République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministére de L'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique

Université Dr. Yahia Farés de Médéa

Faculté des Science

Département De Mthématiques et Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

par :

BOUTRIG Linda

Thème :

Stabilisation aux limites de type mémoire pour une poutre d'Euler-Bernoulli sous un contrôle de feedback sur la frontière

---

Śoutenu Publiquement, le 15 Juin 2023, devant le jury composé de :

Présidente :	O. GHERABA	*M.A.A*	Université de Médéa
Examinatrice :	N.R. AIT AMRANE	*M.C.B*	Université de Médéa
Promatrice :	F. BOULARIAH	*M.A.A*	Université de Médéa

Année universitaire 2022/2023

Remerciement

Je remercie en premier lieu **ALLAH** pour la foi, la confiance et la volonté qu'il m'a donné pour suivre et terminer ce travail.

Je tiens vivement à exprimer ma profonde reconnaissance à Madame **Fatiha BOULARIAH**, maître assistante **MAA** à l'université de Médéa, d'avoir veillé et assurer l'encadrement de ce travail.

Mes scincères remerciements vont également à Mesdames **Nacima Rosa AIT-AMRANE** maître de conférence **MCB** et **Ouassila GHERABA** maître assistante **MAA** à l'université de Médéa, d'avoir accepté d'examiner ce travail et de faire partie du jury.

Sans oublier de remercier tous nos **enseignants** pendant tous les paliers de notre parcours, et exceptionnellement aux **enseignants** qui ont enrichi nos connaissances.

Enfin, J'adresse mes vifs remerciements à **ma famille** et **mes amies** pour leurs soutien moral et leurs encouragements ainsi que leurs présence et leurs aide.

Dédicace

Je dédie ce travail :

A mon grand père

A ma chére mère :**Zahra** et mon chére père : **Mohammed** qui n'ont jamais cessé de me soutenir et m'encourager durent mes années d'études.

Ou 'ils trouvent ici le témoignage de ma profonde gratitude et ma reconnaissance

A mes chèrs frères (Fateh, Soufian),

A mes chères sœurs (Sihem, Amina, Abir),

et les petits (Lokmen, Meryem, Djawed),

A mes chéres amies :Sara F, Sara M, safia, Ikram, Ahlem, Hanaa, Aya, Nadia, Mibarka, Khadidja, Hanan, Wissem, Chanez, Lamia, KHouloud, Nesrin, Rachida, tata Soso, Souad R, Fatima zohra, tata Mimi, Fayza o, Souria, Assia, Fatma, Khawla, Linda, Hayet, Souhila(jisi), Noura, et tous mes amis qui m'ont toujours encouragé, et a qui je souhaite plus de succès.

A toutes mes amies de la promotion **A.m.A- 2023**.

Résumé

Le but de notre travail est de prouver le résultat de la décroissance exponentielle de l'énergie associée la frontière de type mémoire pour une poutre d'Euler-Bernoulli qui a une extrémité fixé et l'autre extrémité libre. Nous prouvons l'existence de solution à l'aide de la méthode de Galerkin puis étudions la stabilité exponentielle des solutions . En appliquant un feedback sur l'extrémité libre d'une poutre, nous réduirons sa vibration de manière rapide. Notre méthode est principalement basée sur la technique des multiplicateurs.

Les mots-clés : Décroissance exponentielle, l'énergie, frontière, mémoire, poutre, extrémité, méthode de Galerkin, stabilité exponentielle, technique du multiplicateur.

Abstract

The aim of our work is to prove the result of the exponential decay of the energy associated with the memory-like boundary for an Euler-Bernoulli beam which has a fixed end and control input at the other end. We prove the existence of solutions using by Galerkin's method and then study the exponential stability of solutions. By applying feedback to the free end of the beam, we will reduce its vibration. Our method is mainly based on the technique of multipliers.

The key words : exponential decay, energy, boundary, memory, beam, extremity, Galerkin's method, exponential stability, multiplier technique.

ملخص :

الهدف من عملنا هو إثبات نتيجة التناقص الأسي للطاقة المرتبطة بالحدود الشيهة بالذاكرة لشعاع أولر ـ برنولي الذي له طرف تحكم ونهاية ثابتة. نثبت وجود الحلول بإستخدام طريقة جالوركين ثم ندرس الاستقرار الأسي للحلول من خلال تطبيق الملاحظات للطرف الثابت للحزمة بالتقليل من سرعة إهتزازها. تعتمد طريقتنا بشكل أساسي على تقنية المضاعف.

كلمات مفتاحية : تناقص أسي، طاقة، حدود، ذاكرة، شعاع، نهاية، طريقة جالوركين، إستقرار أسي، تقنية المضاعف.

Table des matières

Remeciements ii

Dédicace iii

Résumé iv

Abstract v

Notation ix

introduction générale 1

1 Rappels et définitions 4

1.1 **Espace des fonctions** 4

1.1.1 Espace de Hilbert 5

1.1.2 Espace $L^p(\Omega)$ 5

1.1.3 Espace de Sobolev 6

1.1.4 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles 8

1.2 Quelques Inégalités 8

1.3 Stabilité de l'énergie 10

1.4 Quelques définitions 11

2 Position du problème 18

2.1 Équation du mouvement 18

2.2 Existence et l'unicité 21

3 Stabilisation exponentielle **31**

3.1 Comportement asymptotique 38

Bibliographie **45**

Notation

$E :=$ un espace de Banach.

$H :=$ un espace de Hilbert.

$H^1 :=$ un espace de Sobolev.

$H_0^1(\Omega) :=$ désigne la fermeture de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

$W_0^{1,p}(\Omega) :=$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

$W_0^{m,p}(\Omega) :=$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.

$\mathbb{R} :=$ la partie réelle d'un nombre complexe.

$\langle ., . \rangle :=$ le crochet de dualité.

$\|.\| :=$ la norme.

$<, > :=$ le produit scalaire sur l'espace de Hilbert H.

$|.| :=$ le module.

$\nabla = \left(\frac{d}{dx_1}, ..., \frac{d}{dx_n}\right)^T :=$ le gradient.

$C^0 :=$ l'espace des fonctions continues.

$x :=$ la variable du domaine $\Omega = [0, L]$.

$t \in [0, +\infty] :=$ variable de temps.

$y_t :=$ la dérivée de y par rapport à t.

$y_x :=$ la dérivée première de y par rapport à x.

$y(x,t)$ est le déplacement transversale de la poutre.

y_{tt} désigne l'accélération locale dans la direction transversale de la poutre.

y_{xx} est l'accélération centripète.

$y(L,t)$ est le déplacement dans le point L.

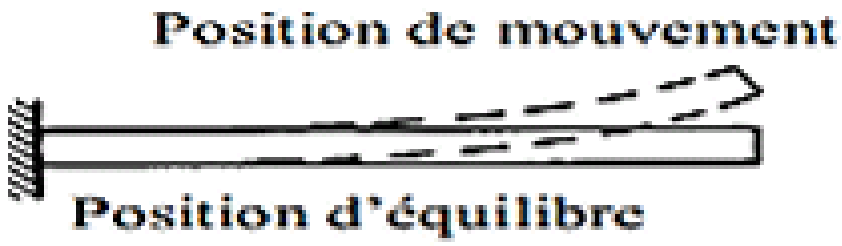
$y_t(L,t)$ est la vitesse initial.

$y_{tt}(L,t)$ est l'accélération de la poutre.

$y_x(L,t)$	est la pente de la poutre.
κ	le terme mémoire.
$u(t)$	la force de contrôle aux limites appliquée sur la partie libre.
g	est une fonction donnée.
$\tilde{\theta}$	est constante positive.
x	désigne la position.
t	désigne le temps.
L	la longueur d'une poutre.
h	est un fonction de $C^1[0,T]$.
$y_0(x)$, $y_1(x)$	deux fonction.
$y_{out}(t)$	représente le signal mesuré à l'instant t.

Introduction générale

L'étude des vibrations est un domaine qui se développe considérablement, mais reste très complexe. Les vibrations dans un système mécanique résultent d'un transfert alternatif entre énergies cinétique et potentielle qui, sans dissipation, perdure figure suivant. En présence de dissipation, et c'est le cas de tout système réel, les amplitudes du mouvement convergent jusqu'à l'équilibre dynamique dans le cas d'un système forcé, jusqu'à l'équilibre statique dans le cas d'un système libre.



L'analyse vibratoire des poutres est d'une grande importance dans la conception de nombreux systèmes mécaniques, le modèle d'Euler-Bernoulli voit le jour au 18^e siècle avec Daniel Bernoulli (1700-1782) qui formula pour la première fois l'équation différentielle de mouvement d'un poutre . Ce modèle inclut l'énergie de déformation par flexion et l'énergie cinétique due au déplacement latéral. Euler y apporta de nombreuses améliorations par ses travaux sur l'élasticité. Aussi appelée théorie classique des poutres. Le modèle d'Euler-Bernoulli reste le plus commun de par sa simplicité et fournit des approximations acceptables à de nombreux problèmes d'ingénierie. Cependant, il tend à légèrement surestimer les fréquences naturelles et se limite, pour l'essentiel au cas des poutres minces. L'étude et l'analyse des vibrations (ou signaux) ont pris, au cours des dernières années, un essor considérable en

raison du développement de techniques de plus en plus sophistiquées et de besoins les plus variés dans différents domaines : mécanique (transports, machines...), acoustique, optique, transmissions, etc..., ainsi que pour l'évaluation de leur performance. On peut citer par exemple, les aubes de turbomachines, les pales des hélicoptères ou d'éoliennes mais également les panneaux flexibles des satellites.

Dans cette mémoire, on va établir l'existence, l'unicité et les propriétés de décroissance de la solutions pour le problème à valeur initiales de l'équation d'une poutre d'Euler-Bernoulli avec mémoire, on étudions la stabilité aux limites du système d'Euler-Bernoulli de type mémoire sous un contrôle de feedback sur la frontière avec une extrémité fixé et appliquée le contrôle à l'extrémité libre d'une poutre puis décrit la vibration transversale d'une poutre extensible serrée en $x = 0$ et supportée en $x = L$ par une force de commande.

Notre but dans ce travail prouvons l'existence de la solution dans des espaces Sobolev, la stabilité de frontière de type mémoire pour une poutre d'Euler-Bernoulli, l'estimation de décroissance de l'énergie de la solution du système d'Euler-Bernoulli, avec contrôle frontière de type mémoire. Dans [13], [10], [6] nous dériverons de taux de décroissance uniformes pour l'énergie totale de la solution de l'équation d'Euler-Bernoulli dans laquelle la dissipation d'énergie se produit sur la frontière. Le principale caractéristique qui distingue cet article des autres travaux connexes est le fait que le feedback aux limites n'agit qu'à travers les moments. L'élément technique clé responsable de la preuve du résultat principale est une nouvelle estimation de régularité pour la solution de l'équation de schrôdinger non homogène.

Le contrôle des systèmes élastique est l'un des thèmes principaux dans l'automatique [1].

Le cas de l'équation d'Euler-Bernoulli avec un feedback linéaire ou non linéaire sur la frontière attiré beaucoup d'attention ces dernière années, beaucoup des estimation d'énergie on été établies pour des feedback croissants arbitraires (décroissance polynomiale, exponentielle ou logarithmique), nous référons sur [18], [17], [16], [15] pour des résultat de stabilité. Le cas plus difficile du contrôle par moment est seulement a été étudié dans [9].

Tout les outils on été basées sur la technique des multiplicateurs, le cas d'une série reliée des poutres a été également considéré avec le feedback linéaire agissant véritablement de la force, quelques résultat on été prouvés dans le cas plus difficile du contrôle seulement par un

moment pour une poutre singulier homogène. Dans [22], Yong Han Kang étudiée le taux de décroissance de l'énergie de l'équation d'Euler-Bernoulli avec un contrôle comme dans notre travail, ce travail est basé généralement sur l'article [22]. Le but de stabilité est de réduire les vibrations pour un feedback, il s'agit de garantir la décroissance de l'énergie vers zéro plus au moins rapide.

Le mémoire est organisée en trois chapitre :

Le premier chapitre consacré d'une part à des notions, définitions des hypothèses et d'autre part la formulation et d'équation de base relatives à la description du mouvement des vibrations des poutres (longitudinale, flexion, torsion), et passe en revue les théories existantes une étude bibliographique sur le sujet.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la résolution de l'équation homogène, et représente un bref théorique sur les vibrations d'une poutre d'Euler-Bernoulli (méthode, calcul, équation, condition aux limites). L'étude comporte dans le chapitre II l'application numérique pour poutre à étudier expérimentalement. (L'existence et l'unicité des solutions dans les espaces de Sobolev appropriés).

Enfin, dans **le dernier chapitre** comprend deux sections.

Dans la première section, nous introduisons tout d'abord quelques notation, lemmes, définitions..., nécessaires dans notre travail. Ensuite, nous présentons les différentes fonctionnelles utilisées pour modifier l'énergie classique afin d'obtenir un résultat d'équivalence.

Dans la dernière section, nous formulons les hypothèses sur la fonction de Lyapunov et nous présentons notre résultat de stabilité.

Chapitre 1

Rappels et définitions

1.1 Espace des fonctions

Définition 1.1.1 *Notons par* $x = (x_1, x_2, ..., x_3)$ *le point générique d'un ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}^n$. *Soit* u *une fonction définie de* Ω *à valeurs dans* $\mathbb{R}$, *on désigne par* $D^i u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}$ *la dérivée partielle de la fonction* u *par rapport a* x_i. *Définissons aussi le gradient de* u, *comme telle*

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

On notera par :

$C(\Omega)$ *: l'espace des fonctions continues de* Ω *à valeurs dans* $\mathbb{R}$.

$(C(\Omega))^m$ *: l'espace des fonctions continues de* Ω *à valeurs dans* $\mathbb{R}^m$.

pour $k \geqslant 1, k \in N$, *on définie alors :*

$C^k(\Omega)$ *: l'espace des fonctions* u *qui sont* k *fois dérivables et dont la dérivée d'ordre* k *est continue sur* Ω.

