Université Yahia Farès – Médéa

Institut des Sciences – Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Par

Dekhli oualid

Théorème de factorisation de Hadamard

Soutenu publiquement le 20 juin 2026 devant le jury composé de

Makdeche noureddine	M A A. Univ. Médéa	**Président**
Haoues BAGUA	M A A. Univ. Médéa	**Encadreur**
Khaled BOUADJILA	M C A. Univ. Médéa	**Examinateur**

Année universitaire : 2025/2026

Remerciements

Je tiens a remercier en premier mon directeur de recherche, Haoues BAGUA, qui m'a accompagne, soutenu et guide durant ma formation. Je le remercie pour ses précieux conseils, sa motivation et ses encouragements. Je lui suis reconnaissant pour tout ce qu'il m'a appris. Mes remerciements s'adressent également aux membres du jury qui ont accepte d'évaluer ce travail et de l'enrichir par leurs précieuses remarques.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail, fruit de longues années d'efforts : A mes chers parents, Pour votre amour inconditionnel, vos prières quotidiennes et vos immenses sacrifices. Que Dieu vous accorde une longue vie et une bonne santé. A mon épouse, Pour ta patience, ton soutien constant et ton affection qui m'ont accompagne a chaque étape de ce parcours. A mes trois chers enfants ; Raghed , Zaid et Yakine les lumières de ma vie, Qui me donnent la force de me surpasser chaque jour. Je vous souhaite un avenir radieux. A ma famille et mes amis proches, Pour votre présence, vos encouragements et votre soutien indéfectible. A vous tous, merci du fond du cœur

Résumé

ملخص

يُثبت فايرشتراس إمكانية تمثيل كل دالة صحيحة (أي دالة هولومورفية على المستوي العقدي بأكمله) بواسطة جداء غير منته. ويُدقّق هادامار هذا التمثيل بالنسبة للدوال ذات الرتبة المنتهية، من خلال ضبط النمو وتقليص تعقيد العامل الأسي.

الكلمات المفتاحية : دالة صحيحة — رتبة دالة صحيحة — جداء غير منته — عامل أسي

Résumé

Weierstrass établit la possibilité de représenter toute fonction entière (c'est-à-dire holomorphe sur tout le plan complexe) par un produit infini. Hadamard précise cette représentation pour les fonctions d'ordre fini en contrôlant la croissance et en réduisant la complexité du facteur exponentiel.

Mots-clés : fonction entière – ordre d'une fonction entière – produit infini – facteur exponentiel

---

Abstract

Weierstrass established the possibility of representing every entire function (i.e., a function holomorphic on the whole complex plane) as an infinite product. Hadamard refined this representation for functions of finite order by controlling their growth and reducing the complexity of the exponential factor.

Keywords : entire function – order of an entire function – infinite product – exponential factor

Table des matières

Notations **5**

Introduction générale 7

1 Fonctions entières et leurs zéros **8**

1.1 Fonctions entières sans zéros 8

1.2 Fonctions entières avec un nombre fini de zéros 13

1.3 Passage au cas infini 15

2 Produits infinis et théorème de Weierstrass **16**

2.1 Théorie des produits infinis numériques 16

2.2 Produits infinis de fonctions et convergence uniforme 21

2.3 Théorème de Weierstrass et facteurs élémentaires 22

3 Exposant de convergence et théorème de Hadamard **26**

3.1 Exposant de convergence d'une suite 26

3.2 Ordre d'une fonction entière 29

3.3 Lemmes préparatoires pour le théorème de Hadamard 30

3.4 Théorème de factorisation de Hadamard 33

Conclusion générale **35**

Bibliographie **36**

Notations

Notation	**Signification**
$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{Z}$	Ensemble des entiers relatifs.
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes.
$D(a,r)$	Disque ouvert de centre a et de rayon r.
$\overline{D(a,r)}$	Disque fermé.
$\lvert z\rvert$	Module du nombre complexe z.
$\arg(z)$	Argument de z.
$\Re(z), \Im(z)$	Parties réelle et imaginaire de z.
$f^{(n)}$	Dérivée d'ordre n.
$M(r,f)$	Maximum du module : $M(r,f) = \max_{\lvert z\rvert=r} \lvert f(z)\rvert.$
$Z(f)$	Ensemble des zéros de la fonction entière f.
m	Ordre du zéro en 0.
(z_n)	Suite des zéros non nuls de f.

Notation	**Signification**
$E_p(z)$	Facteur primaire de Weierstrass $$E_p(z) = (1-z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right).$$
ρ	Ordre de la fonction entière.
λ	Exposant de convergence des zéros.
$n(r)$	Nombre de zéros de module inférieur ou égal à r.
$\prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$	Produit canonique de Weierstrass.
$f(z) = e^{g(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$	Forme générale du théorème de factorisation de Hadamard.

Introduction générale

L'analyse complexe, l'une des branches les plus élégantes des mathématiques, étudie les propriétés des fonctions holomorphes. Parmi ces fonctions, les *fonctions entières* — holomorphes sur tout le plan complexe $\mathbb{C}$ — occupent une place privilégiée par la richesse de leur structure.

Une question naturelle se pose : *une fonction entière est-elle entièrement déterminée par ses zéros ?* La réponse, fournie par les théorèmes de Weierstrass et Hadamard, constitue l'objet central de ce mémoire.

Objectifs :

— Caractériser les fonctions entières selon leur ensemble de zéros (fini, dénombrable ou vide).

— Construire des fonctions entières à partir d'une suite arbitraire de zéros prescrite (Weierstrass).

— Préciser la structure des fonctions entières d'ordre fini via la factorisation de Hadamard.

— Introduire l'exposant de convergence comme lien entre croissance et distribution des zéros.

