République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministére de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Yahia Fares de Médéa
Faculté des Sciences
Département des Mathématiques et de L'informatique

MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Recherche Opérationnelle

par

YAGOUB MANEL

ZIREK AICHA

Méthodes numériques du contrôle optimal linéaire

Soutenu publiquement le 17 Juin 2023 devant le jury composé de

Président: Mekdache Nourddine	*M.A.A*	Université Médéa
Examinateur: Bibi Hamza	*M.C.B*	Université de Médéa
Encadreur: Aliane Mohamed	*M.C.B*	Université de Médéa

ANNÉE UNIVERSITAIRE: 2022-2023

Résumé

En théorie du contrôle numérique on distingue deux types de méthodes numériques en contrôle optimal, les méthodes indirectes et les méthodes directes. Dans ce travail, on s'intéressera présenter le problème de contrôle optimal linéaire sous forme d'un problème d'optimisation et développer des algorithmes de la résolution numérique directes basés sur les méthodes de points intérieurs.

Dans le but de comparer les résultats obtenus pour les problèmes étudiés avec différentes méthodes numériques, nous allons développer une implémentation avec le langage de programmation MATLAB, puis on effectuera des simulations numériques.

Abstract

In numerical control theory, there are two types of numerical methods in optimal control, indirect methods and direct methods. In this work, we will be interested in presenting the linear optimal control problem in the form of an optimization problem and developing direct numerical resolution algorithms based on interior point methods.
In order to compare the results obtained for the problems studied with different numerical methods, we will develop an implementation with the MATLAB programming language, then we will perform numerical simulations.

Remerciements

Nous remercions d'abord et avant tout, le bon Dieu qui nous a donné le courage et la patience pour réaliser ce travail.

Nous exprimons nos sincères remerciements à notre promoteur Dr. Aliane Mohamed, pour l'aide qu'il nous a apporté, pour sa patience et son encouragement tout au long de la réalisation de ce travail. Je remercie également **M. Nourddine Mekdache**, M.A.A à l'université Dr. YAHIA FARES de Médéa, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie également Monsieur **Bibi Hamza**, M.C.B à l'université Dr. YAHIA FARES de Médéa, pour avoir accepté juger m'a travail.

Enfin, les mots les plus simples étant les plus forts, nous adressons nos remerciements à tous nos amis qui nous ont aidé de près ou de loin.

Merci à tous

Dédicaces

je dédie ce travail :

à mes parents mon père ameur et ma très chére mère qui représente pour moi la source de tendresse et l'exemple du dévouement et qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi.

à mes soeur yasmin et rihab leurs soutien et leurs encouragement.

à mes très chers frères abdelghani, abdelraoeuf et younes .

"Manel"

je dédie ce travail :

à mes parents mon père et ma mère

à ma soeur fola et mes très chers frères ayoub, ishak , hamza ,bilal et abobaker .

"Aicha"

Merci à tous

Table des matières

Introduction **1**

1 Systèmes équations différentielles linéaires **2**

1.1 Problème de Cauchy 3

1.1.1 Traitement d'une équation différentielle d'ordre n 3

1.1.2 Équations différentielles à coefficients constants: 4

1.2 Solution analytique d'un système d'équations différentielles linéaires 5

1.2.1 Équation différentielle linéaire d'un première ordre 5

1.2.2 Système d'équations différentielles ordinaire linéaire 6

1.3 Méthodes numériques 9

1.3.1 Méthodes explicites (Euler, Rung-Kutta,...) 9

1.3.2 Méthodes implicites(Adams -Moulton,...) 12

1.3.3 Exemple 13

2 Contrôl optimal linéaire **14**

2.1 Introduction 14

2.2 Théorie du contrôle 15

2.3 Contrôle optimal 15

2.4 Contrôlabilité 16

2.4.1 Contrôlabilité des systèmes linéaires 16

2.5 Méthodes de résolution 18

2.5.1 Méthodes directes 19

2.5.2 Méthodes indirectes 20

2.6 Comparaison des méthodes 23

3 Application numérique **25**

3.0.1 Résolution analytique 26

3.0.2 Résolution numérique par la méthode de tir 32

3.0.3 Résolution numérique par la méthode de discrétisation d'Euler 34

3.0.4 Comparaison numérique 36

3.1 Conclusion 37

Liste des Figures

1.3.1 Comparaison entre la valeur exacte et celle obtenue par la méthode de discrétisation d'Euler pour la taille de pas $h = 0.001$ 13

2.5.1 Schéma de classification des méthodes numériques du contrôle optimal 19

3.0.1 Graphes de $t \longmapsto u(t)$ et $t \longmapsto p_w(t)$ 31
3.0.2 Trajectoires optimales $t \longmapsto h(t)$, $t \longmapsto v(t)$ et $t \longmapsto w(t)$ 32
3.0.3 Résultats de la méthode de tir 34
3.0.4 Comparaison numérique $N \longmapsto v(T)$. 36

Introduction

La méthode numérique du contrôle optimal linéaire est une approche mathématique qui permet de résoudre des problèmes de commande en considérant des systèmes linéaires, c'est-à-dire des systèmes dont les équations sont linéaires en les variables d'état et de commande. Cette méthode est particulièrement utile dans des domaines en minimisant une fonctionnelle de coût linéaire. Ce type de problème se rencontre fréquemment en ingénierie et en économie, dans le cadre de la conception de systèmes de commande automatique ou de la gestion de portefeuilles. La méthode numérique du contrôle optimal linéaire repose sur la résolution d'équations différentielles qui régissent l'évolution du système, ainsi que sur l'utilisation d'algorithmes d'optimisation pour minimiser la fonctionnelle de coût associée au problème. Cette approche permet de trouver des solutions efficaces et précises pour de nombreux problèmes de contrôle optimal linéaire, et elle est largement utilisée dans de nombreux domaines de l'industrie et de la recherche.

