Table des matières

Introduction **1**

1 Généralités sur la théorie des graphes **3**

1.1 **Définitions et notations** . . . 3

1.1.1 **Graphe** . . . 3

1.1.2 **Sous-graphe et graphe partiel** . . . 3

1.1.3 **Voisinage, degré d'un sommet** . . . 4

1.1.4 **Minimalité et maximalité d'un ensemble** . . . 5

1.1.5 **Chaîne, cycle et connexité** . . . 5

1.2 **Quelques invariants d'un graphe** . . . 6

1.3 **Graphes particuliers** . . . 7

1.3.1 Graphe complet . . . 7

1.3.2 Graphe complémentaire . . . 7

1.3.3 Graphe régulier . . . 8

1.3.4 Graphe biparti . . . 8

1.3.5 Arbre et forêt . . . 8

1.3.6 Étoile et double étoile . . . 9

1.3.7 Étoile subdivisée . . . 9

1.3.8 Couronne d'un graphe . . . 10

1.4 Ensemble dominant . . . 10

2 Quelques résultats existants sur les alliances **12**

2.1 **Types d'alliances** . . . 12

2.1.1 **Alliances défensives** 12
2.1.2 **Alliances offensives** 15
2.1.3 **Alliances puissantes** 16
2.2 **Borne sur $\gamma_a(G)$, $\gamma_{\hat{a}}(G)$, $\gamma_o(G)$, $\gamma_{\hat{o}}(G)$ et $\gamma_{ap}(G)$** 18
2.2.1 Bornes inférieures sur $\gamma_a(G)$ et $\gamma_{\hat{a}}(G)$ 18
2.2.2 Bornes supérieures sur $\gamma_a(G)$ *et* $\gamma_{\hat{a}}(G)$ 19
2.2.3 Bornes sur $\gamma_o(G)$ et $\gamma_{\hat{o}}(G)$. 19
2.2.4 Bornes sur $\gamma_{ap}(G)$ 20

3 Etude des alliances dans les graphes particuliers **21**
3.1 **calcul le nombre d'alliance globale pour quelques classes des graphes** 21
3.1.1 Graphe milieu et graphe total 21
3.1.2 Graphe milieu d'une chaîne 22
3.1.3 Graphe milieu d'un cycle 25
3.1.4 Graphe total d'une chaîne 26
3.1.5 Graphe total d'un cycle 28
3.1.6 Graphe Roue 29

4 L'effet de la suppression d'une arête sur les paramètres des alliances globales **33**
4.1 Notions de criticité et de stabilité 33
4.1.1 Les graphes γ_o^+-critiques 35
4.1.2 Les graphes $\gamma_o^-(G)$-critiques 36
4.1.3 Les graphes $\gamma_{ap}^+(G)$-critiques 38

Conclusion **40**

Bibliographie **40**

Liste des Figures

1.1.1 Un graphe simple G, un graphe partiel et un sous-graphe 4
1.1.2 Un cycle et une chaine 6
1.3.1 Un graphe complet 7
1.3.2 Un graphe G et son complémentaire 7
1.3.3 Un graphe biparti et un graphe biparti complet $K_{3,2}$. 8
1.3.4 Un arbre 9
1.3.5 Une étoile et une double étoile 9

2.1.1 Un graphe G 17

3.1.1 Le graphe milieu d'une chaîne d'ordre 6 22
3.1.2 Le graphe total d'une chaîne d'ordre 6 22
3.1.3 Un graphe milieu du chaîne P_6 23
3.1.4 Un graphe milieu du chaîne P_5 24
3.1.5 Un graphe milieu du chaîne P_5 25
3.1.6 Un graphe milieu du cycle C_6 26
3.1.7 Un graphe total du chaîne P_5 27
3.1.8 Un graphe total des chaînes P_4 et P_5 27
3.1.9 Un graphe total du cycle C_4 28
3.1.10 Un graphe total des cycles C_4 et C_3 29
3.1.11 graphes roues 29
3.1.12 Un graphe roue W_5 30
3.1.13 graphes roues W_7,W_5 et W_6 31

3.1.14 Un graphe roue W_7 32

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Dr.Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique

Projet de fin d'étude

1présenté en vue de l'obtention
du

Diplôme de Master en
Recherche Opérationnelle

Thème

Etude des alliances dans les graphes

FETHALLAH Souad
et
MEBARKI Fatma zohra

Composition du Jury:

M. N. Ikhlef Eschouf	MCA	UYF Médéa	Président
M. M. Bouzefrane	MAA	UYF Médéa	Examinateur
M. M.Zamime	MCB	UYF Médéa	Promoteur

Date de soutenance:

Résumé

Le but de ce mémoire est l'étude des alliances globale dans les graphes. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, d'ensemble de sommet V et d'ensemble d'arêtes E. Un sous-ensemble S de V est un dominant de G si tout sommet de $V - S$ est adjacent à au moins un sommet de S. Le nombre de domination $\gamma(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G. Un ensemble dominant S est une alliance défensive globale si pour tout sommet v dans S, $|N[v] \cap S| \geq |N[v] - S|$. Le nombre d'alliance défensive globale $\gamma_a(G)$ est le cardinal minimum d'une alliance défensive globale de G. Un ensemble dominant S est une alliance offensive globale si pour tout sommet v dans $V - S$, $|N[v] \cap S| \geq |N[v] - S|$. Le nombre d'alliance offensive globale $\gamma_o(G)$ est le cardinal minimum d'une alliance offensive globale de G.Un ensemble dominant S est une alliance puissante globale si pour chaque sommet $v \in N[S]$, $|N[v] \cap S| \geq |N[v] - S|$. Le nombre d'alliance puissante globale $\gamma_{ap}(G)$ est le cardinal minimum d'une alliance puissante globale de G.

Dans un premier temps, nous déterminons les paramètres d'alliances globales et d'alliance globales fortes de certains graphes partculiers à savoir le graphe milieu et total d'une chaîne et d'un cycle et du graphe roue.

Dans un second temps, nous étudions l'effet de la suppression d'une arête sur les paramètres d'alliances. Dans ce contexe, nous caracrérisons quelques graphes critiques.

Abstract

The goal of this thesis is the study of global alliances in graphs. Let $G = (V, E)$ be a simple graphe, with vertex set V and edge set E. A subset $S \subseteq V$ is a dominating set of G if every vertex of $V - S$ is adjacent to some vertex of S.The domination number $\gamma(G)$ is the minimum cardinality of a dominating set of G, A dominating set S is called a global defensive alliance of G if every vertex v in S, $|N[v] \cap S| \geq |N[v] - S|$. the global defensive alliance number $\gamma_a(G)$ is the minimum cardinality of alliance defensive global of G. S is global offensive alliance of G if every vertex v in $V - S$, $|N[v] \cap S| \geq |N[v] - S|$. The global offensive alliance number $\gamma_o(G)$ is the minimum cardinality of alliance offensive global of G. An alliance is said to be powerful if it is both defensive and offensive. This concept can be expressed by the only condition that for each vertex $v \in N[S]$, $|N[v] \cap S| \geq |N[v] - S|$. The global powerful alliance number $\gamma_{ap}(G)$ is the minimum cardinality of alliance powerful global of G.

First, we determine the parameters of global alliances and alliance strong numbers of some particular graphs namely the middle and total graph of a string and a cycle and graph wheel.

In a second step, we study the effect of the deletion of an edge on the parameters of alliances. In this context, we characterize some critical graphs

Remerciements

Le présent travail est pour nous une occasion d'exprimer encore une fois notre reconnaissance et notre gratitude envers **ALLAH** le tout puissant.

La réalisation de ce mémoire n'aurait pas été possible sans l'aide et la participation de plusieurs personnes avec lesquelles nous avons étroitement travaillé et qui nous ont fait part de leurs connaissances et leur savoir faire. Avant tout nous remercions:

- On remercie **ALLAH** le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.
- Nous voudrons sincèrement exprimer nos plus vifs remerciements à M. ZAMIME notre promoteur de nous avoir introduit dans ce sujet, d'avoir accepté de nous encadrer, aussi que pour sa patience, ses conseils et son aide précieuse qui ont été des éléments décisifs dans l'aboutissement de ce mémoire. On lui exprime toute notre reconnaissance.
- Mes remerciements vont à nos chers parents, pour leur soutien et leur confiance en nous, ainsi qu'au reste de la famille, sans oublier nos amis et tous ceux qui ont servis, de près ou de loin à notre formation.
- Nos gratitudes à tous les membres de jury qui nous font l'honneur de juger notre travail.
- A tous les enseignants du département de Mathématiques et Informatique sans exception pour leurs efforts fournis durant ces cinq agréables années.
- A l'ensemble des étudiants de notre promotion 2017 /2018.

Dédicace

Je dédie ce travail

A ma chère famille, en particulier à mon père et ma mère pour leur soutien durant toute ma formation, pour leur bienveillance, Leurs efforts constants dans mes études, et pour leur encouragement.

A mes sœurs Karima, Nadjet, Manal.

A mon frère Hamza.

A ma chère binôme Souad et sa famille.

A mes amies : Ilhem, Asmaa, Besma, Amira, Amina, Amel, Hadjer, Hayat et Wahiba.

Fatma zohra

Dédicace

Je dédie ce travail

A ma chère famille, en particulier à mon père et ma mère pour leur soutien durant toute ma formation, pour leur bienveillance, Leurs efforts constants dans mes études, et pour leur encouragement.

A mes frères Abdelouahab et noureddine.

A ma chère binôme Fatma zohra et sa famille.

A mes amies : Ilhem, dounia zad, Asmaa, Besma, Amira, Amina, Imane, Amel et Hadjer.

Souad

Table des matières

Introduction

Chacun d'entre nous, a au moins une fois, vu ou utilisé un plan de métro, une carte de lignes ferroviaires, un plan électrique, un arbre généalogique ou un organigramme d'entreprise, ainsi, tout le monde sait plus ou moins intuitivement ce qu'est un graphe. Toutefois, entre cette notion vague où des points, représentant des individus, des objets, des lieux ou des situations, sont reliés par des flèches, il y a une longue élaboration des concepts.

Les auteurs s'accordent à considérer que la théorie des graphes est née en 1736 avec les travaux d'Euler (1707-1783) et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes comme celui des ponts de la ville russe de konigsberg dont les habitants se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir au point de départ.

La théorie des graphes est une branche très vaste de la recherche opérationnelle. Elle constitue un moyen puissant pour étudier les différentes propriétés de certaines situations ou relations, qui peuvent exister entre des objets ou des éléments dans la vie quotidienne.

Parmi les domaines de la théorie des graphes, on s'intéresse à l'alliance dans les graphes qui est considérée actuellement comme l'un des domaines les plus florissants de la théorie des graphes.

Dans la vraie vie, une alliance est un groupe d'entités qui s'unissent pour une cause commune. L'alliance peut être formée soit pour se protéger contre une attaque, soit pour affirmer une volonté collective contre d'autres. Ceci a motivé Hedetniemi et al [5] à introduire plusieurs types d'alliances dans les graphes. Une alliance dans un graphe est un sous-ensemble de ses sommets. Un sommet qui a la majorité de ses voisins dans l'ensemble de l'alliance est dit être défendu s'il fait partie de l'alliance, sinon on dit qu'il est attaqué. Il existe deux types d'alliances de base: l'alliance offensive et l'alliance défensive. Dans

une alliance offensive, tous les sommets qui ne sont pas dans l'ensemble d'alliance sont attaqués. Dans une alliance défensive, tous les sommets qui sont dans l'ensemble d'alliance sont défendus. Une alliance puissante est à la fois défensive et offensive. Un ensemble d'alliance est global s'il est également un ensemble dominant. Ce concept relativement nouveau d'alliance en graphique est directement lié à la fiabilité et trouve son application dans les systèmes distribués.

Notre objectif dans ce travail est d'étudier les alliances dans les graphes.

Le mémoire s'articule autour de trois chapitres:

Le premier chapitre portera des généralisé et définition fondamentale sur la théorie des graphes. Nous introduisons les définitions fondamentales et les notations de base dans le domaine où les notions d'un sommet, arête, degré d'un sommet, voisinage, sont énoncées. Quelques types de graphes particuliers, tels que, les cycles, les chaînes, graphe bipartis, sont aussi définis, définition et quelques paramètres sur la domination.

