile, avec $\alpha(G) \geq 3$. Alors $\chi(\overline{G}) \leq 2\omega(\overline{G})$.*

Corollaire 2.2.1 *[6]Pour tout graphe G sans étoile d'ordre n, $\gamma(G) \leq 2(n - \alpha(G))/\alpha(G)$.*

2.3 Connectivité, degré, voisinage et cycle hamiltonien

Définition 2.3.1 *La Connectivité des sommets ou Connectivité d'un graphe G est le nombre minimum de sommet à supprimer pour avoir un graphe non connexe ou réduit à un seul sommet. Un graphe est k-connexe, si sa Connectivité $K(G) \geq k$.*

Définition 2.3.2 *La Connectivité des arêtes d'un graphe connexe G est le nombre minimum d'arêtes à supprimer pour avoir un graphe G non connexe.*

Théorème 2.3.1 *[9]Si G est un graphe 2- connexe sans étoile d'ordre n, alors $\gamma(G) \leq \lceil n/3 \rceil$.*

Théorème 2.3.2 *[10] Si G un graphe k-connexe sans étoile, avec $k \geq 3$ et $\alpha(G) \leq 2k$, alors G est un graphe hamiltonien.*

Théorème 2.3.3 *[11] Si G un graphe k-connexe sans étoile, avec $(k \geq 2)$ et $\gamma(G) \leq k$, alors G est un graphe hamiltonien.*

Lemme 2.3.1 *[13] Si G est un graphe 4-connexe sans étoile, alors G est un hamiltonien.*

Théorème 2.3.4 *[7]Tout graphe 2-connexe, k-regulier d'ordre $n \leq 3k$ est un hamiltonien.*

Définition 2.3.3 *Pour $1 \leq k \leq n$, on note par $\sigma_k(G)$ le minimum de la somme du degré $d(x_1)+...+d(x_k)$ et $U_k(G)$ le minimum de cardinal de l'union de voisinage $|N(x_1) \cup ...N(x_n)|$, où le minimum est pris sur tous les sous-ensembles $\{x_1, ..., x_k\}$ de k sommets indépendants de $V(G)$, nous gardons la notation σ pour la valeur commune de σ_k et U_k que les deux paramètres ont fréquemment été utilisés en condition suffisante pour les propriétés de l'hamiltonicité dans les graphes.*

Bornes sur le minimum de la somme du degré $\sigma_k(G)$ dans les graphes 1-connexe sans étoile:

1. $\sigma \geq \frac{n-2}{3}$.
2. $\sigma_3 \geq n - 2$.

Bornes sur le minimum de cardinal de l'union de voisinage $U_k(G)$ dans les graphes 1-connexe sans étoile:

1. $U_2 > \frac{2n-4}{3}$.
2. $U_2 \geq \frac{2n-5}{3}$.

Bornes sur le minimum de la somme du degré $\sigma_k(G)$ dans les graphes 2-connexe sans étoile:

1. $\sigma \geq \frac{n-2}{3}$.
2. $\sigma_2 \geq \frac{2n-5}{3}$.

3. $\sigma_3 \geq n-2$.

Bornes sur le minimum de la somme du degré $\sigma_k(G)$ dans les graphes 3-connexe sans étoile:

1. $\sigma \geq \frac{n+10}{5}$.
2. $\sigma \geq \frac{n+5}{5}$.
3. $\sigma \geq \frac{n+7}{6}$.
4. $\sigma_3 \geq n+1$.

Borne sur le minimum de l'union de voisinage $U_k(G)$ dans graphe 3-connexe sans étoile:

- $U_2 \geq \frac{11(n-7)}{21}$.

Bornes sur le minimum de la somme du degré $\sigma_k(G)$ dans graphe k−connexe sans étoile:

1. $\sigma > \frac{2n}{2k+1} - 2$.
2. $\sigma_{k+1} \geq n-k$.
3. $\sigma_{k+2} \geq n-k-1$.

Borne sur le minimum de cardinal de l'union de voisinage $U_k(G)$ dans graphe k−connexe sans étoile:

- $U_t \geq t\frac{n-1}{t+1}, t \leq k$.

Théorème 2.3.5 *[26] Si G un graphe 2-connexe sans étoile, et σ-regulier avec $\sigma \geq (n-1)/4$, alors G est un graphe hamiltonien.*

2.4 Graphe à cycle pleinement prolongeable

Définition 2.4.1 *Un cycle C dans un graphe $G = (V, E)$ est prolongeable dans G si il existe un cycle C' dans G tel que $V(C) \subseteq V(C')$ et $|V(C')| = |V(C)| + 1$, si un tel cycle C' existe, alors on dit que C peut être étendu à C' et C' est une extension de C.*

Voir la figure 2.3.1 et la figure 2.3.2.

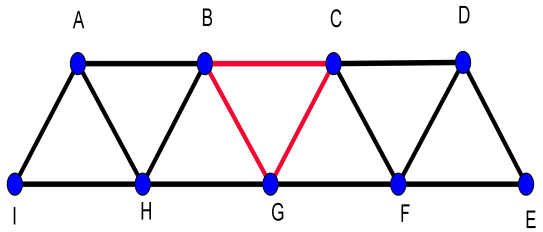


Figure 2.3.1: Le graphe G contient un cycle prolongeable $C = \{B, C, G, B\}$.

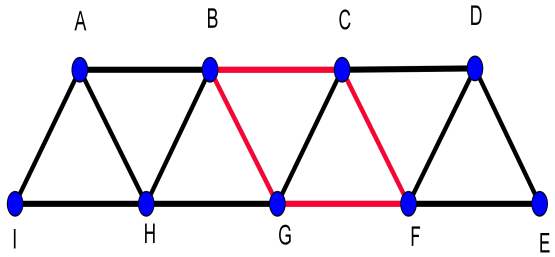


Figure 2.3.2: Le graphe G contient un cycle $C' = \{B, C, F, G, B\}$.

Définition 2.4.2 *Un graphe G est dit graphe à cycle prolongeable s'il contient au moins un cycle et tout cycle non hamiltonien de G est prolongeable.*

Définition 2.4.3 *Un graphe G est dit graphe à cycle pleinement prolongeable si c'est un graphe à cycle prolongeable et chaque sommet de G se trouve dans un triangle de G.*

Définition 2.4.4 *Un graphe $G = (V, E)$ est pancyclique si pour tout nombre entier k avec $3 \leq k \leq |V(G)|$, le graphe G contient $k - cycle$.*

Définition 2.4.5 *Un graphe $G = (V, E)$ est dit sommet pancyclique si pour tout sommet $v \in V(G)$, et pour tout nombre entier k avec $3 \leq k \leq |V(G)|$, le graphe G contient $k-$cycle qui contient v.*

Théorème 2.4.1 *[31]Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre $n \geq 3$ tel que $\sigma(G) \geq n$, alors*

1. G est hamiltonien.
2. Si C un cycle non hamiltonien dans G, alors il existe un cycle C' dans G tel que $V(C) \subseteq V(C')$ et $|V(C')| = |V(C)| + 1$ ou $|V(C)| + 2$.