Organisation du mémoire : Le Chapitre I est consacré au cas des fonctions entières possédant un nombre fini de zéros et établit les fondements théoriques nécessaires à la suite de l'étude. Le Chapitre II développe la théorie des produits infinis et le théorème de Weierstrass. Le Chapitre III introduit l'exposant de convergence, l'ordre d'une fonction entière, et culmine avec le théorème de factorisation de Hadamard.

Chapitre 1

Fonctions entières et leurs zéros

1.1 Fonctions entières sans zéros

Définition 1.1.1. (**Fonction holomorphe**)

Soit U un ensemble ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction.

On dit que f est holomorphe au point $z_0 \in U$ si :

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \alpha = f'(z_0)$$

$f'(z_0)$ est appelée la dérivée complexe de f en z_0.

Si f est holomorphe en tout point de U, on dit que f est holomorphe sur U.

Exemple 1.1.1.

La fonction $f(z) = z^2$ est holomorphe sur tout $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.2. (**Fonction entière**)

Une fonction $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est entière si elle est holomorphe sur l'ensemble du plan complexe $\mathbb{C}$ tout entier.

Exemple 1.1.2.

— $P(z) = \sum_{m=0}^{n} a_m z^m$ est entière.

— $f(z) = e^z$ est entière.

Définition 1.1.3. (**Zéros d'une fonction**)

Un zéro d'une fonction entière (holomorphe sur $\mathbb{C}$) est un point $a \in \mathbb{C}$ tel que $f(a) = 0$.

Exemple 1.1.3.

La fonction exponentielle (e^z) n'a aucun zéro dans le plan complexe.

Exemple 1.1.4.

La fonction $f(z) = z^2 - 1$ admet deux zéros $a_0 = 1$ et $a_1 = -1$.

Définition 1.1.4. (**Multiplicité d'un zéro**)

Soit f une fonction entière telle que $f \not\equiv 0$.

On dit que a est un zéro d'ordre k (où $k \in \mathbb{N}^*$) s'il existe une fonction g holomorphe telle que $g(a) \neq 0$ et :

$$f(z) = (z - a)^k g(z) \tag{1.1.1}$$

Exemple 1.1.5. Soit la fonction $f(z) = (z - 2)^3 e^z$. $a = 2$ est un zéro de f et sa multiplicité est 3.

Théorème 1.1.1. (***Théorème fondamental de l'algèbre***)

Tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Corollaire 1.1.2.

Soit $P(z) = \sum_{m=0}^{n} a_m z^m$ *un polynôme de degré* $n \geq 1$, $a_n \neq 0$. *Alors* P *possède* n *racines complexes et se factorise sous la forme :*

$$P(z) = a_n \prod_{i=1}^{n} (z - \alpha_i)$$

Exemple 1.1.6.

$P(z) = z^2 + 1$ n'a pas de racine réelle, mais il admet deux racines complexes i et $-i$ se factorisant ainsi : $P(z) = (z + i)(z - i)$.

Théorème 1.1.3. ***(Théorème de convergence)*** *[10]*

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur U. Si la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

converge normalement sur tout compact de U, alors le produit infini

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n)$$

converge uniformément sur tout compact vers une fonction holomorphe F.

Si $F \not\equiv 0$, alors les zéros de F sont exactement ceux des facteurs $(1+f_n)$ (avec multiplicités) et, sur $U \setminus Z(F)$,

$$\frac{F'}{F} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'}{1+f_n}.$$

Théorème 1.1.4.

Une fonction entière $f \neq 0$ est sans zéros si et seulement si il existe une fonction entière $g(z)$ telle que :

$$f(z) = e^{g(z)}$$

Preuve : $(\Leftarrow)$ Sens direct :

On suppose qu'il existe une fonction entière $g(z)$ telle que $f(z) = e^{g(z)}$. Puisque la fonction exponentielle ne s'annule jamais ($e^w \neq 0$ pour tout $w \in \mathbb{C}$), alors $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

De plus, la composée de deux fonctions entières est une fonction entière. Donc f est une fonction entière sans zéros.

$(\Rightarrow)$ Sens réciproque :

On suppose que la fonction entière $f(z)$ ne possède aucun zéro sur $\mathbb{C}$. On pose alors :

$$F(z) := \ln f(z)$$

Ce qui implique :

$$F'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

On considère la fonction ψ définie par :

$$\psi(z) = f(z)e^{-F(z)}$$

On dérive la fonction $\psi(z)$ par rapport à z :

$$\begin{aligned}
\psi'(z) &= f'(z)e^{-F(z)} - F'(z) \cdot f(z)e^{-F(z)} \\
&= f'(z)e^{-F(z)} + f(z)\left(-F'(z)e^{-F(z)}\right) \\
&= f'(z)e^{-F(z)} + f(z)\left(-\frac{f'(z)}{f(z)}e^{-F(z)}\right) \\
&= f'(z)e^{-F(z)} - f'(z)e^{-F(z)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Comme la dérivée de la fonction ψ est nulle sur $\mathbb{C}$, alors $\psi(z)$ est constante. Soit C cette constante (où $C \neq 0$ car $f \neq 0$).
On a donc :

$$\psi(z) = C = f(z)e^{-F(z)}$$

D'où :

$$f(z) = Ce^{F(z)}$$

Et comme $C \neq 0$, il existe une constante C_0 telle que $C = e^{C_0}$.
Alors :

$$f(z) = e^{C_0} \cdot e^{F(z)} = e^{C_0 + F(z)}$$

On pose enfin :

$$g(z) = C_0 + F(z)$$

Par conséquent :

$$f(z) = e^{g(z)} \qquad \square$$

Exemple 1.1.7.