$C_0^\infty(\Omega)$ *: est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à supports compacts qu'on appelle espace des fonctions test.*

$C_c(\Omega)$ *: l'espace des fonctions continues à support compact.*

$C_0(\Omega)$ *: l'espace des fonctions continues qui s'annulent à l'infini.*

1.1.1 Espace de Hilbert

Définition 1.1.2 *(Espace de Hilbert)*

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel $\mathbb{H}$ *muni d'un produit scalaire* (u, v) *et qui est complet pour la norme* $\|u\| = (u, u)^{\frac{1}{2}}$.

1.1.2 Espace $L^p(\Omega)$

Soit $1 \leq p \leq \infty$, on note par q l'exposant conjugué de p définie par :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Définition 1.1.3 *Soit* $1 < p < \infty$, *et soit* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction mesurable. On définit :* $L^p(\Omega) := \left(\int_\Omega |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$, *on remarque :* $L_p(\Omega) < \infty$,
alors $L_p(\Omega) := \{f \ tq \ \|f\|_p < \infty\}$.

Définition 1.1.4 *On définit :* $L^\infty(\Omega) = \sup_\Omega ess|f| = inf\{C > 0 \ tq \ |f(x)| \leq C \ p.p \ sur \ \Omega\}$, *on remarque :* $L_\infty(\Omega) < \infty$, *alors* $L_\infty(\Omega) := \{f \ tq \ \|f\|_\infty < \infty\}$.

Proposition 1.1.1 *Si* f *est mesurable alors* $\|f\|_\infty = \lim_{p \longrightarrow +\infty} \|f\|_p$.

• Si $p = 1$ on note $L^1(\Omega)$ l'espace des classes des fonctions intégrables sur Ω a valeurs dans $\mathbb{R}$, on munit de la norme

$$\|f\|_{L_1} = \int_X |f(x)| dx.$$

• Si $p = \infty$ on note L^∞ l'espace des fonctions mesurables essentiellement bornées sur Ω.

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \ mesurable \ il \ existe \ une \ constante \ C \ telle \ que \ |u(x)| \leq C \ p.p \ sur \ \Omega.\},$$

on note

$$\|f\|_\infty = inf\{C > 0, |f(x)| \leq C \ p.p. \ sur \ \Omega\} = \sup_\Omega ess|f|.$$

Remarque 1 *L'espace L^2 muni du produit scalaire*

$$(u,v)=\int_\Omega u\,v\,dx,\ u,v\in L^2(\Omega),$$

est un espace de Hilbert et l'espace $L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach.

Remarque 2 *Si $f\in L^\infty$ on a*

$$|f(x)|\leq \|f\|_\infty \ \ p.p.\ \ sur\ \ \Omega.$$

1.1.3 Espace de Sobolev

Les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels (c.à.d constitués de fonctions) dont les puissances et les dérivées (au sens de la transposition, ou au sens faible, que nous allons préciser) sont intégrables. Tout comme les espaces de Lebesgue, ces espaces sont complets ce qui est un avantage considérable pour l'étude des solutions des équations aux dérivées partielles.

▶ Intégration par partie

Définition 1.1.5 *Soit I un intervalle ouvert, $a,b\in I$ et f,g deux fonctions de classe C^∞, γ fonction continue de classe k alors :*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)|_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

- *Si $\Omega=\mathbb{R}^N_+(=\{x=(x_1,...,x_N)^t\in\mathbb{R}^N;x_1\geq 0\})$, alors*

$$\begin{cases} si\ 2\leq i\leq N, \int_\Omega u\,D_iv\,dx=-\int_\Omega D_iu\,v\,dx,\ \forall(u,v)\in(H^1(\Omega))^2,\\ si\ i=1, \int_\Omega u\,D_1v\,dx=-\int_\Omega D_1u\,v\,dx+\int_{\partial\Omega}\gamma u(y)\,\gamma v(y)\,d\gamma(y),\ \forall(u,v)\in(H^1(\Omega))^2.\end{cases}$$

▶ Dérivée faible

Définition 1.1.6 *On dit que u est dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$, s'il existe une fonction $w\in L^2(\Omega)$, telle que pour toute $v\in\mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$ on ait*

$$\int_\Omega u(x)\frac{dv(x)}{dx}dx=-\int_\Omega v(x)w(x)dx,$$

cela revient à dire que $\frac{du(x)}{dx}=w(x)$ au sens des distributions.

Espace $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.1.7 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On définit les espaces de Sobolev suivants :*

1. $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \ tq : D_i u \in L^2(\Omega), \ pour \ tout \ i = 1, ..., N\}$,

dans cette définition, lorsqu'on dit $D_i u \in L^2(\Omega)$, on sous − entend,

pour $m \geq 2$, $1 \leq p \leq \infty$, on définit $W^{m,p}(\Omega)$ par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) | \ \forall \alpha \ tel \ que \ |\alpha| \leq m, \ D^\alpha u \in L^p(\Omega)\},$$

où α est un multi-indice, $D^\alpha u$ est la dérivée partielle de u au sens faible (au sens des distributions), et L^p désigne un espace de Lebesgue,

on muni cet espace vectoriel $W^{m,p}$ de la norme suivante :

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} & si \ 1 \leq p < +\infty, \\ \max\limits_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty} & si \ p = +\infty, \end{cases}$$

où $\|.\|_{L^p}$ désigne la norme des espaces de Lebesgue,

on pose

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

Remarque 3 *Les espaces $H^m(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert munit du produit scalaire*

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{k \leq m} \left(\frac{d^k u}{dx^k}, \frac{d^k v}{dx^k} \right)_{L^2(\Omega)}, \ u, v \in H^m(\Omega),$$

on introduit ensuite :

l'espace $H_0^1(\Omega)$ désigne la fermeture de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans la norme $H^1(\Omega)$,

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}.$$

Espace $W^{1,p}(\Omega)$

Soit $1 \leq p \leq \infty$ et $m = 1$. On définit l'espace vectoriel $W^{1,p}(\Omega)$ par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), telle \ que : \frac{du(x)}{dx} \in L^p(\Omega) \right\},$$

l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \left\|\frac{du(x)}{dx}\right\|_{L^p(\Omega)},$$

est un espace de Banach, on pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

1.1.4 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

Définition 1.1.8 *Soient $1 \leq p \leq \infty$ et X un espace de Banach.*

- *Si p est fini, alors on définit $L^p(0,T;X)$ par :*

$$L^p(0,T;X) = \left\{ u : [0,T] \to X \text{ mesurable telle que } \int_0^T \| u \|_X^p \, dt < \infty \right\},$$

où $[0,T]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, on munit cet espace de la norme :

$$\|u\|_{L_p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- *Si p est infini, alors on définit $L^\infty(0,T;X)$ par*

$$L^\infty(0,T;X) = \left\{ u : [0,T] \to X \text{ mesurable telle que } \sup_{t\in[0,T]} ess \|u\|_X < \infty \right\},$$

on munit de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t\in[0,T]} ess \|u(t)\|_X.$$

Proposition 1.1.2 *$L^p(0,T;X)$ muni de la norme $\|u\|_{L^p(0,T;X)}$ est un espace de Banach pour $p \in [1,\infty]$.*

1.2 Quelques Inégalités

Lemme 1.2.1 ***(Inégalité de Hôlder)***

Soit $1 \leq p \leq \infty$, on désigne par q l'exposant conjugué de p définie par

$$q = \frac{p}{p-1} \quad c'est - à - dire \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

- *Si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, alors $fg \in L^1(\Omega)$ on a*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Preuve 1.2.1 *(voir [8])*

d'après l'inégalité de Young on obtient

$$\forall\ a, b \geq 0,\ \forall\ p, q > 0,\ ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

prenons $a = \frac{|f(x)|}{\|f(x)\|_{L^p(\Omega)}}$, $b = \frac{|g(x)}{\|g(x)\|_{L^q(\Omega)}}$, *on obtient*

$$\int_\Omega \frac{|f(x)|}{\|f(x)\|_{L^p(\Omega)}} \frac{|g(x)|}{\|g(x)\|_{L^q(\Omega)}} dx \leq \int_\Omega \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f(x)\|^p}_{L^p(\Omega)} dx + \int_\Omega \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g(x)\|^q_{L^q(\Omega)}} dx,$$

alors

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f(x)g(x)|dx &\leq \tfrac{1}{p} \int_\Omega \frac{|f(x)|^p}{\|f\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}} \|g(x)\|_{L^q(\Omega)} dx + \frac{1}{q} \int_\Omega \frac{|g(x)|^q}{\|g\|^{q-1}_{L^q(\Omega)}} \|f(x)\|_{L^p(\Omega)} dx \\
&\leq \tfrac{\|g\|_{L^q(\Omega)}}{p\|f\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}} \|f(x)\|^p_{L^p(\Omega)} + \tfrac{\|f\|_{L^p(\Omega)}}{q\|g\|^{q-1}_{L^q(\Omega)}} \|g(x)\|^q_{L^q(\Omega)} \\
&\leq \|g\|_{L^q(\Omega)} \|f\|_{L^p(\Omega)} \underbrace{\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)}_{=1},
\end{aligned}$$

donc

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Corollaire 1.2.1 *Si* $p = q = 2$ *on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwartz*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Corollaire 1.2.2 *Soit* $f \in L^p(X)$, $g \in L^q(X)$. *Alors* $fg \in L^r(X)$ *avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$

Lemme 1.2.2 ***(Inégalité de Young)***

Soient $1 < p,\ q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *et* $a, b \geq 0$, *alors*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Preuve 1.2.2 *La fonction exponentielle est convexe (de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*), donc pour tout* θ_1, $\theta_2 \in \mathbb{R}$ *et pour tout* $t \in [0, 1]$

$$exp(t\theta_1 + (1-t)\theta_2) \leq t\ exp(\theta_1) + (1-t)exp(\theta_2),$$

soit $a, b > 0$ *(les autres cas sont triviaux), on prend* $t = \frac{1}{p}$ *(de sorte que* $(1-t) = \frac{1}{q}$*),* $\theta_1 = p\ ln(a)$ *et* $\theta_2 = q\ ln(b)$,

on obtient bien $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Lemme 1.2.3 ***(Inégalité de Poincaré)***

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, alors il existe une constante positive C_Ω telle que

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \text{ pour } u \in H_0^1(\Omega),$$

où $C_\Omega^{-1} = \inf_{\|u\| \neq 0} \frac{\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}}$.

Lemme 1.2.4 ***(Inégalité de Gronwall)***

Soit g une fonction $\in L^\infty(0,T)$, $g(t) > 0$ p.p. $t \in [0,T]$, α une fonction $\in L^1(0,T)$ et β positive, on suppose

$$g(t) < \int_0^t \alpha(s)g(s)ds + \beta \quad p.p.\ t \in [0,T],$$

alors

$$g(t) < \beta \exp \int_0^t \alpha(s)ds \quad p.p.\ t \in [0,T],$$

la démonstration peut être trouvé dans [3].

Lemme 1.2.5 ***(Inégalité de Sobolev)***

Soit $\Omega = R^N$, $1 < p < N$ alors

$$W^{1,p}(R^N) \subset L^{p*}(\mathbb{R}^N), \text{ où } p* \text{ est donné par } \frac{1}{p*} = \frac{1}{p} + \frac{1}{N},$$

il existe constante positive C=C(p,N) telle que

$$\|u\|_{p*} \leq C\|\nabla u\|_p, \ \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N),$$

et $1 < q < \infty$ telle que

$$\|u\|_q \leq C\|\nabla u\|_p \ \forall u \in \mathbb{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

1.3 Stabilité de l'énergie

Le but de la stabilité est de réduire les vibrations pour un feedback, il s'agit de garantir la décroissance de l'énergie vers zéro plus ou moins rapide lorsque $t \to +\infty$ i.e

$$E(t) \to 0 \quad lorsque \quad t \to \infty,$$

c'est ce qu'on appelle la stabilité forte.
De plus, on s'intéresse à la décroissance de l'énergie la plus rapide, c'est-à-dire lorsque celle-ci tend vers 0 de manière exponentielle, i.e

$$E(t) \leq Ce^{-\beta t},\ \forall t > 0,$$

où C et β sont deux constantes positives avec C qui dépend des conditions initiales, on l'appelle la stabilité uniforme.
Quant au troisième, il étudie des situations intermédiaires, dans lesquelles la décroissance des solutions n'est pas exponentielle, mais du type polynomial par exemple :

$$E(t) \leq \frac{C}{t^{\alpha}},\ \forall t > 0,$$

où C et α sont deux constantes positives avec C qui dépend des conditions initiales.

1.4 Quelques définitions

▶ Poutre d'Euler-Bernoulli

Le modèle d'Euler-Bernoulli voit le jour au 18^{e} siècle avec Daniel Bernoulli (1700-1782) qui formula pour la première fois l'équation différentielle de mouvement d'un poutre. Ce modèle inclut l'énergie de déformation par flexion et l'énergie cinétique due au déplacement latéral. Euler y apporta de nombreuses améliorations par ses travaux sur l'élasticité. Aussi appelée théorie classique des poutres. Le modèle d'Euler-Bernoulli reste le plus commun de par sa simplicité et fournit des approximations acceptables à de nombreux problèmes d'ingénierie. Cependant, il tend à légèrement surestimer les fréquences naturelles et se limite, pour l'essentiel au cas des poutres minces.
Le modèle d'Euler-Bernoulli est l'équivalent du modèle Love-Kirchhoff. Dans notre cas la théorie d'Euler-Bernoulli est utilisée à la flexion dans une poutre encastrée libre.
La théorie classique des poutres développée par Euler-Bernoulli est employée seulement pour les poutres minces car cette théorie néglige l'effet du cisaillement transversal et les contraintes naturelles.