Nous commençons le second chapitre par des définitions, les notations, de trois types d'alliances ainsi quelques résultats obtenus par les chercheures. Des résultats sur la détermination du nombre d'alliance, alliance globale, et alliance globale forte sur les graphes, par exemple, les chaînes, les cycles, graphe complet, graphe biparti complet, les étoiles, les doubles étoiles et les arbres. Des exemples de figures illustratives de ces graphes sont même insérés.

Dans le troisième chapitre, on déterminera le nombre d'alliances globale, (respectivement, globale forts) de plusieurs types de graphes, graphe milieu de chaîne, graphe milieu de cycle, graphe total de chaîne, graphe total de cycle, et graphe roue. En ce sens, plusieurs résultats ont été donnés.

Dans le quatrième chapitre, on va étudié l'effet de la suppression d'une arête sur les paramètres des alliances.

En dernier, notre mémoire est clôturé par une conclusion générale.

Chapitre 1

Généralités sur la théorie des graphes

Dans ce chapitre, on présente des notions classiques de la théorie des graphes ainsi que des notations usuelles, dont on aura besoin durant la réalisation de ce travail.

1.1 Définitions et notations

1.1.1 Graphe

Un graphe $G = (V, E)$ est défini par l'ensemble fini $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ dont les éléments sont appelés sommets, et par un ensemble des paires des sommets $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ dont les éléments sont appelés arêtes. Le cardinal de V est appelé ordre de G, noté par n. Le cardinal de E est appelé la taille de G, noté par m. Une arête $e \in E$ est une paire de sommets (u, v), noté par $e = uv$. On dira dans ce cas que u et v sont adjacents ou voisins et que e est incidente à u et v.

Un graphe est dit simple s'il est sans boucles et sans arêtes multiple. Il est noté que tous les graphes considérés, dans ce mémoire, sont des graphes simples.

1.1.2 Sous-graphe et graphe partiel

- Soit $G = (V, E)$ un graphe. On appelle **sous-graphe** de G, un graphe $H = (V', E')$ tel que $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$. Pour un sous-ensemble $A \subseteq V$, le sous graphe induit par A, noté $G[A]$ ou simplement $\langle A \rangle$, est le graphe ayant A pour ensemble de sommets

et dont les arête sont celles de E ayant leurs deux extrémités dans A. Etant donné un graphe H, on dit que G est sans H si H n'est pas un des sous-graphes induits de G.

- Un **graphe partiel** de G est un graphe obtenu en supprimant une ou plusieurs arêtes de G. Autrement dit, un graphe partiel de G est un graphe H ayant le même ensemble de sommets, et ayant comme ensemble d'arêtes, un sous-ensemble de $E(G) : E(H) \subset E(G)$.

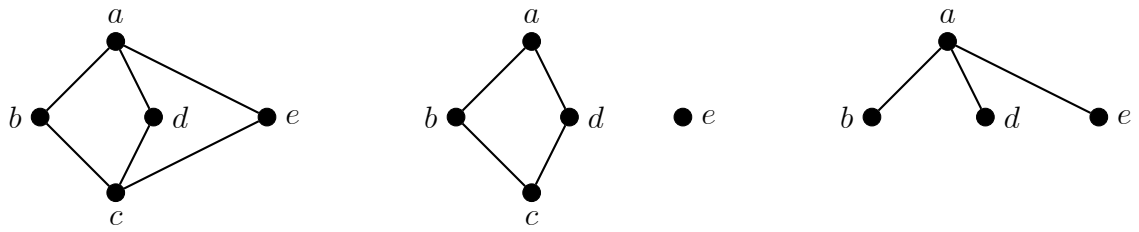


Figure 1.1.1 : Un graphe simple G, un graphe partiel et un sous-graphe

1.1.3 Voisinage, degré d'un sommet

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Pour un sommet $v \in V$, le **voisinage ouvert** de v est définit par l'ensemble suivant : $N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$ et le **voisinage fermé** de v défini par l'ensemble : $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$.

- Soit S un sous-ensemble de V : L'ensemble $N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G(v)$ est appelé voisinage ouvert de S, et l'ensemble $N_G[S] = N_G(S) \cup S$ est son voisinage fermé. De même, nous utiliserons les notations $N(S)$ et $N[S]$ au lieu de $N_G(S)$ et $N_G[S]$ respectivement.

- **Le voisinage privé** d'un sommet $v \in S$ est l'ensemble des sommets de voisinage fermé de v qui n'ont pas d'autres voisins dans S. Cet ensemble est noté $pn[v, S]$ et est définit par $pn[v, S] = \{u : N[u] \cap S = \{v\}\}$.

- **Le degré** d'un sommet v de G, noté par $d_G(v)$, est le nombre d'arêtes incidentes à v. Dans un graphe simple, $d_G(v) = |N_G(v)|$. Un sommet de degré nul est dit sommet isolé et un sommet de degré un est dit sommet pendant, et un sommet qui est adjacent à un sommet pendant est dit support. Le degré maximum de G est noté $\Delta(G)$ et donné

par $\Delta(G) = \max_{v \in V} d_G(v)$. Le degré minimum de G est noté $\delta(G)$ et donné par $\delta(G) = \min_{v \in V} d_G(v)$.

1.1.4 Minimalité et maximalité d'un ensemble

Soient $G = (V, E)$ un graphe et P une propriété. On dit qu'on sous-ensemble A de V est minimal par rapport à propriété P si aucun sous-ensemble strict de A ne vérifie cette propriété. Aussi A est dit maximal par rapport à P, si aucun sous-ensemble de V contenant A et différent de A ne vérifie cette propriété.

De même, on dit qu'un sous-ensemble B de V est minimum ou de taille minimale par rapport à la propriété P si aucun ensemble plus petit (pas nécessairement un sous-ensemble de B) ne vérifie P. Ainsi, un sous-ensemble B de V est dit maximun ou de taille maximale par rapport à P, si aucun ensemble plus grand que B (sans nécessairement le contenir) ne vérifie P.

1.1.5 Chaîne, cycle et connexité

Chaîne

On appelle chaîne d'un graphe $G = (V, E)$ toute $P = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ de sommets deux à deux distincts de G vérifiant pour tout $1 \leq i \leq k-1 : v_i v_{i+1} \in E(G)$. les sommets v_1 et v_k sont appellés les extrémités de la chaîne. Une chaîne est dite élémentaire (respectivement, simple) si tous ses sommet sont distincts (respectivement, touts ses arêtes sont distincts).

La longeur d'une chaîne est le nombre de ces arêtes.

Une corde est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une chaîne. Une chaîne minimale induite par n sommets, notée par P_n est une chaîne élémentaire sans cordes.

Cycle

Un cycle C d'un graphe $G = (V, E)$, est une chaîne telle que les extrémités sont confondues. Un cycle simple est une chaîne qui se referme. Un cycle élémentaire est une chaîne élémentaire telle que ses deux extrémités sont confondues.

La longueur du cycle est le nombre de ses arêtes.

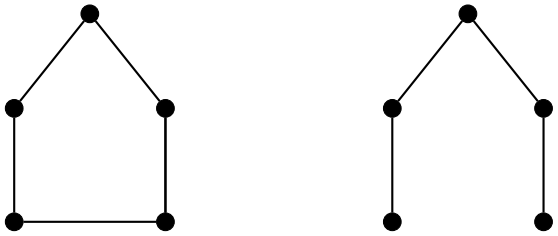


Figure 1.1.2 : Un cycle et une chaine

Connexité

Un graphe $G = (V, E)$, est dit connexe si toute paire de sommets de G et relié par une chaine. Un graphe connexe à n sommets possède au mois $n - 1$ arêtes.

Si le graphe G est non connexe, une composante connexe est un sous-graphe maximale connexe.

1.2 Quelques invariants d'un graphe

- Les graphe G et H sont dits **isomorphes** s'il existe une application bijective $f : V(G) \to V(H)$ telle que pour toute paire de sommets x, y de G, l'arête $xy \in E(G)$ si et seulement si l'arête $f(x) f(y) \in E(G)$. Si deux graphe sont isomorphes, alors ils partagent de nombreuses propriétés qui sont appelées invariants (des deux graphe). En d'autres termes, un invariant d'un graphe est une propriété préservée par isomorphisme comme le nombre de ses sommets et le nombre de ses arêtes.

- **Un stable** dans un graphe $G = (V, E)$,appelé aussi, (**ensemble indépendant),** est un sous-ensemble de sommets deux à deux non adjacents. Le cardinalité d'un stable maximum de G, noté $\alpha(G)$ est apppelé nombre de stabilitié de G.

- **Un couplage** M dans un graphe G est un sous-ensemble d'arêtes deux à deux non adjacents, on note par $\beta(G)$ la taille d'un couplage maximum dans G. Un sommet d'un graphe est dit saturé lorsqu'il est extrémité d'une arête de ce couplage. Un couplage qui sature tous les sommets de G est dit **parfait**.

1.3 Graphes particuliers

1.3.1 Graphe complet

Dans un graphe complet, toutes les paires des sommets sont adjacentes. Le graphe complet d'ordre n est noté K_n et chaque sommet est degré $n-1$.

Dans G, on nomme clique un sous-graphe complet de G. Autrement dit, une partie de l'ensemble des sommets de G telle que le graphe induit par G sur cette partie soit un graphe complet. Une clique de p sommets est notée K_p.

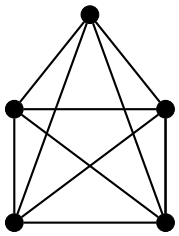


Figure 1.3.1 : Un graphe complet

1.3.2 Graphe complémentaire

Soit G un graphe simple d'ordre n. Le graphe complémentaire de G, noté $\overline{G} = \left(V,\ \overline{E}\right)$ est un graphe ayant le même ensemble de sommet que G, et l'ensemble des arêtes est formé de toutes des arêtes de K_n qui ne sont pas présentes dans G.

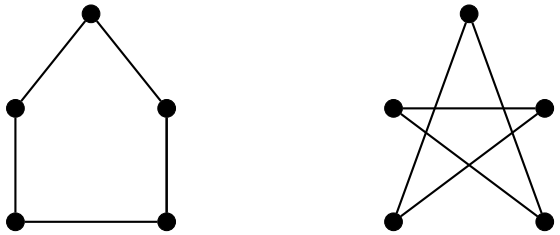


Figure 1.3.2 : Un graphe G et son complémentaire

1.3.3 Graphe régulier

Un graphe G est dit régulier si tous ses sommet ont le même degré. De plus, G est dit k-régulier si $\deg_G(v) = k$ pour tout sommet v de G. Ainsi, un graphe complet K_n est un graphe $(n-1)$-régulier.

Un graphe **cubique** est un graphe regulier se degré trois. En d'autres termes, c'est un graphe dans lequel il y a exactement trois arêtes incidentes à chaque sommet.

1.3.4 Graphe biparti

Un graphe $G = (V, E)$ est dit biparti s'il existe une partition de V en deux sous-ensemble stables V_1 et V_2, de sorte que toutes les arêtes du graphe relient un sommet de V_1 à un sommet de V_2. Un graphe biparti complet est un graphe biparti ayant la propriété supplémentaire suivante: tous les sommets de V_1 sont adjacents à tous les sommet de V_2. Si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$ alors le graphe biparti complet est noté $K_{p,q}$.



Figure 1.3.3 : Un graphe biparti et un graphe biparti complet $K_{3,2}$.

1.3.5 Arbre et forêt

Un arbre est un graphe connexe et sans cycle. Un arbre comporte exactement $(n-1)$ arêtes, il est noté habituellement T.

Une forêt est un graphe dont toutes les composant connexes sont des arbres.