Les fonctions suivantes sont entières sans zéros :

— $f(z) = e^{z^2}$ (où $g(z) = z^2$)

— $f(z) = e^{\sin z}$ (où $g(z) = \sin z$)

— $f(z) = e^{z^3+iz}$ (où $g(z) = z^3 + iz$)

1.2 Fonctions entières avec un nombre fini de zéros

Définition 1.2.1. (**Zéro d'ordre** m)

On dit que $z_0 \in \mathbb{C}$ est un zéro d'ordre $m \geq 1$ de f si :

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Exemple 1.2.1.

$f(z) = (z-2)^3 e^z \quad ; \quad z_0 = 2$ est un zéro d'ordre 3.

Théorème 1.2.1. ***(Forme canonique (cas fini))***

Si une fonction entière f possède exactement n zéros $z_1, z_2, \ldots, z_n$ (comptés avec multiplicité), alors il existe une fonction entière $g(z)$ telle que :

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{k=1}^{n} (z - z_k).$$

Preuve : Supposons que $f(z)$ possède un nombre fini de zéros $z_1, z_2, \ldots, z_n$. On définit la fonction polynomiale $\varphi(z)$:

$$\varphi(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - z_k).$$

Considérons la fonction auxiliaire $\Phi(z)$ définie par :

$$\Phi(z) = \frac{f(z)}{\varphi(z)}.$$

La fonction $\Phi(z)$ est holomorphe et sans zéros sur $\mathbb{C}$, car tous les zéros de $f(z)$ ont été annulés par les facteurs $(z - z_k)$. D'après le Théorème 1.1.4, il existe donc une fonction entière $g(z)$ telle que $\Phi(z) = e^{g(z)}$.

En remplaçant $\Phi(z)$ par sa définition :

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = e^{g(z)} \implies f(z) = e^{g(z)} \varphi(z),$$

finalement :

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{k=1}^{n} (z - z_k). \qquad \square$$

Exemple 1.2.2.

Le polynôme $f(z) = z^2 + 1$ admet deux zéros : $z_1 = i$ et $z_2 = -i$.

La forme canonique est :

$$f(z) = e^0(z - i)(z + i) = (z - i)(z + i).$$

Théorème 1.2.2. ***(Théorème de prolongement analytique)***

Soit D un domaine (ouvert connexe) de $\mathbb{C}$ et f, g deux fonctions holomorphes sur D. Si l'ensemble des points $z \in D$ tels que $f(z) = g(z)$ possède un point d'accumulation dans D, alors :

$$f(z) = g(z) \quad \textit{pour tout } z \in D.$$

Corollaire 1.2.3.

Si f est une fonction holomorphe sur un domaine D et si l'ensemble de ses zéros possède un point d'accumulation dans D, alors $f \equiv 0$ sur D.

Théorème 1.2.4. ***(Développement en série de Taylor)***

On a le développement suivant, valable pour $|w| < 1$:

$$-\log(1 - w) = w + \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} + \cdots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{w^j}{j}.$$

1.3 Passage au cas infini

La formule du Théorème 1.2.1 admet une généralisation au cas d'une infinité de zéros, due à Weierstrass et Hadamard. Il sera nécessaire d'introduire des *facteurs de convergence* pour que le produit infini converge : c'est l'objet du Chapitre II.

Chapitre 2

Produits infinis et théorème de Weierstrass

2.1 Théorie des produits infinis numériques

Définition 2.1.1. (**Produit infini convergent**)

Le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} g_n$ est dit *convergent* s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\lim_{k\to\infty} \prod_{n=N}^{k} g_n \neq 0, \infty.$$

Exemple 2.1.1.

Les deux produits infinis

$$P_m = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad , \quad Q_n = \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

sont divergents, car les produits partiels correspondants vérifient :

— Pour le premier produit :

$P_n = \left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

on obtient : $P_n = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n}$

les termes se simplifient successivement, d'où :

$$P_n = n + 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

Donc le produit diverge.

— Pour le second produit :

$Q_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{n-1}{n}$

Après simplification $Q_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

Donc ce produit diverge.

Remarque 2.1.1.

Un produit infini convergent doit avoir une limite finie et non nulle.

Exemple 2.1.2.

Considérons le produit infini suivant :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Puisque la limite est nulle, ce produit infini est divergent.

Théorème 2.1.1. *(**Condition nécessaire de convergence**)*

Si le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} g_n$ converge, alors nécessairement

$$g_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 1.$$

Preuve :

Supposons que $\prod_{n=1}^{\infty} g_n$ soit convergent. Alors :

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=N}^{n} g_k = L = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=N}^{n-1} g_k \quad (L \neq 0, \infty).$$

On écrit :

$$g_n = \frac{\prod_{k=N}^{n} g_k}{\prod_{k=N}^{n-1} g_k},$$

et en passant à la limite :

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \frac{\lim_{n\to\infty} \prod_{k=N}^{n} g_k}{\lim_{n\to\infty} \prod_{k=N}^{n-1} g_k} = \frac{L}{L} = 1. \qquad \square$$

Remarque 2.1.2.

Cette condition nécessaire n'est cependant pas suffisante.

En effet, pour $g_n = \frac{n}{n+1}$ on a $g_n \to 1$, mais

$$\prod_{n=1}^{k} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

donc le produit diverge.

Remarque 2.1.3.

La convergence implique nécessairement $\lim_{n\to\infty} g_n = 1$, ce qui justifie l'écriture $g_n = 1 + v_n$.

Proposition 2.1.2. (**Équivalence Produit / Série**)

Le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} g_n$ converge si et seulement si la série $\sum_{n=N}^{\infty} \log g_n$ converge pour un certain $N \in \mathbb{N}$.

Preuve :

($\Rightarrow$) Supposons que la série $\sum_{n=N}^{\infty} \log g_n$ est convergente.