Ce mémoire est divisée en trois chapitre, et on a aussi un résume et introduction, le premier chapitre si le Systèmes équations différentielles linéaires ce chapitre est divisée en quatre section:introduction de le Systèmes équations différentielles linéaires, le Problème de Cauchy, Solution analytique d'un système d'équations différentielles linéaires et les Méthodes numériques (Méthodes explicites (Euler, Rung-Kutta,...)et Méthodes implicites(Adams - Moulton,...).Le deuxième chapitre nous considérons la Contrôl optimal linéaire ce chapitre est divisée en six section:introduction, Théorie du contrôle, Contrôle optimal, Contrôlabilité, Méthodes de résolution et Comparaison des méthodes. Le dernière chapitre la application numérique divisée a quatre sections:introduction, Présentation et modélisation du problème, Résolution du problème de la vitesse maximale d'une fusée et Conclusion.

Chapitre 1

Systèmes équations différentielles linéaires

Les équations différentielles ordinaires jouent un rôle important dans l'étude des applications dans le domaine de la physique, chimie et l'économie, $\cdots$ etc. Elles interviennent également pour la détermination de systèmes gouvernés par des équations différentielles ordinaires. Cependant, la résolution analytique des équations différentielles ordinaires n'est pas toujours possible. Depuis de nombreuses années on assiste à l'explosion de l'utilisation de méthodes numériques pour la résolution d'équations et de systèmes différentielles ordinaires. Il est à noter que ces méthodes numériques bien qu'efficaces lorsque les méthodes analytiques sont défaillantes, permettent toutefois d'obtenir des solutions approchées. On est donc amener à déterminer une majoration d'erreur entre la solution approchée et la solution exacte . Une équation différentielle(EDO)d'ordre n est une équation qui dépend d'une variable t et d'une fonction $x(t)$ et qui contient ses dérivées. Elle s'écrit sous la forme suivante:

$$\begin{cases} F(t, x(t), x^1(t), \cdots, x^n(t)) = 0, \text{ ou } x^n(t) = \frac{d^n(x)}{dt^n} \\ x(t_0) = x_0, \text{ et } t \in [t_0, T]. \end{cases} \tag{1.0.1}$$

L'ordre de cette équation est déterminé par sa dérivée d'ordre le plus élevé. Donc l'équation (1.0.1) est d'ordre n,

et (EDO)d'ordre n est linéaire si elle est de la forme:

$$a_0(t)x(t) + a_1(t)x^{'}(t) + \cdots + a_n(t)x^n(t) = b(t) \tag{1.0.2}$$

ou $a_0(t), \cdots, a_n(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions différentiables, et $x^{'}(t), \cdots, x^n(t)$ sont les dérivées successives d'un fonction inconnue $x(t)$.

1.1 Problème de Cauchy

Ce problème se formule de la manière suivante:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \forall t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

où $f : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \; x(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix} \tag{1.1.2}$$

Pour la plupart des problèmes qui intéressent les scientifiques et les ingénieurs, des théorèmes mathématiques assurent l'existence et l'unicité d'une solution au problème de Cauchy. Néanmoins, souvent la solution ne peut être exprimée analytiquement. Pour de tels problèmes, on doit donc chercher à déterminer la solution approchée de $x(t)$ par des méthodes numériques.

1.1.1 Traitement d'une équation différentielle d'ordre n

Dans cette section, nous ne regarderons que la transformation d'une équation différentielle d'ordre n, en problème de Cauchy. Considérons donc une équation différentielle d'ordre n de la forme suivante :

$$x^{(n)}(t) = \frac{dx^{(n-1)}}{dt} = \varphi(t, x(t), x^1(t), \cdots, x^{(n-1)}(t)), \forall t \in [t_0, T]. \tag{1.1.3}$$

Posons de nouvelles fonctions $x_i(t)$avec $i \in [1, 2, \cdots, n]$ définies telles que:

$$x_1(t) = x(t), x_2(t) = x_1(t), \cdots, x_n(t) = x_{(n-1)}(t). \tag{1.1.4}$$

Grâce à ces définitions, l'équation (1.1.3) d'ordre n s'écrit comme un système de n équations d'ordre 1:

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x^{(2)}(t) \\ \vdots \\ \frac{dx_{n-1}(t)}{dt} = x^{(n)}(t) \\ \frac{dx_n(t)}{dt} = \varphi(t, x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)), \end{cases} \tag{1.1.5}$$

Ce système a donc la forme d'un problème de Cauchy en posant :

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad et, f(t, x(t)) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \\ \varphi(t, x_1, \cdots, x_n) \end{bmatrix}. \tag{1.1.6}$$

L'équation (1.1.3) s'écrira alors :

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \forall t \in [t_0, T]. \tag{1.1.7}$$

1.1.2 Équations différentielles à coefficients constants:

En particulier, les équations différentielles à coefficients constants constituent une classe d'équations de la forme de d'équations (1.1.3). Notamment quand φ est de la forme:

$$\varphi(t, x(t), x^{(1)}(t), \cdots, x^{(n-1)}(t)) = b(t) - a_1 x(t) - a_2 x^{(1)}(t) - \cdots - anx^{(n-1)}(t). \tag{1.1.8}$$

l'équation (1.1.3). peut s'écrire comme une équation différentielle à coefficients constants :

$$a_1 x(t) + a_2 x^{(1)}(t) + \cdots + a_n x^{(n-1)}(t) + x^n(t) = b(t), \tag{1.1.9}$$

où la fonction $b(t)$ est communément appelée un terme source. Pour des équations de la forme de l'équation (1.1.9), les substitutions de l'équation (1.1.4) amènent à un système

d'équations de forme matricielle. Par exemple, une équation à coefficients constants d'ordre 4 s'écrit :

$$a_1x(t) + a_2x^{(1)}(t) + a_3x^{(2)}(t) + a_4x^{(3)}(t) + x^4(t) = b(t). \tag{1.1.10}$$

Après les substitutions de l'équation(1.1.3),cette équation s'écrit :

$$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) + a_3x_3(t) + a_4x_4(t) + \frac{d}{dx}x_4(t) = b(t). \tag{1.1.11}$$

et l'équation (1.1.7) peut s'écrire sous une forme matricielle :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}. \tag{1.1.12}$$

Même s'il est intéressant de voir ce type de problème comme une équation matricielle, nous ne devons pas oublier que la formulation de l'équation (1.1.7)nous permet de traiter bien des problèmes qui ne prennent pas la forme d'une équation matricielle.