Corollaire 2.4.1 *[32]Si G est un graphe d'ordre n satisfait $\delta(G) \geq (n+1)/2$, alors G est un graphe à cycle pleinement prolongeable.*

Corollaire 2.4.2 *[28] Soit G un graphe d'ordre $n \geq 3$ satisfait $\sigma(G) \geq n$, alors G est pancyclique et $G = K_{n/2,n/2}$ où $K_{n/2} \times K_2$.*

Corollaire 2.4.3 *[28] Soit G un graphe d'ordre n satisfait $\sigma(G) \geq n$ et soit C un cycle dans G de longueur k, avec $3 \leq k \leq n-2$. Alors il existe un cycle C'' dans G tel que $V(C) \subseteq V(C'')$ et $|V(C'')| = |V(C)| + 2$.*

2.5 Graphe triangulairement connexe

Définition 2.5.1 *Un graphe $G = (V, E)$ est dit triangulairement connexe si pour tout couple d'arêtes $(e_1, e_2) \in E(G)$, G possède une séquence de $3-$cycles $C_1, C_2, ..., C_k$ tel que $e_1 \in C_1$, $e_2 \in C_k$ et $E(C_i) \cap E(C_{i+1}) \neq \phi$, pour $1 \leq i \leq k-1$.*

Voir la figure 2.4.1.

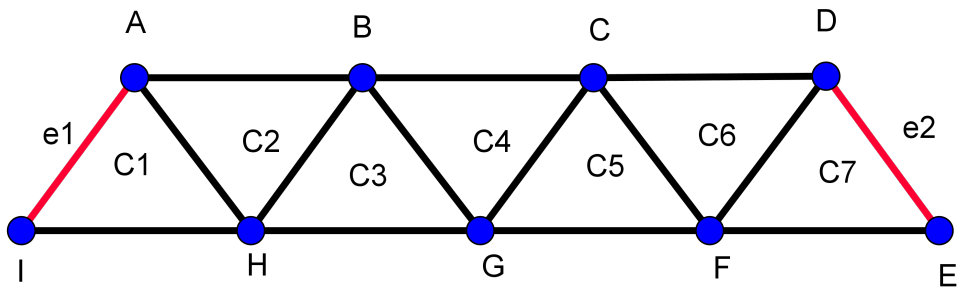


Figure 2.4.1: Le graphe contient une chaîne de $3-cycle$.

Définition 2.5.2 *un graphe $G = (V, E)$ est dit localement connexe si pour tout sommet $v \in V(G)$, le sous-graphe $G[N(v)]$ induit par $N(v)$ est connexe.*

Définition 2.5.3 *Soit $C_3(G)$ un graphe dont l'ensemble du sommet est l'ensemble de tout $3-cycles$ de G. Pour deux $3-cycles$ C_1 et C_2 de G, si C_1 et C_2 ont une arête commien dans G, alors $E(C_1) \cap E(C_2) \neq \phi$.*

Théorème 2.5.1 *[37] Tout graphe sans étoile connexe, localement connexe, est hamiltonien.*

Théorème 2.5.2 *([36][38]) Tous les graphes connexes, localement connexes sans étoile, sont des sommets pancyclique .*

Proposition 2.5.1 *[29]Tout graphe connexe, localement connexe est triangulairement connexe.*

Proposition 2.5.2 *[29]Un graphe G est triangulairement connexe si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifier:*

- $\forall e \in E(G), \exists\ C_e \in V(C_3(G))$ tel que $e \in E(C_e)$, et
- le graphe $C_3(G)$ est connexe.

Théorème 2.5.3 *[29]Tout graphe triangulairement connexe sans étoile avec $|E(G)| \geq 3$ est sommet pancyclique.*

Chapitre 3

Quelques résultats sur les graphes triangulairement connexes à cycle pleinement prolongeables

Nous avons présenté dans le deuxième chapitre des résultats pour les graphes triangulairement connexes et les graphes à cycle pleinement prolongeables. Dans ce chapitre, nous allons présenté quelques résultats que nous avons pu obtenir sur les graphes triangulairement connexes à cycle pleinement prolongeables.

3.1 Les graphes roues sont des graphes triangulairement connexes à cycle pleinement prolongeables

Définition 3.1.1 *Le graphe roue W_n est un graphe d'ordre $n \geq 4$ formé en ajoutant un sommet centre connecté à tous les sommets du graphe cycle C_{n-1}.*

Soit la figure 3.1.1, contient des Graphes roues .

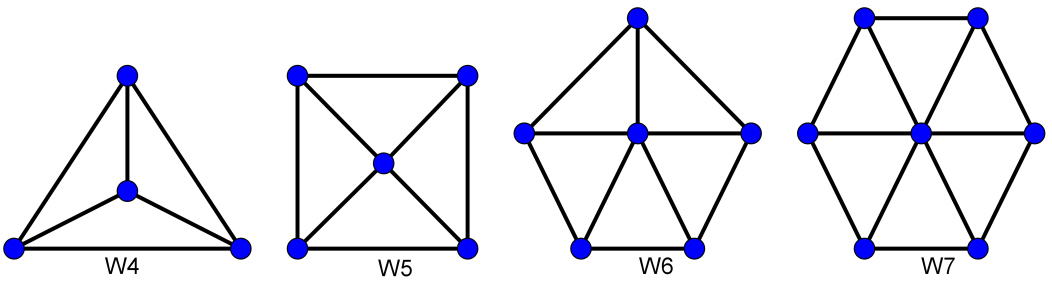


Figure 3.1.1: Graphes roues.

Proposition 3.1.1 *Tout graphe roue est un graphe triangulairement connexe.*

Preuve. Soit $G = (V, E)$ un graphe roue.

Cas 1: Si les deux arêtes (e_1, e_2) sont adjacentes:

De la définition du graphe roue (voir la figure 3.1.1), on voit que si les deux arêtes (e_1, e_2) $\in E(G)$ sont reliées par une chaîne de 3−cycles C_1, C_2, ..., C_k tel que $e_1 \in C_1$, $e_2 \in C_k$, $k \geq 1$ et $E(C_i) \cap E(C_{i+1}) \neq \varnothing$, pour $1 \leq i \leq k-1$. Donc le graphe G est triangulairement connexe.