Alors il existe $C_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\sum_{n=N}^{\infty} \log g_n = C_0$, donc :

$$\exp\left(\sum_{n=N}^{\infty} \log g_n\right) = e^{C_0} = C_1 = \prod_{n=N}^{\infty} g_n,$$

et $\prod_{n=N}^{\infty} g_n = C_1$ est convergent.

($\Leftarrow$) Supposons que le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty} g_n$ soit convergent.

La suite des produits partiels $P_k = \prod_{n=1}^{k} g_n$ converge vers une limite $L \neq 0, \infty$. Pour tout $k \geq N$:

$$\log\left(\prod_{n=N}^{k} g_n\right) = \sum_{n=N}^{k} \log g_n + 2\pi i \mu_k \quad , \quad \mu_k \in \mathbb{Z}.$$

En passant à la limite quand $k \to \infty$, la série $\sum_{n=N}^{\infty} \log g_n$ est convergente. □

Définition 2.1.2. (**Convergence absolue**)

Le produit $\prod_{n=1}^{\infty} g_n$ est *absolument convergent* si la série $\sum_{n=N}^{\infty} |\log g_n|$ converge pour un certain $N \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.1.3.

Le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty}(1+v_n)$ est absolument convergent si et seulement si la série $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$ converge.

Preuve :

Pour $|v_n| \leq \frac{1}{2}$, on a le développement :

$$\log(1+v_n) = v_n - \frac{v_n^2}{2} + \frac{v_n^3}{3} - \frac{v_n^4}{4} + \cdots$$

Majoration :

$$\left|\frac{\log(1+v_n)}{v_n}\right| \leq 1 + \frac{|v_n|}{2} + \frac{|v_n|^2}{3} + \cdots \leq 1 + |v_n| + |v_n|^2 + \cdots \leq \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2,$$

donc $|\log(1+v_n)| \leq 2|v_n|$.

Minoration :

$$\left|\frac{\log(1+v_n)}{v_n}\right| \geq 1 - \left(\frac{|v_n|}{2} + \frac{|v_n|^2}{3} + \cdots\right) \geq 1 - |v_n| \geq \frac{1}{2} \quad (\text{car } |v_n| \leq \tfrac{1}{2}),$$

donc $|\log(1+v_n)| \geq \frac{1}{2}|v_n|$.

Finalement :

$$\frac{1}{2}|v_n| \leq |\log(1+v_n)| \leq 2|v_n|,$$

ce qui établit l'équivalence entre $\sum |v_n| < \infty$ et $\sum |\log(1+v_n)| < \infty$. □

Exemple 2.1.3.

Le produit $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ converge absolument car $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty$.

Exemple 2.1.4.

$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge car $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$.

2.2 Produits infinis de fonctions et convergence uniforme

Définition 2.2.1. (**Convergence uniforme**)

Le produit infini fonctionnel $\prod_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ est *uniformément convergent* sur un ensemble S si la suite des produits partiels $P_k(z) = \prod_{n=N}^{k} g_n(z)$ converge uniformément sur S vers une fonction $h_N(z) \neq 0$ lorsque $k \to \infty$.

Proposition 2.2.1.

Si la série $\sum_{n=N}^{\infty} \log g_n(z)$ converge uniformément sur S, alors le produit $\prod_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ converge uniformément sur S.

Preuve :

Supposons que $\sum_{n=N}^{\infty} \log g_n(z)$ converge uniformément sur S. On définit :

$$h_N(z) := \exp\left(\sum_{n=N}^{\infty} \log g_n(z)\right).$$

Puisque la convergence est uniforme, $h_N(z)$ est bornée sur S : $|h_N(z)| \leq C_0$.

Pour le produit partiel $P_k(z) = \prod_{n=N}^{k} g_n(z)$, on a :

$$|h_N(z) - P_k(z)| = |h_N(z)| \cdot \left|1 - \exp\left(-\sum_{n=k+1}^{\infty} \log g_n(z)\right)\right|.$$

En utilisant l'inégalité $|1 - e^w| \leq C_1|w|$:

$$|h_N(z) - P_k(z)| \leq C \sum_{n=k+1}^{\infty} |\log g_n(z)| \quad ; \quad C = C_0 \cdot C_1 > 0.$$

Puisque $\sum \log g_n(z)$ converge uniformément, le membre de droite tend vers 0 uniformément en z, ce qui établit la convergence uniforme du produit. □

Exemple 2.2.1.

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^2}{n^2}$ converge uniformément sur tout compact, ce qui assure la convergence uniforme du produit $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)$ sur tout compact de $\mathbb{C}$.

2.3 Théorème de Weierstrass et facteurs élémentaires

L'un des problèmes fondamentaux de l'analyse complexe est le suivant :

> Peut-on reconstruire une fonction entière à partir de ses zéros ?

Pour les polynômes, la réponse est immédiate : si $P(z)$ est un polynôme de degré n ayant les racines $z_1, z_2, \ldots, z_n$, alors

$$P(z) = a \prod_{k=1}^{n} (z - z_k).$$

Le théorème de Weierstrass généralise cette propriété aux fonctions entières ayant une infinité de zéros. L'idée fondamentale consiste à remplacer le produit fini des polynômes par un produit infini convenablement corrigé afin d'assurer sa convergence.

Dans cette section nous allons :

— définir les suites ordonnées de zéros ;

— construire les produits canoniques ;

— démontrer le théorème de Weierstrass.