▶ Le Principe de Hamilton

Définition 1.4.1 *Le mouvement d'un système réel depuis l'instant t_1 jusqu'à l'instant t_2 est donnée par :*

$$\int_{t_1}^{t_2}(T-V-W)dt,$$

où T est l'énergie cinétique, V l'énergie potentielle, δW le travail virtuel pour que le système doit être stationnaire, il faut que

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T-V-W)dt=0.$$

▶ Poutre :

On appelle poutre un solide engendré par une aire plane S qui est déplacée dans l'espace de manière que durant son mouvement, le centre de gravité G de la section S parcourt une ligne donnée L. La ligne L est appelée fibre moyenne de la poutre. Une poutre est une membrure mince soumise à des charges transversales généralement normales à son axe. La poutre est l'élément structural le plus répandu, puisqu'elle fait partie intégrante de la plupart des ouvrages de construction ou des pièces machines. Une poutre est caractérisée géométriquement par :

– une section S suffisamment massive,

– une longueur selon L grande devant les dimensions transversales,

– un rayon de courbure de L grand devant les dimensions transversales,

– un profil sans discontinuité.

▶ Les différents entre poutre d'Euler-Bernoulli et Kirchhoff

Le modèle d'Euler-Bernoulli est l'équivalent à modèle de Love-Kirchhoff. D'après les hypothèses d'Euler-Bernoulli, la déformation due cisaillement transversale n'est pas prise en compte, en plus toute section droite reste plane et perpendiculaire à la ligne moyenne après déformation. Dans notre cas la théorie d'Euler-Bernoulli est utilisée à la flexion sur une poutre encastrée libre. La théorie classique des poutres développée par Euler-Bernoulli est

employée seulement pour les poutres minces car cette théorie néglige l'effet du cisaillement transversal et les contraintes naturelles.

▶ Théorie de Lyapunov

L'utilisation des fonctions définies positives et une technique parmi les plus efficaces pour analyser la stabilité d'un système gouverné par une équation différentielle ordinaire.

Définition 1.4.2 *(**Fonction de classe** K).*
Une fonction continue $\alpha : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ *est dite de classe* K*, si elle est strictement croissante et* $\alpha(0) = 0$.
Elle est dite de classe K_∞*, si* $a = +\infty$ *et* $\alpha(r) \longrightarrow \infty$ *quand* $r \longrightarrow \infty$.

Définition 1.4.3 *(**Fonction de classe** KL)*
Une fonction continue $\beta : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ *est dite de classe* KL*, si pour tout* s *fixé, l'application* $s \longrightarrow \beta(x, t)$ *est de classe* K *et pour tout* r *fixé, l'application* $r \longrightarrow \beta(x, t)$ *est décroissante et* $\beta(x, t) \longrightarrow 0$ *quand* $t \longrightarrow \infty$.
Voici une autre formulation des notions de stabilité utilisant les fonctions de classes K *et* KL.

Définition 1.4.4 *Une fonction continue* $V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *est dite :*
-définie positive, s'il existe une fonction α *de classe* K*, telle que*

$$\forall t \geq 0, \forall x \in R^n, V(t, x) \geq \alpha(\| x \|),$$

- définie positive et radialement non-bornée (ou propre), si l'inégalité précédente est vérifiée pour tout $x \in R^n$ *avec une fonction* α *de classe* K_∞*,*
- limitée , s'il existe une fonction γ *de classe* K*, telle que*

$$\forall t \geq 0, \forall x \in R^n, V(t, x) \leq \gamma(\| x \|).$$

Définition 1.4.5 *(**Fonction de Lyapunov**).*
Soit $U(0)$ *un voisinage de zéro et* $V : \mathbb{R}_+ \longrightarrow R$ *une fonction continue et différentiable.*
- On dit que V *est une fonction de Lyapunov au sens large en* 0*, si elle vérifiée les deux*

propriétés suivantes :

1- V est définie positive.

2- $V(t,x) \leq 0$ pour tout $x \in U(0)$.

- On dit que V est une fonction de Lyapunov stricte en 0, si elle vérifiée les deux propriétés suivantes :

1- V est définie positive.

2- $V(t,x) < 0$ pour tout $x \in U(0)\backslash\{0\}$.

▶ Formule de Leibniz

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$, telle que f, $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$, et a et b sont deux fonctions dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,

alors l'intégrale F sur $\mathbb{R}$ défini par

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)dy,$$

est dérivable,

de plus

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x,b(x))\frac{d}{dx}b(x) - f(x,a(x))\frac{d}{dx}a(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dy.$$

▶ Formule de Green (voir théorème 1.3.2 de [3])

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}$ de classe $\mathbb{C}^1$.

(1) Si $u \in \mathbb{C}^1(\bar{\Omega};)$, $v \in \mathbb{C}^1(\Omega)$ et $\Delta v \in \mathbb{C}(\bar{\Omega})$, alors

$$\int_\Omega u(x)\Delta v(x)dx = -\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)dx + \int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial v}{\partial \nu}(x)d\Gamma.$$

(2) Si u, $v \in \mathbb{C}^2(\Omega) \cap \mathbb{C}^1(\bar{\Omega})$ et Δu, $\Delta v \in \mathbb{C}(\bar{\Omega})$, alors

$$\int_\Omega \left[u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x)\right]dx = \int_{\partial\Omega}\left(u(x)\frac{\partial v}{\partial \nu}(x) - v(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)d\Gamma.$$

▶ Théorème de Fubini

Si $f(x,y)$ continue sur $\mathbb{R}$ définie par $a \leq x \leq b$ et, $c \leq y \leq d$, alors

$$\int_x \int_y f(x,y)dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy.$$

▶ Méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin est une méthode, ou *plutòt* une famille de méthodes, très générale et très robuste. Son idée est la suivante. Partant d'un problème variationnel posé dans un espace de dimension infinie, on procède d'abord à une approximation dans une suite de sous-espaces de dimension finie.

On applique la méthode de Galerkin lorsque les conditions aux limites sont périodiques où sont homogènes.

Soit $B = \{V \in H, SV = 0\}$ le sous-espace des fonctions de H vérifiant les conditions aux limites, les $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ forment une base de B.

$P_N^{\perp}$ est la projection orthogonale de H sur B_N engendré par les N première fonctions de base.

La méthode de Galerkin consiste à résoudre le problème approché

$$\text{trouver } U_N = \sum_{n=1}^{N} a_n(t)\varphi_n \in B_n \text{ telle que } P_N R_N = 0$$
$$\text{avec } R_N = \frac{\partial U_N}{\partial t} - F(U_N) - f \text{ le Résidu,}$$

telle que

$$\begin{cases} P_{N,K}^{\perp} R_N = 0, \\ N - K \; equation \; diff, \\ Bu_N = 0 \;\; Kequation. \end{cases}$$

Remarque 4 *Pour des conditions aux limites non homogènes, B n'est plus un espace vectoriel mais un espace affine.*

Remarque 5 *Dans le cas où F est linéaire, on peut se ramener au cas homogène en retranchant une solution particulière.*

Exemple 1.4.1 *Équation de la chaleur,*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f & x \in [0,\pi], t \geq 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

Soit $H = L^2(0,\pi)$, *on considère les fonctions de base* $\varphi_n(x) = sinnx$, $n \geq 1$ *qui vérifient les conditions aux limites,*

puisque $f \in H$ *alors* $f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) sin\ nx$,

on cherche :

$$u_N(x,t) = \sum_{n=1}^{N} a_n(t) sin\ nx,$$

calculons le résidu :

$$\begin{aligned} R_N &= \frac{\partial u_N}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} - f \\ &= \sum_{n=1}^{N} (\frac{da_n}{dt} + \nu n^2 a_n) sin\ nx - \sum_{n=1}^{\infty} f_n sin\ nx, \end{aligned}$$

dire que R_N *est orthogonal à* B_N *revient à poser les* N *équations*

$$\frac{da_n}{dt} = -\nu n^2 a_n + f_n \qquad n = 1, ..., N, \ ....(*)$$

on résout alors ces N *équations différentielles, soit par un schéma aux différences finies en temps soit analytiquement lorsque cela est simple comme ici :*

Résolution des équation (*) sans second membre

$$\begin{aligned} \frac{da_n}{dt} &= -\nu n^2 a_n \Rightarrow \frac{dt}{a_n} \frac{da_n}{dt} = -\nu n^2 a_n \frac{dt}{a_n} \\ &\Rightarrow \frac{da_n}{a_n} = -\nu n^2 dt \\ &\Rightarrow lna_n(t) = -\nu n^2 t + c \quad avec\ c\ constante \\ &\Rightarrow a_n(t) = Kexp(-\nu n^2 t) \quad (avec\ ici\ K = a_n(0)). \end{aligned}$$

Résolution des équation (*) Avec second membre

En fait varier la constante K, en posant

$$a_n(t) = K(t)exp(-\nu n^2 t) \Rightarrow \frac{da_n}{dt} = \frac{dK}{dt}exp(-\nu n^2 t) - \nu n^2 K(t)exp(-\nu n^2 t),$$

on remplace dans $(*)$ on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt}exp(-\nu n^2 t) &= f_n \\ \frac{dK}{dt} &= f_n exp(\nu n^2 t) \\ k(t) &= \frac{f_n}{\nu n^2}(exp(\nu n^2 t) - 1), \end{aligned}$$

d'où

$$a_n(t) = a_n(0)exp(-\nu n^2 t) + \frac{f_n}{\nu n^2}(1 - exp(-\nu n^2 t)) \qquad n = 1, ..., N.$$

Remarque 6 *La solution $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sin\, nx$ se décompose avec les mêmes coefficients que ceux de la solution approchée u_N, par conséquent c'est la projection orthogonale de u sur B_N.*

Chapitre 2

Position du problème

2.1 Équation du mouvement

Dans cette partie, nous considérons une poutre d'Euler-Bernoulli avec mémoire, le système suivant décrit la vibration transversale d'une poutre extensible serrée en $x = 0$ et supportée en $x = L$ par une force de commande.

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) + y_{xxxx}(x,t) - \int_0^t \kappa(t-\tau) y_{xxxx}(x,\tau) d\tau + g(y_t(x,t)) = 0, x \in (0,l),\ t \geq 0, \\ y_{xxx}(L,t) - \int_0^t \kappa(t-\tau) y_{xxx}(L,\tau) d\tau = u(t) - \tilde{\theta} sint,\ t \geq 0, \\ y(0,t) = y_x(0,t) = y_{xx}(L,t) = 0,\ t \geq 0, \\ y(x,0) = y_0(x), y_t(x,0) = y_1(x),\ x \in (0,L), \\ y_{out}(t) = y_t(L,t),\ t \geq 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Pour un feedback contrôle :

$$u(t) = h(t) y_t(L,t) + \theta(t) sint, t \geq 0,$$

$$h_t(t) = r y_t^2(L,t), h(0) = h_0 > 0, t \geq 0, r > 0,$$

$$\theta_t(t) = y_t(L,t) sint, \theta(0) = \theta_0, t \geq 0.$$

On trouve le système définie par :

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) + y_{xxxx}(x,t) - \displaystyle\int_0^t \kappa(t-\tau) y_{xxxx}(x,\tau)d\tau + g(y_t(x,t)) = 0,\ x \in (0,L),\ t \geq 0, \\ y(0,t) = y_x(0,t) = y_{xx}(L,t) = 0,\ t \geq 0, \\ y_{xxx}(L,t) - \displaystyle\int_0^t \kappa(t-\tau) y_{xxx}(L,t)d\tau = h(t)y_t(L,t) + [\theta(t) - \tilde{\theta}]sint,\ t \geq 0, \\ y(x,0) = y_0(x),\ y_t(x,0) = y_1(x),\ x \in (0,L), \\ h_t(t) = r y_t^2(L,t),\ h(0) = h_0 > 0,\ t \geq 0,\ r > 0, \\ \theta_t(t) = y_t(L,t)sint,\ \theta(0) = \theta_0,\ t \geq 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

avec θ_0 est la condition initiale de l'estimateur à l'instant $t = 0$.

L'énergie est donnée par :

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^t (y_t^2(x,t) + y_{xx}^2(x,t))dx.$$

Nous préparons quelques notation et hypothèses qui sont nécessaires à la preuve de notre résultat.

Soit $L^2(0,L)$ l'espace de Hilbert avec le produit scalaire $(.,.)$ est la norme induite par le produit scalaire $\| \ . \ \|$, nous définissons

$$V = \left\{ y \in H^2(0,L) \setminus y(0) = y_x(0) = 0 \right\},$$

muni de la norme

$$\| \ y \ \|_V = \| \ y_{xx} \ \|$$

et

$$w = \left\{ y \in V \cap H^4(0,L) \setminus y_{xx}(L) = O \right\},$$

muni de la norme

$$\| \ y \ \|_w = \| \ y_{xx} \ \| + \|, y_{xxxx} \ \|,$$

de plus

$$(u,v) = \int_0^L u(x)v(x)dx.$$

Lemme 2.1.1 *à l'aide de l'inégalité Poincaré, il s'en-suit que les deux norme* $\| \cdot \|_V$, $\| \cdot \|_W$ *de* $H^2(0,L)$ *et* $H^4(0,L)$ *(respectivement) sont équivalents.*

Preuve 2.1.1 *S'il existe deux nombres réels strictement positifs* α, β $(\alpha > 0, \beta > 0)$ *telles que :*

$$\alpha\|y\|_V \leq \|y\|_W \leq \beta\|y\|_V, \quad \forall y \in L^2(0,L),$$

on a

$$\alpha\|y_{xx}\| \leq \|y_{xx}\| + \|y_{xxxx}\| \leq \beta\|y_{xx}\|,$$

puisque $\| y \|_w = \| y_{xx} \| + \| y_{xxxx} \|$ *et* $\| y \|_w = \|y\|_V + \|y_{xxxx}\| > 0$,
alors

$$\alpha\|y\|_V \leq \|y\|_W ....(1),$$

de plus

$$\|y\|_W \leq \beta\|y\|_V,$$

donc

$$\begin{aligned}
(\|y_{xxxx}\|)^2 &= \left(\int_0^L (y_{xxxx})^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \int_0^L (y_{xxxx}).y_{xxxx}\, dx \\
&\leq [y_{xxx} \cdot y_{xxxx}]_0^L - \int_0^L y_{xxx} \cdot y_{xxxx}\, dx \\
&\leq h_0 y_t(L,t) - [y_{xx} \cdot y_{xxxx}]_0^L - \int_0^L y_{xx} \cdot y_{xxxx}\, dx,
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Young on obtient

$$\|y\|_W \leq \tfrac{1}{2}\left(\int_0^L (y_{xx})^2\right)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\left(\int_0^L (y_{xxxx})^2\right)^{\frac{1}{2}} + h_0 y_t(L,t)$$

et par l'inégalité de Poincaré on a

$$\begin{aligned}
\|y\|_W &\leq \beta\left(\|y_{xx}\|\right) + \tfrac{1}{2}\|y_{xxxx}\|^2 + h_0 y_t(L,t), \\
&\leq \beta\|y\|_V + C \quad ...(2),
\end{aligned}$$

de (1) *et* (2) *les deux norme sont équivalents.*

▶ Les hypothèses

Maintenant pour étudier la stabilité aux limites de type mémoire pour une poutre d'Euler-Bernoulli sous un contróle de feedback sur la frontière il faut propose les hypothèses suivantes :