Cas 2: Si les deux arêtes (e_1, e_2) ne sont pas adjacentes:

De même, les deux arêtes (e_1, e_2) $\in E(G)$ sont reliées toujours par une chaîne de 3−cycles C_1, C_2, ..., C_k, $k > 1$ tel que $e_1 \in C_1$, $e_2 \in C_k$ et $E(C_i) \cap E(C_{i+1}) \neq \varnothing$, pour $1 \leq i \leq k-1$.

■

Proposition 3.1.2 *Tout cycle non hamiltonien du graphe roue est prolongeable.*

Preuve. Soit $G = (V, E)$ un graphe roue avec $V(G) = \{x_1, x_2, ..., x_{n-1}, y\}$ tel que $d_G(y) = n-1$ et soit C_k un k−cycle de G.

De la définition du graphe roue (voir la figure 3.1.1), il existe au moins un sommet x_i qui n'appartient pas à C_k tel que $C_k = \{y, x_j, ..., x_k, y\}$.

Cas 1: Si $3 \leq k < n-1$:

Sous-cas 1: Si x_i est adjacent à x_j, alors on prend le cycle C' tel que $E(C') = (E(C)) - \{x_j y\} \cup \{x_j x_i, x_i y\}$.

Sous-cas 2: Si x_i est adjacent à x_k, alors on prend le cycle C' tel que $E(C') = (E(C)) - \{x_k y\} \cup \{x_k x_i, x_i y\}$.

Sous-cas 3: Si x_i n'est pas adjacent à x_j et x_k, alors il existe une chaîne $p = \{x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, ..., x_k\}$. Dans ce cas on considère le cycle définit par $E(C') = (E(C)) - \{x_j y\} \cup \{x_j x_{j+1}, x_{j+1} y\}$.

Dans les trois sous cas C' prolonge C_k.

Cas 2: Si $k = n - 1$:

Sous-cas 1: Si $y \in C_k$, alors il existe un sommet x_i qu'est adjacent à deux sommets x_j et x_k et $x_i \notin C_k$. On prend dans ce cas le cycle C' définit par $E(C') = (E(C) - \{x_j y\}) \cup \{x_j x_i, x_i y\}$ ou bien $E(C') = (E(C) - \{x_k y\}) \cup \{x_k x_i, x_i y\}$.

Sous-cas 2: Si $y \notin C_k$, alors le cycle $C_k = V(G) - \{y\}$. On peut le prolonger C_k à C' définit par $E(C') = (E(C) - \{uv\}) \cup \{yu, yv\}$.

Dans les deux sous-cas le cycle C' prolonge C_k. ■

Proposition 3.1.3 *Tout graphe roue est un graphe à cycle prolongeable.*

Preuve. La démonstration est une concéquence directe de la proposition précédente. ■

Proposition 3.1.4 *Tout graphe roue est un graphe à cycle pleinement prolongeable.*

Preuve. Il évident de voir que chaque sommet du graphe roue se trouve dans un triangle. Et d'après la proposition précédente le graphe roue est un graphe à cycle pleinement prolongeable. ■

Exemple 3.1.1 *Soit le graphe roue d'ordre $n = 7$.*

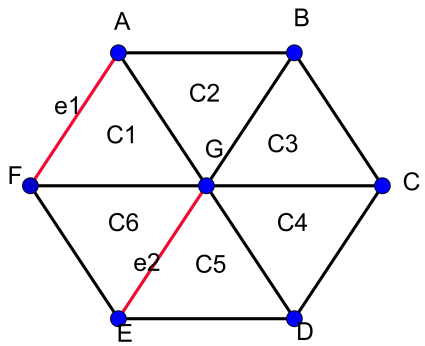


Figure 3.1.2: Graphe roue W_7

contient une chaîne de 3−cycle .

Opération 1

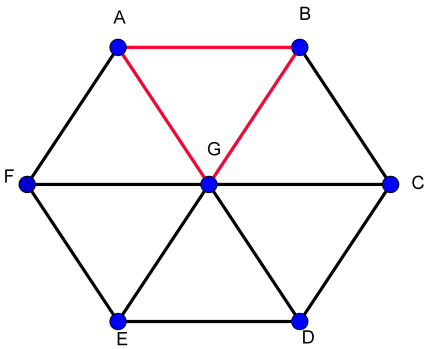


Figure 3.1.3: Graphe roue W_7 contient un cycle prolongeable $C = \{A, , B, G, A\}$.

Opération 2

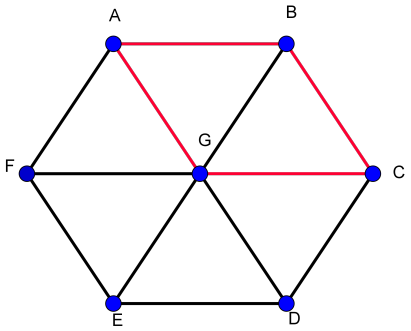


Figure 3.1.4: Graphe roue W_7 contient un cycle $C' = \{A, , B, C, G, A\}$.

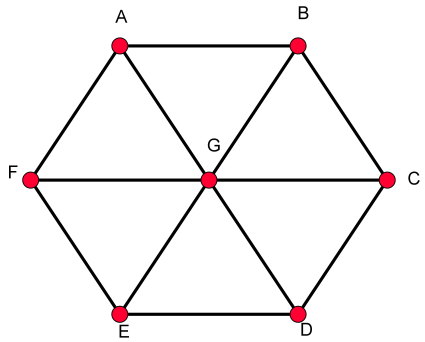


Figure 3.1.5: Présente chaque sommet de graphe roue W_7 se trouve dans un triangle.

Récapitulation

- Tout graphe roue est un graphe triangulairement connexe.
- Tout cycle non hamiltonien du graphe roue est un cycle prolongeable.
- Tout graphe roue est un graphe à cycle prolongeable.
- Tout graphe roue est un graphe à cycle pleinement prolongeable.
- Tout graphe roue est un graphe triangulairement connexe à cycle pleinement prolongeable.

3.2 Les graphes complet d'ordre n $\geq$ 4 sont des graphes triangulairement connexes à cycle pleinment prolongeables

Définition 3.2.1 *Le graphe complet d'ordre n, noté par K_n est le graphe dans lequel tous ces sommets sont de degré $n-1$. Ainsi, deux sommets quelconques de K_n sont adjacents.*

Soit la figure 3.2.1, contient des Graphes complet avec $n \geq 4$.

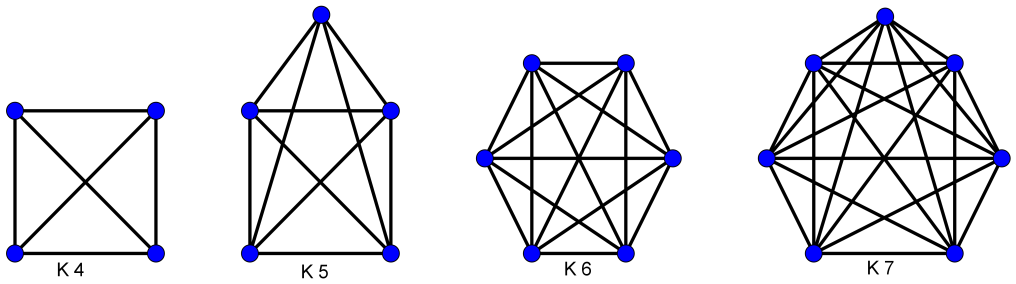


Figure 3.2.1: Graphes complet.