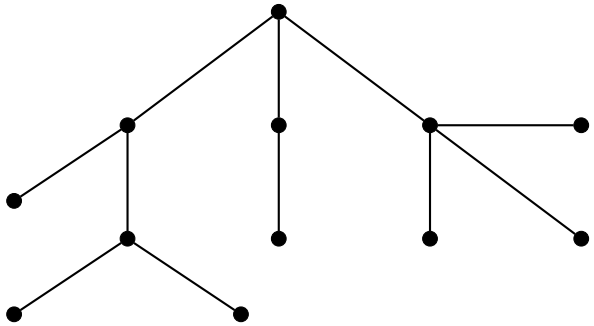


Figure 1.3.4 : Un arbre

1.3.6 Étoile et double étoile

Une étoile est un graphe biparti complet dans lequel $|V_1| = 1$ et $|V_2| = k$, noté $K_{1,k}$. On peut définir une étoile comme un graphe connexe dont tous les sommets sauf un sont de degré 1. Le sommet de V_1 est appelé centre ou sommet central de l'étoile.

Une double étoile $S_{r,s}$ est le graphe formé par les deux étoile $K_{1,r}$ et $K_{1,s}$ avec une arête reliant les deux centres.



Figure 1.3.5 : Une étoile et une double étoile

.

1.3.7 Étoile subdivisée

L'opération de subdivision d'une arête xy d'un graphe G introduit un nouveau sommet z tel que $E(G \cup \{z\}) = ((E(G - \{xy\}))\{xz, yz\}$.

Une **étoile subdivisée** (ou **araignée saine**) est obtenue d'une étoile $k_{1,s}$ en subdivisant chaque arête une fois. Elle est noté par $K^*_{1,s}$.

1.3.8 Couronne d'un graphe

La couronne $G = H \circ K_1$ d'un graphe H est le graphe obtenu à partir d'une copie de H tel que chaque sommet est relié à un sommet pendant. Il est évident que l'ordre G est égal à $2|V(H)|$.

1.4 Ensemble dominant

Un sous-ensemble D de V est dit ensemble dominant de G si tout sommet de $V - D$ possède au mois un voisin dans D. Le cardinal minimum d'un ensemble dominant minimal de G, appelé nombre de domination inferieure, est noté $\gamma(G)$. Et tout ensemble dominant de G de cardinal $\gamma(G)$ est appelé $\gamma(G)$-ensemble.

Quelques paramètres de domination

Dans cette partie nous exposons certains paramètres de dominations où des conditions supplémentaires sont imposées sur l'ensemble dominant, sur l'ensemble dominé ou même sur la façon de dominer.

La domination stable

Un ensemble dominant stable de G est un ensemble dominant $D \subseteq V$ tel que le sous−graphe induit par D est stable. Le nombre de domination stable de G, noté $i(G)$, est le cardinal minimum d'un dominant stable.

La domination totale

Un ensemble dominant total de G est un ensemble dominant $D \subseteq V$ tel que le sous−graphe induit par D ne contient pas de sommets isolés. Le nombre de domination totale de G, noté $\gamma_t(G)$, est le cardinal minimum d'un dominant total.

La domination couplée

Un ensemble dominant couplé de G est un ensemble dominant $D \subseteq V$ dont le sous−graphe induit par D contient un couplage parfait. Le nombre de domination couplée de G, noté $\gamma_{pr}(G)$, est le cardinal minimum d'un dominant couplé.

La domination double

Un sous-ensemble D de V est un dominant double(EDD) de G si tout sommet de V est ou bien dans D et posséde au moins un voisin dans D, ou bien dans $V - D$ et posséde au moins deux voisins dans D . Le nombre de domination double de G, noté $\gamma_{\times 2}(G)$, est le cardinal minimum d'un EDD de G.

Chapitre 2

Quelques résultats existants sur les alliances

Dans ce chapitre, nous présenterons les différents types d'alliances et leurs variantes avec les paramètres associés.

2.1 Types d'alliances

L'étude des alliances dans les graphes en donnant leurs propriétés mathématiques a été initiée par Kristiansen et al. [5] (voir aussi Haynes et autres [6]. Alliances définies de différents types qui ont été largement étudiés pendant les dernières années. Ces types d'alliance sont appelés des alliances défensives [14],[19] et [21], alliances offensives [3],[15],[12],[17] et [20], et doubles alliances ou puissantes alliances [2] et [1].

2.1.1 Alliances défensives

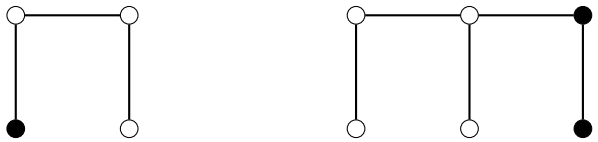
Définition 2.1.1 *Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un ensemble $S \subseteq V(G)$ est dit une alliance défensive si pour chaque sommet $v \in S$, $|N[v] \cap S| \geq |N[v] \cap (V - S)|$.*

Une alliance défensive S est dite globale si S est un ensemble dominant.

Définition 2.1.2 *Un ensemble $S \subseteq V(G)$ est dit une alliance défensive globale forte si pour chaque $v \in S$, $|N[v] \cap S| > |N[v] \cap (V - S)|$.*

Définition 2.1.3 *Le nombre d'alliance défensive $a(G)$ (respectivement, le nombre d'alliance défensive forte $\hat{a}(G)$) est le cardinal minimum d'une alliance défensive (respectivement, d'une alliance défensive forte) de G.*

La figure suivant représente une chaîne P_4 avec $a(P_4) = 1$, et un arbre avec $\hat{a}\,(T) = 2$.



$a(P_4) = 1$ $\qquad$ $\hat{a}\,(T) = 2$

Figure 2.1.

Définition 2.1.4 *Le nombre d'alliance défensive globale $\gamma_a\,(G)$(respectivement, le nombre d'alliance défensive globale forte $\gamma_{\hat{a}}(G)$) est la cardinal minimum d'une alliance défensive globale (respectivement, d'une alliance défensive globale forte) de G.*

Si S est une alliance défensive globale (respectivement, une alliance défensive globale forte) de G et $|S| = \gamma_a(G)$ (respectivement, $|S| = \gamma_{\hat{a}}(G)$), alors on dit que S est un $\gamma_a\,(G)$-ensemble (respectivement, $\gamma_{\hat{a}}\,(G)$-ensemble).

La figure suivante représente un graphe complet K_4 avec l'ensemble $S = \{a, d\}$ est une alliance défensive globale du K_4, d'où $\gamma_a\,(K_4) = 2$, et $S = \{a, b, d\}$ est une alliance défensive forte de K_4, d'où $\gamma_{\hat{a}}(K_4) = 3$.



S=(a,d),$V-S$=(b,c) $\qquad$ S=(a,b,d),$V-S$=(c)

Figure 2.2.

Quelques résultats relatifs aux paramètres $\gamma_a\,(G)$ et $\gamma_{\hat{a}}(G)$.

Remarque 2.1.1 *Tout $\gamma_{\hat{a}}(G)$-ensemble contenant tous les sommets supports de G.*

Remarque 2.1.2 *[6] Pour tout graphe G, d'orde n on a:*

1. $1 \leq \gamma(G) \leq \gamma_a(G) \leq \gamma_{\hat{a}}(G) \leq n$.

2. $1 \leq a(G) \leq \gamma_a(G) \leq n$.

3. $1 \leq a(G) \leq \hat{a}(G) \leq \gamma_{\hat{a}}(G) \leq n$.

Corollaire 2.1.1 *Pour tout graphe G d'ordre n on a:*

1. $a(G) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

2. $\hat{a}(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$.

Proposition 2.1.1 *[4] Pour le graphe complet K_n on a:*

1. $\gamma_a(K_n) = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$.

2. $\gamma_{\hat{a}}(K_n) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$.

Proposition 2.1.2 *[4] Pour le graphe biparti complet $K_{r,s}$ on a:*

1. $\gamma_a(K_{1,s}) = \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor + 1$.

2. $\gamma_a(K_{r,s}) = \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$ *si* $r, s \geq 2$.

3. $\gamma_{\hat{a}}(K_{r,s}) = \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil$.

Proposition 2.1.3 *[4] Pour le double étoile $S_{r,s}$, r, $s \geq 1$, on a:*

1. $\gamma_a(S_{r,s}) = \left\lfloor \frac{r-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{s-1}{2} \right\rfloor + 2$.

2. $\gamma_{\hat{a}}(S_{r,s}) = \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$.

Alliance défensives globale et la domination total

Haynes et al [4] ont présenté aussi des résultats liant les nombres d'alliances globales aux nombre de domination totale $\gamma_t(G)$.

Proposition 2.1.4 *Pour* $n \geq 3$, $\gamma_a(C_n) = \gamma_{\hat{a}}(C_n) = \gamma_t(C_n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & si\ n \equiv 0 \pmod 4 \\ \frac{n+1}{2} & si\ n \equiv 1, 3 \pmod 4 \\ \frac{n}{2} + 1 & si\ n \equiv 2 \pmod 4. \end{cases}$

Proposition 2.1.5 *Pour* $n \geq 3$, $\gamma_{\hat{a}}(P_n) = \gamma_t(P_n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & si\ n \equiv 0 \pmod 4 \\ \frac{n+1}{2} & si\ n \equiv 1,3 \pmod 4 \\ \frac{n}{2}+1 & si\ n \equiv 2 \pmod 4 . \end{cases}$

Proposition 2.1.6 *Pour* $n \geq 2$, $\gamma_a(P_n) = \gamma_t(P_n)$ *à moins que* $n \equiv 2 \pmod 4$, *dans ce cas* $\gamma_a(P_n) = \gamma_t(P_n) - 1$.

Proposition 2.1.7 *Pour tout graphe* G *sans sommets isolés,* $\gamma_t(G) \leq \gamma_{\hat{a}}(G)$.

2.1.2 Alliances offensives

Définition 2.1.5 *Soit* S *un sous-ensemble de* V. *La frontière de* S *notée* ∂S *est l'ensemble des sommet de* $V - S$ *chacun est adjacent à au moins un sommet de* S. *Nous définissons* $N[v]$ *pour être quartier de* v, *pour que* $N[v] = v \cup \partial S$.

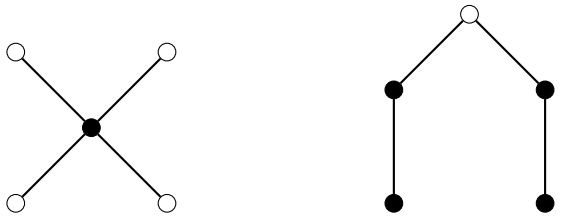
Définition 2.1.6 *Un ensemble non vide de sommets* $S \subseteq V$ *est dit une alliance offensive si et seulement si pour chaque* $v \in \partial S$, $|N[v] \cap S| \geq |N[v] \cap (V - S)|$.

Définition 2.1.7 *Soit* $G = (V, E)$ *un graphe, un ensemble* $S \subseteq V$ *est dit une alliance offensive globale si chaque* $v \in V - S$, $|N[v] \cap S| \geq |N[v] - S|$.

Définition 2.1.8 *un ensemble* $S \subseteq V$ *est dit une alliance offensive globale forte si pour chaque* $v \in V - S$, $|N[v] \cap S| > |N[v] - S|$.

Définition 2.1.9 *Le nombre d'alliance offensive* $o(G)$ *(respectivement, le nombre d'alliance offensive forte* $\hat{o}(G)$*) est le cardinal minimum d'une alliance offensive (respectivement, d'une alliance offensive forte) de* G.

La figure suivant représente un arbre $T = K_{1,4}$ avec $o(T) = 1$, et une chaîne P_5 avec $\hat{o}(P_5) = 4$.



$o(T) = 1$ $\qquad$ $\hat{o}(P_5) = 4$

Figure 2.3.

Définition 2.1.10 *Le nombre d'alliance offensive globale $\gamma_o(G)$ (respectivement, le nombre d'alliance offensive globale forte $\gamma_{\hat{o}}(G)$) est la cardinal minimum d'une alliance offensive globale (respectivement, d'une alliance offensive globale forte) de G.*

Si S est une alliance offensive globale (respectivement, une alliance offensive globale forte) de G et $|S| = \gamma_o(G)$ (respectivement, $|S| = \gamma_{\hat{o}}(G)$), alors on dit que S est un $\gamma_o(G)$-ensemble (respectivement, $\gamma_{\hat{o}}(G)$-ensemble).