(H_1) pour tout $y_0 \in W,\ y_1 \in V$

$$\begin{cases} y_{xxxx}(x,0) + g(y_1) = 0, x \in (0,l), \\ y(0,0) = y_x(0,0) = y_{xx}(L,0) = 0, \\ y_{xxx}(L,0) = h_0 y_t(L,0). \end{cases} \tag{2.3}$$

(H_2) soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable (semi lipschitzienne), il existe une constante positive μ telle que

$$g(0) = 0, (g(r) - g(s))(r - s) \geq \mu |r - s|^2,\ avec\ r, s \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

(H_3) soit la fonction $\kappa : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction $\mathbb{C}^2$-positive et bornée telle que

$\kappa \in W^{1,\infty}(0,\infty) \cap W^{1,1}(0,\infty),\ \kappa(t) \geq 0,\ t \geq 0,$

et

$$l = 1 - \int_0^\infty \kappa(r)dr > 0, \tag{2.5}$$

et pour certains positifs m_i,i=0,1,2

$$-m_0\kappa(t) \leq \kappa_t \leq -m_1\kappa(t),\ \forall t \geq 0, \tag{2.6}$$

$$0 \leq \kappa_{tt}(t) \leq m_2\kappa(t),\ \forall t \geq 0,$$

l'hypothèse sur $\kappa_{tt}(t)$ est nécessaire pour garantir la régularité des solutions nécessaire à la preuve de l'existence.

Compte tenu des hypothèses ci-dessus, nous avons le résultat d'existence par le théorème suivant.

2.2 Existence et l'unicité

Une autre résultat de la décroissance uniforme des solutions pour une poutre d'Euler-Bernoulli avec mémoire apparaît dans [18]. Les auteurs dans [17] ont prouvé (une autre résultat) l'existence et la stabilité exponentielle des solutions du problème principale.

Dans [1] il y a un autre résultat, ont prouvé l'existence et la décroissance uniforme de l'élasticité de la masse de la poutre par la masse de la pointe. Les auteurs dans [20],[19],[14], [13],[12],[7],[6],[5],[2],[1] ont trouvé la stabilité et la contrôlabilité aux limites.

Les auteurs dans [10] ont étudié la fixation et l'estimation des paramètres pour un feedback adaptative directe. Dans [17] et [15], ont considéré la stabilisation adaptatif pour un poutre non linéaire de type kirchhoff sous un contrôle de feedback de sortie sur la frontière. Compte tenu des hypothèses ci-dessus , nous avons le résultat d'existence par le théorème suivant :

Theorème 2.2.1 *Soit* $(y_0, y_1) \in V \cap H^2(0,L) \times V$, $T > 0$, *alors sous les hypothèses* $(H_1 - H_3)$ *le problème* (2.2) *a une unique solution* y *telle que*

$y \in C([0,T], V \cap H^2(0,L))$, $y_t \in L^\infty([0,T], V)$, $y_{tt} \in L^\infty([0,T], L^2(0,L))$.

De plus

$y \in C([0,T], V)$, $y_t \in C([0,T], V)$, $y_{tt} \in C([0,T], L^2(0,L))$,

$h \in C^1[0,T]$, $\theta \in C^1[0,T]$

$$\begin{cases} y_{tt}(x,t) + y_{xxxx}(x,t) - \displaystyle\int_0^t \kappa(t-\tau) y_{xxxx}(x,\tau) d\tau + g(y_t(x,t)) = 0 \\ dans\ L^2(0,T; L^2(0,L)), \\ y(0,t) = y_x(0,t) = y_{xx}(L,t) = 0,\ t \geq 0, \\ y_{xxx}(L,t) - \displaystyle\int_0^t \kappa(t-\tau) y_{xxx}(L,t) dx = h(t) y_t(L,t) + [\theta(t) - \tilde{\theta}] sint,\ t \geq 0, \\ y(x,0) = y_0(x), y_t(x,t) = y_1(x),\ x \in (0,L), \\ h_t(t) = r y_t^2(L,t),\ t \geq 0,\ h(0) = h_0 > 0,\ r > 0, \\ \theta_t(t) = y_t(L,t) sint,\ t \geq 0,\ \theta(0) = \theta_0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Par le théorème d'intégration de Sobolev, il s'en-suit que $y \in ((0,L) \times [0,T])$.

▶ Preuve

La preuve est basée sur la méthode d'approximation de Galerkin qui peut être adaptée, par exemple [11].

Soit résolution de problème variationnelle (2.2) qui est donnée par :

trouvé $y(t) \in V$ telle que

$$\begin{cases} (y_{tt}(t), w) + (y_{xx}(t), w_{xx}) - \int_0^t \kappa(t-\tau)(y_{xx}(\tau), w_{xx})d\tau + (g(y_t(t)), w) + \{h(t)y_t(L,t) \\ +(\theta(t) - \tilde{\theta})sint\}w(L) = 0, \ \ pour\ tout\ W \in V, \end{cases}$$

soit $\{w_j\}$ un système orthogonal complet de V pour lequel $\{y_0, y_1\} \in vect\ \{w^1, w^2\}$ pour chaque $m \in N$, on note $V_m = vect\ \{w^1, w^2, ..., w^m\}$.

On cherche une fonction $y^m(t) = \sum_{j=1}^{m} \kappa^j(t) w_j$ telle que pour tout $w \in V_m$, il satisfait l'équation approchée

$$\begin{cases} (y_{tt}(t), w) + (y^m_{xx}(t), w_{xx}) - \int_0^t \kappa(t-\tau)(y^m_{xx}(\tau), w_{xx})d\tau + (g(y^m_t(t)), w) + \{h^m(t)y^m_t(L,t) \\ +(\theta^m(t) - \tilde{\theta})sint\}w(L) = 0, \\ h^m_t(t) = r\left[\sum_{j=1}^{m} k^j_t(t)w^j(L)\right]^2 = r[y^m_t(L,t)]^2, \\ \theta^m_t(t) = \left[\sum_{j=1}^{m} \kappa^j_t(t)w^j(L)\right] sint = y^m_t(L,t)sint, \\ h^m(0) = h_0 > 0, \ \theta^m(0) = \theta_0, \\ y^m(0) = y_{0m} \to y_0\ dans\ W, \ y^m_t(0) = y_{1m} \to y_1\ dans\ V. \end{cases} \tag{2.8}$$

par des méthodes standard dans les équation différentielles, nous pouvons prouver l'existence d'une solution à (2.8) sur un certain intervalle $(0, t_m)$, où $t_m = \infty$ en utilisant la première estimation ci-dessus pour prouver le théorème, il suffit de prouver les estimations a priori suivantes :

▶ Estimation 1 :

En remplaçant w par y_t^m dans (2.8) on obtient :

$$\begin{cases} (y_{tt}^m(t), y_t^m(t)) + (y_{xx}^m(t), y_{xx}^m(t)) - \int_0^t \kappa(t-\tau)(y_{xx}^m(\tau), y_{xx}^m(t))d\tau + (g(y_t^m(t)), y_t^m(t)) \\ +[h^m(t)y_t^m(L,t) + (\theta^m(t) - \tilde{\theta})sint]y_t^m(L) = 0, \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\| y_t^m(t) \|^2 + \| y_{xx}^m(t) \|^2) + (g(y_t^m(t)), y_t^m(t)) = \frac{d}{dt}\left(\int_0^t \kappa(t-\tau)(y_{xx}^m(\tau), y_{xx}^m(t))d\tau\right) - \\ \int_0^t \kappa_t(t-\tau)(y_{xx}^m(\tau), y_{xx}^m(t))d\tau - \kappa(0) \| y_{xx}^m(t) \|^2 - \{h^m(t)[y_t^m(L,t)]^2 + [\theta^m(t) - \tilde{\theta}]sint, y_t^m(L,t)\}. \end{cases} \tag{2.9}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous déduisons que

$$|\int_0^t \kappa_t(t-\tau)(y_{xx}^m(\tau), y_{xx}^m(t))d\tau| \leq \| y_{xx}^m(t) \| \int_0^t |\kappa_t(t-\tau)| \| y_{xx}^m(\tau) \| d\tau,$$

par l'hypothèse (2.5) et l'inégalité de Young on a :

$$\begin{aligned} &|\int_0^t \kappa_t(t-\tau)(y_{xx}^m(\tau), y_{xx}^m(t))d\tau| \leq \frac{1}{2}\|y_{xx}^m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\left(\int_0^t |\kappa_t(t-\tau)\|y_{xx}^m(\tau)\|d\tau\right)^2 \\ &\leq \frac{m_0^2}{2} \| y_{xx}^m(t) \|^2 + \frac{1}{2}\left(\int_0^t \kappa(t-\tau) \| y_{xx}^m(\tau) \| d\tau\right)^2 \\ &\leq \frac{m_0^2}{2} \| y_{xx}^m(t) \|^2 + \frac{1}{2} \| \kappa \|_{L_1(0,\infty)} \int_0^t \kappa(t-\tau) \| y_{xx}^m(\tau) \|^2 d\tau. \end{aligned} \tag{2.10}$$

En intégrant (2.9) sur $(0,t)$ et en utilisant (2.3) et (2.10), on obtient

$$\begin{aligned} &\| y_t^m(t) \|^2 + \| y_{xx}^m(t) \|^2 + \frac{1}{r}[h^m(t)]^2 + [\theta^m(t) - \tilde{\theta}]^2 + 2\mu \int_0^t \| y_t^m(\tau) \|^2 d\tau \\ &\leq \| y_t^m(0) \| + \| y_{xx}^m(0) \|^2 + \frac{1}{r}[h^m(0)]^2 + [\theta_0 - \tilde{\theta}]^2 + 2\int_0^t \kappa(t-\tau)(y_{xx}^m(\tau), y_{xx}^m(t))d\tau \\ &+ \left(m_0^2 + \| \kappa \|_{L^1(0,\infty)} - 2\kappa(0)\right) \int_0^t \| y_{xx}^m(\tau) \|^2 d\tau. \end{aligned} \tag{2.11}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et Young on obtient

$$\left(\mid \int_0^t \kappa_t(t-\tau)(y_{xx}^m(\tau), y_{xx}^m(t))d\tau\mid\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{m_0^2}{2} \parallel y_{xx}^m(t) \parallel^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{2} \parallel \kappa \parallel_{L^1(0,\infty)}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\left(\int_0^t \kappa(t-\tau) \parallel y_{xx}^m(\tau) \parallel^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \parallel y_{xx}^m(t) \parallel \parallel \kappa \parallel_{L^1(0,\infty)} \left(\int_0^t \kappa(t-\tau) \parallel y_{xx}^m(\tau) \parallel^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \frac{1}{8} \parallel y_{xx}^m(t) \parallel^2 + 2 \parallel \kappa \parallel_{L^1(0,\infty)} \parallel \kappa \parallel_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t \|y_{xx}^m(\tau) \|^2 d\tau. \tag{2.12}$$

En combinant les équations (2.11), (2.12) et en appliquant le lemme de Gronwall, on obtient

$$\parallel y_t^m(t) \parallel^2 + \parallel y_{xx}^m(t) \parallel^2 + \frac{1}{r}[h^m(t)]^2 + [\theta^m(t) - \tilde{\theta}]^2 \leq M_1, \tag{2.13}$$

avec $M_1 = \frac{1}{8} \parallel y_{xx}^m(t) \parallel^2 + 2 \parallel \kappa \parallel_{L^1(0,\infty)} \parallel \kappa \parallel_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t \parallel y_{xx}^m(\kappa) \parallel^2 d\tau > 0$, qui dépend des conditions initiales y_0, y_1, h_0, θ_0,

On obtient $y_t^m(L,t) \in L^\infty(0,\infty)$, par conséquent la solution approchée peut être étendue à tout l'intervalle $[0,T]$ où $T = \infty$.