Proposition 3.2.1 *Tout graphe complet d'ordre $n \geq 4$ est triangulairement connexe.*

Preuve. Soit $G = (V, E)$ un graphe complet d'ordre $n \geq 4$.

Cas 1: Si les deux arêtes (e_1, e_2) sont adjacentes:

De la définition du graphe complet d'ordre $n \geq 4$ (voir la figure 3.2.1), on voit que si les deux arêtes $(e_1, e_2) \in E(G)$ sont reliées par une chaîne de $3-$cycles $C_1, C_2, ..., C_k$ tel que $e_1 \in C_1$, $e_2 \in C_k$, $k \geq 1$ et $E(C_i) \cap E(C_{i+1}) \neq \varnothing$, pour $1 \leq i \leq k-1$. Donc le graphe G est triangulairement connexe.

Cas 2: Si les deux arêtes (e_1, e_2) ne sont pas adjacentes:

De même, les deux arêtes $(e_1, e_2) \in E(G)$ sont reliées toujours par une chaîne de $3-$cycles $C_1, C_2, ..., C_k$, $k > 1$ tel que $e_1 \in C_1$, $e_2 \in C_k$ et $E(C_i) \cap E(C_{i+1}) \neq \varnothing$, pour $1 \leq i \leq k-1$.

■

Proposition 3.2.2 *Tout cycle non hamiltonien du graphe complet d'ordre $n \geq 4$ est prolongeable.*

Preuve. Soit $G = (V, E)$ un graphe complet d'ordre $n \geq 4$. Soit C un cycle non hamiltonien de longueur K du graphe G. Comme C est non hamiltonien on a forcément $K < n$. Il existe alors au moins un sommet v de G qui n'appartient pas à C. De G complet v est adjacent à tous les sommets de C. Pour n'importe quelle arête $e = xy \in E(C)$, le cycle C' définit par $E(C') = (E(C) - e) \cup \{e_1 = xv, e_2 = yv\}$ vérifie $V(C) \subseteq V(C')$ et $|V(C')| = |V(C)| + 1$. Alors C peut être étendu à C' et C' est une extension de C, donc C est un cycle prolongeable. ■

Proposition 3.2.3 *Tout graphe complet d'ordre $n \geq 4$ est un graphe à cycle prolongeable.*

Preuve. La démonstration est une concéquence directe de la proposition précédente. ■

Proposition 3.2.4 *Tout graphe complet d'ordre $n \geq 4$ est un graphe à cycle pleinement prolongeable.*

Preuve. Soit $G = (V, E)$ un graphe complet d'ordre $n \geq 4$. Chaque sommet $v \in V(G)$ est adjacent à chaque deux sommets $u, w \in V(G)$. Donc v se trouve sur le $C = uvwu$. Et d'après la proposition précédante G est un graphe à cycle pleinement prolongeable.

D'une autre manière, on peut déduire que G est un graphe à cycle pleinement prolongeable, d'après le corollaire 2.4.1, car il est évident de voir que G satisfait $\delta(K_n) \geq (n+1)/2$.
■

Exemple 3.2.1 *Soit le graphe complet d'ordre $n = 4$*

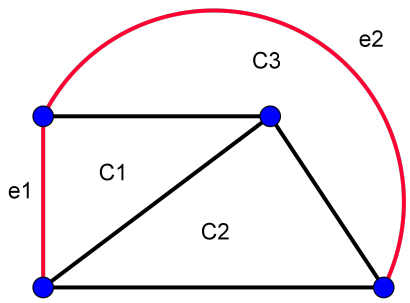


Figure 3.2.2: Graphe complet K_4
contient une chaîne de 3−cycle.

Opération 1

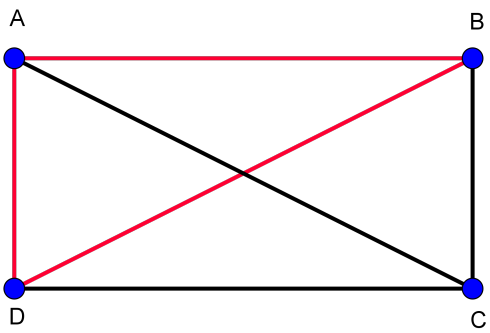


Figure 3.2.3: Le graphe complet K_4 contient un cycle prolongeable $C = \{A, B, D, A\}$.

Opération 2

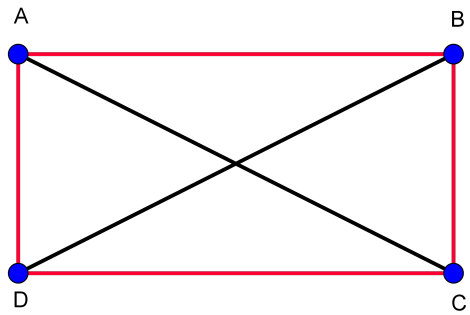


Figure 3.2.4: Le graphe complet K_4 contient un cycle $C' = \{A, B, C, D, A\}$.

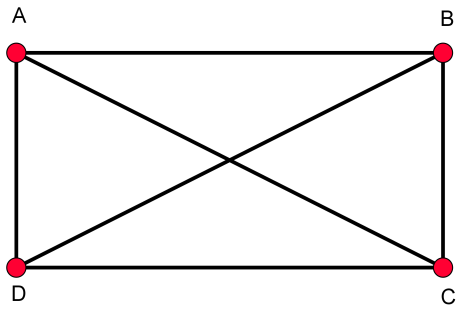


Figure 3.2.5: Présente chaque sommet de graphe complet K_4 se trouve dans un triangle.

Récapitulation

- Tout graphe complet d'ordre $n \geq 4$ est un graphe triangulairement connexe.
- Tout cycle non hamiltonien du graphe complet d'ordre $n \geq 4$ est un cycle prolongeable.
- Tout graphe complet d'ordre $n \geq 4$ est un graphe à cycle prolongeable.
- Tout graphe complet d'ordre $n \geq 4$ est un graphe à cycle pleinement prolongeable.
- Tout graphe complet d'ordre $n \geq 4$ est un graphe triangulairement connexe à cycle pleinement prolongeable.

3.3 Les graphes grilles sont triangulairement connexes à cycle pleinement prolongeables

On considère que les graphes grilles où chaque face intérieure contient une corde.