1.2 Solution analytique d'un système d'équations différentielles linéaires

1.2.1 Équation différentielle linéaire d'un première ordre

On appelle équation différentielle ordinaire linéaire (EDOL) du premier ordre toute équation de la forme:

$(E) : a(t)x' + b(t)x = f(t)$.

où x est une fonction réelle inconnue a, b et f sont des fonctions réelles connues.

Les fonctions a et b sont appelées coefficients de l'EDO et la fonction f second membre de l'EDO.

1.2.2 Système d'équations différentielles ordinaire linéaire

Définition 1.2.1 *Soit A est une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et* $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ *, un vecteur de classe C^k sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ Le système linéaire d'ordre 1 à coefficients constants et sans second membre est $X^{'}(t) = AX(t)$.*

Résoudre ce système, c'est trouver tous les vecteurs $x(t)$ qui le vérifient On ne traite que les systèmes à coefficients constants, c'est à dire où A ne dépend pas de t.

1 Cas où A est diagonalisable

Théorème 1: Soit A est une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}(\mathbb{R}ou\mathbb{C})$ estdiagonalisable. on note $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ les valeurs propres et $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ une base de vecteurs propres associés.alors,l'ensemble des solution de $x^{'}(t) = Ax(t)$, sur I un intervalle quelconque,est un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension n, et

$x(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} u_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} u_2 + \cdots + \alpha_n e^{\lambda_n t} u_n$, c'est de plus, on fixe la condition initiale $(x(0) = x_0)$.

Exemple : On va résoudre le système différentiel : $\begin{cases} x_1^{'} = x_1 + x_2 \\ x_2^{'} = -x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_3^{'} = x_1 + x_3, \end{cases}$

C'est un système différentiel linéaire du premier ordre sans second membre.

Sa matrice est :A $= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

et son polynôme caractéristique est :$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$

$P_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda) + 1 + (1-\lambda) = (2-\lambda)((1-\lambda)^2 + 1)$.

On a donc trois valeurs propres distinctes $2, 1+i$ et $1-i$. Par nécessité, on travaille pour le moment sur $\mathbb{C}$.

Les vecteurs propres suivants : $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}i\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-i\\-1\\1\end{pmatrix}$ forment, dans l'ordre des valeurs propres, une base de chaque sous-espace propre.

Sur $\mathbb{C}$,les solutions sont donc : $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ $= \alpha e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $+\beta(e^{(1+i)t}\begin{pmatrix}i\\-1\\1\end{pmatrix}$ $+\gamma e^{(1-i)t}\begin{pmatrix}-i\\-1\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \alpha e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \beta e^{t}\begin{pmatrix}-\sin t + i\cos t\\-\cos t - i\sin t\\\cos t + i\sin t\end{pmatrix} + \gamma e^{t}\begin{pmatrix}-\sin t - i\cos t\\-\cos t + i\sin t\\\cos t - i\sin t\end{pmatrix}$$

ce qui fait que sur R,les solutions sont : $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ $= \alpha e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $+ \beta e^{t}\begin{pmatrix}-\sin t\\-\cos t\\\cos t\end{pmatrix}$ $+$

$\gamma e^{t}\begin{pmatrix}\cos t\\-\sin t\\sint\end{pmatrix}$.

3 Cas ou Aest triangularisable, non diagonalisable

Dans le cas ou A est triangularisable, non diagonalisable, on considère P de passage telle que $T = P^{-1}AP$ avec T triangulaire supérieure.

L'énoncé du problème doit vous guider pour trouver $TetP$. On pose : $y(t) = Px(t)$,on obtient $y^{'}(t) = Px^{'}(t)$, car P est constant. On reporte dans le système différentiel et on obtient : $x^{'}(t) = Tx(t)$. Travaillons maintenant sur un exemple pour plus de clarté, en considérant au départ directement la matrice triangulaire T : $\begin{pmatrix}x_1^{'}\\x_2^{'}\\x_3^{'}\end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

Ce qui donne : $\begin{cases}x_1^{'} = 2x_1\\x_2^{'} = 3x_2 + x_3\\x_3^{'} = 3x_3,\end{cases}$

On résout en partant de la dernière équation, et en remontant équation par équation, puis $y = Px$ permet de conclure. Remarquons que le calcul de P^{-1} est toujours inutile.

4 Cas d'un système avec second membre

Remarquons qu'il suffit de trouver une solution particulière qu'on ajoute à la solution générale du système sans second membre, puisque le problème est linéaire. Ce qu'on fait maintenant n'a donc d'intérêt que si on ne connait pas de solution particulière au système...

On a ici :$y' = Ay(t) + B(t)$ avec: $B(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ des fonction continues sur I.

A est à coefficients constants, diagonalisable. On utilise les mêmes notations que ci-dessus, avec P la matrice de passage et D la matrice diagonale et $y = Px$. Ce qui donne:

$y' = Ay + B.$

$Px' = APx + B.$

$P' = P^{-1}APx + P^{-1}B = Dx + P^{-1}B.$

On note :$P^{-1}B(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix}$

Le système devient :

$$\begin{cases} x_1' = \lambda_1 x_1 + c_1(t) \\ x_2' = \lambda x_2 + c_2(t) \\ \vdots \\ x_n' = \lambda_n x_n + c_n(t) \end{cases} \tag{1.2.1}$$

On cherche une solution particulière de chaque équation et $y = Px$ permet de conclure. Remarquons qu'on a ici besoin de P^{-1} pour calculer $P^{-1}B$. En fait, on peut souvent faire plus rapide, et sans calcul de P^{-1} quand la dimension est petite et le vecteur second membre assez simple, comme un polynôme par une exponentielle. Il suffit, pour chaque variable, de chercher une solution particulière correspondant à un second membre combinaison linéaire de toutes les composantes du vecteur second membre. Dans le cas d'un polynôme par une exponentielle, les racines de l'équation caractéristique du cours de Sup sont remplacées par les valeurs propres. Enfin, on ne tient compte des conditions initiales que lorsqu'on a la solution générale du système avec second membre.