La figure suivante représente une double étoile $S_{2,4}$ tel que $\gamma_o(S_{2,4}) = 2$ et $\gamma_{\hat{o}}(S_{2,4}) = 5$.



Figure 2.2.

Il est clair que pour tout graphe G, $\gamma_o(G) \geq \gamma(G)$. Beaucoup de recherches ont été faites sur ce concept, on présentera par la suite quelques résultats existants.

Remarque 2.1.3 *Si G est un graphe connexe d'ordre d'un moins trois, alors il y a un $\gamma_{\hat{o}}(G)$-ensemble qui contient tous les sommets de support.*

Proposition 2.1.8 *Pour tout graphe $G = (V, E)$, on a:*

1. $a_o(G) \leq \gamma_o(G)$.
2. $a_{\hat{o}}(G) \leq \gamma_{\hat{o}}(G)$.
3. $\gamma(G) \leq \gamma_o(G) \leq \gamma_{\hat{o}}(G)$.

2.1.3 Alliances puissantes

Définition 2.1.11 *Une alliance est dit puissante si elle est à la fois défensive et offensive. Ce concept peut être exprimé par la seule condition que pour chaque sommet $v \in N[S]$, $|N[v] \cap S| \geq |N[v] - S|$.*

Puisque une alliance puissante S est défensive, elle peut défendre tout sommet S contre une attaque possible par les sommets de ∂S, et puisqu'elle est offensive, elle peut effectivement attaque tous les sommets dans ∂S. En autre, une alliance puissante peut également défendre tout sommet de ∂S contre une attaque par des sommets dans $N[\partial S] - N[S]$.

Définition 2.1.12 *Le nombre d'alliance puissant $a_p(G)$ (respectivement, d'alliance puissante globale $\gamma_{ap}(G)$) est le cardinal minimum d'une alliance puissante (respectivement, d'alliance puissante globale).*

La figure suivante représente une étoile subdivisée $K^*_{1,4}$ avec un $\gamma_{ap}\left(K^*_{1,4}\right) = 5$.

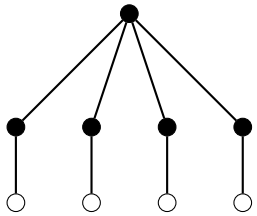
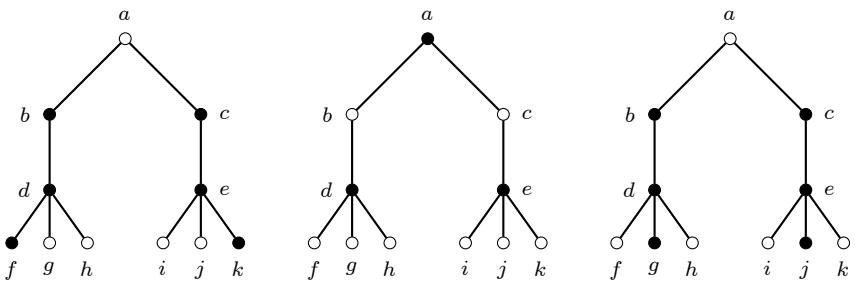


Figure 2.3.

Exemple 2.1.1 *La figure suivante représente un graphe G, ou $S_1 = \{b, c, d, e, f, k\}$ est un $\gamma_a(G)$-ensemble, $S_2 = \{a, d, e\}$ est un $\gamma_o(G)$-ensemble et $S_3 = \{b, c, d, e, g, j\}$ est un $\gamma_{ap}(G)$-ensemble.*



$\gamma_a(G) = 6$ $\gamma_o(G) = 3$ $\gamma_{ap}(G) = 6$

Figure 2.1.1 : Un graphe G

.

Proposition 2.1.9 *Pour le graphe complet $K_n, 1 \leq r \leq s$, on a $a_p(K_n) = \gamma_{ap}(K_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.*

Proposition 2.1.10 *Pour toute chaîne P_n avec $n \geq 2$, on a $a_p(P_n) = \gamma_{ap}(P_n) = \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$.*

Proposition 2.1.11 *Pour tout cycle C_n, on a $a_p(C_n) = \gamma_{ap}(C_n) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$.*

Proposition 2.1.12 *Pour un graphe biparti complet $K_{r,s}$, $1 \leq r \leq s$, on a:*

$$a_p(K_{r,s}) = \gamma_{ap}(K_{r,s}) = \min\{r + \lfloor \tfrac{r}{2} \rfloor, \left\lceil \tfrac{(r+1)}{2} \right\rceil \left\lceil \tfrac{(s+1)}{2} \right\rceil\}.$$

2.2 Borne sur $\gamma_a(G)$, $\gamma_{\hat{a}}(G)$, $\gamma_o(G)$, $\gamma_{\hat{o}}(G)$ et $\gamma_{ap}(G)$

2.2.1 Bornes inférieures sur $\gamma_a(G)$ et $\gamma_{\hat{a}}(G)$.

Dans [6], Haynes et al. ont donné des bornes inférieures sur $\gamma_a(G)$ et $\gamma_{\hat{a}}(G)$ en fonction de l'ordre n et le degré maximum Δ.

Théorème 2.2.1 *[14] Soit G un graphe simple d'ordre n, et de degré maximum Δ, Alors*

1. $\gamma_a(G) \geq \lceil \frac{2n}{\Delta+3} \rceil$.
2. $\gamma_{\hat{a}}(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\lfloor \frac{\Delta}{2} \rfloor + 1} \right\rceil$.

Théorème 2.2.2 *[4] Si G est un graphe simple d'ordre n, alors*

1. $\gamma_a(G) \geq \left(\sqrt{4n+1} - 1\right)/2$.
2. $\gamma_{\hat{a}}(G) \geq \sqrt{n}$.

Théorème 2.2.3 *[4] Si T est un arbre d'ordre n, alors*

1. $\gamma_a(T) \geq \frac{n+2}{4}$.
2. $\gamma_{\hat{a}}(T) \geq \frac{n+2}{3}$.

Théorème 2.2.4 *Si G est un graphe biparti d'ordre n et de degré maximum Δ, alors*

1. $\gamma_a(G) \geq \frac{2n}{\Delta+3}$.
2. $\gamma_{\hat{a}}(G) \geq \frac{2n}{\Delta+2}$.

2.2.2 Bornes supérieures sur $\gamma_a(G)$ et $\gamma_{\hat{a}}(G)$.

Proposition 2.2.1 *[4] Pour tout graphe G sans sommets isolés et degré minimum δ,*

1. $\gamma_a(G) \leq n - \left\lceil \frac{\delta}{2} \right\rceil$.
2. $\gamma_{\hat{a}}(G) \leq n - \left\lfloor \frac{\delta}{2} \right\rfloor$.

Corollaire 2.2.1 *[4] Pour tout graphe G,*

$\gamma_a(G) = n$ si et seulement si $G = \overline{K_n}$.

Théorème 2.2.5 *[4] Si T est un arbre d'ordre $n \geq 4$, alors $\gamma_a(T) \leq \frac{3n}{5}$.*

Théorème 2.2.6 *[4] Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$, alors $\gamma_{\hat{a}}(T) \leq \frac{3n}{4}$.*

2.2.3 Bornes sur $\gamma_o(G)$ et $\gamma_{\hat{o}}(G)$.

Théorème 2.2.7 *[18] Pour tout graphe connexe G d'ordre n, degré minimum δ et degré maximum Δ,*

1. $\gamma_o(G) \geq \begin{cases} \left\lceil \frac{n(\delta+1)}{2\Delta+\delta+1} \right\rceil & \text{si } \delta \text{ impair} \\ \left\lceil \frac{n\delta}{2\Delta+\delta} \right\rceil & \text{sinon.} \end{cases}$
2. $\gamma_{\hat{o}}(G) \geq \begin{cases} \left\lceil \frac{n(\delta+3)}{2\Delta+\delta+3} \right\rceil & \text{si } \delta \text{ impair} \\ \left\lceil \frac{n(\delta+2)}{2\Delta+\delta+2} \right\rceil & \text{sinon.} \end{cases}$

Théorème 2.2.8 *[13] Pour tout graphe G d'ordre n, de taille m et degré maximum Δ,*

1. $\gamma_o(G) \geq \left\lceil \frac{2m+n}{3\Delta+1} \right\rceil$.
2. $\gamma_{\hat{o}}(G) \geq \left\lceil \frac{2(m+n)}{3\Delta+2} \right\rceil$.

Théorème 2.2.9 *[13] Soit G un graphe cubique connexe d'ordre n,*

1. $\frac{n}{2} \leq \gamma_{\hat{o}}(G) \leq \frac{3n}{4}$.
2. $\gamma_{\hat{o}}(G) = \frac{n}{2}$, si et seulement si G est un graphe biparti.

3. $\gamma_{\hat{o}}(G) = \frac{3n}{4}$, si et seulement si G est isomorphe au graphe complet K_4.

Théorème 2.2.10 *Pour tout graphe G d'ordre n et de taille m,*
$\gamma_o(G) \geq \left\lceil \frac{3n-\sqrt{9n^2-8n-16m}}{4} \right\rceil$, *et* $\gamma_{\hat{o}}(G) \geq \left\lceil \frac{3n+1-\sqrt{9n^2-10n-16m+1}}{4} \right\rceil$.

Théorème 2.2.11 *[11] Pour tout graphe connexe G d'ordre $n \geq 2$, $\gamma_o(G) \leq \frac{2n}{3}$.*
Si le degré minimum de G est d'au moins 2, alors $\gamma_{\hat{o}}(G) \leq \frac{5n}{6}$.

Théorème 2.2.12 *[10] Pour tout graphe biparti G sans sommets isolés, $\gamma_o(G) \leq \frac{(n-l+s)}{2}$.*

2.2.4 Bornes sur $\gamma_{ap}(G)$

Théorème 2.2.13 *[2] Si T est un arbre d'ordre n et $T \neq P_n$, alors $a_p(T) \leq \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor$.*

Théorème 2.2.14 *[2] Pour tout graphe G d'ordre n, $n \leq \left(\frac{\Delta+\delta+2}{\delta+1}\right)\gamma_{ap}(G)$.*

Théorème 2.2.15 *[2] Si G est un graphe régulier d'ordre n, alors $n \leq 2\gamma_{ap}(G)$.*

Chapitre 3

Etude des alliances dans les graphes particuliers

Nous avons présenté dans la deuxième chapitre des résultats existants pour les graphes. Dans ce chapitre, nous allons présenté quelques résultats que nous avons pu obtenir sur les graphes particulier.

3.1 calcul le nombre d'alliance globale pour quelques classes des graphes

3.1.1 Graphe milieu et graphe total

Définition 3.1.1 *[7] Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe simple. Le graphe milieu de G, noté $M(G)$ est défini comme suit: L'ensemble des sommets de $M(G)$ est $V(G) \cup E(G)$. Deux sommet x,y de $M(G)$ sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifie :*

- $x, y \in E(G)$ et x est adjacent à y dans G.
- $x \in V(G)$, $y \in E(G)$ et x est incident à y dans G.

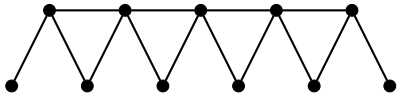


Figure 3.1.1 : Le graphe milieu d'une chaîne d'ordre 6

.

Définition 3.1.2 *[9] Le graphe total de G, noté $T(G)$ est défini comme suit: L'ensemble des sommets de $T(G)$ est $V(G) \cup E(G)$. Deux sommet x et y de $T(G)$ sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifie :*

- $x, y \in V(G)$ et x, y sont adjacents dans G.
- $x, y \in E(G)$ et x est adjacent à y dans G.
- $x \in V(G)$, $y \in E(G)$ et x est incident à y dans G.

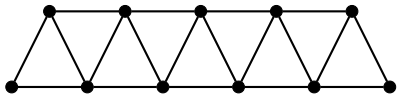


Figure 3.1.2 : Le graphe total d'une chaîne d'ordre 6

.