Soit la figure 3.3.1, contient des graphes grilles où chaque face intérieure contient une corde.

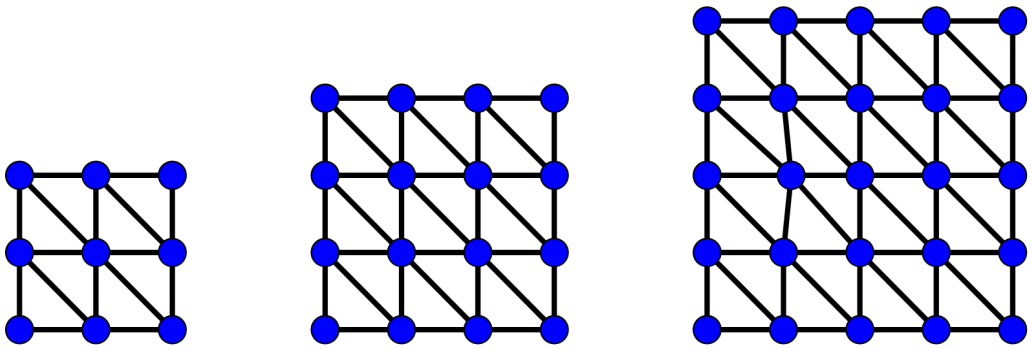


Figure 3.3.1: Les grilles où chaque face intérieure contient une corde.

Proposition 3.3.1 *Tout graphe grille où chaque face intérieure contient une corde est triangulairement connexe.*

Preuve. Soit $G = (V, E)$ une grille où chaque face intérieure contient une corde.

Cas 1: Si les deux arêtes $(e_1,\ e_2)$ sont adjacentes:

De la définition du graphe grille où chaque face intérieure contient une corde (voir la figure 3.3.1), on voit que les deux arêtes $(e_1,\ e_2) \in E(G)$ sont reliées par une chaîne de $3-$cycles $C_1,\ C_2, ..., C_k$ tel que $e_1 \in C_1,\ e_2 \in C_k$, $k \geq 1$ et $E(C_i) \cap E(C_{i+1}) \neq \varnothing$, pour $1 \leq i \leq k-1$. Donc le graphe G est triangulairement connexe.

Cas 2: Si les deux arêtes $(e_1,\ e_2)$ ne sont pas adjacentes:

De même, les deux arêtes $(e_1,\ e_2) \in E(G)$ sont reliées toujours par une chaîne de $3-$cycles $C_1,\ C_2, ..., C_k$, $k > 1$ tel que $e_1 \in C_1,\ e_2 \in C_k$ et $E(C_i) \cap E(C_{i+1}) \neq \varnothing$, pour $1 \leq i \leq k-1$.

■

Proposition 3.3.2 *Tout cycle non hamiltonien d'une grille où chaque face intérieure contient une corde est prolongeable.*

Preuve. Soit $G = (V, E)$ un graphe grille où chaque face intérieure contient une corde, soit C un cycle non hamiltonien de longueur k de G. De C non hamiltonien on a forcément $k < n$. Il existe alors au moins un sommet v de G qui n'appartient pas à C et adjacent à au moins deux sommets $(x, y) \in V(C)$ et x adjacent à y. Pour l'arête $e = xy \in E(C)$,

le cycle C' définit par $E(C') = (E(C) - e) \cup \{e_1 = xv, e_2 = yv\}$ vérifie $V(C) \subseteq V(C')$ et $|V(C')| = |V(C)| + 1$. Alors C peut être étendu à C' et C' est une extension de C, donc C est un cycle prolongeable. ■

Proposition 3.3.3 *Tout graphe grille où chaque face intérieure contient une corde est un graphe à cycle prolongeable.*

Preuve. La démonstration est une concéquence directe de la proposition précédente. ■

Proposition 3.3.4 *Tout graphe grille où chaque face intérieure contient une corde est un graphe à cycle pleinement prolongeable.*

Preuve. Il évident de voir que chaque sommet du graphe grille où chaque face intérieure contient une corde se trouve dans un triangle. Et d'après la proposition précédente le graphe grille où chaque face intérieure contient une corde est un graphe à cycle pleinement prolongeable. ■

Exemple 3.3.1 *Soit G est une grille d'ordre $n = 9$ avec son nombre de faces $f = 8$.*

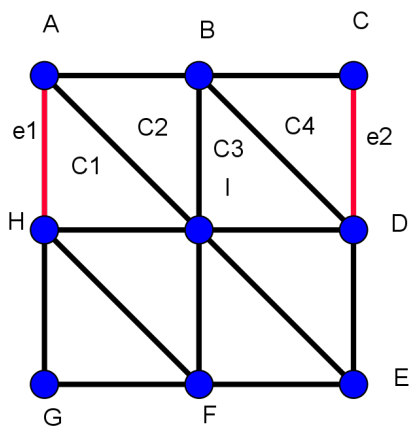


Figure 3.3.2: Le graphe G contient une chaîne de $3 - cycle$.

Opération 1:

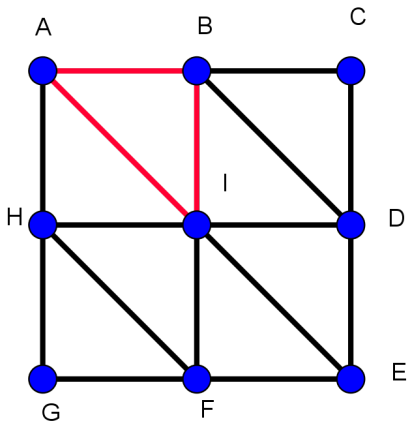


Figure 3.3.3: Le graphe G contient un cycle prolongeable $C = \{A, B, I, A\}$.

Opération 2:

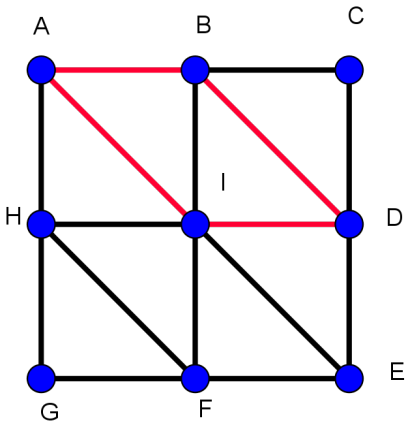


Figure 3.3.4: Le graphe G contient un cycle $C' = \{A, B, D, I, A\}$.