1.3 Méthodes numériques

Les méthodes numériques est une branche des mathématiques appliquées s'intéresse au développement d'outils et des méthodes numériques pour le calcul d'approximations des solutions des problèmes mathématique qu'il serait difficile, voire impossible, d'obtenir par des moyens analytiques, Son objectif est notamment d'introduire des procédures calculatoires détaillées susceptibles d'être mises en-ouvre par des calculateurs (électroniques, mécaniques ou humains) et d'analyser leurs caractéristiques et leurs performances.

1.3.1 Méthodes explicites (Euler, Rung-Kutta,...)

a) Méthode d'Euler explicite

Né à Bâle le 15 avril 1707, Leonhard Euler étudia les mathématiques sur les conseils de Johann Bernoulli, qui était ami avec son père. Il s'installa à Saint-Petersbourg, après de Pierre le grand, puis à Berlin sous le règne de Frédéric où a chaque fois il rencontra un environnement scientifique exceptionnel . Son oeuvre est considérable.

La méthode d'Euler explicite est de loin la méthode la plus simple de résolution numérique d'équations différentielles ordinaires. Elle possède une belle interprétation géométrique et son emploi est facile. Toutefois, elle est relativement peu utilisée en raison de sa faible précision. On la qualifie d'explicite car elle ne nécessite pas de résolution d'équation non linéaire contrairement à la méthode d' Euler dite implicite.

Reprenons l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \forall t \in [t_0, T] \\ x(t_0) = x_0, t_0 \in [0, T]. \end{cases} \tag{1.3.1}$$

et considérons plus attentivement la condition initiale $x(t_0) = x_0$. Le but est maintenant d'obtenir une approximation de la solution en $t = t_1 = t_0 + h$. Avant d'effectuer la première itération, il faut déterminer dans quelle direction on doit avancer à partir de point (t_0, x_0), pour obtenir le point (t_1, x_1) , qui est une approximation de point $(t_1, x(t_1))$. Nous n'avons pas l'équation de la courbe $y(t)$, mais nous en connaissons la pente $x^{'}(t)$ en $t = t_0$. En effet, l'équation différentielle assure que : $x^{'}(t_0) = f(t_0, x(t_0) = f(t_0, x_0)$.

On peut donc suivre la droite passant par (t_0, x_0), et de pente $f(t_0, x_0)$. L'équation de cette droite , notée $d_0(t)$, est : $d_0(t) = x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0)$.

Remarque 1 *Le développement qui précède met en évidence une propriété importante des méthodes numériques de résolution des équations différentielles. En effet, l'erreur introduite à la première itération a des répercussions sur les calculs de la deuxième itération, ce qui signifie que les erreurs se propagent d'une itération à l'autre. Il en résulte de façon générale, que l'erreur :* $|x(t_n) - x_n|$.

Définition 1.3.1 *une méthode de résolution d'équations différentielles est dite à un pas si elle est de la forme :*

$$x_{n+1} = x_n + h\Phi(t_n, x_n), \tag{1.3.2}$$

Où Φ *est une fonction quelconque. Une telle relation est appelée équation aux différence. La méthode est à un pas si, pour obtenir la solution en* $t = t_{n+1}$*, on doit utiliser la solution numérique au temps* t_n *seulement. On désigne méthodes à pas multiples les méthodes qui exigent également la solution numérique et aux temps* $t_{n-1}, t_{n-2}, t_{n-3}, \cdots\cdots$

La méthode d'Euler explicite est bien sur une méthode à un pas où $\Phi(t, x) = f(t, x)$. Dans cette section l'attention est principalement portée sur les méthodes à un pas. Nous pouvons maintenant définir l'ordre de convergence de ces méthodes.

Définition 1.3.2 *On dira qu'un schéma à un pas converge à l'ordre p si :*

$$\max_{1 \leq n \leq N} (x(t_n - x_n) = O(h^p). \tag{1.3.3}$$

L'ordre de convergence d'une méthode à un pas dépend de l'erreur commise à chaque pas de temps via l'erreur de troncature locale que nous allons maintenant défini

Définition 1.3.3 *L'erreur de troncature locale au point est définie par :*

$$T_{n+1}(h) = (x(t_{n+1)} - x(t_n))/(h) - (\Phi(t_n, x(t_n))). \tag{1.3.4}$$

L'erreur de troncature locale mesure la précision avec laquelle la solution analytique vérifie l'équation aux différentielle (1.2.2)

b) La méthode de Runge Kutta

Principe général de la méthode

On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \forall t \in [0, T] \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{1.3.5}$$

L'idée est de calculer par récurrence les points (t_n, x_n) en utilisant des points intermédiaires $(t_{n,i}, x_{n,i})$ avec :

$t_{n,i} = t_n + c_i h_n, 1 \leq i \leq q, c_i \epsilon [0, 1]$.

A chacun de ces points, on associe la pente correspondante :

$p_{n,i} = f(t_{n,i}, x_{n,i})$.

Soit y une solution exacte de l'équation, on a :

$x(t_{n,i}) = x(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n,i}} f(t, x(t))dt = x(t_n) + h_n \int_0^{c_i} f(t_n + uh_n, x(t_n + uh_n))du$,

Ceci grâce au changement de variable $t = t_n uh_n$.

De même $x(t_{n+1}) = x(t_n) + h_n \int_0^1 f(t_n + uh_n, x(t_n + uh_n))du$.

En appliquant ces méthodes à $g(u) = f(t_n + uh_n, x(t_n + uh_n))du$.

$x(t_{n,i}) \simeq x(t_n) + h_n \sum_{1 \leq j \leq i} a_{ij} f(t_{n,j}, x(t_{n,j}))$,.

$x(t_{n+1} \simeq x(t_n) + h_n \sum_{1 \leq j \leq q} b_j f(t_{n,j}, x(t_{n,j}))$,

La méthode de Runge -Kutta correspondante est définie par l'algorithme [8] :

$$\begin{cases} t_{n,i} = t_n + c_i h_n, \\ x_{n,i} = x_n + h_n \sum a_{ij} p_{n,j}, 1 \leqslant i \leqslant q, \\ p_{n,i} = f(t_{n,i}, x_{n,i}). \end{cases} \tag{1.3.6}$$

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h_n, \\ x_{n+1} = x_n + \sum_{1 \leq j \leq q} b_j p_{n,j}. \end{cases} \tag{1.3.7}$$

Méthodes de Runge-Kutta d'ordre 4

La méthode explicite la plus utilisée est donnée par le tableau de Buchler suivant

0	0	0	0	0
1/2	1/2	0	0	0
1/2	0	1/2	0	0
1	0	0	1	0
	1/6	2/6	2/6	1/6

.