3.1.2 Graphe milieu d'une chaîne

Posons $G = M(P_n)$. Pour $n \geq 3$, il est claire que G contient deux sommets pendants, deux sommets de dégrés 3, $n-2$ sommets de degrés 2 et $n-3$ sommets de degrés 4. On pose $V(P_n) = x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, $E(P_n) = y_1, y_2, ..., y_{n-1}$. Par définition, $V(G) = V(P_n) \cup E(P_n)$. Donc $|V(G)| = |V(P_n) \cup E(P_n)| = n + n - 1 = 2n - 1$.

Proposition 3.1.1 *Soit P_n une chaîne d'ordre n, alors*

1. $\gamma_a(G) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 2 \\ n-1 & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$

2. $\gamma_{\hat{a}}(G) = \begin{cases} n & \text{si } n = 2, 3 \\ n+1 & \text{si } n \geq 4. \end{cases}$

Preuve.

1. Soit S un $\gamma_a(G)$-ensemble. On distingue deux cas:

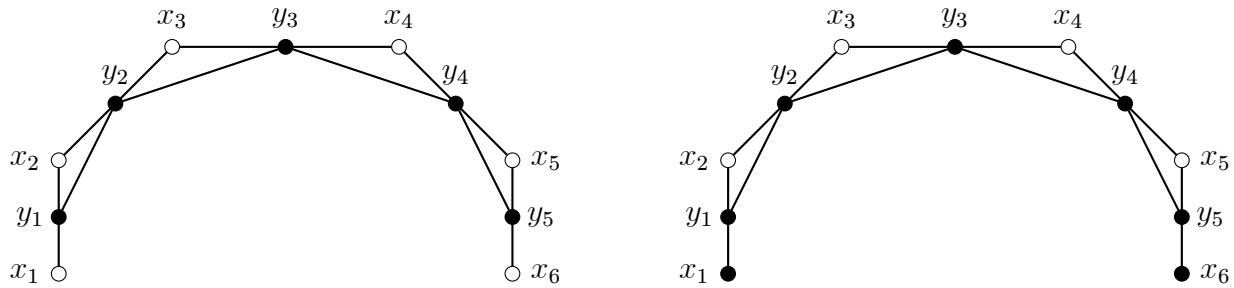
Cas 1: Si $n = 2$, alors $G = P_3$. Donc $\gamma_a(G) = \gamma_a(P_3) = 2$.

Cas 2: Si $n \geq 3$, S contient l'ensemble des sommets y_j tel que $j \in \{1, ..., n-1\}$. Par conséquent $\gamma_a(G) \geq n-1$. Inversement l'ensemble constitué de y_j est une alliance défensive globale. Ceci implique que $\gamma_a(G) \leq n-1$. D'où $\gamma_a(G) = n-1$.

2. Soit D un $\gamma_{\hat{a}}(G)$-ensemble. Deux cas se présentent:

Cas 1: Si $n = 2$, alors $M(G) = P_3$. Dans ce cas $\gamma_{\hat{a}}(G) = \gamma_{\hat{a}}(P_3) = 2$. Si $n = 3$, le graphe G est obtenu à partir d'un cycle C_3 tel que deux sommet sont des supports faibles. D'après la Remarque 2.1.1, $\gamma_{\hat{a}}(G) = 3$.

Cas 2: Si $n \geq 4$, il clair que D contient l'ensemble des sommets y_j, $j \in \{1, ..., n-1\}$ et les deux sommets pendants. Par conséquent, $\gamma_{\hat{a}}(G) \geq n+1$. Inversement l'ensemble des sommets y_j, $j \in \{1, ..., n-1\}$ et les deux sommets pendants est une alliance défensive globale forte. Ceci implique que $\gamma_{\hat{a}}(G) \leq n+1$. Par conséquent $\gamma_{\hat{a}}(G) = n+1$. ■



$\gamma_a(G) = 5$ $\qquad\qquad$ $\gamma_{\hat{a}}(G) = 7$

Figure 3.1.3 : Un graphe milieu du chaîne P_6

Proposition 3.1.2 *Soit P_n une chaîne d'ordre n, alors*

1. $\gamma_o(G) = n-1$.

2. $\gamma_{\hat{o}}(G) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 2, \\ n+1 & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$

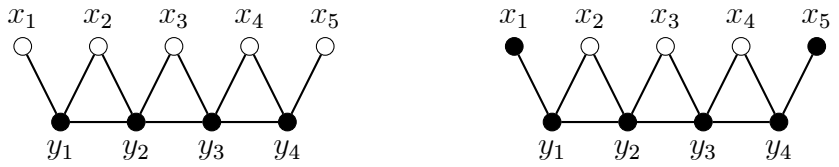
Preuve.

1. Soit S un $\gamma_o(G)$-ensemble. Il est claire que S contient l'ensemble des sommets y_j tel que $j \in \{1, ..., n-1\}$. Par conséquent $\gamma_o(G) \geq n-1$. Inversement l'ensemble constitué de y_j est une alliance offensive globale. Ceci implique que $\gamma_o(G) \leq n-1$. D'où $\gamma_o(G) = n-1$.

2. Soit D un $\gamma_{\hat{o}}(G)$-ensemble. Deux cas se présentent:

Cas 1: Si $n = 2$, alors $M(G) = P_3$. Dans ce cas $\gamma_{\hat{o}}(G) = \gamma_{\hat{o}}(P_3) = 2$.

Cas 2: Si $n \geq 3$, il clair que D contient l'ensemble des sommets y_j, $j \in \{1, ..., n-1\}$ et les deux sommets pendants. Par conséquent, $\gamma_{\hat{o}}(G) \geq n+1$. Inversement l'ensemble des sommets y_j, $j \in \{1, ..., n-1\}$ et les deux sommets pendants est une alliance offensive globale forte. Ceci implique que $\gamma_{\hat{o}}(G) \leq n+1$. Par conséquent $\gamma_{\hat{o}}(G) = n+1$. ■



$\gamma_o(G) = 4$ $\gamma_{\hat{o}}(G) = 6$

Figure 3.1.4 : Un graphe milieu du chaîne P_5

Proposition 3.1.3 *Soit P_n une chaîne d'ordre n, alors*

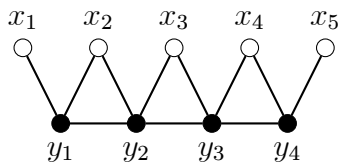
$$\gamma_{ap}(G) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 2, \\ n-1 & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

Preuve. Soit S un $\gamma_{ap}(G)$-ensemble, le nombre $\gamma_{ap}(G)$. On distingue deux cas:

Cas 1: Si $n = 2$, alors $G = P_3$. Donc $\gamma_{ap}(G) = \gamma_{ap}(P_3) = 2$.

Cas 2: Si $n \geq 3$, S est une alliance défensive globale donc S contient l'ensemble des sommets y_j tel que $j \in \{1, ..., n-1\}$ qui avaient des arêtes dans le cycle C_n. D'où

$\gamma_{ap}(G) \geq n-1$. Inversement l'ensemble constitué de y_j est une alliance puissante globale. Ceci implique que $\gamma_{ap}(G) \leq n-1$. D'où $\gamma_{ap}(G) = n-1$. ■



$$\gamma_{ap}(G) = 4$$

Figure 3.1.5 : Un graphe milieu du chaîne P_5

3.1.3 Graphe milieu d'un cycle

Posons $G = M(C_n)$. On pose $V(C_n) = x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, $\deg(x_i) = 2$, $E(C_n) = y_1, y_2, ..., y_n$, $\deg(y_j) = 4$. Par définition $V(G) = V(C_n) \cup E(C_n)$. Donc $|V(G)| = |V(C_n) \cup E(C_n)| = 2n$.

Proposition 3.1.4 *Soit C_n un cycle d'ordre $n \geq 3$, alors*

$$\gamma_a(G) = \gamma_{\hat{a}}(G) = n.$$

Preuve. Soit S un $\gamma_a(G)$-ensemble.

Il est claire que l'ensemble constitué les sommets $y_j, 1 \leq j \leq n$ est une alliance défensive globale. Donc $\gamma_a(G) \leq n$. Inversement Pour chaque deux sommets successives on choisie un sommet y_j dans S,et x_i dans $V - S$ tel que $i, j \in \{1, .., n\}$. Ceci implique $|S| \geq \frac{|V(C_n) \cup E(C_n)|}{2}$ donc $\gamma_a(G) \geq \frac{2n}{2} = n$. Par conséquent $\gamma_a(G) = n$. ■

Proposition 3.1.5 *Soit C_n un cycle d'ordre $n \geq 3$, alors*

$$\gamma_o(G) = \gamma_{\hat{o}}(G) = n.$$

Preuve. Soit S un $\gamma_o(G)$-ensemble.

Il est claire que l'ensemble constitué les sommets y_j, $1 \leq j \leq n$ est à la fois une alliance offensive globale et une alliance offensive globale forte. Donc $\gamma_o(G) \leq n$, et $\gamma_{\hat{o}}(G) \leq n$. Inversement chaque alliance offensive globale où bien globale forte S contient au moins n sommets. D'où, $\gamma_o(G) \geq n$ et $\gamma_{\hat{o}}(G) \geq n$. Par conséquent $\gamma_o(G) = \gamma_{\hat{o}}(G) = n$.

Proposition 3.1.6 *Soit C_n un cycle d'ordre $n \geq 3$, alors*

$$\gamma_{ap}(G) = n.$$

Preuve. Soit S un $\gamma_{ap}(G)$-ensemble.

S est une alliance défensive globale donc S contient l'ensemble des sommets y_j tel que $j \in \{1, ..., n\}$ qui avaient des arêtes dans le cycle C_n. D'où $\gamma_{ap}(G) \geq n$. Inversement l'ensemble constitué de y_j est une alliance puissante globale. Ceci implique que $\gamma_{ap}(G) \leq n$. D'où $\gamma_a(G) = n$. ■

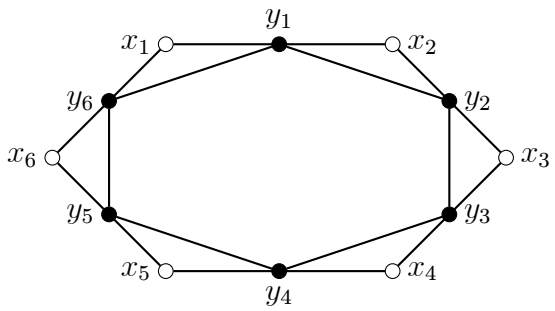


Figure 3.1.6 : Un graphe milieu du cycle C_6

3.1.4 Graphe total d'une chaîne

Posons $G = T(P_n)$. Pour $n \geq 3$, il est claire que G contient deux sommet de dégrés 2, deux sommets de dégrés 3, $2n-5$ sommets de degrés 4. On pose $V(P_n) = x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, $E(P_n) = y_1, y_2, ..., y_{n-1}$. Par définition, $V(G) = V(P_n) \cup E(P_n)$, donc $|V(T(P_n))| = |V(P_n) \cup E(P_n)| = n + n - 1 = 2n - 1$.

Proposition 3.1.7 *Soit P_n une chaîne d'ordre n, alors*

1. $\gamma_a(G) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 2, \\ n-1 & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$

2. $\gamma_{\hat{a}}(G) = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 4, \\ n & \text{sinon.} \end{cases}$

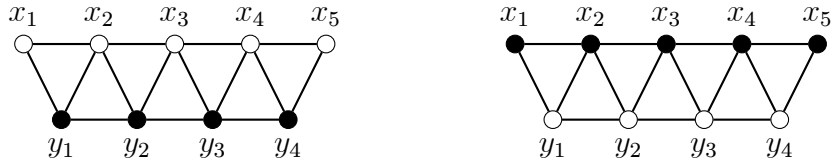
Preuve.

1. Soit S un $\gamma_a(G)$-ensemble. Deux cas se présentent:

Cas 1: Si $n = 2$, alors $G = C_3$. Donc $\gamma_a(G) = \gamma_a(C_3) = 2$.