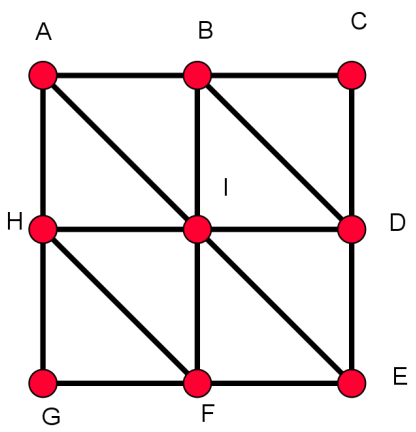


Figure 3.3.5: Présente chaque sommet de graphe G se trouve dans un triangle.

Récapitulation

- Tout graphe grille où chaque face intérieure contient une corde est un graphe triangulairement connexe.
- Tout cycle non hamiltonien de graphe grille où chaque face intérieure contient une corde est un cycle prolongeable.
- Tout graphe grille où chaque face intérieure contient une corde est un graphe à cycle prolongeable.
- Tout graphe grille où chaque face intérieure contient une corde est un graphe à cycle pleinement prolongeable.
- Tout graphe grille où chaque face intérieure contient une corde est un graphe triangulairement connexe à cycle pleinement prolongeable.

3.4 Les graphes particuliers Icosaédrique et Skeleton sont des graphes triangulairement connexes à cycle pleinement prolongeables

1- graphe Skeleton:

Soit la figure 3.4.1, contient un graphe Skeleton:

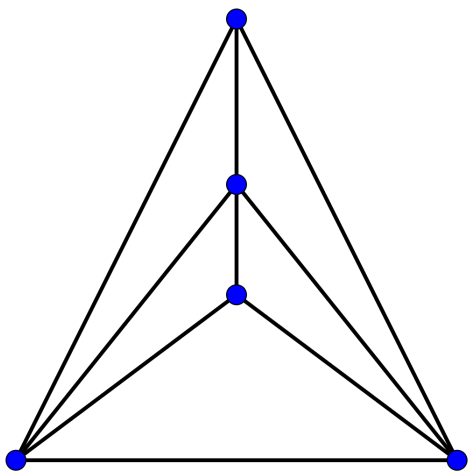


Figure 3.4.1: Le graphe Skeleton.

Proposition 3.4.1 *Le graphe Skeleton est triangulairement connexe.*

Preuve. Soit $G = (V, E)$ un graphe Skeleton.

Cas 1: Si les deux arêtes $(e_1,\ e_2)$ sont adjacentes:

De la définition du graphe Skeleton (voir la figure 3.4.6), on voit que si les deux arêtes $(e_1,\ e_2) \in E(G)$ sont reliées par une chaîne de $3-$cycles $C_1,\ C_2, ..., C_k$ tel que $e_1 \in C_1$, $e_2 \in C_k$, $k \geq 1$ et $E(C_i) \cap E(C_{i+1}) \neq \varnothing$, pour $1 \leq i \leq k-1$. Donc le graphe G est triangulairement connexe.

Cas 2: Si les deux arêtes $(e_1,\ e_2)$ ne sont pas adjacentes:

De même, les deux arêtes $(e_1,\ e_2) \in E(G)$ sont reliées toujours par une chaîne de $3-$cycles $C_1,\ C_2, ..., C_k$, $k > 1$ tel que $e_1 \in C_1$, $e_2 \in C_k$ et $E(C_i) \cap E(C_{i+1}) \neq \varnothing$, pour $1 \leq i \leq k-1$.

■

Proposition 3.4.2 *Le graphe Skeleton est un graphe à cycle pleinement prolongeable.*

Preuve. Soit $G = (V, E)$ un graphe Skeleton. On peut déduire que G est un graphe à cycle pleinement prolongeable, d'après le corollaire 2.4.1, car il vérifie $\delta(G) \geq (n+1)/2$. ■

Récapitulation

- Le graphe Skeleton est un graphe triangulairement connexe.
- Le graphe Skeleton est un graphe à cycle pleinement prolongeable.
- Le graphe Skeleton est un graphe triangulairement connexe à cycle pleinement prolongeable.

2- graphe Icosaédrique:

Soit la figure 3.4.2, contient un graphe Icosaédrique:

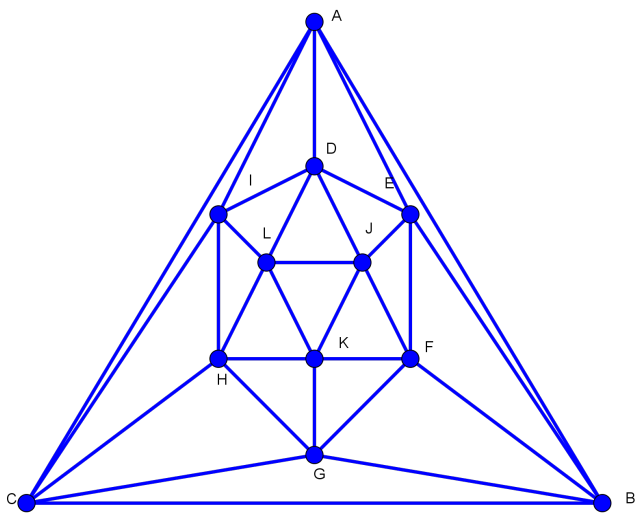


Figure 3.4.2: Le graphe Icosaédrique.

Proposition 3.4.3 *Le graphe Icosaédrique est triangulairement connexe.*

Preuve. Soit $G = (V, E)$ un graphe Icosaédrique.

Cas 1: Si les deux arêtes (e_1, e_2) sont adjacentes:

De la définition du graphe Icosaédrique (voir la figure 3.4.1), on voit que si les deux arêtes $(e_1, e_2) \in E(G)$ sont reliées par une chaîne de $3-$cycles $C_1, C_2, ..., C_k$ tel que $e_1 \in C_1$,

$e_2 \in C_k$, $k \geq 1$ et $E(C_i) \cap E(C_{i+1}) \neq \varnothing$, pour $1 \leq i \leq k-1$. Donc le graphe G est triangulairement connexe.

Cas2: Si les deux arêtes (e_1, e_2) ne sont pas adjacentes:

De même, les deux arêtes $(e_1, e_2) \in E(G)$ sont reliées toujours par une chaîne de 3−cycles $C_1, C_2, ..., C_k$, $k > 1$ tel que $e_1 \in C_1$, $e_2 \in C_k$ et $E(C_i) \cap E(C_{i+1}) \neq \varnothing$, pour $1 \leq i \leq k-1$.

■

Proposition 3.4.4 *Tout cycle non hamiltonien d'un graphe Icosaédrique est prolongeable.*

Preuve. Soit $G = (V, E)$ un graphe Icosaédrique, soit C un cycle non hamiltonien de longueur k de G. Comme C non hamiltonien on a forcément $k < n$. Il existe alors au moins un sommet v de G qui n'appartient pas à C et adjacent à au moins à deux sommets $(x, y) \in V(C)$ et x adjacent à y. Pour l'arête $e = xy \in E(C)$, le cycle C' définit par $E(C') = (E(C) - e) \cup \{e_1 = xv, e_2 = yv\}$ vérifie $V(C) \subseteq V(C')$ et $|V(C')| = |V(C)| + 1$. Alors C peut être étendu à C' et C' est une extension de C, donc C est un cycle prolongeable.