▶ Estimation 2 :

Tout d'abord, nous estimons la norme L^2 de $y_{tt}^m(0)$, en considérons $t = 0$ et $w = y_{tt}^m(0)$ dans (2.9), alors on obtient

$$(y_{tt}^m(0), y_{tt}^m(0)) + (y_{xx}^m(0), y_{xxtt}^m(0)) + (g(y_t^m(0)), y_{tt}^m(0)) + h^m(0)y_t^m(L,0)y_{tt}^m(L,0) = 0,$$

On a

$$\parallel y_{tt}^m(0) \parallel^2 + (y_{xx}^m(0), y_{xxtt}^m(0)) + (g(y_t^m(0)), y_{tt}^m(0)) + h_0 y_t^m(L,0)y_{tt}^m(L,0) = 0,$$

Comme l'hypothèse (2.4), nous obtenons

$$(y_{xx}^m(0), y_{xxtt}^m(0)) = y_{xx}^m(L,0)y_{xtt}^m(L,0) - y_{xx}^m(0,0)y_{xtt}^m(0,0) - y_{xxx}^m(L,0)y_{tt}^m(L,0) + y_{tt}^m(0,0)y_{xxx}^m(0,0)$$
$$+(y_{xxxx}^m(0), y_{tt}^m(0))$$

$$= -h_0 y_{tt}^m(L,0) - (g(y_t^m(0)), y_{tt}^m(0)),$$

donc, il existe le résultat suivant

$$\|y_{tt}^m(0)\| = 0, \tag{2.14}$$

en différenciant (2.9) et en écrivant l'équation avec $w = y_{tt}^m(t)$, nous avons

$$\begin{cases} (y_{tt}^m(t), y_{tt}^m(t)) + (y_{xx}^m(t), y_{xxtt}^m(t)) - \int_0^t \kappa(t-\tau)(y_{xx}^m(\tau), y_{xxtt}^m(t))d\tau + (g(y_t^m(t)), y_{tt}^m(t)) \\ +\{h(t)^m y_t^m(L,t) + (\theta^m(t) - \tilde{\theta})sint\}y_{tt}^m(L,t) = 0 \\ = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|y_{tt}^m(t)\|^2 + \|y_{xxt}^m(t)\|^2) + \kappa(0)\|y_{xxt}^m(t)\|^2 + (g'(y_t^m(t))y_{tt}^m(t), y_{tt}^m(t)) + (r[y_t^m(L,t)]^2 y_t^m(L,t) \\ +h^m(t)y_{tt}^m(L,t))y_{tt}^m(L,t) + (y_t^m(L,t)sin^2 t + (\theta^m(t) - \tilde{\theta})cost)y_{tt}^m(L,t) \\ = \frac{d}{dt}(\int_0^t \kappa_t(t-\tau)(y_{xx}^m(\tau), y_{xx}^m(t))d\tau) - \int_0^t \kappa_{tt}(t-\tau)(y_{xx}^m(\tau), y_{xxt}^m(t))d\tau - \kappa_t(0)(y_{xx}^m(t), y_{xxt}^m(t)) \\ +\kappa(0)\frac{d}{dt}(y_{xx}^m(t), y_{xxt}^m(t)). \end{cases} \tag{2.15}$$

Par l'hypothèses (2.5), nous déduisons que

$$|\int_0^t \kappa_{tt}(t-\tau)(y_{xx}^m(\tau), y_{xxt}^m(t))d\tau| \leq \frac{m_2^2}{2}\|y_{xxt}^m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|\kappa\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t \kappa(t-\tau)\|y_{xx}^m(\tau)\|^2 d\tau, \tag{2.16}$$

comme $g \in C^1(R)$ et $y_t^m(t)$ sont bornés par (2.13),il existe $C_1 > 0$ dépend des conditions initiales y_0,y_1,h_0,θ_0 telle que

$$|(g'(y_t^m(t))y_{tt}^m(t), y_{tt}^m(t))| \leq C_1\|y_{tt}^m(t)\|^2, \tag{2.17}$$

en utilisant (2.14), (2.16) et (2.17), nous intégrant (2.15) sur $(0,t)$, on obtient

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^t (\|y_{tt}^m(t)\|^2 + \|y_{xxt}^m(t)\|^2) + \kappa(0)\int_0^t \|y_{xxt}^m(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t r[y_t^m(L,t)]^3 \\ = \frac{1}{2}\|y_{tt}^m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|y_{xxt}^m(t)\|^2 + \kappa(0)\int_0^t \|y_{xxt}^m(\tau)\|^2 d\tau + \frac{r}{4}[y_t^m(L,t)]^4 \\ \leq C_2 + \frac{m_2^2}{2}\int_0^t \|y_{xxt}^m(\tau)\|^2 d\tau + \frac{1}{2}\|\kappa\|_{L^1(0,\infty)}\|\kappa\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t \|y_{xx}^m(\tau)\|^2 d\tau + C_1\int_0^t \|y_{tt}^m(\tau)\|^2 d\tau + \\ \kappa(0)(y_{xx}^m(t), y_{xxt}^m(t)) - \kappa_t(0)\int_0^t (y_{xx}^m(\tau), y_{xxt}^m(\tau))d\tau + \int_0^t \kappa_t(t-\tau)(y_{xx}^m(\tau), y_{xxt}^m(t))d\tau \\ +\frac{r}{4}[y_t^m(L,0)]^4 - \int_0^t h^m(\tau)\tau[y_{tt}^m(L,\tau)]^2 d\tau - \frac{1}{2}[y_t^m(L,t)]^2 sin^2 t + \frac{1}{2}\int_0^t [y_t^m(L,\tau)]^2 sin2\tau d\tau \\ -y_t^m(L,t)[\theta^m(t) - \tilde{\theta}]cost + y_t^m(L,0)[\theta_0 - \tilde{\theta}] + \int_0^t y_t^m(L,\tau)\{y_t^m(L,\tau)sintcost - [\theta^m(\tau) \\ -\tilde{\theta}]sint\}d\tau. \end{cases}$$

(2.18)

Où $C_2 > 0$ dépend des conditions initiales y_0, y_1, h_0.

Comme (2.5), pour tout $\eta > 0$ en voir ça

$$|\kappa(0)(y^m_{xx}(t), y^m_{xxt}(t))| \leq \frac{(\kappa(0))^2}{4\eta}\|y^m_{xx}(t)\|^2 + \eta\|y^m_{xxt}(t)\|^2, \tag{2.19}$$

$$|\kappa_t(0)\int_0^t (y^m_{xx}(\tau), y^m_{xxt}(\tau))d\tau| \leq \frac{m_0^2(\kappa(0))^2}{4\eta}\int_0^t \|y^m_{xx}(\tau)\|^2 d\tau + \eta\int_0^t \|y^m_{xxt}(\tau)\|^2 d\tau \tag{2.20}$$

et

$$|\int_0^t \kappa_t(t-\tau)(y^m_{xx}(\tau), y^m_{xxt}(t))d\tau| \leq \frac{m_0^2}{4\eta}\|\kappa\|_{L^1(0,\infty)}\|\kappa\|_{L^\infty(0,\infty)}\int_0^t \|y^m_{xx}(\tau)\|^2 d\tau + \eta\|y^m_{xxt}(t)\|^2, \tag{2.21}$$

de l'inégalité $ab \leq \delta_1 a^2 + \frac{1}{4\delta_1}b^2$, $\delta_1 > 0$ et le théorème d'intégration de Sobolev $\|y_t(l,t)\|^2 \leq \delta_2\|y_{xxt}(t)\|^2$, $\delta_2 > 0$, nous en déduisons que

$$\begin{aligned}
&|\tfrac{-1}{2}[y^m_t(L,t)]^2 sin^2 t - y^m_t(L,t)[\theta^m(t) - \tilde{\theta}]cost| \leq \delta_1[y^m_t(L,t)]^2 sin^2 t + \delta_1[y^m_t(L,t)]^2 cos^2 t \\
&+\tfrac{1}{4\delta_1}[\theta^m(t) - \tilde{\theta}]^2 \\
&\leq \delta_1\|y^m_t(L,t)\|^2 sint + \delta_1\|y^m_t(L,t)\|^2 cos^2 t + \tfrac{1}{4\delta_1}[\theta^m(t) - \tilde{\theta}]^2 \\
&\leq \delta_1\delta_2\|y^m_{xxt}(t)\|^2 sin^2 t + \delta_1\delta_2\|y^m_{xxt}(t)\|^2 cos^2 t + \tfrac{1}{4\delta_1}[\theta^m(t) - \tilde{\theta}] \\
&\leq \delta_1\delta_2\|y^m_{xxt}(t)\|^2(sin^2 t + cos^2 t) + \tfrac{1}{4\delta_1}[\theta^m(t) - \tilde{\theta}] \\
&\leq \tilde{\delta_1}\|y^m_{xxt}(t)\|^2 + \tfrac{1}{4\delta_1}[\theta^m(t) - \tilde{\theta}]^2 \quad où\ \tilde{\delta_1} = \delta_1\delta_2,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Et en utilisant inégalité de Young, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&|\int_0^t y^m_t(L,\tau)\{y^m_t(L,\tau)sint.cost - [\theta^m(\tau) - \tilde{\theta}]sin\tau\}d\tau| \ \leq \ \int_0^t [y^m_t(L,\tau)]^2 d\tau \\
&+\tfrac{1}{2}\int_0^t [\theta^m(\tau) - \tilde{\theta}]^2 d\tau \\
&\leq \tfrac{h^m(t)}{r} - \tfrac{h_0}{r} + \tfrac{1}{2}\int_0^t [\theta^m(\tau) - \tilde{\theta}]^2 d\tau,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

de (2.18)-(2.23), on a

$$\frac{1}{2}\|y_{tt}^m(t)\|^2+\frac{1}{2}\|y_{xxt}^m(t)\|^2+\kappa(0)\int_0^t\|y_{xxt}^m(\tau)\|^2d\tau+\frac{r}{4}[y_t^m(L,t)]^4\leq C_2+C_1\int_0^t\|y_{tt}^m(\tau)\|^2d\tau$$
$$+\frac{\kappa(0)^2}{4\eta}\|y_{xx}^m(t)\|^2+\eta\|y_{xxt}^m(t)\|^2+\frac{m_2^2}{2}\int_0^t\|yxxt^m(\tau)\|^2d\tau+\frac{1}{2}\|\kappa\|_{L^1(0,\infty)}^2$$
$$+\frac{m_0^2(\kappa(0))^2}{4\eta}\int_0^t\|y_{xx}^m(\tau)\|^2d\tau+\eta$$
$$\int_0^t\|y_{xxt}^m(t)\|^2d\tau+\frac{m_0^2}{4\eta}\|\kappa\|_{L^1(0,\infty)}\|\kappa\|_{L^\infty(0,\infty)}\int_0^t\|y_{xx}^m(\tau)\|^2d\tau$$
$$+\eta\|y_{xxt}^m(t)\|^2+\frac{r}{4}|[y_t^m(L,0)]^4-\int_0^t h^m(\tau)[y_{tt}^m(L,\tau)]^2d\tau-\frac{1}{2}[y_t^m(L,t)]^2sin^2t$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t[y_t^m(L,\tau)]^2sin2\tau d\tau-y_t^m(L,t)[\theta^m(t)-\tilde{\theta}]cost+y_t^m(L,0)[\theta_0-\tilde{\theta}]$$
$$+\int_0^t y_t^m(L,t)\{y_t^m(L,\tau)sin\tau cos\tau-[\theta^m(\tau)-\tilde{\theta}]sin\tau\}d\tau,$$
$$\leq C_2+C_1\int_0^t\|y_{tt}^m(\tau)\|^2d\tau$$
$$+\frac{(\kappa(0))^2}{4\eta}\|y_{xx}^m(t)\|^2+(\frac{m_2^2}{2}+\eta)\int_0^t\|y_{xxt}^m(\tau)\|^2d\tau+2\eta\|y_{xxt}^m(t)\|^2$$
$$+(\frac{1}{2}\|\kappa\|_{L^1(0,\infty)}^2+\frac{m_0^2(\kappa(0)^2)}{4\eta}+\frac{m_0^2}{4\eta}\|\kappa\|_{L^1(0,\infty)}\|\kappa\|_{L^\infty(0,\infty)})\int\|y_{xx}^m(\tau)\|^2d\tau$$
$$+\frac{r}{4}[y_t^m(L,0)]^4-\int h^m(\tau)[y_{tt}^m(L,t)]^2d\tau-\frac{1}{2}[y_t^m(L,t)]^2sin^2t$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t[y_t^m(L,\tau)]^2sin2\tau d\tau-y_t^m(L,t)[\theta^m(t)-\tilde{\theta}]cost+y_t^m(L,0)[\theta_0-\tilde{\theta}]$$
$$+\int_0^t y_t^m(L,\tau)\{y_t^m(L,\tau)sin\tau cos\tau-[\theta^m(\tau)-\tilde{\theta}]sin\tau\}d\tau$$
$$\leq C_2+C_1\int_0^t\|y_{tt}^m(\tau)\|^2d\tau$$
$$+\frac{(\kappa(0))^2}{4\eta}\|y_{xx}^m(t)\|^2+(\frac{m_2^2}{2}+\eta)\int_0^t\|y_{xxt}^m(\tau)\|^2d\tau+2\eta\|y_{xxt}^m(t)\|^2$$

$$+(\frac{1}{2}\|\kappa\|_{L^1(0,\infty)}^2+\frac{m_0^2(\kappa(0))^2}{4\eta}+\frac{m_0^2}{4\eta}\|\kappa\|_{L^1(0,\infty)}\|\kappa\|_{L^\infty(0,\infty)})\int_0^t\|y_{xx}^m(\tau)\|^2d\tau$$
$$+\frac{r}{4}[y_t^m(L,0)]^4+\frac{3h^m(t)}{2r}+\tilde{\delta}_1\|y_{xxt}^m(t)\|^2+\frac{1}{4\delta_1}[\theta^m(t)-\tilde{\theta}]^2+\frac{1}{2}[y_t^m(L,0)]^2$$
$$+\frac{1}{2}[\theta_0-\tilde{\theta}]^2+\frac{1}{2}\int_0^t[\theta^m(\tau)-\tilde{\theta}]^2d\tau-\frac{3h_0}{2r},$$

par l'inégalité (2.13) et (2.24), on a

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\|y_{tt}^m(t)\|^2+(\tfrac{1}{2}-\tilde{\delta_1})\|y_{xxt}^m(t)\|^2+\kappa(0)\int_0^t\|y_{xxt}^m(\tau)\|^2d\tau+\frac{r}{4}[y_t^m(L,t)]^4\\&\leq C_3+C_1\int_0^t\|y_{tt}^m(\tau)\|^2d\tau+(\frac{m_2^2}{2}+\eta)\int_0^t\|y_{xxt}^m(\tau)\|^2d\tau,\end{aligned}\tag{2.24}$$

où $C_3>0$ dépend des conditions initiales y_0,y_1,h_0,θ_0.

En prenant $\tilde{\delta_1}$ avec $\frac{1}{2}-\tilde{\delta_1}>0$ et en utilisant le lemme de Gronwall, on obtient

$$\|y_{tt}^m(t)\|^2+\|y_{xxt}^m(t)\|^2+r[y_t^m(L,t)]^4\leq M_2.\tag{2.25}$$

Où $M_2=C_3+C_1\int_0^t\|y_{tt}^m(\tau)\|d\tau+(\frac{m_2^2}{2}+\eta)\int_0^t\|y_{xxt}^m(\tau)\|^2d\tau$ dépend des conditions initiales y_0, y_1, h_0, θ_0.