Cas 2: Si $n \geq 3$. L'ensemble $\{y_1, y_2, ..., y_{n-1}\}$ est une alliance défensive globale. Ceci implique que $\gamma_a(G) \leq n - 1$ Inversement, S contient l'ensemble des sommets y_j tel que $j \in \{1, ..., n-1\}$. Par conséquent $\gamma_a(G) \geq n - 1$. D'où $\gamma_a(G) = n - 1$

2. Soit D un $\gamma_{\hat{a}}(G)$-ensemble. Si $n = 4$. Il claire que $D = \{x_2, x_3, y_2\}$ et donc $\gamma_{\hat{a}}(G) = 3$. Supposons que $n \neq 4$. Il est claire que l'ensemble $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ est une alliance défensive globale forte. Ceci implique que $\gamma_{\hat{a}}(G) \leq n$. Inversement, chaque alliance défensive globale forte contient au moins n sommets. D'où, $\gamma_{\hat{a}}(G) \geq n$. Par conséquent $\gamma_{\hat{a}}(G) = n$. ■



$\gamma_a(G) = 4$ $\gamma_{\hat{a}}(G) = 5$

Figure 3.1.7 : Un graphe total du chaîne P_5

Proposition 3.1.8 *Soit P_n une chaîne d'ordre n, alors*

$$\gamma_o(G) = \gamma_{\hat{o}}(G) = n.$$

Preuve. Si n est paire, alors l'ensemble $\{x_2, x_4, ..., x_n, y_1, y_3, y_5, ..., y_{n-1}\}$ est à la fois une alliance offensive globale et une alliance offensive globale forte. Si n est impaire, alors l'ensemble $\{x_2, x_4, ..., x_{n-1}, y_1, y_3, y_5, ..., y_{n-2}, y_{n-1}\}$ est à la fois une alliance offensive globale et une alliance offensive globale forte. Par conséquent, $\gamma_o(G) \leq n$ et $\gamma_{\hat{o}}(G) \leq n$. Inversement, chaque alliance offensive globale où bien globale forte contient au moins n sommets. D'où, $\gamma_o(G) \geq n$ et $\gamma_{\hat{o}}(G) \geq n$. Par conséquent $\gamma_o(G) = \gamma_{\hat{o}}(G) = n$. ■



$\gamma_o(G) = 4$ $\gamma_{\hat{o}}(G) = 5$

Figure 3.1.8 : Un graphe total des chaînes P_4 et P_5

3.1.5 Graphe total d'un cycle

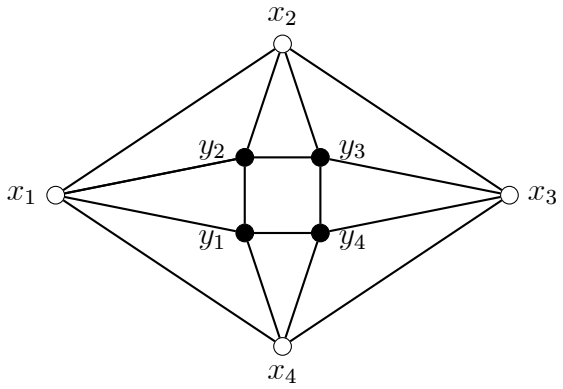
Posons $G = T(C_n)$. On pose $V(C_n) = x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, $E(C_n) = y_1, y_2, ..., y_n$, tell que $\deg(x_i) = \deg(y_j) = 4$. Par définition $V(G) = V(C_n) \cup E(C_n)$. Donc $|V(G)| = |V(C_n) \cup E(C_n)| = 2n$.

Proposition 3.1.9 *Soit C_n un cycle d'ordre $n \geq 3$, alors*

$$\gamma_a(G) = \gamma_{\hat{a}}(G) = n.$$

Preuve. Soit S un $\gamma_a(G)$-ensemble.

Il est claire que l'ensemble $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ et à la fois une alliance défensive globale est une alliance défensive globale forte. D'où, $\gamma_a(G) \leq n$ et $\gamma_{\hat{a}}(G) \leq n$. Ceci implique que $\gamma_a(G) \leq n$. Inversement chaque alliance défensive globale où bien globale forte contient au moins n sommets, D'où $\gamma_a(G) \geq n$ et $\gamma_{\hat{a}}(G) \geq n$. Donc $\gamma_a(G) = \gamma_{\hat{a}}(G) = n$. ■



$$\gamma_a(G) = \gamma_{\hat{a}}(G) = 4$$

Figure 3.1.9 : Un graphe total du cycle C_4

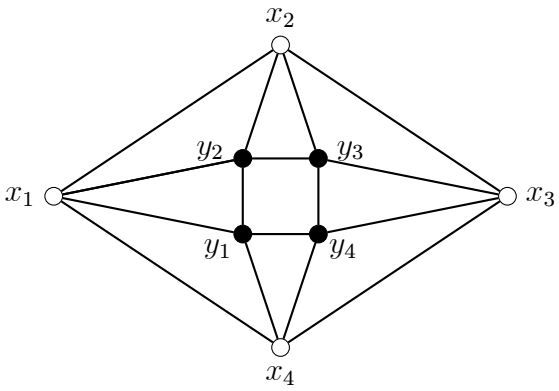
Proposition 3.1.10 *Soit C_n un cycle d'ordre $n \geq 3$, alors*

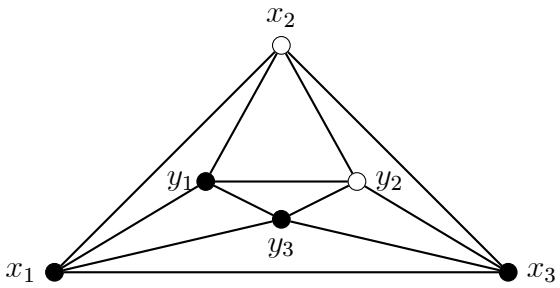
$$\gamma_o(G) = \gamma_{\hat{o}}(G) = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est paire,} \\ n+1 & \text{si } n \text{ est impaire.} \end{cases}$$

Preuve. Si $n = 2p$, alors l'ensemble $\{x_{2i+1}y_{2i+1},\ 0 \leq i \leq 2p-1\}$ et à la fois une alliance offensive globale et une alliance offensive globale forte. D'où, $\gamma_o(G) \leq n$ et $\gamma_{\hat{o}}(G) \leq n$.

Si $n = 2p+1$ est impaire, alors l'ensemble $\{x_{2i+1}y_{2i+1},\ 0 \leq i \leq 2p+1\}$ est à la fois une alliance offensive globale et une alliance offensive globale forte. D'où, $\gamma_o(G) \leq n+1$ et

$\gamma_{\hat{o}}(G) \leq n+1$. Inversement, chaque alliance offensive globale où bien globale forte contient au moins n sommets si n est paire. D'où, $\gamma_o(G) \geq n$ et $\gamma_{\hat{o}}(G) \geq n$, et contient au moins $n+1$ sommets si n est impaire. D'où, $\gamma_o(G) \geq n+1$ et $\gamma_{\hat{o}}(G) \geq n+1$. Par conséquent $\gamma_o(G) = \gamma_{\hat{o}}(G) = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est paire,} \\ n+1 & \text{si } n \text{ est impaire.} \end{cases}$ ■





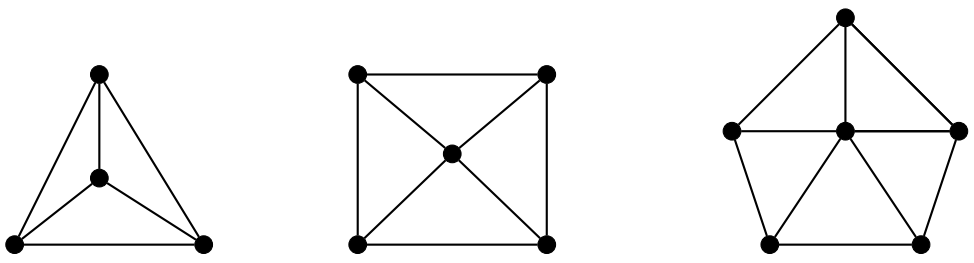
$\gamma_o(G) = \gamma_{\hat{o}}(G) = 4$ $\qquad$ $\gamma_o(G) = \gamma_{\hat{o}}(G) = 4$

Figure 3.1.10 : Un graphe total des cycles C_4 et C_3

3.1.6 Graphe Roue

Définition 3.1.3 *La roue W_n est un graphe d'ordre $n \geq 4$ obtenu à partir de l'union disjointe d'un cycle d'ordre $n-1$ et un sommet en reliant ce sommet à tous les sommets du cycle.*

Soit la figure 3.1.11, contient les graphes roues.



W_4 $\qquad$ W_5 $\qquad$ W_6

Figure 3.1.11 : graphes roues

.

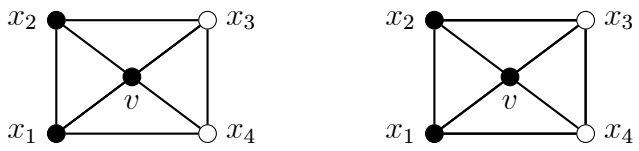
Proposition 3.1.11 *Soit W_n la roue d'ordre n, alors*

1. $\gamma_a(W_n) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1$.
2. $\gamma_{\hat{a}}(W_n) = \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + 1$.

Preuve. Soit $C_{n-1} = \{x_1, x_2, x_3, ...x_{n-1}\}$, et soit v le sommet universel de degré maximum $n-1$, ou v est adjacent à tous les autres sommets.

Soit S un $\gamma_a(W_n)$-ensemble. Puisque S un ensemble dominant, le sommet universel v appartient à S. Par conséquent S contient au moins $\left\lfloor \frac{\deg(v)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ voisins de v. D'où $\gamma_a(W_n) \geq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1$. Iversement l'ensemble consititué de v et $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ voisins de v est une alliance défensive globale de W_n. Ceci implique que $\gamma_a(W_n) \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1$. Donc $\gamma_a(W_n) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1$.

Soit D un $\gamma_{\hat{a}}(W_n)$-ensemble. Il claire que $v \in S$. Alors D contient au moins $\left\lceil \frac{\deg(v)}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ voisins de v. Par conséquent $\gamma_{\hat{a}}(_{W_n}) \geq \left\lceil \frac{(n-1)}{2} \right\rceil + 1$. Iversement l'ensemble constitué de v et $\left\lceil \frac{(n-1)}{2} \right\rceil$ voisins de v est une alliance défensive globale forte, et donc $\gamma_{\hat{a}}(W_n) \leq \left\lceil \frac{(n-1)}{2} \right\rceil + 1$. Donc $\gamma_{\hat{a}}(W_n) = \left\lceil \frac{(n-1)}{2} \right\rceil + 1$. ■



$\gamma_a(G) = 3$ $\qquad$ $\gamma_{\hat{a}}(G) = 3$

Figure 3.1.12 : Un graphe roue W_5

Proposition 3.1.12 *Soit W_n un roue d'ordre n, alors*

1. $\gamma_o(W_n) = \begin{cases} \frac{n-1}{3} + 1 \text{ si } n-1 \equiv 0 \pmod 3 \\ \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 2 \text{ si } n-1 \equiv 1, 2 \pmod 3. \end{cases}$
2. $\gamma_{\hat{o}}(W_n) = \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + 1$.

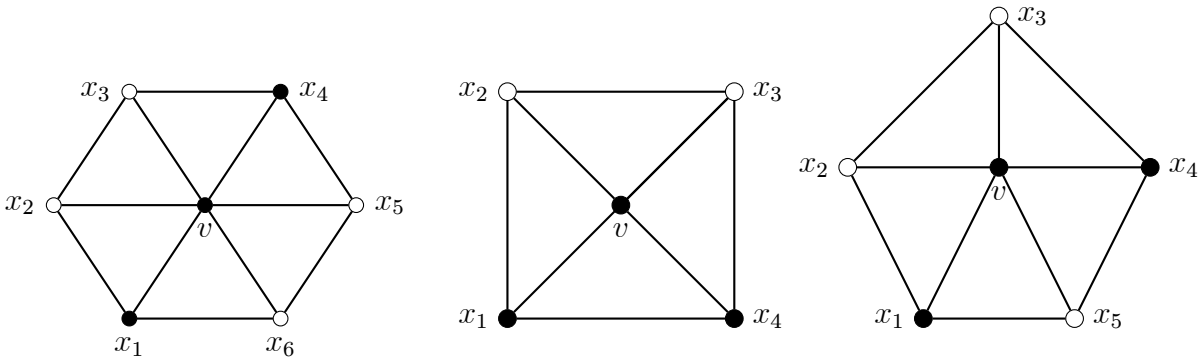
Preuve. Soit $C_{n-1} = \{x_1, x_2, x_3, ...x_{n-1}\}$, et soit v le sommet universel.