■

Proposition 3.4.5 *Le graphe Icosaédrique est un graphe à cycle prolongeable.*

Preuve. La démonstration est une concéquence directe de la proposition précédente. ■

Proposition 3.4.6 *Le graphe Icosaédrique est un graphe à cycle pleinement prolongeable.*

Preuve. Il évident de voir que chaque sommet du graphe icosaédrique se trouve dans un triangle. Et d'après la proposition précédente le graphe Icosaédrique est un graphe à cycle pleinement prolongeable. ■

Exemple 3.4.1 *Soit le graphe Icosaédrique:*

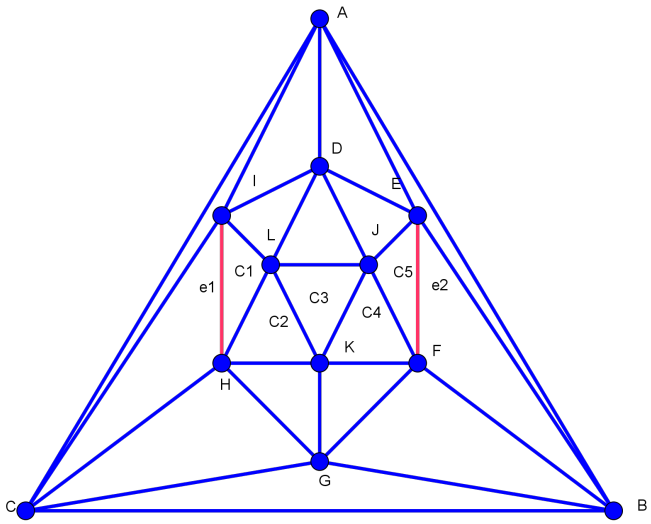


Figure 3.4.3: Le graphe Icosaédrique contient une chaine de $3-cycle$.

Opération 1

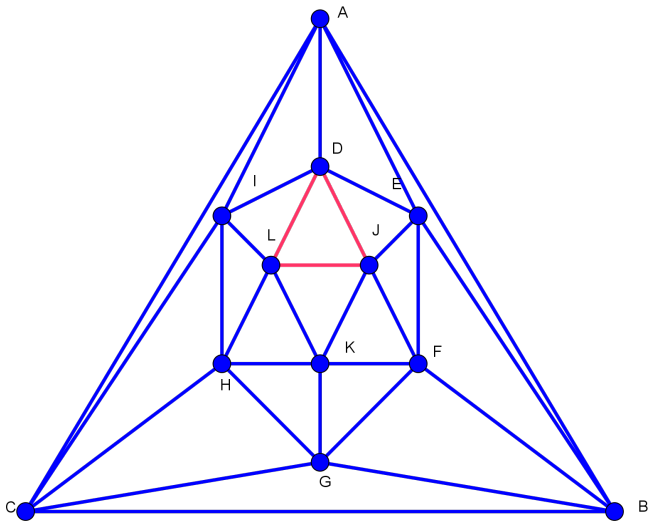


Figure 3.4.4 : Le graphe Icosaédrique cotient un cycle prolongeable $C = \{D, J, L, D\}$.

Opération 2

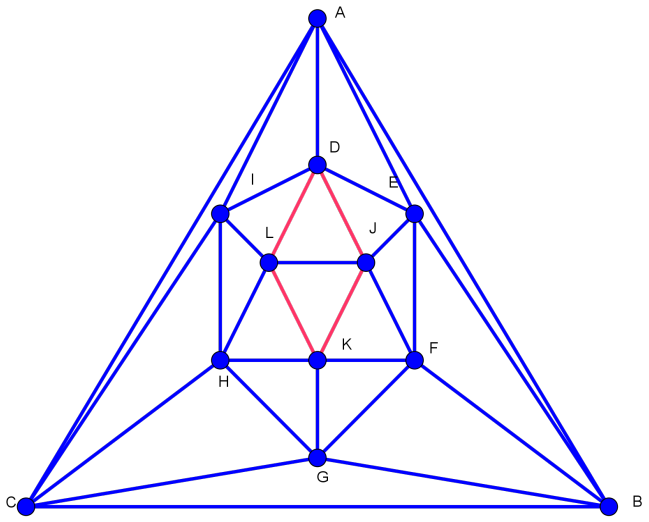


Figure 3.4.5 : Le graphe Icosaédrique cotient un cycle $C' = \{D, J, K, L, D\}$.

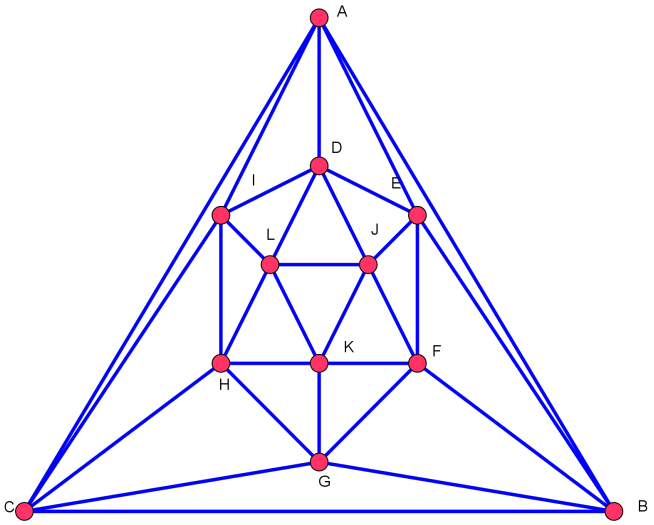


Figure 3.4.6: Présente chaque sommet de graphe Icosaédrique se trouve dans un triangle.

Récapitulation

- Le graphe Icosaédrique est un graphe triangulairement connexe.
- Tout cycle non hamiltonien d'un graphe Icosaédrique est un cycle prolongeable.

- Le graphe Icosaédrique est un graphe à cycle prolongeable.
- Le graphe Icosaédrique est un graphe à cycle pleinement prolongeable.
- Le graphe Icosaédrique est un graphe triangulairement connexe à cycle pleinement prolongeable.

Remarque 3.4.1 *:*

1- Les arbres ne sont pas des graphes triangulairement connexes à cycle pleinement prolongeables puisque ne contiennent aucun cycle.

2- Les graphes bipartis et bipartis complet ne sont pas des graphes triangulairement connexes à cycle pleinement prolongeables puisque ne contiennent aucun triangle.