▶ Analyse des termes non linéaires :

Donc, de (2.15) et (2.25), On obtient

$$\begin{cases}(y^m)\ est\ \text{borné}\ dans\ L^\infty(0,T;V).\\(y_t^m)\ est\ \text{borné}\ dans\ L^\infty(0,T;V).\\(y_{tt}^m)\ est\ \text{borné}\ dans\ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).\\(y_t^m(L,t))\ est\ \text{borné}\ dans\ L^2(0,T).\\(h^m)\ est\ \text{borné}\ dans\ L^\infty(0,T).\\(h_t^m)=(ry_t^m(L,t)^2)\ est\ \text{borné}\ dans\ L^\infty(0,T).\\(\theta^m)\ est\ \text{borné}\ dans\ L^\infty(0,T).\\(\theta_t^m)=(y_t^m(L,t)sint)\ est\ \text{borné}\ dans\ L^\infty(0,T).\end{cases}\tag{2.26}$$

La solution peut être prolongeable à l'intervalle $[0,T]$, *où* $0<t<y^m<T<+\infty$.

D'après (2.26) on peut extraire une sous-suites encore sont notées (y^m) comme telles

$$\begin{cases} y^m \to y \;\; faiblement \text{ étoile } dans \; L^\infty(0,T;V), \\ y_t^m \to y_t \;\; faiblement \text{ étoile } dans \; L^\infty(O,T;V), \\ y_{tt}^m \to y_{tt} \;\; faiblement \text{ étoile } dans \; L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \\ y_t^m(L,t) \to y_t(L,t) \;\; faiblement \; dans \; L^2(0,T). \\ h^m \to h \;\; faiblement \text{ étoile } dans \; L^\infty(0,T). \\ h_t^m \to h_t \;\; faiblement \text{ étoile } dans \; L^\infty(0,T). \\ \theta^m \to \theta \;\; faiblement \text{ étoile } dans \; L^\infty(0,T). \\ \theta_t^m \to \theta_t \;\; faiblement \text{ étoile } dans \; L^\infty(0,T). \end{cases} \tag{2.27}$$

En raison de l'encastrement compact $V \hookrightarrow L^2(0,L)$, on peut obtenir une sous-suite telle que

$$y_t^m \to y_t \; fortement \; dans \; L^2(0,T;L^2(0,L)), \tag{2.28}$$

de (2.4) et (2.28), on a

$$g(y_t^m) \to g(y_t) \;\; p.p \;\; dans \;\; x \in (0,L), \; t > 0, \tag{2.29}$$

de la convergence ci-dessus et en raison de la délimitation de la suite $g(y_t^m)$ sur $L^2(0,T;L^2(0,L))$, on conclut par le lemme de lion que

$$g(y_t^m) \to g(y_t) \;\; faiblement \;\; dans \;\; L^2(0,T;L^2(0,L)). \tag{2.30}$$

De plus, par le théorème d'intégration de Sobolev et (2.30), on voit que h $\in \mathbb{C}^1[0,T]$ et $h^m(t)y_t^m(L,t) \to h(t)y_t(L,t)$ faiblement dans $L^2(0,T)$,
on déduit aussi que
$\theta \in \mathbb{C}^1[0,T]$ et $\theta^m(t)sint \to \theta(t)sint$ faiblement dans $L^2(0,T)$.

Chapitre 3

Stabilisation exponentielle

Beaucoup d'éffort sont consacrés à l'étude de la stabilité d'une poutre non linéaire sur des appuis élastique sans mémoire et contrôle de feedback aux limites. Les auteurs dans [16],[15] on étudié la fixation aux limites d'une poutre non linéaire sur un appui élastique. Un autre problème mis en évidence par les auteurs concernons l'étude de l'équation du pack-age d'Euler-Bernoulli et de contrôle de feedback avec mémoire aux limites.
L'énergie classique associée au système (2.2) définit par :

$$E(t) = E_k(t) + E_p(t), \ \ t \geq 0,$$

où $E_k(t)$ est l'énergie cinétique définie par :

$$E_k(t) = \tfrac{1}{2}[y_t(x,t)]^2 + \tfrac{1}{2}\int_0^t |y_t|^2 dx, \ t \geq 0$$

et $E_p(t)$ représente l'énergie potentielle donnée par :

$$E_p(t) = \tfrac{1}{2}[y_{xx}(x,t)]^2 + \tfrac{1}{2}\int_0^t |y_{xx}|^2 dx, \ t \geq 0.$$

L'énergie classique totale associée a notre système est définie par :

$$E(t) = \frac{1}{2}\left\{[y_t(x,t)]^2 + \int_0^t |y_t|^2 dx + [y_{xx}(x,t)]^2 + \int_0^t |y_{xx}|^2 dx\right\}, t \geq 0,$$

par différentiation, nous obtenons :

$$\frac{d}{dt}E(t) = -(g(y_t(t)), y_t(t)) + \int_0^t \kappa(t-\tau)(y_{xx}(\tau), y_{xxt}(\tau))d\tau - h(t)(y_t(L,t))^2 - [\theta(t)-\tilde{\theta}]sint\ y_t(L,t). \tag{3.1}$$

Posons

$$(k\Box y_{xx})(t) = \int_0^t \kappa(t-\tau)\|y_{xx}(\tau) - y_{xx}(t)\|^2 d\tau, t \geq 0, \tag{3.2}$$

en dérivant $(\kappa\Box y_{xx})$ par rapport à t, on obtient

$$\frac{d}{dt}(\kappa\Box y_{xx})(t) = \int_0^t \kappa'(t-\tau)\|y_{xx}(\tau) - y_{xx}(t)\|^2 d\tau + \int_0^t 2\kappa(t-\tau)y_{xxt}(\tau)|y_{xx}(\tau) - y_{xx}(t)|d\tau$$
$$= (\kappa'\Box y_{xx})(t) + 2\int_0^t \kappa(t-\tau)y_{xxt}(\tau)y_{xx}(\tau)d\tau - 2\int_0^t y_{xxt}\int_0^t \kappa(t-\tau)y_{xx}(t)d\tau + \kappa(t)\int_0^t |y_{xx}|^2 d\tau$$
$$-\kappa(t)\int_0^t |y_{xx}|^2 d\tau$$
$$= (\kappa'\Box y_{xx})(t) - 2\int_0^t y_{xxt}\int_0^t \kappa(t-\tau)y_{xx}(t)d\tau + \frac{d}{dt}\left\{\left(\int_0^t \kappa(\tau)d\tau\right)\int_0^t |y_{xx}|^2 d\tau\right\}$$
$$-\kappa(t)\int_0^t |y_{xx}|^2 d\tau,$$

donc

$$\frac{d}{dt}(\kappa\Box y_{xx})(t) = -2\int_0^t y_{xxt}\int_0^t \kappa(t-\tau)y_{xx}(t)d\tau + (\kappa_t\Box y_{xx})(t) +$$
$$\frac{d}{dt}\left\{\left(\int_0^t \kappa(\tau)d\tau\right)\int_0^t |y_{xx}|^2 d\tau\right\} - \kappa(t)\int_0^t |y_{xx}|^2 d\tau,$$

alors

$$(\kappa\Box y_{xx})_t(t) = (\kappa_t\Box y_{xx})(t) - 2\int_0^t \kappa(t-\tau)(y_{xx}(\tau), y_{xxt}(t))d\tau + \frac{d}{dt}\left(\|y_{xx}(t)\|^2\int_0^t \kappa(\tau)d\tau\right)$$
$$-\kappa(t)\|y_{xx}(t)\|^2, \tag{3.3}$$

de (3.3) on a

$$-2\int_0^t \kappa(t-\tau)(y_{xx}(\tau), y_{xxt}(t))d\tau = (\kappa\Box y_{xx})_t(t) - (\kappa_t\Box y_{xx})(t) - \frac{d}{dt}\left(\|y_{xx}(t)\|^2\int_0^t \kappa(\tau)d\tau\right)$$
$$+\kappa(t)\|y_{xx}(t)\|^2,$$

en utilisant la formule de Leibniz, on obtient

$$\int_0^t \kappa(t-\tau)(y_{xx}(\tau), y_{xxt}(t))d\tau = -\frac{1}{2}(\kappa\Box y_{xx})_t(t) + \frac{1}{2}(\kappa_t\Box y_{xx})(t) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|y_{xx}(t)\|^2\int_0^t \kappa(\tau)d\tau\right)$$
$$-\tfrac{1}{2}\kappa(t)\|y_{xx}(t)\|^2.$$

(3.4)

Nous considérons la fonction

$$L(t) = e(t) + \varepsilon\psi(t), \quad où \quad \psi(t) = \delta \int_0^t y(x,t)\, y_t(x,t)dx, \quad avec \quad 0 < \delta < \frac{1}{2}. \tag{3.5}$$

On observe qui une vu des hypothèses (2.4) et (2.5), on voit que $e(t) \geq 0$
et $E(t) \leq l^{-1}e(t)$. Il suffit donc d'obtenir la stabilité exponentielle souhaitée pour l'énergie modifiée $e(t)$ ce qui sera fait ci-dessous.

Lemme 3.0.1 *La dérivée de l'énergie totale n'a pas un signe explicite clair. On construit la fonction de Lyapunov L qui doit vérifier une inégalité de la forme :*

$$\frac{d}{dt}L(t) \ \leq \ -C\ L(t),\ t \geq 0$$

où C est une constante positive. Cette inégalité donne le taux de décroissance exponentielle de L et pour obtenir la décroissance de $e(t)$ nous avons besoin d'une relation d'équivalence entre $e(t)$ et $L(t)$.

Preuve 3.0.1 *Nous définissons l'énergie "modifiée" par :*

$$e(t) = \frac{1}{2}\left\{\|y_t(t)\|^2 + (\kappa\Box y_{xx})(t) + \left(1 - \int_0^t \kappa(t)d\tau\right)\|y_{xx}(t)\|^2 + [\theta(t) - \tilde{\theta}]^2\right\}, t \geq 0, \tag{3.6}$$

on a

$$e(t) = \tfrac{1}{2}\|y_t(t)\|^2 + \tfrac{1}{2}\|y_{xx}(t)\|^2 - \tfrac{1}{2}\int_0^t \kappa(t)d\tau\|y_{xx}(t)\|^2 + \frac{1}{2}(\kappa\Box y_{xx})(t) + \frac{1}{2}[\theta(t) - \tilde{\theta}]^2,\ t \geq 0,$$
$$e(t) = E(t) - \tfrac{1}{2}\int_0^t \kappa(t)d\tau\|y_{xx}(t)\|^2 + \frac{1}{2}(\kappa\Box y_{xx})(t) + \frac{1}{2}[\theta(t) - \tilde{\theta}]^2,\ t \geq 0,$$

il s'ensuite que

$$E(t) \leq e(t)\ ,\ \ t \geq 0.$$

D'après (3.4) et (3.6), on obtient

$$\tfrac{d}{dt}e(t) = -(g(y_t(t)), y_t(t)) + \tfrac{1}{2}(\kappa_t\Box y_{xx})(t) - \tfrac{1}{2}\kappa(t)\|y_{xx}(t)\|^2 - h(t)(y_t(L,t))^2,$$

d'après l'hypothèse (2.5) $-m_0\kappa(t) \leq \kappa_t(t) \leq -m_1\kappa(t)$ *et* $-h(t)(y_t(L,t))^2 \leq 0$, $\forall t \geq 0$, *donc*

$$e_t(t) \leq -(g(y_t(t)), y_t(t)) - \frac{m_1}{2}(\kappa \Box y_{xx})(t) - \frac{1}{2}\kappa(t)\|y_{xx}(t)\|^2, \ \forall t \geq 0, \tag{3.7}$$

supposons que le terme mémoire $\kappa(t)$ *est une fonction de* $C^1(R_+, R_+)$, *qui satisfait à :*

$$\frac{d}{dt}\kappa(t) \leq 0, \ \textit{pour tout } t \in R_+ \tag{3.8}$$

et d'après les formules (3.6) *et* (3.7), *on remarque*

$$\frac{d}{dt}e(t) \leq 0, \ t \geq 0.$$

Proposition 3.0.1 *Il existe* $C_1' > 0$ *tel que*

$$|L(t) - e(t)| \leq \varepsilon \, C_1' \, e(t), \quad \forall t \geq 0 \quad et \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{3.9}$$

Preuve 3.0.2 *(voir [18])*

Pour inégalité de Young et théorème d'intégration de Sobolev, il existe $C_1 > 0$ *telle que*

$$\begin{aligned} |L(t) - e(t)| &= \varepsilon|\psi(t)| \\ &\leq \varepsilon \left[\tfrac{\delta}{2}\|y_t(t)\|^2 + \tfrac{\delta}{2}\|y(t)\|^2\right] \\ &\leq \varepsilon \tfrac{C_1}{2}[\|y_t(t)\|^2 + \|y_{xx}(t)\|^2] \\ &\leq \varepsilon C_1 e(t), \ \forall t \geq 0 \ et \ \forall \varepsilon \geq 0. \end{aligned}$$

Proposition 3.0.2 *Il existe des constantes positives* C_2', C_3' *et* C_4' *telles que*

$$\frac{d}{dt}L(t) \leq -\varepsilon C_2' e(t) + \varepsilon C_3'(1 + h(t))(y(L,t))^2 + \varepsilon C_4'[\theta(t) - \tilde{\theta}]^2, \tag{3.10}$$

$\forall t \geq 0 \quad et \quad \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$.