Définition 2.3.1. (**Suite ordonnée des zéros**)

Soit f une fonction entière ayant une infinité de zéros. Comme les zéros d'une fonction holomorphe sont isolés, chaque disque $|z| < R$ ne contient qu'un nombre fini de zéros. On peut numéroter les zéros (avec multiplicités) de façon que

$$0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \cdots \leq |z_n| \leq \cdots, \qquad |z_n| \longrightarrow +\infty.$$

Si 0 est un zéro de multiplicité m, la suite complète s'écrit $0, 0, \ldots, 0, z_1, z_2, \ldots$ La suite ainsi numérotée est appelée la **suite ordonnée des zéros**.

Remarque 2.3.1.

La condition $|z_n| \to \infty$ signifie qu'il n'existe aucun point d'accumulation fini des zéros. Sinon, le théorème de prolongement analytique impliquerait que $f \equiv 0$.

Remarque 2.3.2.

On pourrait essayer de définir une fonction entière par $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$, mais ce produit

diverge généralement (par exemple pour $z_n = n$, car $\sum \frac{1}{|z_n|}$ diverge). Il faut donc modifier les facteurs pour forcer la convergence.

Définition 2.3.2. (**Facteurs canoniques de Weierstrass**)

Pour $p \in \mathbb{N}$, on définit le facteur canonique de Weierstrass :

$$E_0(w) = (1 - w),$$

$$E_p(w) = (1 - w) \exp\left(w + \frac{w^2}{2} + \cdots + \frac{w^p}{p} \right), \quad p \geq 1.$$

Théorème 2.3.1. ***(Weierstrass)***

Pour toute suite de nombres complexes

$$0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \cdots, \qquad |z_n| \to \infty,$$

il existe une fonction entière dont les zéros coïncident exactement avec cette suite.

Preuve :

Supposons que 0 soit un zéro de multiplicité m. On considère le produit

$$\varphi(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{z}{z_n}\right),$$

où E_n désigne le n-ième facteur canonique de Weierstrass. Le but est de montrer que ce produit converge uniformément sur tout compact.

Pour étudier ce produit, on étudie la série associée $\sum \log E_n(z/z_n)$. On écrit :

$$\log E_n\left(\frac{z}{z_n}\right) = \log\left(1 - \frac{z}{z_n}\right) + P_n(z), \quad \text{où } P_n(z) = \frac{z}{z_n} + \frac{z^2}{2z_n^2} + \cdots + \frac{z^n}{nz_n^n}.$$

Fixons un disque $D_R = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < R\}$. Comme $|z_n| \to \infty$, il existe $N = N(R)$ tel que $|z_n| \geq 2R$ pour $n \geq N$, d'où $\left|\frac{z}{z_n}\right| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $z \in D_R$.

On peut donc développer le logarithme en série entière :

$$\log\left(1-\frac{z}{z_n}\right) = -\sum_{j=1}^{\infty}\frac{z^j}{jz_n^j}.$$

En ajoutant $P_n(z)$, les n premiers termes s'annulent :

$$\log\left(1-\frac{z}{z_n}\right) + P_n(z) = -\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{z^j}{jz_n^j}.$$

Pour $z \in D_R$, en utilisant $\left|\frac{z}{z_n}\right| \leq \frac{1}{2}$:

$$\left|\log\left(1-\frac{z}{z_n}\right) + P_n(z)\right| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^j}.$$

Comme $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^j}$ converge, la série converge uniformément sur D_R.
Le produit $\varphi(z)$ converge donc uniformément sur tout compact et, par le théorème de convergence uniforme, φ est entière avec exactement les zéros z_n. □

Corollaire 2.3.2.

Pour toute fonction entière $g(z)$,

$$f(z) = e^{g(z)}z^m\prod_{n=1}^{\infty}E_n\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

est entière et possède exactement les mêmes zéros que le produit canonique.

Théorème 2.3.3. ***(Théorème réciproque)***

Soit f une fonction entière ayant les zéros $0,\ldots,0,z_1,z_2,\ldots$. Alors

$$f(z) = e^{g(z)}z^m\prod_{n=1}^{\infty}E_n\left(\frac{z}{z_n}\right),$$

où $g(z)$ est une fonction entière.

Preuve :

Le produit canonique $\varphi(z) = z^m\prod_{n=1}^{\infty}E_n\left(\frac{z}{z_n}\right)$ est entière et possède les mêmes zéros que

f. Donc $f(z)/\varphi(z)$ est une fonction entière sans zéros, qui s'écrit $e^{g(z)}$ d'après le Théorème 1.1.4. □

Exemple 2.3.1.

Les zéros de $\sin(\pi z)$ sont les entiers relatifs $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. La factorisation de Weierstrass donne :

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Les facteurs exponentiels disparaissent grâce à la symétrie des zéros n et $-n$.

Remarque 2.3.3.

Le théorème de Weierstrass montre que les zéros déterminent essentiellement une fonction entière.

Le théorème de Hadamard, étudié au chapitre suivant, affinera ce résultat en reliant la croissance de la fonction au type exact des facteurs canoniques nécessaires.

Chapitre 3

Exposant de convergence et théorème de Hadamard

L'étude des fonctions entières montre une relation profonde entre la répartition de leurs zéros et leur croissance à l'infini.
Cette relation est décrite par l'exposant de convergence d'une suite de zéros, la notion d'ordre d'une fonction entière et le théorème de factorisation de Hadamard.
Dans ce chapitre, nous présentons ces notions fondamentales ainsi que les résultats qui les relient, en suivant la présentation de Stein et Shakarchi [11].

Rappelons qu'une *fonction entière* est une fonction analytique sur tout le plan complexe $\mathbb{C}$.
La théorie de Weierstrass garantit que toute telle fonction peut être exprimée, à partir de ses zéros, comme un produit infini convergent.
Le théorème de Hadamard précise et enrichit cette factorisation dans le cas des fonctions d'ordre fini.