1. Soit S un $\gamma_o(W_n)$-ensemble. Puisque S un ensemble dominant, le sommet universel v appartient à S. Vue que chaque sommet sur le cycle est de degrés 3, alors il contient au moins 2 voisins dans S. On distingue deux cas:

Cas 1: Si $n-1 \equiv 0 \pmod 3$, alors pour chaque trois sommets successives sur le cycle, on choisit un sommet dans S. Par conséquent S contient $\frac{n-1}{3}$ sommet du cycle. Donc $\gamma_o(W_n) \geq \frac{n-1}{3}+1$. Inversement l'ensemble constitué de v et $\frac{n-1}{3}$ voisins de v est une alliance offensive global de W_n. Ceci implique que $\gamma_o(W_n) \leq \frac{n-1}{3}+1$. Donc $\gamma_o(W_n) = \frac{n-1}{3}+1$.

Cas 2: Si $n-1 \equiv 1,2 \pmod 3$, alors pour chaque trois sommets successives sur le cycle, on choisit un sommet dans S. Dans ce cas, il reste un ou deux sommets sur le cycle. On ajoute un sommet à S. Par conséquent S contient $\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 1$ sommet du cycle. Donc $\gamma_o(W_n) \geq \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 2$. Inversement l'ensemble constitué de v et $\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 1$ voisins de v est une alliance offensive globale de W_n. Ceci implique que $\gamma_o(W_n) \leq \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 2$. Donc $\gamma_o(W_n) = \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 2$.

2. Soit D un $\gamma_{\hat{o}}(W_n)$-ensemble. Il claire que $v \in S$. Alors D contient au moins $\left\lceil \frac{\deg(v)}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ voisins de v. Par conséquent $\gamma_{\hat{o}}(_{W_n}) \geq \left\lceil \frac{(n-1)}{2} \right\rceil + 1$. Iversement l'ensemble constitué de v et $\left\lceil \frac{(n-1)}{2} \right\rceil$ voisins de v est une alliance offensive globale forte, et donc $\gamma_{\hat{o}}(W_n) \leq \left\lceil \frac{(n-1)}{2} \right\rceil + 1$. Donc $\gamma_{\hat{o}}(W_n) = \left\lceil \frac{(n-1)}{2} \right\rceil + 1$. ■



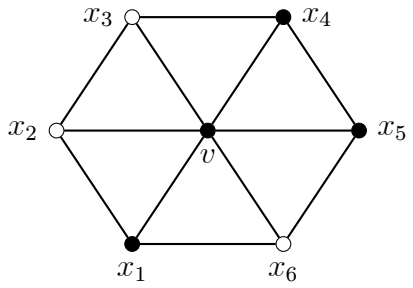
$\gamma_o(W_7) = 3$ $\gamma_o(W_5) = 3$ $\gamma_o(W_6) = 3$

Figure 3.1.13 : graphes roues W_7,W_5 et W_6

Proposition 3.1.13 *Soit W_n un roue d'ordre n, alors*

$$\gamma_{ap}(W_n) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1.$$

Preuve. Soient S un $\gamma_{ap}(W_n)$-ensemble. Il est claire que $v \in S$. Comme S est une alliance défensive globale, S contient au moins $\left\lfloor \frac{\deg(v)}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ voisins de v. D'où $\gamma_{ap}(W_n) \geq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1$. L'ensemble constitué de v et $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ de ses voisins est une alliance puissante globale S. Donc $\gamma_{ap}(W_n) \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1$. Par conséquent $\gamma_{ap}(W_n) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1$. ■



$$\gamma_{ap}(W_7) = 4$$

Figure 3.1.14 : Un graphe roue W_7

Chapitre 4

L'effet de la suppression d'une arête sur les paramètres des alliances globales

Le présent chapitre est consacré à la présentation des résultats antérieurs obtenus dans le domaine des graphes critiques et stables par rapport à le nombre d'alliance offensive globale et le nombre d'alliance puissante globale. Nous commençons par définir les concepts de stabilité et de criticité relativement aux opérations les plus étudiées.

4.1 Notions de criticité et de stabilité

Soit $uv = e$ une arête quelconque de G. La suppression de l'arête e du graphe G produit le graphe noté $G - e$ obtenu à la suppression de e (ses extrémités restent) .

Soit $uv = e$ une arête quelconque de G. L'ajout de l'arête e au graphe G produit le graphe noté $G + e$, résultant de l'ajout d'une arête entre les sommets u et v dans le graphe G.

Théorème 4.1.1 *Pour tout graphe G d'ordre n,*

$$\gamma_o(G) - 1 \leq \gamma_o(G - e) \leq \gamma_o(G) + 1.$$

Preuve. Soient D un $\gamma_o(G)$-ensemble et $e = uv \in E(G)$. On distingue trois cas:

Cas 1: $u, v \in D$: Dans ce cas D reste une alliance offensive globale de $G - e$. Ceci implique que $\gamma_o(G-e) \leq |D|$.

D'où $\gamma_o(G-e) \leq \gamma_o(G)$.

Cas 2: $v \in D$, $u \notin D$. Deux cas ce présentent :

Cas 2.1: Si $|N[u] \cap D| > |N[u] \cap V - D|$, alors D reste une alliance offensive globale de $G - e$. D'où $\gamma_o(G-e) \leq \gamma_o(G)$.

Cas 2.2: Si $|N[u] \cap D| = |N[u] \cap V - D|$, alors $D \cup \{u\}$ est une alliance offensive globale de $G - e$. Par conséquent $\gamma_o(G-e) \leq \gamma_o(G) + 1$.

Dans les deux cas précédents, on a $\gamma_o(G-e) \leq \gamma_o(G) + 1$.

Cas 3: $u, v \in V - D$. Dans ce cas D reste une alliance offensive globale de G Ceci implique que $\gamma_o(G-e) \leq \gamma_o(G)$.

D'après les trois cas précédents on a $\gamma_o(G-e) \leq \gamma_o(G) \leq \gamma_o(G) + 1$.

D'où $\gamma_o(G-e) \leq \gamma_o(G) + 1$.

Inversement soit D' un $\gamma_o(G-e)$-ensemble.et $u, v \in D'$, On distingue trois cas:

Cas 1: $u, v \in D'$: Dans ce cas D' reste une alliance offensive globale de G. Ceci implique que $\gamma_o(G) \leq |D'|$.

D'où $\gamma_o(G) \leq \gamma_o(G-e)$

Cas 2: $v \in D'$, $u \notin D'$. $|N[u] \cap D'| \geq |N[u] \cap V - D'|$.

D'où $\gamma_o(G) \leq \gamma_o(G-e)$.

Cas 3: $u, v \in v - D'$ on trouve trois cas:

Cas 3.1: Dans ce cas D' reste une alliance offensive global de G. Ceci implique que $\gamma_o(G) \leq \gamma_o(G-e)$.

Cas 3.2: $|N[u] \cap D'| = |N[u] \cap V - D'|$ ou bien $|N[v] \cap D'| = |N[v] \cap V - D'|$, $D' \cup \{u\}$ ou $D' \cup \{v\}$ est une alliance offensive global de G.

D'où $\gamma_o(G) \leq \gamma_o(G-e) + 1$.

Cas 3.3: $|N[u] \cap D'| > |N[u] \cap V - D'|$ et $|N[v] \cap D'| > |N[v] \cap V - D'|$, $D' \cup \{u\}$ ou $D' \cup \{v\}$ est une alliance offensive global de G.

D'où $\gamma_o(G) \leq \gamma_o(G-e) + 1$.

D'après les résultats précédents $\gamma_o(G) \leq \gamma_o(G-e) \leq \gamma_o(G-e) + 1$.

D'où $\gamma_o(G) - 1 \leq \gamma_o(G-e)$.

Par conséquent $\gamma_o(G) - 1 \leq \gamma_o(G-e) \leq \gamma_o(G) + 1$. ■

D'après le Théorème 4.1.1 on peut définit les classe des graphes suivant:

Définition 4.1.1 *G est dit γ_o^+-critique si quelque soit $e \in E(G) : \gamma_o(G-e) > \gamma_o(G)$.*

Définition 4.1.2 *G est dit $\gamma_o^-(G)$-critique si quelque soit $e \in E(G) : \gamma_o(G-e) < \gamma_o(G)$.*

Définition 4.1.3 *G est dit $\gamma(G)$-critique si quelque soit $e \in E(G) : \gamma_o(G-e) = \gamma_o(G)$.*

4.1.1 Les graphes γ_o^+-critiques

Théorème 4.1.2 *Un graphe G est γ_o^+-critique si et seulement si pour tout $\gamma_o(G)$-ensemble D*

les conditions suivantes sont verifies :

1. D est un ensemble indépendant .
2. Pour chaque sommet $v \in V - D : |N[v] \cap D| = |N[v] \cap V - D|$.
3. $V - D$ est un ensemble indépendant.

Preuve. Soient G est $\gamma_o^+(G)$-critique, D un $\gamma_o(G)$-ensemble et $e = uv \in E(G)$. On distingue 3 cas:

Cas 1: $u, v \in D$. Dans ce cas D reste une alliance offensive globale de $G - e$. Ceci implique que $\gamma_o(G-e) \leq |D|$.

D'où $\gamma_o(G-e) \leq \gamma_o(G)$. Contradiction par conséquent D est un ensemble indépendant.

Cas 2: $u \in D$, $v \notin D$.

Supposons que $|N[v] \cap D| > |N[v] \cap V - D|$. Dans ce cas D est une alliance offensive globale de $G - e$. Contradiction d'où $|N[v] \cap D| = |N[v] \cap V - D|$.

Cas 3: $u, v \in V - D$. Dans ce cas D reste une alliance offensive globale de G Ceci implique que $\gamma_o(G-e) \leq \gamma_o(G)$ .Contradiction par conséquent $V - D$ est un ensemble indépendant. ■

Corollaire 4.1.1 *Soit G un graphe, alors G est $\gamma_o^+(G)$-critique si et seulement si G est l'union des étoiles.*

4.1.2 Les graphes $\gamma_o^-(G)$-critiques

Proposition 4.1.1 *Soit P_n une chaine d'ordre n, alors*

$$\gamma_o(P_n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\gamma_{\hat{o}}(P_n) = \begin{cases} \frac{n}{2} + 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Proposition 4.1.2 *Soit C_n une chaîne d'ordre n, alors*

$$\gamma_o(C_n) = \gamma_{\hat{o}}(C_n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Proposition 4.1.3 *C_n est γ_o^--critique si et seulement si n est impaire.*

Preuve. Soit $e \in E(C_n)$.

Il est clair que $C_n - e$ est la chaîne P_n. D'après la Proposition 4.1.2, distingue deux cas:

Cas1: Si n est pair, alors d'après les Propositions 4.1.1, 4.1.2 $\gamma_o(C_n - e) = \gamma_o(P_n) = \frac{n}{2} = \gamma_o(C_n)$. D'où, C_n n'est pas γ_o^--critique

Cas2: Si n est impair, alors d'après les Propositions 4.1.1, 4.1.2 $\gamma_o(C_n - e) = \gamma_o(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Comme n est impair, alors $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor < \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Par conséquent $\gamma_o(C_n - e) < \gamma_o(C_n)$. D'où, C_n est γ_o^--critique . ■

Théorème 4.1.3 *Pour tout graphe G d'order n,*

$$\gamma_{ap}(G) - 2 \leq \gamma_{ap}(G - e) \leq \gamma_{ap}(G) + 2$$

Preuve. Soient D un $\gamma_{ap}(G)$-ensemble et $e = uv \in E(G)$. On distingue trois cas:

Cas 1: $v, u \in D$ on a trois cas:

Cas 1.1: Si $|N[u] \cap D| > |N[u] - D|$ et $|N[v] \cap D| > |N[v] - D|$, alors D reste une alliance puissante globale de $G - e$. Ceci implique que $\gamma_{ap}(G - e) \leq \gamma_{ap}(G)$.