Ce qui donne le schéma explicite de Runge-Kutta d'ordre 4 :

$$\begin{cases} k_1^{[n]} &= f(t^n, x^{[n]}) \\ k_2^{[n]} &= f(t^n + \frac{h}{2}, x^{[n]} + \frac{h}{2}k_1^{[n]}) \\ k_3^{[n]} &= f(t^n + \frac{h}{2}, x^{[n]} + \frac{h}{2}k_2^{[n]}) \\ k_4^{[n]} &= f(t^n + h, x^{[n]} + hk_3^{[n]}) \\ x^{[n+1]} &= x^{[n]} + \frac{h}{6}(k_1^{[n]} + 2k_2^{[n]} + 2k_3^{[n]} + k_4^{[n]} \end{cases} \tag{1.3.8}$$

1.3.2 Méthodes implicites(Adams -Moulton,...)

On note en abrégé $f^{(n)} = f(t^{(n)}, x^{(n)})$. Voici trois schémas :

- schéma d'Adams-Moulton d'ordre 2 à 1 pas :

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} + \frac{h}{2}(f^{(n+1} + f^{(n)}). \tag{1.3.9}$$

- schéma d'Adams-Moulton d'ordre 3 à 2 pas :

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} + \frac{h}{12}(5f^{(n+1} + 8f^{(n)} - f^{(n-1)}). \tag{1.3.10}$$

- schéma d'Adams-Moulton d'ordre 4 à 3 pas :

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} + \frac{h}{21}(9f^{(n+1} + 19f^{(n)} - 5f^{(n-1)} + f^{(n-2)}). \tag{1.3.11}$$

Ces schémas sont implicites et leur ordre correspond au nombre de pas plus un .

1.3.3 Exemple

On considère le problème de valeur initiale linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1(t) + x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t) + 1, \\ x_1(0) = x_2(0) = 0, t \in [0, 0.4]. \end{cases} \tag{1.3.12}$$

Écrivons le problème de valeur initiale linéaire (1.3.12) sous forme matricielle:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B, \\ x(0) = x_0, t \in [0, 0.4]. \end{cases} \tag{1.3.13}$$

où

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La solution exacte de ce problème est

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{2}e^{2t} - e^t + \frac{1}{2}, \\ x_2(t) = e^t - 1, t \in [0, 0.4]. \end{cases} \tag{1.3.14}$$

Nous résolvons l'équation ci-dessus avec la condition initiale, en appliquant la technique d'Euler:

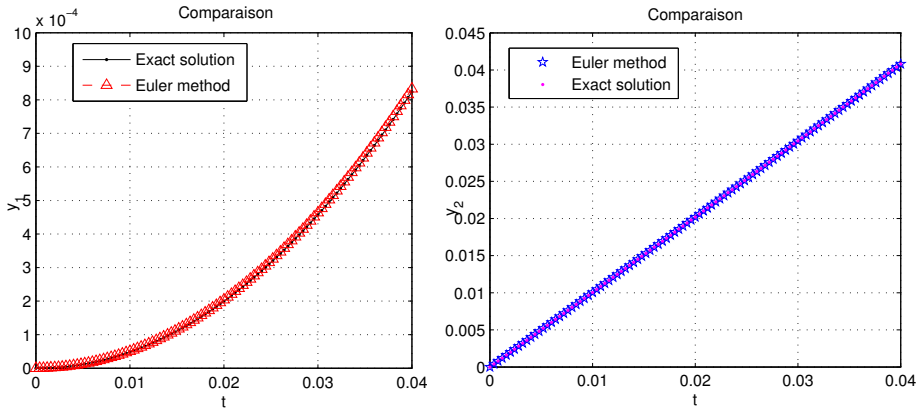


Figure 1.3.1 : Comparaison entre la valeur exacte et celle obtenue par la méthode de discrétisation d'Euler pour la taille de pas $h = 0.001$

Chapitre 2

Contrôl optimal linéaire

2.1 Introduction

Commander un système ou encore exercer une action sur un système pour influencer sur son évolution (en temps ou en espace) de façon à lui faire quelque chose de manière optimale, c'est l'objectif de ce qu'on appelle Contrôle Optimal. Ce n'est que dans la deuxième moitié du XX^e siècle que les ingénieurs, automaticiens et mathématiciens, motivés par les demandes issues des applications, ont été conduits à poser des fondations modernes de ce volet dit " Théorie du contrôle optimal". Cette théorie apparaît et joue un rôle crucial dans plusieurs domaines d'application (automatique, physique,mécanique, biomathématique, économie, aérospacial,...)[4].

Ce chapitre est consacré à la présentation des concepts de base de la théorie du contrôle optimal. Il s'organise en sept parties : Après avoir donné dans la première et la seconde partie, un bref aperçu sur la théorie du contrôle et le contrôle optimal, la troisième partie comporte des rappels de la contrôlabilité des systèmes linéaires. La quatrième partie, dévolue aux différentes méthodes de résolution d'un problème de contrôle optimal, à savoir les méthodes directes et les méthodes indirectes. Dans la cinquième partie, nous avons présenté l'énoncé général du principe du maximum de Pontryagin. Dans la sixième partie, nous avons illustre les résultats des sections précédentes dans un exemple pratique. Nous avons donne une introduction du principe du maximum de Pontryagin par l'approche variationnelle dans la septième partie[5].

2.2 Théorie du contrôle

La formulation d'un problème de contrôle optimal exige une description mathématique du processus 'a contrôler, une proclamation des contraintes physiques et la détermination du critère de performance. Après modélisation, on obtient un système comportant beaucoups de variables et de paramètres. Les variables nommées variables d'état seront $x_i, i = 1 \cdots n$, si le système évolue dans le temps, les variables seront notées $x_i(t), i = 1 \cdots n$ où t désigne le temps définit dans un intervalle $[0, T]$. Les n variables $x_i(t)$ seront gouvernées par n equations différentielles du premier ordre, elles sont sous la forme [5] :

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)),$$

où f est un vecteur de n composantes f_i, $i = 1 \cdots n$. f peut être linéaire ou non linéaire.
Définition : Un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé contrôle.