Preuve 3.0.3 *pour* (2.1), *nous déduisons que*

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d}{dt}\psi = \delta \int_0^L (y_t(t)y_t(t) + y(t)y_{tt}(t))\,dx \\
&= \delta \int_0^L \left(y_t^2(t) + y(t)y_{tt}(t)\right) dx \\
&= \delta \int_0^L (y_t(t))^2 dx + \delta \int_0^L y(t)y_{tt}(t)dx \\
&= \delta \int_0^L (y_t(t))^2 dx + \delta \int_0^t y(t)(-y_{xxxx}(t))dx + \\
&\delta \int_0^L y(t) \left(\int_0^t \kappa(t-\tau)y_{xxxx}(\tau)d\tau \right) dx - \delta \int_0^L y(t)g(y_t(t))dx,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

par $y(0,t) = y_x(0,t) = y_{xx}(L,t) = 0$ *et* $y \in L^\infty(0,T;W)$ *et en utilisant l'intégration par partie nous obtenons l'inégalités suivantes :*

$$\int_0^L y(t)(-y_{xxxx}(t))dx,$$

$$u' = y(t) \Rightarrow u = y_x(t),$$

$$v = y_{xxxx}(t) \Rightarrow v' = y_{xxx}(t),$$

$$\int_0^L u'(-v)dx = -[u'v'] + \int_0^L u\,v',$$

Donc

$$\int_0^L y(t)(-y_{xxxx}(t))dx = -y(L,t)y_{xxx}(L,t) + \int_0^L y_x(t), y_{xxx}(t)dx,$$

de plus

$$\begin{aligned}
\int_0^L y_x(t)y_{xxx}(t)dx &= y_x(L,t)y_{xx}(L,t) - \int_0^L (y_{xx}(t))^2 dx \\
&= -\int_0^L (y_{xx}(t))^2 dx
\end{aligned}$$

car $y(0,t) = y_x(0,t) = y_{xx}(L,t) = 0$,

on a

$$\int_0^L y(t)(-y_{xxxx}(t))dx = -y(L,t)y_{xxx}(L,t) - \int_0^L (y_{xx}(t))^2 dx,$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_0^l y(t)(\int_0^t \kappa(t-\tau)y_{xxxx}(\tau)d\tau)dx = y(L,t)(\int_0^t y_{xxx}(L,\tau)d\tau)\\
&-\int_0^L y_x(t)(\int_0^t \kappa(t-\tau)y_{xxx}(\tau)d\tau)dx\\
&= y(L,t)(\int_0^t \kappa(t-\tau)y_{xxx}(L,\tau)d\tau) - y_x(L,t)(\int_0^t \kappa(t-\tau)y_{xx}(L,\tau)d\tau)\\
&+\int_0^L y_{xx}(t)(\int_0^t \kappa(t-\tau)y_{xx}(\tau)d\tau)dx\\
&= y(L,t)(\int_0^t \kappa(t-\tau)y_{xxx}(L,\tau)d\tau) + \int_0^L y_{xx}(t)(\int_0^t \kappa(t-\tau)y_{xx}(\tau)d\tau)dx,
\end{aligned}$$

de (3.11)*, nous obtenons*

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d}{dt}\psi(t) = \delta\int_0^L y_t^2(t)dx + \delta\left[-y(L,t)y_{xxx}(L,t) - \int_0^L (y_{xx}(t))^2dx\right]\\
&+\delta\left[y(L,t)\left(\int_0^t \kappa(t-\tau)y_{xxx}(L,\tau)d\tau\right) + \int_0^L y_{xx}(t)\left(\int_0^t \kappa(t-\tau)y_{xx}(\tau)d\tau\right)dx\right]\\
&-\delta\int_0^L y(t)g(y_t(t))dx,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d}{dt}\psi(t) = \delta\int_0^L y_t^2(t)dx - \delta y(L,t)\left[y_{xxx}(L,t) - \int_0^t \kappa(t-\tau)y_{xxx}(L,\tau)d\tau\right]\\
&-\delta\int_0^L (y_{xx}(t))^2dx + \delta\int_0^L y_{xx}(t)\left(\int_0^t \kappa(t-\tau)y_{xx}(\tau)d\tau\right)dx - \delta\int_0^L y(t)g(y_t(t))dx.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Pour les hypothèses sur g, l'inégalité de Young et théorème d'intégration de Sobolev on a

$$\delta\left|\int_0^t y(t)g(y_t(t))dx\right| \leq M_1'\|y_t(t)\|^2 + M_2'\|y_{xx}(t)\|^2, \tag{3.13}$$

où M_1' *et* M_2' *sont des constantes positives.*

D'autre part, pour tout $\eta > 0$, de théorème Fubini on a

$$\begin{aligned}
\int_0^L y_{xx}(t)\left(\int_0^t \kappa(t-\tau)y_{xx}(\tau)d\tau\right)dx &= \int_0^t \kappa(t-\tau)\left(\int_0^L y_{xx}(\tau)y_{xx}(t)dx\right)d\tau \\
&= \int_0^t \kappa(t-\tau)\left(\int_0^L (y_{xx}(\tau)-y_{xx}(t))\,y_{xx}(t)dx\right)d\tau \\
&+ \int_0^t \kappa(t-\tau)\left(\int_0^L (y_{xx}(t))^2dx\right)d\tau \\
&= \int_0^t \kappa(t-\tau)\int_0^L y_{xx}(t)dx \\
\int_0^t \kappa(t-\tau)\left(\int_0^L (y_{xx}(\tau)-y_{xx}(t))dx\right)d\tau &+ \int_0^t \kappa(\tau)\left(\int_0^L (y_{xx}(t))^2dx\right)d\tau,
\end{aligned}$$

d'après (2.21), on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^L y_{xx}(t)\left(\int_0^t \kappa(t-\tau)y_{xx}(\tau)d\tau\right)dx \leq \eta\|y_{xx}(t)\|^2 + \tfrac{1}{4\eta}\|\kappa\|_{L^\infty(0,\infty)}(\kappa\square y_{xx})(t) \\
&+\int_0^t \kappa(\tau)d\tau\|y_{xx}(t)\|^2.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Combinaison (3.12)-(3.14), on obtient

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d}{dt}\psi(t) \leq \delta\int_0^L (y_t(t))^2dx - \delta y(L,t)\left[y_{xxx}(L,t) - \int_0^t \kappa(t-\tau)y_{xxx}(L,t)d\tau\right] - \delta\int_0^L (y_{xx}(t))^2dx \\
&+\eta\delta\|y_{xx}(t)\|^2 + \tfrac{\delta}{4\eta}\|\kappa\|_{L^\infty(0,\infty)}(\kappa\square y_{xx})(t) + \delta\int_0^t \kappa(\tau)d\tau\|y_{xx}(t)\|^2 + M_1'\|y_t(t)\|^2 + M_2'\|y_{xx}(t)\|^2 \\
&\leq \delta\|y_t(t)\|^2 - \delta y(L,t)\left[h(t)y_t(L,t) + (\theta(t)-\tilde{\theta})sint\right] - \delta\|y_{xx}(t)\|^2 + M_1'\|y_t(t)\|^2 + M_2'\|y_{xx}(t)\|^2 \\
&+\eta\delta\|y_{xx}(t)\|^2 + \tfrac{\delta}{4\eta}\|\kappa\|_{L^\infty(0,\infty)}(\kappa\square y_{xx})(t) + \delta\int_0^t \kappa(\tau)d\tau\|y_{xx}(t)\|^2 \\
&\leq (\delta + M_1')\|y_t(t)\|^2 - \delta y(L,t)\left[h(t)y_t(L,t) + (\theta(t)-\tilde{\theta})sint\right] \\
&+\left(M_2' + \eta\delta + \delta\int_0^t \kappa(\tau)d\tau - \delta\right)\|y_{xx}(t)\|^2 + \tfrac{\delta}{4\eta}\|\kappa\|_{L^\infty(0,\infty)}(\kappa\square y_{xx})(t) \\
&= -\delta e(t) + \left(M_1' + \tfrac{3}{2}\delta\right)\|y_t(t)\|^2 + \left(M_2' + \eta\delta + \tfrac{\delta}{2}\int_0^t \kappa(\tau)d\tau - \frac{\delta}{2}\right)\|y_{xx}(t)\|^2 \\
&+\left(\tfrac{\delta}{2} + \tfrac{\delta}{4\eta}\|\kappa\|_{L^\infty(0,\infty)}\right)(\kappa\square y_{xx})(t) - \delta y(L,t)\left[h(t)y_t(L,t) + (\theta(t)-\tilde{\theta})sint\right] + \tfrac{\delta}{2}\left[\theta(t)-\tilde{\theta}\right]^2,
\end{aligned} \tag{3.15}$$

d'après l'hypothèse (2.3) *et les relations* (3.5), (3.7) *et* (3.15), *on a*

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d}{dt}L(t) = \tfrac{d}{dt}e(t) + \varepsilon\tfrac{d}{dt}\psi(t)\\
&= -(g(y_t(t)), y_t(t)) - \tfrac{m_1}{2}(\kappa\Box y_{xx})(t) - \tfrac{1}{2}\kappa(t)\|y_{xx}(t)\|^2 - h(t)(y_t(L,t))^2 - \varepsilon\delta e(t) + \varepsilon(M_1'\\
&+\tfrac{3}{2}\delta)\|y_t(t)\|^2 + \varepsilon\left(M_2' + \eta\delta + \tfrac{\delta}{2}\int_0^t \kappa(\tau)d\tau - \frac{\delta}{2}\right)\|y_{xx}(t)\|^2 + \varepsilon\left(\tfrac{\delta}{2} + \tfrac{\delta}{4\eta}\|\kappa\|_{L^\infty(0,\infty)}\right)\\
&(\kappa\Box y_{xx})(t) - \varepsilon\delta y(L,t)\left[h(t)y_t(L,t) + (\theta(t) - \tilde{\theta})sint\right] + \tfrac{\varepsilon\delta}{2}\left[\theta(t) - \tilde{\theta}\right]^2\\
&\leq -\varepsilon\delta e(t) - \left(\mu - \varepsilon(M_1' + \tfrac{3}{2}\delta)\right)\|y_t(t)\|^2 - \left(\tfrac{m_1}{2} - \varepsilon(\tfrac{\delta}{2} + \tfrac{\delta}{4\eta}\|\kappa\|_{L^\infty(0,\infty)})\right)(\kappa\Box y_{xx})(t)\\
&- \left(\tfrac{1}{2}\kappa(t) - \varepsilon(M_2' + \eta\delta + \tfrac{\delta}{2}\int_0^t \kappa(\tau)d\tau - \frac{\delta}{2})\right)\|y_{xx}(t)\|^2 - h(t)(1 - \tfrac{\delta\varepsilon}{2})(y_t(L,t))^2\\
&+\tfrac{\varepsilon\delta}{2}(1 + h(t))(y(L,t))^2 + \varepsilon\delta[\theta(t) - \tilde{\theta}]^2,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

ensuite, en définie

$$\varepsilon_1 = min\left\{\frac{2\mu}{2M_1' + 3\delta}, \frac{2m_1\eta}{\delta(2\eta + \|\kappa\|_{L^\infty(0,\infty)})}, \frac{\kappa(t)}{2M_2' + 2\eta\delta + \delta\int_0^t \kappa(\tau)d\tau - \delta}, \frac{2}{\delta}\right\}, \tag{3.17}$$

considérons $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$ *et on choisit* $\delta > 0$ *telle que :* $(2\eta - l)\delta + 2M_2' > \delta$,

de plus, on utilisant (3.16) *et* (3.17) *on obtient pour tout* $t \geq 0$

$$\frac{d}{dt}L(t) \leq -\varepsilon\delta e(t) + \frac{\varepsilon\delta}{2}(1 + h(t))(y(L,t))^2 + \varepsilon\delta[\theta(t) - \tilde{\theta}]^2, \tag{3.18}$$

où $C_2' = \delta$, $C_3' = \frac{\delta}{2}$, $C_4' = \delta$.

Ceci achève la preuve de la proposition 3.0.2. •

3.1 Comportement asymptotique

Dans cette section, on a démontre notre résultat de décroissance de l'énergie.

Theorème 3.1.1 *Soit y la solution donnée par le théorème précédent (2.2.1) et $e(t)$ soit définie par (3.6), alors on a*

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty} e(t) = 0,\ \lim_{t\to\infty} h(t) \leq \sqrt{2re(0) + (h(0))^2}, \\ &h(t) \leq \sqrt{2re(0) + (h(0))^2},\ \forall t \geq 0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Preuve 3.1.1 *D'après la proposition 3.0.1 on a*

$$\begin{aligned} |L(t) - e(t)| &\leq \varepsilon\, C_1' e(t),\ \ \forall t \geq 0 \ \ et \ \ \forall \varepsilon > 0 \\ |L(t) - e(t) + e(t)| &\leq \varepsilon\, C_1' e(t) + e(t) \\ |L(t)| &\leq \varepsilon\, C_1' e(t) + e(t) \\ L(t) &\leq (1 + \varepsilon\, C_1') e(t), \end{aligned}$$

donc

$$(1 - \varepsilon\, C_1') e(t) \leq L(t) \leq (1 + \varepsilon\, C_1') e(t) \quad \forall t \geq 0. \tag{3.20}$$