3- Les cycles d'ordre $n \geq 4$ ne sont pas des graphes triangulairement connexes à cycle pleinement prolongeables puisque ses sommets ne se trouvent pas dans un triangle.

Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans ce mémoire à l'étude de quelques graphes triangulairement connexes à cycle pleinement prolongeables. Les plus importants résultats obtenus dans ce travail ont été notre objectif.

On a vérifié que les graphes roues, les graphes complet d'ordre $n \geq 4$, et les graphes grilles où chaque face intérieure contient une corde ainsi que les graphes particuliers Icosaédrique et Skeleton sont des graphes triangulairement connexes à cycle pleinement prolongeables.

Bibliographie

[1] Document produit par Sébastien Cabot dans le cadre du cours "Théorie des graphes" donné à l'Université de Montréal durant la session d'hiver 2008.

[2] Beineke, L.W .: Derived graphs and digraphs. Beitragezur Graphen theorie, Teubner, Leipzig, 1968.

[3] Beineke, L.W .: Characterizations of derived graphs. J. Combin. Theory Ser. B. 9(1970) 129-135.

[4] Allan, R.B.; Laskar, R.: On domination and independent domination numbers of a graph. Discree Math. 23(1978) 73-76.

[5] Maria Chudnovsky and Paul Seymour, "Claw-free graphs VII. Colouring claw-free graphs", manuscript, 2004.

[6] Li, Hao; Virlouvet, C.: Neighborhood conditions for claw-free hamiltonian graphs. Ars Combin. 29A(1990) 109-116.

[7] Jackson, Bill: Hamilton cycles in regular 2-connected graphs. J. Combin. Theory Ser. B 29(1980) 27-46.

[8] chvátal, V .: Tough graphs and hamiltonian circuits. Discrete Math. 5(1973) 215-228.

[9] Gernert, D.: Forbidden and una voidable subgraphs. Ars Combin. 27(1989) 165-176.

[10] Flandrin, E.; Li, Hao: Chvátal-Erdos condition in 3-connected claw-free graphs. Rapport de Recherche L.R.I. No. 500, Univ. Paris-Sud, Orsay, 1989.

[11] Ryjácek, Z.: Almost claw-free graphs. J. Graph Theory 18(1994) 469-477.

[12] Matthews, M.M.; Sumner, D.P .: Hamiltonian results in $K_{1,3}$ -free graphs. J. Graph Theory 8(1984) 139-146.

[13] Diny, D.A.; Harary , F .; Mc Morris, F .R.: A survey of results on a graph with specied hereditary properties. Ars Combin. 20B(1985) 193-205.

[14] Matthews, M.M.; Sumner, D.P .: Longest paths and cycles in $K_{1;3}$-free graphs. J.Graph Theory 9(1985) 269-277.

[15] Broersma, H.J.: Sucient conditions for hamiltonicity and traceability of $K_{1;3}$-free graphs. Preprint, 1986 (unpublished).

[16] Liu, Yiping; Tian, Feng; Wu, Zhengshen: Some results on longest paths and cycles in $K_{1,3}$-free graphs. J. Changsha Railway Inst. 4(1986) 105-106.

[17] Faudree, R.J.; Gould, R.J.; Lindquester, T. E.: Hamiltonian properties and adjacency conditions in $K_{1,3}$-free graphs. Proc. of the 6th Int. Conf. on Theory and Applications of Graphs, Kalamazoo, 1988; Graph Theory , Combin. Appl. 1(1991) 467-479.

[18] Bauer, D.; Fan, G; Veldman, H.J.: Hamilton properties of graphs with large neighborhood unions. Discrete Math. 96(1991) 33-49.

[19] Flandrin, E.; Fouquet, J.L.; Li, Hao: On hamiltonian claw-free graphs. Discrete Math. 111 (1993) 221-229.

[20] Li, Mingchu: Hamiltonian cycles in 3-connected claw-free graphs. J. Graph Theory 17(1993) 303-313.

[21] Li, Guojun; Liu, Zhenhong; Lu, Mei: Hamiltonian cycle in 3-connected claw-free graph. Preprint.

[22] Li, Mingchu: A note on circumfere nces of 3-connected claw-free graph. J. Nanjing. Univ. Nat. Sci., Spec. Issue on Graph Theory, Vol. 27 (1991) 98-105.

[23] W ang, Jianglu: Longest cycles in 3-connected and claw-free graphs (Chinese, English summary). J. Nanjing Univ. Nat. Sci., Special Issue on Graph Theory, Vol. 27 (1991) 110-122.

[24] Zhang, C.-Q.: Hamilton cycles in claw-free graphs. J. Graph Theory 12(1988) 209-216.

[25] Ainouc he, A.: Hamiltonian and traceable claw-free graphs. Preprint.

[26] Liu, Yiping; Wu, Zhengsheng: Hamilton cycles in 2-connected regular $K_{1,3}$-free graphs. Preprint, Nanjing University, China, 1987.

[27] EXTENDING CYCLES IN GRAPHS, George R.T. HENDRY, Aberdeen University, Aberdeen, UK, AB92TY, Received 30 May 1986, Revised 4 November 1988.

[28] O. Ore, Note on hamilton circuits, Amer. Math. Monthly 67 (1960) 55.

[29] Triangularly connected claw-free graph, HongJian Lai * , Lianying Miao † , Yehong Shao * , Liangxia Wan ‡, February 2, 2004

[30] J.A. Bondy, Pancyclic graphs I, J. Combin. Theory 11 (1971) 80-84.

[31] J.A. Bondy, Integrity in graph theory, in: The Theory and Applications of Graphs (Kalamazoo,MI, 1980) (Wiley, New York, 1981) 117-125.

[32] G.A. Dirac, Some theorems on abstract graphs, Proc. London Math. Sot. 2 (1952) 69-81.

[33] J.A. Bondy and V. Chvatal, A method in graph theory, Discrete Math. 15 (1976) 111-135.

[34] L. Clark, Hamiltonian properties of connected locally connected graphs, Congr. Numer. 32 (1981) 199-204.

[35] D.J. Oberly and D.P. Sumner, Every connected, locally connected nontrivial graph with no induced claw is hamiltonian, J. Graph Theory 3 (1979) 351-356.

[36] L. Clark, Hamiltonian properties of connected locally connected graphs, Congr. Numer. 32 (1981) 154-176.

[37] D. J. Oberly and D. P. Sumner, Every connected, locally connected nontrivial graph with no induced claw is hamiltonian, Journal of Graph Theory, 3 (1979) 351-356.

[38] R. H. Shi, Connected and locally connected graphs with no induced claws are vertex pancyclic, Kexue Tongbao 31 (1986) 427.

[39] C.-Q. Zhang, Cycles of given length in some K 1,3 -free graphs, Discrete Math. 78 (1989) 307-313.