2.3 Contrôle optimal

Un problème de contrôle optimal se formule comme suit [6]:

$$\begin{cases} J(x,u) = g(T, x(T)) + \displaystyle\int_0^T L(t, x(t), u(t))dt \\ x(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ x(0) = x_0 \in M_0 \\ x(T) = x_1 \in M_1 \\ u(t) \in U, t \in I = [0, T]. \end{cases} \tag{2.3.1}$$

où M_0 et M_1 sont deux variétés de $\mathbb{R}^n$,I un intervalle de $\mathbb{R}^n$, $x_0 = x(0)$ est la position initiale du système (**??**), $x(T)$ est sa position terminale. En pratique, l'état du système peut représenter à la fois la vitesse, la position, la température et d'autres paramètres mesurables.U est l'ensemble des applications mesurables, localement bornées sur I à valeurs dans $U \subset \mathbb{R}^n$. Le but de la commande consiste 'a ramener l'objet de la position initiale $x_0 \in M_0$ à une autre position $x_1 \in M_1$, ou M_0 est l'ensemble de départ, et M_1 l'ensemble d'arrivée. Le but est d'optimiser la fonction décrite par la formule suivante : $J(x, u) =$

$g(T, x(T)) + \int_0^T L(t, x(t), u(t))dt$. On appelle $J(x, u)$ le cout du contrôle ou fonction objectif. Cette fonctionnelle comporte deux parties : $g(T, x(T))$ est le cout terminal, c'est une sorte de pénalité liée à la fin de l'évolution du système au temps final T ; il a son importance lorsque T est libre, sinon il est constant. Le second terme intervenant dans la fonction objectif $\int_0^T L(t, x(t), u(t))dt$ dépend de l'état du système tout au long de la trajectoire de la solution, définie par les variables d'état. Cette trajectoire dépend aussi du temps t mais surtout des variables de contrôle u. C'est une fonction d'efficacité de chaque commande sur l'intervalle T.

2.4 Contrôlabilité

L'objectif d'un problème de contrôle est d'amener le système d'un état initial donne à un état final tout en respectant certaines contraintes. Plus précisément on pose la définition suivante :

Définition 2.4.1 *le système $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), x(0) = x_0$ est dit contrôlable si pour tous points $x_0 \in M_0$ et $x_1 \in M_1$, il existe un contrôle $u(.)$ tel que la trajectoire associée à u relie x_0 à x_1 en un temps fini.*

La notion de contrôlabilité a été introduite en 1960 par Kalman [7] pour des systèmes linéaires de la forme $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$. Pour les systèmes non linéaires, le problème mathématique de contrôlabilité est beaucoup plus complique. Il constitue un domaine de recherche actif.

2.4.1 Contrôlabilité des systèmes linéaires

Considérons le système de contrôle linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), x(0) = x_0, \forall t \in [0, T]. \tag{2.4.1}$$

où A,B et r sont trois applications localement intégrables sur $[0, T]$ à valeurs respectivement dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des contrôles u considérés est l'ensemble

des applications mesurables localement bornées sur $[0,T]$ à valeurs dans un sous ensemble $U \in \mathbb{R}^n$.

Les théorèmes d'existence de solutions d'équations différentielles nous assurent que, pour tout contrôle u, le système (2.4.1) admet une unique solution $x(.) : [0,T] \to \mathbb{R}^n$, absolument continue. Soit $M(.) : [0,T] \to M_n(\mathbb{R})$ la résolvante du système linéaire homogène $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$, définie par $\dot{M}(t) = A(t)M(t)$, $M(0) = I_d$. Alors, la solution $x(.)$ du système (2.4.1) associée au contrôle u est donnée par:

$$x(t) = M(t)x_0 + \int_0^t M(t)M(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds, t \in [0,T].$$

Contrôlabilité des systèmes linéaires stationnaires

Le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ est dit stationnaire lorsque les matrices A et B ne dépendent pas de t. Dans ce cas, $A(t) = A, B(t) = B$ sont des constantes sur $[0,T]$, alors $M(t) = e^{tA}$. Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas sans contrainte sur le contrôle.

Théorème 2.4.1 *On suppose que $U = \mathbb{R}^n$. Le système stationnaire $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t)$ est contrôlable en temps T (quelconque) si et seulement si la matrice*

$C = [B, AB, A^2B, ..., A^{n-1}B]$.

est de rang n.

La matrice C est appelée matrice de Kalman, et la condition $rang(C) = n$ est appelée condition de Kalman.

Remarque 2 *La condition de Kalman ne dépend ni de T ni de x_0. Autrement dit, si un système linéaire stationnaire est contrôlable en temps T depuis x_0, alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.*

Notons que la matrice C est de rang n si et seulement si l'application linéaire,

$$\phi : L^\infty([0,T], \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^n$$

.

$$u \to \int_0^T e^{(T-t)^A} Bu(t)dt$$

est surjective.

Contrôlabilité des systèmes linéaires non stationnaires

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas non stationnaire.

Théorème : Le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t)$ est contrôlable en temps T si et seulement si la matrice

$$C(T) = \int_0^T M(t)^{-1}B(t)B(t)^t M(T)^{-1}dt,$$

dite matrice de contrôlabilité, est inversible.

Remarque 3 *Cette condition dépend de T , mais ne dépend pas du point initial x_0. Autrement dit, si un système linéaire non stationnaire est contrôlable en temps T depuis x_0, alors il est contrôlable en temps T depuis tout point.*

2.5 Méthodes de résolution

Dans cette partie, on présente deux types de méthodes numériques pour résoudre un problème de contrôle optimal: les méthodes directes et les méthodes indirectes. Les méthodes directes consistent à discrétiser le problème de contrôle optimal original et le transformer en un problème d'optimisation linéaire ou non linéaire sous contraintes. Parmi les méthodes indirectes, on cite la méthode de tir. Cette méthode consiste appliquer le principe du maximum de Pontryagin pour obtenir un problème aux limites. De plus, la méthode de tir nécessite l'utilisation de la méthode de Newton. Les méthodes indirectes ont une bonne précision numérique, mais elles sont très sensibles au choix des conditions initiales. Le schéma de la figure 2.5.1 illustre la classification des différentes méthodes.