3.1 Exposant de convergence d'une suite

Définition 3.1.1 ([11])**.**

Soit $\{z_n\}_{n\geq 1}$ une suite de nombres complexes non nuls telle que $|z_n| \longrightarrow +\infty$. L'exposant

de convergence de la suite $\{z_n\}$ est le nombre

$$\tau = \inf\left\{\lambda > 0 \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{\lambda}} \text{ converge}\right\}.$$

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{\lambda}}$ converge pour $\lambda > \tau$ et diverge pour $\lambda < \tau$. Pour $\lambda = \tau$, la convergence ou la divergence peut varier selon la suite considérée.

Exemple 3.1.1.

Pour la suite $z_n = n$, on a la série de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}}$, qui converge si et seulement si $\lambda > 1$. Par conséquent, $\tau = 1$.

Exemple 3.1.2.

Pour la suite $z_n = n^2$, on a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\lambda}}$, qui converge si et seulement si $\lambda > \frac{1}{2}$. Donc $\tau = \frac{1}{2}$.

Exemple 3.1.3.

Pour la suite $z_n = e^n$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\lambda}$ est géométrique et converge pour tout $\lambda > 0$. Ainsi $\tau = 0$.

Proposition 3.1.1 ([11])**.**

Si $n(r) = \#\{n : |z_n| \leq r\}$ désigne le nombre de zéros dans le disque $|z| \leq r$ (comptés avec multiplicité), alors

$$\tau = \limsup_{r \to +\infty} \frac{\log n(r)}{\log r}.$$

Preuve :

Posons $\alpha = \limsup_{r \to +\infty} \frac{\log n(r)}{\log r}$ et supposons $\alpha \neq \infty$.

Montrons que $\alpha \leq \tau$. Soit $\alpha > \tau$. La série $\sum_n |z_n|^{-\alpha}$ converge. Or, pour chaque n tel que $|z_n| \leq r$, on a $|z_n|^{-\alpha} \geq r^{-\alpha}$, donc

$$n(r) \cdot r^{-\alpha} \leq \sum_{|z_n| \leq r} \frac{1}{|z_n|^{\alpha}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{\alpha}} < \infty,$$

d'où $n(r) \leq Cr^{\alpha}$ et $\limsup_{r \to +\infty} \frac{\log n(r)}{\log r} \leq \alpha$. Cela vaut pour tout $\alpha > \tau$, donc $\alpha \leq \tau$.

Montrons que $\alpha \geq \tau$. Supposons τ fini. Pour tout $\varepsilon > 0$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{\tau+\varepsilon}}$ converge, donc

$\frac{n}{|z_n|^{\tau+\varepsilon}} \to 0$. Il existe N tel que pour $n \geq N$, $n \leq |z_n|^{\tau+\varepsilon}$, d'où $\frac{\log n}{\log |z_n|} \leq \tau + \varepsilon$. En passant à la limite supérieure :

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log |z_n|} \leq \tau + \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on obtient $\alpha \leq \tau$, et donc $\alpha = \tau$. $\square$

Cette formule établit un lien direct entre l'exposant de convergence et la distribution asymptotique des termes de la suite.

3.2 Ordre d'une fonction entière

Définition 3.2.1 ([11]).

Soit f une fonction entière. On définit $M(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$. L'*ordre* de f est donné par

$$\rho = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log M(r,f)}{\log r}.$$

Remarque 3.2.1.

On dit que f est d'*ordre fini* si $\rho < +\infty$, et d'ordre infini sinon. La définition est équivalente à dire que ρ est le plus petit réel tel que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$M(r,f) \leq e^{r^{\rho+\varepsilon}}$$

pour r suffisamment grand.

Exemple 3.2.1.

Pour $f(z) = e^z$, on a $M(r) = e^r$, donc $\log\log M(r) = \log r$ et ainsi $\rho = 1$.

Exemple 3.2.2.

Pour $f(z) = e^{z^m}$ avec $m \in \mathbb{N}^*$, on obtient $M(r) = e^{r^m}$, donc $\log\log M(r) = m\log r$ et $\rho = m$.

Exemple 3.2.3.

Pour un polynôme P de degré $d \geq 1$, on a $M(r,P) \sim Cr^d$, donc $\log\log M(r,P) \sim \log\log r \to +\infty$ beaucoup plus lentement que $\log r$. Ainsi $\rho = 0$.

Proposition 3.2.1.

Soient f et g deux fonctions entières d'ordres respectifs ρ_f et ρ_g. Alors :

1. $f+g$ est d'ordre au plus $\max(\rho_f, \rho_g)$,
2. $f \cdot g$ est d'ordre au plus $\max(\rho_f, \rho_g)$,

3.3 Lemmes préparatoires pour le théorème de Hadamard

Nous rassemblons ici quelques lemmes nécessaires à la preuve du théorème de Hadamard, en suivant [11].

Lemme 3.3.1 ([11]).

Les produits canoniques vérifient :

$$|E_p(z)| \geq e^{-c|z|^{p+1}} \quad \textit{si } |z| \leq 1/2,$$

et

$$|E_p(z)| \geq |1-z|\, e^{-c'|z|^p} \quad \textit{si } |z| \geq 1/2.$$

Preuve :

Si $|z| \leq 1/2$, on définit le logarithme de $1-z$ par sa série entière, de sorte que

$$E_p(z) = e^{\log(1-z)+\sum_{n=1}^{p} z^n/n} = e^{-\sum_{n=p+1}^{\infty} z^n/n} = e^w.$$

Comme $|e^w| \geq e^{-|w|}$ et $|w| \leq c|z|^{p+1}$, la première inégalité s'ensuit. Pour la seconde, si $|z| \geq 1/2$:

$$|E_p(z)| = |1-z|\,|e^{z+z^2/2+\cdots+z^p/p}| \geq |1-z|\, e^{-c'|z|^p},$$

pour une constante $c' > 0$ convenable. □

L'élément clé de la preuve du théorème de Hadamard consiste à trouver une borne inférieure pour le produit des facteurs canoniques lorsque z s'éloigne des zéros $\{z_n\}$.