Cas 1.2: Si $|N[u] \cap D| = |N[u] - D|$ ou bien $|N[v] \cap D| = |N[v] - D|$, soit y et z les voisins de u et v respectivement dans $V - D$. Alors $D \cup \{y\}$ *ou* $D \cup \{z\}$ est une alliance puissante globale de $G - e$. Par conséquent $\gamma_{ap}(G - e) \leq \gamma_{ap}(G) + 1$.

Cas 1.3: Si $|N[u] \cap D| = |N[u] - D|$ et $|N[v] \cap D| = |N[v] - D|$, alors $D \cup \{y \cup z\}$ est une alliance puissante global de $G - e$. D'où $\gamma_{ap}(G - e) \leq \gamma_{ap}(G) + 2$.

Dans les trois cas précédents, on a $\gamma_{ap}(G - e) \leq \gamma_o(G) + 2$.

Cas 2: $u \in D, v \notin D$.

Deux cas ce présentent:

Cas 2.1: Si $|N[v] \cap D| > |N[v] - D|$, alors D reste une alliance puissante globale de $G - e$. D'où $\gamma_{ap}(G - e) \leq \gamma_{ap}(G)$.

Cas 2.2: Si $|N[v] \cap D| = |N[v] - D|$, alors $D \cup \{v\}$ est une alliance puissante globale de $G - e$. Par conséquent $\gamma_{ap}(G - e) \leq \gamma_{ap}(G) + 1$.

Cas 3: $u, v \in V - D$.

Dans ce cas D reste une alliance puissante globale de $G-e$. Ceci implique que $\gamma_{ap}(G - e) \leq \gamma_{ap}(G)$.

Dans tout les cas précédents on a: $\gamma_{ap}(G - e) \leq \gamma_{ap}(G) \leq \gamma_{ap}(G) + 1 \leq \gamma_{ap}(G) + 2$.

D'où $\gamma_{ap}(G - e) \leq \gamma_o(G) + 2$.

Inversement soit D' un $\gamma_{ap}(G - e)$-ensemble et $u, v \in D'$. On distingue trois cas:

Cas 1: $u, v \in D'$.

Dans ce cas D' reste une alliance puissante globale de G. Ceci implique que $\gamma_{ap}(G) \leq \gamma_{ap}(G - e)$.

Cas 2: $u \in D', v \notin D'$.

Deux cas ce présentent:

Cas 2.1: Si $|N[u] \cap D'| > |N[u] - D'|$, alors D' reste une alliance puissante globale de G. Ce ci implique que $\gamma_{ap}(G) \leq \gamma_{ap}(G - e)$.

Cas 2.2: Si $|N[u] \cap D'| = |N[u] - D'|$,alors $D' \cup \{v\}$ est une alliance puissante global de G. D'où $\gamma_{ap}(G) \leq \gamma_{ap}(G - e) + 1$.

Dans les deux cas précédents, on a $\gamma_{ap}(G) \leq \gamma_{ap}(G - e) + 1$.

Cas 3: $u, v \in V - D'$.

On trouve trois cas.

Cas 3.1: Si $|N[u] \cap D'| > |N[u] \cap V - D'|$ et $|N[v] \cap D'| > |N[v] \cap V - D'|$, alors D' reste une alliance puissante global de G. Ce ci implique que $\gamma_{ap}(G) \leq \gamma_{ap}(G - e)$.

Cas 3.2: $\left|N\left[u\right]\cap D^{'}\right|=\left|N\left[u\right]\cap V-D^{'}\right|$ ou bien $\left|N\left[v\right]\cap D^{'}\right|=\left|N\left[v\right]\cap V-D^{'}\right|$, $D^{'}\cup\{u\}$ ou bien $D^{'}\cup\{v\}$ est une alliance puissante global de G. D'où $\gamma_{ap}\left(G\right)\leq\gamma_{ap}\left(G-e\right)+1$.

Cas 3.3: $\left|N\left[u\right]\cap D^{'}\right|=\left|N\left[u\right]\cap V-D^{'}\right|$ et $\left|N\left[v\right]\cap D^{'}\right|=\left|N\left[v\right]\cap V-D^{'}\right|$,alors $D^{'}\cup\{u\cup v\}$ est une alliance puissante global de G.

Alors $\gamma_{ap}\left(G\right)\leq\left|D^{'}\cup\{u\cup v\}\right|$

Donc $\gamma_{ap}\left(G\right)\leq\gamma_{ap}\left(G-e\right)+2$.

Dans tout les cas on a: $\gamma_{ap}\left(G\right)\leq\gamma_{ap}\left(G-e\right)+1\leq\gamma_{ap}\left(G-e\right)+2$.

D'où $\gamma_{ap}\left(G\right)-2\leq\gamma_{ap}\left(G-e\right)$.

Par conséquent $\gamma_{ap}\left(G\right)-2\leq\gamma_{ap}\left(G-e\right)\leq\gamma_{o}\left(G\right)+2$. ■

D'après le Théoreme 4.1.3 on peut définit les classes des graphes suivantes:

Définition 4.1.4 *G est dit $\gamma_{ap}^{+}\left(G\right)$-critique si quelque soit $e\in E\left(G\right)$: $\gamma_{ap}\left(G-e\right)>\gamma_{ap}\left(G\right)$.*

Définition 4.1.5 *G est dit $\gamma_{ap}^{-}\left(G\right)$-critique si quelque soit $e\in E\left(G\right)$: $\gamma_{ap}\left(G-e\right)<\gamma_{ap}\left(G\right)$.*

Définition 4.1.6 *G est dit $\gamma_{ap}\left(G\right)$-stable si quelque soit $e\in E\left(G\right)$: $\gamma_{ap}\left(G-e\right)=\gamma_{ap}\left(G\right)$.*

4.1.3 Les graphes $\gamma_{ap}^{+}\left(G\right)$-critiques

Théorème 4.1.4 *Si G est un graphe γ_{ap}^{+}-critique, alors pour tout γ_{ap}-ensemble D et pour tout paire de sommet adjacent*

u,v on a:

1. $u\in D$, $v\in D$: $\left|N\left[u\right]\cap D\right|=\left|N\left[u\right]-D\right|$ ou bien $\left|N\left[v\right]\cap D\right|=\left|N\left[v\right]-D\right|$.
2. $u\in D$, $v\notin D$: $\left|N\left[v\right]\cap D\right|=\left|N\left[v\right]-D\right|$.

Preuve. Soient G est $\gamma_{ap}^{+}\left(G\right)$-critique, D un $\gamma_{ap}\left(G\right)$-ensemble et $e=uv\in E\left(G\right)$. On distingue 2 cas:

Cas 1: $u,v\in D$.

Supposons que $|N[u] \cap D| > |N[u] - D|$ et $|N[v] \cap D| > |N[v] - D|$. Dans ce cas D est une alliance puissante globale de $G - e$. Ceci implique que $\gamma_{ap}(G - e) < \gamma_{ap}(G)$. Contradiction d'où $|N[u] \cap D| = |N[u] - D|$ ou bien $|N[v] \cap D| = |N[v] - D|$.

Cas 2: $u \in D$, $v \notin D$.

Supposons que $|N[v] \cap D| > |N[v] - V - D|$. Dans ce cas D reste une alliance puissante globale de $G - e$. Ceci implique que $\gamma_{ap}(G - e) < \gamma_{ap}(G)$. Contradiction d'où $|N[v] \cap D| = |N[v] - D|$. ■

Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans ce mémoire au problème de la détermination des nombre d'alliances globales, (respectivement, globales fortes) de quelques graphes particuliers. Généralement, la détermination des paramètres d'alliances globales est un problème difficile pour un graphe quelconque.

La démarche scientifique adoptée dans ce mémoire, se résume comme suite.

En premier lieu, nous avons abordé la notion de trois types des alliances.

Nous avons ensuite présenté quelques résultats existants sur les alliances.

Une revue des résultats les plus importants obtenus dans ce domaine a été notre premier objectif.

Ensuite, nous avons déterminé le nombre d'alliance globale et le nombre d'alliance globale forte certains graphes particuliers: à savoir graphe milieu du chaîne et du cycle, graphe total du chaîne et du cycle et graphe roue.

Enfin, on va étudié l'effet de la suppression d'une arête sur les paramètres des alliances globales.

On conclut que la détermination de ces paramètres en général n'est pas facile pour certains types de graphes.

Bibliographie

[1] R.C. Brigham, R.D. Dutton, S.T. Hedetniemi, A sharp lower bound on the powerful alliance number of $C_m \times C_n$, Congr. Numer. 167 (2004)57-63.

[2] R.C. Brigham, R.D. Dutton, T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, Powerful alliances in graphs, Discrete Math. 309 (8) (2009) 2140-2147.

[3] O. Favaron, G. Fricke, W. Goddard, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, P. Kristiansen, R.C. Laskar, R.D. Skaggs, Offensive alliances in graphs, Discuss. Math. Graph Theory 24 (2) (2004) 263-275

[4] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and M. A. Henning, Global defensive alliances in graphs. The electronic J. Combin. 10 (2003) R47.

[5] S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, and P. Kristiansen. Alliances in graphs. Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 48:157–177, 2004. (Cited on pages 3, 87 and 89.)

[6] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, M.A. Henning, Global defensive alliances in graphs, Electron. J. Combin. 10 (1) (2003) R47.

[7] T. Hamada, I. Yoshimura: Traversabilitiy and connectivitiy of the middle graphe of agraph. Discrete Math. 14 : 247-256, 1976.

[8] P. Kristiansen, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, Alliances in graphs, J. Combin. Math. Combin. Comput. 48 (2004) 157-177.

[9] M. Behzad: A criterion for the planarity of the total graph of a graph. Proc.Camb.Philos. Soc. 63 : 679-681,1967.

[10] M. Chellali, Offensive alliances in bipartite graphs, J. Combin. Math. Combin. Comput, to appear.

[11] J. A. Rodriguez-Velazquez, J.M. Sigarreta, On the global offensive alliance number of a graph, Discrete Applied Mathematics, Volume 157 (2006), no.2, 219-226.

[12] J.A. Rodriguez-Velazquez, J.M. Sigarreta, Offensive alliances in cubic graphs, Int. Math. Forum 1 (36) (2006) 1773-1782.

[13] J.A. Rodriguez-Velazquez, J.M. Sigarreta, Offensive alliances in cubic graphs, Int.Math. Forum 1 (2006), 1773–1782.

[14] J.A. Rodriguez-Velazquez, J.M. Sigarreta, Spectral study of alliances in graphs, Discuss. Math. Graph Theory 27 (1) (2007) 143-157

[15] J.A. Rodriguez-Velazquez, J.M. Sigarreta, Global offensive alliances in graphs, Electron. Notes Discrete Math. 25 (2006) 157-164

[16] J.H.Rodriguez et J.M. Sigarreta, Spectral study of alliance in graphs, Discusions Mathematice . Graphe Theory 27(1) (2007) 143-157

[17] J.A. Rodriguez-Velazquez, J.M. Sigarreta, Spectral study of alliances in graphs, Discuss. Math. Graph Theory 27 (1) (2007) 143-157.

[18] J. M. Sigarreta and J. A. Rodrıguez, On the global offensive alliance number of a graph. Submitted.

[19] J.M. Sigarreta, J.A. Rodriguez-Velazquez, On defensive alliances and line graphs, Appl. Math. Lett. 19 (2) (2006) 1345-1350.

[20] J.M. Sigarreta, J.A. Rodriguez-Velazquez, On the global offensive alliance number of a graph, Discrete Appl. Math. 157 (2) (2009) 219-226.

[21] I.G. Yero, J.A. Rodriguez-Velazquez, Defensive alliances in graphs: a survey, arXiv:1308.2096v1 [math.CO] 9 Aug 2013.