Pour (3.18) et (3.20), on a

$$\frac{d}{dt} L(t) \leq \frac{-\varepsilon\delta}{(1 + \varepsilon\, C_1')} L(t) + \frac{\varepsilon\delta}{2}(1 + h(t))(y(L,t))^2 + \varepsilon\delta[\theta(t) - \tilde{\theta}]^2, \tag{3.21}$$

soit $C_\varepsilon = \frac{\varepsilon\delta}{(1+\varepsilon\, C_1')}$ *et on appliquons l'inégalité de Gronwall, on obtient*

$$\begin{aligned} L(t) &\leq e^{-C_\varepsilon t} L(0) + \tfrac{\varepsilon\delta}{2} \int_0^t e^{-C_\varepsilon(t-\tau)}(1 + h(\tau))(y(L,\tau))^2 d\tau + \varepsilon\delta \int_0^t e^{-C_\varepsilon(t-\tau)}[\theta(t) - \tilde{\theta}]^2 d\tau \\ &\leq e^{-C_\varepsilon t} L(0) + \tfrac{\varepsilon\delta}{2} sup[1 + |h(t)|] \int_0^t e^{-C_\varepsilon(t-\tau)}(y(L,\tau))^2 d\tau + \varepsilon\delta \int_0^t e^{-C_\varepsilon(t-\tau)}[\theta(t) - \tilde{\theta}]^2 d\tau, \end{aligned} \tag{3.22}$$

car

$$\frac{\varepsilon\delta}{2} \int_0^t e^{-C_\varepsilon(t-\tau)}(1 + h(\tau))(y(L,\tau))^2 d\tau = \frac{\varepsilon\delta}{2} sup[1 + |h(t)|] \int_0^t e^{-C_\varepsilon(t-\tau)}(y(L,\tau))^2 d\tau$$

et

$$y(L,.) \in L^2(0,\infty).$$

En utilisant des résultats dans [7], nous déduisons

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{-C_\varepsilon(t-\tau)}(y(L,\tau))^2 d\tau &\leq \int_0^{\frac{t}{2}} e^{-C_\varepsilon(t-\tau)}(y(L,\tau))^2 d\tau + \int_{\frac{t}{2}}^t e^{-C_\varepsilon(t-\tau)}(y(L,\tau))^2 d\tau \\ &\leq \max_{0\leq\tau\leq\frac{t}{2}} e^{-C_\varepsilon(t-\tau)} \int_0^{\frac{t}{2}} (y(L,\tau))^2 d\tau + \max_{\frac{t}{2}\leq\tau\leq t} e^{-C_\varepsilon(t-\tau)} \int_{\frac{t}{2}}^t (y(L,\tau))^2 d\tau \\ &\leq e^{-C_\varepsilon(t-\frac{t}{2})} \int_0^{\frac{t}{2}} (y(L,\tau))^2 d\tau + e^{-C_\varepsilon(t-t)} \int_{\frac{t}{2}}^t (y(L,\tau))^2 d\tau \\ &\leq e^{\frac{-C_\varepsilon}{2}t} \int_0^{\frac{t}{2}} (y(L,\tau))^2 d\tau + \int_{\frac{t}{2}}^{\infty} (y(L,\tau))^2 d\tau,\end{aligned}$$

par théorème 2.2.1 et $W \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(0,L))$, $y(L,t) \in L^2(0,\infty)$, *on obtient*

$$\int_0^t e^{-C_\varepsilon(t-\tau)}(y(L,\tau))^2 d\tau \to 0 \text{ pendant que } t \to \infty, \tag{3.23}$$

alors, on a

$$\int_0^t e^{-C_\varepsilon(t-\tau)}[\theta(t)-\tilde{\theta}]^2 d\tau \to 0 \text{ pendant que } t \to \infty, \tag{3.24}$$

donc des équations (3.22), (3.23) et (3.24), on déduit

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty} L(t) \leq 0L(0) + \tfrac{\varepsilon\delta}{2} sup[1+|h(t)|](0) + \varepsilon\delta(0), \\ &\lim_{t\to\infty} L(t) = 0.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Soit $\varepsilon_0 = min\left\{\varepsilon_1, \frac{1}{2C_1'}\right\}$, *où* $C_1' > 0$, *comme* $\varepsilon \leq \frac{1}{(2C_1')}$ $(\varepsilon \in (0,\varepsilon_0])$ *et de (3.20), on a*

$$\begin{aligned}&(1-\tfrac{1}{2C_1'}C_1')e(t) \leq L(t) \leq (1+\tfrac{1}{2C_1'}C_1')e(t) \\ &(1-\tfrac{1}{2})e(t) \leq L(t) \leq (1+\tfrac{1}{2})e(t) \\ &\tfrac{1}{2}e(t) \leq L(t) \leq \tfrac{3}{2}e(t),\end{aligned} \tag{3.26}$$

des équations (3.25) et (3.26), on obtient

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0. \tag{3.27}$$

Maintenant, nous considérons fonction de Lyapounov $U(t)$ *pour le (2.3)*

$$U(t) = e(t) + \frac{(h(t))^2}{2r}, \tag{3.28}$$

de (3.7), *on a*

$$\begin{aligned} U_t(t) &= e_t(t) + \tfrac{2h_t h}{2r} \\ &= e_t(t) - hy_t(L,t) + \tfrac{h_t h}{r} \\ &= e_t(t) + h(\tfrac{-h_t}{r} - y_t(L,t)) \\ &= e_t(t) + h(\tfrac{-ry_t^2(L,t)}{r} - y_t(L,t)) \\ &= e_t(t) + h(-y_t^2(L,t) - y_t(L,t)), \quad (e_t(t) \geq 0, h \geq 0), \end{aligned}$$

donc

$$U_t(t) \leq 0. \tag{3.29}$$

Comme $y_t(L,.) \in L^2(0,\infty)$, *on obtient*

$$\sup_{t\geq 0}\left\{e(t) + \frac{(h(t))^2}{2r}\right\} \leq M_3'.$$

Où $M_3' > 0$ *est une constante positive qui dépend de la condition initiale.*

Puisque $U(t)$ *est décroissante, on a*

$$e(\infty) + \frac{1}{2r}(h(\infty))^2 \leq e(0) + \frac{1}{2r}(h(0))^2. \tag{3.30}$$

De (3.27) *et* (3.30), *on a*

$$\begin{aligned} & e(\infty) + \tfrac{1}{2r}(h(\infty))^2 \leq e(0) + \tfrac{1}{2r}(h(0))^2 \\ & \tfrac{1}{2r}(h(\infty))^2 \leq e(0) + \tfrac{1}{2r}(h(0))^2 \\ & (h(\infty))^2 \leq \tfrac{e(0)+\frac{1}{2r}(h(0))^2}{\frac{1}{2r}} \\ & (h(\infty))^2 \leq \tfrac{e(0)}{\frac{1}{2r}} + \tfrac{\frac{1}{2r}(h(0))^2}{\frac{1}{2r}} \\ & (h(\infty))^2 \leq 2re(0) + (h(0))^2, \end{aligned}$$

alors

$$h(\infty) \leq \sqrt{2re(0) + (h(0))^2}, \tag{3.31}$$

comme $h(t)$ est non décroissante, on déduit que

$$h(t) \leq \sqrt{2re(0) + (h(0))^2}. \tag{3.32}$$

La preuve est complète.•

Theorème 3.1.2 *Soit y la solution donnée par le théorème 2.2.1 et $e(t)$ soit définie par (3.6), alors il existe $K > 0$ et $\nu > 0$ qui dépendent des conditions initiales telle que*

$$E(t) \leq Ke^{-\nu t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Preuve 3.1.2 *De (3.21), on a*

$$\frac{d}{dt}L(t) \leq -C_\varepsilon L(t) + \frac{\varepsilon\delta}{2}(1 + h(t))(y(L,t))^2 + \varepsilon\delta[\theta(t) - \tilde{\theta}]^2, \tag{3.33}$$

où $C_\varepsilon = \frac{\varepsilon\delta}{(1+\varepsilon C_1')}$,

pour (3.32) et par intégration ouvert sur $(0,t)$ dans (3.33), on obtient

$$\int_0^t \frac{d}{dt}L(t) \leq \int_0^t \left(-C_\varepsilon L(t) + \frac{\varepsilon\delta}{2}(1 + h(t))(y(L,t))^2 + \varepsilon\delta[\theta(t) - \tilde{\theta}]^2\right),$$

$$L(t) \leq L(0) - C_\varepsilon \int_0^t L(\tau)d\tau + \frac{\varepsilon\delta}{2}\int_0^t (1 + h(\tau))(y(L,\tau))^2 d\tau + \varepsilon\delta \int_0^t [\theta(t) - \tilde{\theta}]^2 d\tau,$$

donc

$$L(t) \leq L(0) - C_\varepsilon \int_0^t L(\tau)d\tau + \frac{\varepsilon\delta}{2}(1 + \|h\|_{L^\infty(0;\infty)}) \int_0^t (y(L,\tau))^2 d\tau + \varepsilon\delta \int_0^t [\delta(t) - \tilde{\theta}]^2 d\tau, \tag{3.34}$$

puisque $\int_0^\infty (y(L,\tau))^2 d\tau$ et $\int_0^\infty [\theta(t) - \tilde{\theta}]^2 d\tau$ sont bornés, par inégalité Gronwall, nous déduisons que

$$L(t) \leq (K_1 + L(0))exp(-C_\varepsilon t), \tag{3.35}$$

où K_1 est un constant positive.

On défini $\varepsilon_0 = min\left\{\frac{1}{2C_1}, \varepsilon_1\right\}$ et proposition 3.0.1, on a

$$(1 - C_1\varepsilon)e(t) \leq L(t) \leq (1 + C_1\varepsilon)e(t), \tag{3.36}$$

comme $\varepsilon \leq \frac{1}{2}C_1$, alors

$$\frac{1}{2}e(t) \leq L(t) \leq \frac{3}{2}e(t) \leq 2e(t), \forall t \geq 0 \tag{3.37}$$

et

$$-\varepsilon C_2 e(t) \leq -\frac{\varepsilon}{2} C_2 L(t), \tag{3.38}$$

pour une constante positive C_2. *Nous profitons la relation de la proposition 3.0.1 pour dériver*

$$\frac{d}{dt} L(t) \leq -\frac{\varepsilon}{2} C_2 L(t), \ \forall\, t \geq 0, \tag{3.39}$$

par conséquent

$$L(t) \leq exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} C_2 t\right) L(0), \tag{3.40}$$

pour (3.37) *implique*

$$e(t) \leq 3e(0) exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} C_2 t\right).$$

Enfin, d'après la relation entre $E(t)$ *et* $e(t)$, *on a :*

$$E(t) \leq l^{-1} e(t) \leq K e^{-\nu t}, \forall t \geq 0,$$

c'est-à-dire

$$E(t) \leq l^{-1} e(t) \leq 3 l^{-1} E(0) exp\left(-\frac{\varepsilon}{2} C_2 t\right) \leq K e^{-\nu t}, \forall t \geq 0,$$

on obtient finalement :

$$E(t) \leq K e^{-\nu t},$$

où $K = 3l^{-1}(K_1 + L(0))$ *et* $\nu = C_\varepsilon$.
La preuve est complète.•

Conclusion

Nous avons intéressés dans ce mémoire à l'étude du problème de la stabilité aux limites de type mémoire pour une poutre d'Euler-Bernoulli sous un contrôle de feedback sur la frontière, nous avons traité quelques aspects importants du point de vue mathématique : l'étude du comportement asymptotique des solutions pour des temps infinis (décroissance exponentielle). Ensuite nous présentons notre résultat de stabilité (stabilité exponentielle) avec la preuve basée sur la technique des multiplicateurs.
D'autres aspects méritent également d'être explorés (Explosion des solutions et donner une approximation numérique...).

Bibliographie

[1] Andrade, D. and Rivera, J. M. *Exponential decay of non-linear wave equation with a viscoelastic boundary condition*,Math. Methods Appl.Sci.**23**(2000), no. 1, 4161.

[2] Ball, J. M.*Initial-boundary value problems for an extensible beam*, J. Math. Anal. Appl. **42**(1973),61-90.

[3] Barbu, V. *Partial Differential Equations and Boundary Value Problems*, Springer-Science+Business Media, B.V 1998.

[4] Conrad, F. and Omer, O. *On the stabilization of a flexible beam a tip mass*, SIAM J. Control Optim. **36**(1998), no. 6, 1962-1986.

[5] Dahleh, M. and Hopkins, W. *Adaptive stabilization of single-input single-output delay systems*, IEEE Trans. Automat. Control **31**(1986), no. 6, 577-579.

[6] Feckan, M. *Free vibrations of beams on bearings with nonlinear elastic responses*, J. Differential Equations **154**(1999), no. 1, 5572.

[7] Feireisl, E. *Nonzero time periodic solutions to an equation of petrovsky type with nonlineear boundary condition : slow oscillations of beams on elastic bearings*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **20** (1993), no. 1, 133-146.

[8] Ferreira, J. *Cours de Mécanique Analytique*. Université Joseph Fourier, Laboratoire d'As-trophysique de Grenoble. (2007-2008).

[9] Guo, B. Z. and Guo, W. *Adaptive stabilization for a Kirchhoff-type nonlinear beam under boundary output feedback control*, Nonlinear Anal. **66** (2007), no. 2, 427-441.

[10] Guo, B. Z. and Luo, Z. H. *Initial-boundary value problem and exponential decay for a flexible-beam vibration with gain adaptive direct strain feedback control*, Nonlinear Anal. **27** (1996), no. 3, 353-365.

[11] Hardy GH, Littlewood JE, Polya G. *Inequalities. Cambridge UK* :cambridge University Press 1959.

[12] Kirane, M. and Tatar, N. E. *A memory type boundary stabilization of a mildly damped wave equation*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. **1999** (1999), no. 6, 1-7.

[13] Lasiecka, I. *Exponential decay rates for the solutions of Euler-Bernoulli equations with boundary dissipation occurring in the moments only*, J. Differential Equations **95** (1992), no. 1, 169-182.

[14] Lions, J. L. and Magenes, E. *Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applica-tions*, Springer-Verlag, New York, 1972.

[15] Ma, H. *Uniform decay rates for the solutions to the Euler-Bernoulli plate equation with boundary feedback via bending moments*, Differential Integral Equations **5** (1992).

[16] Ma, T. F. *Boundary stabilization for a non-linear beam on elastic bearings*, Math. Methods Appl. Sci. **24** (2001), 583-594.

[17] Park, J. Y. Kang, H.Y. and Kim, J. A. *Existence and exponential stability for a Euler-Bernoulli beam equation with memory and boundary output feedback control term*, Acta Appl. Math. **104** (2008), no. 3, 287-301.

[18] Park, J. Y. Kim, A. *Existence and uniform decay for Euler-Bernoulli beam equation with memory term*, Math. Methods Appl. Sci. **27** (2004), no. 14, 1629-1640.

[19] Patcheu, S. K. *On a global solution and asymptotic behaviour for the generalized damped extensible beam equation*, J. Differential Equations **135** (1997), no. 2, 299314.

[20] Santos, M. L. *Asymptotic bahaviour of solutions to wave equations with a memory condition at the boundary*, Electron. J. Differential Equations **2001** (2001), no. 73, 1-11.

[21] Sofonea, M. and Matei, A. *Mathematical Models in Contact Mechanics*. London Mathematical Society Lecture Note series Cambridge University Press,398, Cam-bridge, 2012.

[22] Kang, Yong. Han. *A memory type boundary stabilization for an Euler-Bernoulli beam under boundary output feedback control*, Journal of the Korean Mathematical Society. September 2012.