Lemme 3.3.2 ([11]).

Pour tout s vérifiant $\rho_0 < s < p+1$, on a

$$\left| \prod_{n=1}^{\infty} E_p(z/z_n) \right| \geq e^{-c|z|^s},$$

sauf éventuellement lorsque z appartient à la réunion des disques centrés en z_n de rayon $|z_n|^{-p-1}$, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$

Preuve :

On décompose :

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_p(z/z_n) = \prod_{|z_n|\le 2|z|} E_p(z/z_n) \cdot \prod_{|z_n|>2|z|} E_p(z/z_n).$$

Second produit. Par le Lemme 3.3.1 (première partie) et $|z/z_n| \le 1/2$:

$$\left| \prod_{|z_n|>2|z|} E_p(z/z_n) \right| \ge e^{-c|z|^{p+1}\sum_{|z_n|>2|z|}|z_n|^{-p-1}}.$$

Comme $|z_n|^{-p-1} \le C|z_n|^{-s}|z|^{s-p-1}$ et $\sum |z_n|^{-s} < \infty$, on obtient $\left|\prod_{|z_n|>2|z|} E_p(z/z_n)\right| \ge e^{-c|z|^s}$.

Premier produit. Par le Lemme 3.3.1 (seconde partie) :

$$\left| \prod_{|z_n|\le 2|z|} E_p(z/z_n) \right| \ge \prod_{|z_n|\le 2|z|} \left|1 - \frac{z}{z_n}\right| \cdot \prod_{|z_n|\le 2|z|} e^{-c'|z/z_n|^p}. \tag{3.3.1}$$

On a $\prod_{|z_n|\le 2|z|} e^{-c'|z/z_n|^p} \ge e^{-c|z|^s}$ par un calcul analogue.

Pour le terme $\prod |1 - z/z_n|$: lorsque z n'appartient pas au disque de rayon $|z_n|^{-p-1}$ centré en z_n, on a $|z_n - z| \ge |z_n|^{-p-1}$, donc

$$\prod_{|z_n|\le 2|z|} \left|\frac{z_n - z}{z_n}\right| \ge \prod_{|z_n|\le 2|z|} |z_n|^{-p-2}.$$

L'estimation finale découle de :

$$(p+2) \sum_{|z_n|\le 2|z|} \log|z_n| \le (p+2)\, \mathfrak{n}(2|z|) \log 2|z| \le c|z|^s \log 2|z| \le c'|z|^{s'},$$

pour tout $s' > s$, en utilisant $\mathfrak{n}(2|z|) \le c|z|^s$. □

Corollaire 3.3.3 ([11]).

Il existe une suite de rayons $r_1, r_2, \ldots$ avec $r_m \to \infty$, telle que

$$\left| \prod_{n=1}^{\infty} E_p(z/z_n) \right| \ge e^{-c|z|^s} \quad \textit{pour } |z| = r_m.$$

Preuve :

Comme $\sum |z_n|^{-p-1} < \infty$, il existe N tel que $\sum_{n=N}^{\infty} |z_n|^{-p-1} < 1/10$. Pour deux entiers consécutifs suffisamment grands L et $L+1$, on peut trouver $r \in [L, L+1]$ tel que le cercle $|z| = r$ n'intersecte aucun des disques interdits du Lemme 3.3.2. Sinon, la réunion des intervalles

$$I_n = \left[|z_n| - \frac{1}{|z_n|^{p+1}},\ |z_n| + \frac{1}{|z_n|^{p+1}} \right]$$

couvrirait $[L, L+1]$, impliquant $2\sum_{n=N}^{\infty} |z_n|^{-p-1} \geq 1$, une contradiction. □

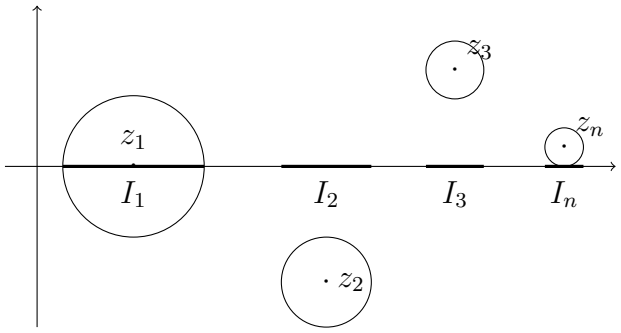


FIGURE 3.1 – Les intervalles $I_n = [|z_n| - |z_n|^{-p-1},\ |z_n| + |z_n|^{-p-1}]$

3.4 Théorème de factorisation de Hadamard

Le théorème de cette section synthétise les résultats reliant la croissance d'une fonction au nombre de zéros qu'elle possède.

Le théorème de Weierstrass affirme qu'une fonction s'annulant aux points $z_1, z_2, \ldots$ est de la forme $e^{g(z)}\, z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_n(z/z_n)$.

Hadamard a affiné ce résultat en montrant que, dans le cas des fonctions d'ordre fini, le degré des facteurs canoniques peut être pris *constant*, et que g est alors un polynôme.

Théorème 3.4.1. *(**Hadamard** [11])*

Supposons que f soit entière et d'ordre de croissance ρ. Soit p l'entier tel que $p \leq \rho < p+1$. Si $z_1, z_2, \ldots$ désignent les zéros non nuls de f, alors

$$f(z) = e^{P(z)}\, z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_p(z/z_n),$$

où P est un polynôme de degré $\leq p$, et m est l'ordre du zéro de f en $z = 0$.

Preuve :

Posons $E(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_p(z/z_n)$. Par le Lemme 3.3.1,

$$|1 - E_p(z/z_n)| \leq c \left|\frac{z}{z_n}\right|^{p+1} \quad \text{pour } n \text{ assez grand,}$$

et $\sum |z_n|^{-p-1}$ converge (car $\rho < p+1$). Donc E est entière (argument identique à celui du théorème de Weierstrass). De plus, E possède les mêmes zéros que f, donc f/E est holomorphe et sans zéros, et l'on peut écrire :

$$\frac{f(z)}{E(z)} = e^{g(z)}$$

pour une certaine fonction entière g. Puisque f est d'ordre ρ et grâce au Corollaire 3.3.3 :

$$e^{\mathrm{Re}(g(z))} = \left|\frac{f(z)}{E(z)}\right| \leq c'\, e^{c|z|^s} \quad \text{pour } |z| = r_m,$$

donc $\mathrm{Re}(g(z)) \leq C|z|^s$ pour $|z| = r_m$.

Il reste à montrer que g est un polynôme, ce qui est l'objet du lemme suivant.

Lemme 3.4.2 ([11]).

Supposons que g soit entière et que $u = \mathrm{Re}(g)$ satisfasse

$$u(z) \leq Cr^s \quad \textit{lorsque } |z| = r,$$

pour une suite de réels positifs r tendant vers l'infini. Alors g est un polynôme de degré $\leq s$.

Preuve du Lemme 3.4.2 :

On développe g en série entière : $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Les formules intégrales de Cauchy donnent :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(re^{i\theta})e^{-in\theta}\,d\theta = \begin{cases} a_n r^n & \text{si } n \geq 0, \\ 0 & \text{si } n < 0. \end{cases} \tag{3.4.1}$$

En conjuguant :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{g(re^{i\theta})}\, e^{-in\theta}\,d\theta = 0 \quad \text{pour tout } n > 0. \tag{3.4.2}$$

En additionnant (3.4.1) et (3.4.2) et en utilisant $2u = g + \bar{g}$:

$$a_n r^n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\, e^{-in\theta}\,d\theta, \quad n > 0.$$

Puisque $\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\,d\theta = 0$ pour $n \neq 0$, on peut écrire :

$$a_n = \frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi} \left[u(re^{i\theta}) - Cr^s\right] e^{-in\theta}\,d\theta,$$

d'où

$$|a_n| \leq \frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi} \left[Cr^s - u(re^{i\theta})\right] d\theta \leq 2Cr^{s-n} - 2\,\mathrm{Re}(a_0)\, r^{-n}.$$

En faisant tendre $r \to \infty$ le long de la suite donnée par l'hypothèse, on obtient $a_n = 0$ pour tout $n > s$. Donc g est un polynôme de degré $\leq s$. □

La preuve du Théorème 3.4.1 est ainsi complète : $g = P$ est un polynôme de degré $\leq p$, et $f(z) = e^{P(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_p(z/z_n)$. □

Conclusion générale

Ce mémoire a parcouru les grandes étapes de la théorie des fonctions entières, en s'appuyant sur un fil conducteur unique : la relation entre une fonction entière et l'ensemble de ses zéros.

Le Chapitre I a montré que les fonctions entières sans zéros se réduisent aux exponentielles $e^{g(z)}$, et que le cas d'un nombre fini de zéros se traite par un produit fini de facteurs linéaires.

Le Chapitre II a bâti la théorie des produits infinis nécessaire pour passer au cas d'une infinité de zéros. Le théorème de Weierstrass garantit l'existence d'une fonction entière pour toute suite de zéros prescrite, au prix de l'introduction de facteurs élémentaires de convergence.

Le Chapitre III a affiné ce résultat : l'exposant de convergence τ mesure la densité des zéros, et le théorème de Hadamard précise que, pour les fonctions d'ordre fini ρ, la partie exponentielle $e^{g(z)}$ est nécessairement de la forme $e^{\text{polynôme de degré}\leq\rho}$. Cela constitue une classification remarquable des fonctions entières par leur croissance.

Perspectives : Les résultats de ce mémoire ouvrent la voie à l'étude des *fonctions méromorphes* (quotients de fonctions entières), du *grand théorème de Picard* (une fonction entière non polynomiale prend toute valeur complexe, sauf au plus une, une infinité de fois), et de la théorie de Nevanlinna sur la valeur des fonctions méromorphes.

Bibliographie

Bibliographie

[1] L. Ahlfors, *Complex Analysis*, 3^{e} éd., McGraw-Hill, 1979.

[2] J.B. Conway, *Functions of One Complex Variable*, 2^{e} éd., Vol. I, Springer-Verlag, New York, 1995.

[3] S. Lang, *Complex Analysis*, 4^{e} éd., Springer, 1999.

[4] B. Ya. Levin, *Lectures on Entire Functions*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 150, AMS, 1996.

[5] Markushevich, A. I., *Theory of Functions of a Complex Variable*, (Prentice-Hall, 1965). [Three volumes.]

[6] Marsden & Hoffman, *Basic Complex Analysis*. (Freeman, 1973).

[7] Needham, T., *Visual Complex Analysis.* (Oxford, 1997). http ://usf.usfca.edu/vca/

[8] R. Remmert, *Classical Topics in Complex Function Theory*, Springer, 1998.

[9] Remmert, R., *Theory of Complex Functions.* (Springer, 1990).

[10] Rudin, W., *Real and Complex Analysis.* (McGraw-Hill, 1966).

[11] E. M. Stein and R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 2003.

[12] Titchmarsh, E. C., *The Theory of Functions.* (Oxford, 1932).