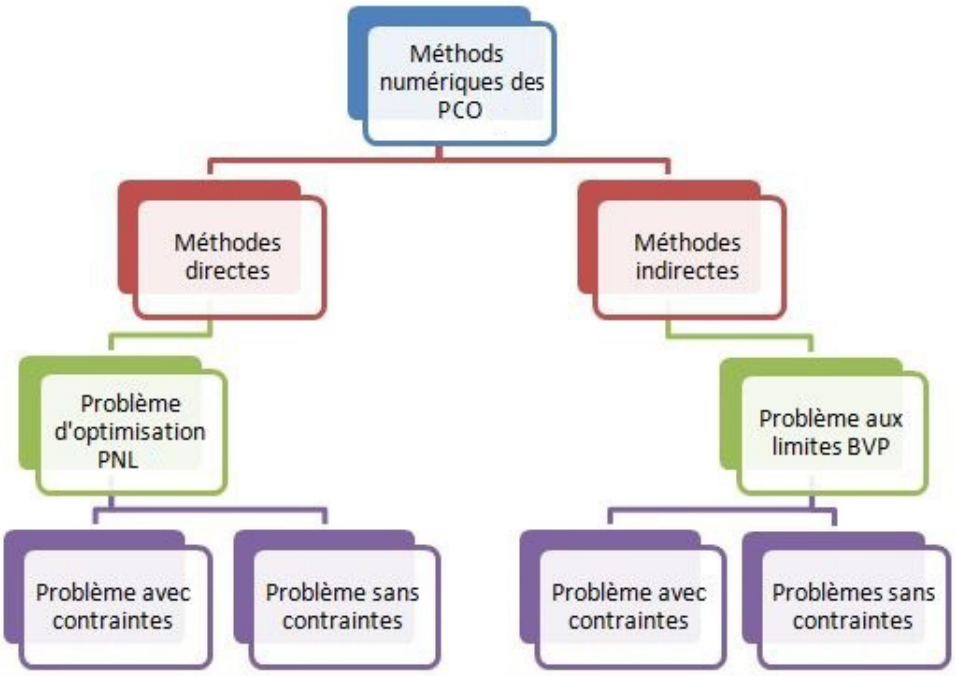


Figure 2.5.1 : Schéma de classification des méthodes numériques du contrôle optimal

2.5.1 Méthodes directes

Les méthodes directes consistent à transformer le problème de contrôle optimal en un problème d'optimisation linéaire, quadratique ou non-linéaire en dimension finie. On cite par exemple la méthode de discrétisation totale.

Discrétisation totale

La méthode consiste à choisir les contrôles dans un espace de dimension finie, et à utiliser une méthode d'intégration numérique des équations différentielles. Considérons donc une subdivision, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ de l'intervalle $[0, T]$. Réduisons l'espace des contrôles en considérant (par exemple) des contrôles constants par morceaux selon cette subdivision. Par ailleurs, choisissons une discrétisation de l'équation différentielle, par exemple choisissons ici (pour simplifier) la méthode d'Euler explicite. On obtient alors, en posant $h_i = t_{i+1} - t_i$,

$$x_{i+1} = x_i + h_i f(t_i, x_i, u_i).$$

Cette discrétisation conduit donc au problème de programmation non linéaire suivant:

$$\begin{aligned}
&\min F(Z)\\
&x_{i+1} = x_i + h_i f(t_i, x_i, u_i),\ i = 0, \ldots, N-1,\\
&u_i \in \Omega,\ i = 0, \ldots, N-1,
\end{aligned}$$

où Ω est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$ et $Z = (x_1, x_2, \ldots, x_N, u_0, u_1, \ldots, u_{N-1})$, avec x_0 donné.

2.5.2 Méthodes indirectes

Les méthodes indirectes sont basées sur le principe du maximum de Pontryagin, qui donne une condition nécessaire d'optimalité.

Principe du Maximum de Pontryagin

Théorème 2.5.1 *Considérons le système de contrôle dans* $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \tag{2.5.1}$$

où $f(t, x(t), u(t)) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ *est de classe* C^1 *et les contrôles sont des applications mesurables et bornées définies sur un intervalle* $[0, t_e(u)]$ *de* $\mathbb{R}^+$ *et à valeurs dans* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. *Soient* M_0 *et* M_f *deux sous-ensembles de* $\mathbb{R}^n$. *On note* U *l'ensemble des contrôles admissibles* u *dont les trajectoires associées relient un point initial de* M_0 *à un point final* M_f *en* $t(u) < t_e(u)$.
Par ailleurs, on définit le coût d'un contrôle u *sur* $[0, T]$*:*

$$J(T, u) = g(T, x(T)) + \int_0^T L(t, x(t), u(t))dt,$$

où $L(t, x(t), u(t)) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $g(T, x(T)) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *sont* C^1, *et* $x(.)$ *est la trajectoire solution de (2.5.1) associées au contrôle* u.
Le but est de déterminer une trajectoire joignant M_0 *à* M_f *et minimisant le coût.*
Le temps final peut être fixé ou non.
Si le contrôle $u \in U$ *associé à la trajectoire* $x(.)$ *est optimal sur* $[0, T]$, *alors il existe une application* $p(.) : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *absolument continue appelée vecteur adjoint, et un réel*

$p^o \leq 0$, tels que le couple $(p(.), p^o)$ est non trivial, et tels que, pour presque tout $t \in [0, T]$, on a:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial H(t,x(t),p(t),p^o,u(t))}{\partial p(t)}, \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H(t,x(t),p(t),p^o,u(t))}{\partial x(t)}, \\ \frac{\partial H(t,x(t),p(t),p^o,u(t))}{\partial u(t)} &= 0, \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

où le Hamiltonien du système (2.5.1) est la fonction

$$\begin{aligned} H: \ & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R} \setminus 0) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (\ t\ ,\ x\ ,\ p\ ,\ p^0\ ,\ u\ ) \longmapsto H(t,x,p,p^0,u) = \langle p, f(t,x,u)\rangle + p^0 L(t,x,u), \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

avec $\langle\ ,\ \rangle$ est le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$, et on a la condition de maximisation presque partout sur $[0, T]$:

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u^*(t)) = \max_{u\in\Omega} H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)). \tag{2.5.4}$$

Si de plus le temps final pour joindre la cible M_f n'est pas fixé, on a la condition au temps final T:

$$\max_{u\in\Omega} H(T, x(T), p(T), p^0, u(T)) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial T}(T, x(T)). \tag{2.5.5}$$

Remarque 4 *Si le système est autonome, alors le Hamiltonien $H(t, x, p, p^0, t),\ t \in [0, T]$ est constant le long de la trajectoire, i.e., f et L ne dépendent pas de t, alors H ne dépend pas de t, $H = cste$.*

Remarque 5 *La convention $p^0 \leq 0$ conduit au principe du maximum, tandis que $p^0 \geq 0$ conduit au principe du minimum, i.e., la condition (2.5.4) serait une condition de maximum.*

Définition 2.5.1 *Une extrémale du problème de contrôle optimal est un quadruplet $(x(.), p(.), p^0, u(.))$ solution des équations (2.5.2) et (2.5.4). Si $p^0 = 0$, on dit que l'extrémale est anormale, et si $p^0 \neq 0$ l'extrémale est dite normale.*

Condition de transversalité

La condition de transversalité indique le comportement que doit avoir le contrôle quand on arrive à l'horizon fini (ou infini): La manière dont le contrôle doit traverser la ligne

d'horizon. Cette condition doit nous aider à choisir la trajectoire optimale parmi toutes les trajectoires possibles. Cette condition est donnée par les équations provenant des conditions dites aux deux bords, en t_0 (temps initial) d'une part et en T d'autre part sont appelées équations de transversalité.

Si de plus M_0 et M_f (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de $\mathbb{R}^n$ ayant des espaces tangents en $x_0 \in M_0$ et $x_f \in M_f$, alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalité aux deux extrémités (ou juste l'une des deux),

$$p(0) \perp T_{x_0} M_0, \tag{2.5.6}$$

et

$$p(T) - p^\circ \frac{\partial g}{\partial x}(T, x(T)) \perp T_{x_f} M_1. \tag{2.5.7}$$

Remarque 6 *Si le contrôle u est continue au temps T, la condition peut s'écrire*

$$H(T, x(T), p(T), p^0, u(T)) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial T}(T, x(T)). \tag{2.5.8}$$

Méthode de tir simple

Le principe de la méthode de tir est le suivant. Considérons le problème de contrôle optimal (**??**), et supposons dans un premier temps que le temps final T est fixé. Le principe du maximum donne une condition nécessaire d'optimalité et affirme que toute trajectoire optimale est la projection d'une extrémale. Si l'on est capable, à partir de la condition du maximum, d'exprimer le contrôle extrémal en fonction de $(x(t), p(t))$, alors le système extrémal est un système différentiel de la forme $\dot{z}(t) = F(t, z(t))$, où $z(t) = (x(t), p(t))$, et les conditions initiales, finales, et les conditions de transversalité, se mettent sous la forme $R(z(0), z(T)) = 0$. Finalement, on obtient le problème aux limites

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = F(t, z(t)), \\ R(z(0), z(T)) = 0. \end{cases} \tag{2.5.9}$$

Notons $z(t, z_0)$ la solution du problème de Cauchy:

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t)),\ z(0) = z_0, \tag{2.5.10}$$

et posons $G(z_0) = R(z_0, z(T, z_0))$. Le problème aux limites (2.5.9) est alors équivalent à

$$G(z_0) = 0, \tag{2.5.11}$$

i.e., il s'agit de déterminer un zéro de la fonction G. L'équation précédente peut donc être résolue par une méthode de Newton.

2.6 Comparaison des méthodes

Les méthodes directes présentent les avantages suivants par rapport aux méthodes indirectes:

- Leur mise en oeuvre est plus simple car elles ne nécessitent pas une étude théorique préalable comme les méthodes indirectes. En particulier, on n'a pas à étudier les variables adjointes, ou bien à connaître à l'avance la structure des commutations.
- Elles sont plus robustes.
- Elles sont peu sensibles au choix de la condition initiale (contrairement aux méthodes indirectes).
- Il est facile de tenir compte d'éventuelles contraintes sur l'état.
- Elles permettent de calculer les contrôles optimaux sous forme de feedback.
  En revanche
- Les méthodes directes sont moins précises que les méthodes indirectes. Par exemple, pour le problème de contrôle optimal issu de l'aéronautique étudié au chapitre suivant, la précision des méthodes directes s'avère en général insuffisante, malgré l'augmentation du nombre de pas de la discrétisation.
- La discrétisation directe d'un problème de contrôle optimal comporte souvent plusieurs minima (locaux), et les méthodes directes peuvent converger vers ces minima, pourtant la solution ainsi déterminée peut s'avérer être très éloignée de la vraie solution optimale.

- Les méthodes directes sont gourmandes en mémoire, et de ce fait peuvent devenir inefficaces si la dimension du problème d'optimisation obtenu après discrétisation est trop grande.

  Les avantages des méthodes indirectes sont

- L'extrême précision numérique.

- La méthode de tir multiple est, par construction, parallélisable, et son implémentation peut donc être envisagé sur un réseau d'ordinateurs montés en parallèle.

  Les inconvénients des méthodes indirectes sont les suivantes:

- Elles calculent les contrôles optimaux sous forme de boucle ouverte.

- Elles sont basées sur le principe du maximum qui est une condition nécessaire d'optimalité seulement, et donc il faut être capable de vérifier à posteriori l'optimalité de la trajectoire calculée.

- Rigidité de la méthode: la structure des commutations doit être connue à l'avance (par exemple par une étude géométrique du problème). De même, il n'est pas facile d'introduire des contraintes sur l'état, d'autre part la présence de contraintes sur l'état peut rendre compliquée la structure de la trajectoire optimale.

Chapitre 3

Application numérique

Dans ce chapitre, nous résolons le modèle mathématique du contrôle optimal linéaire correspondant au problème de la maximisation de la vitesse d'une fusée qui se déplace avec un mouvement rectiligne [7] (Section 2). Afin de fixer la valeur du temps final, nous résolvons un autre problème appelé problème de contrôle optimal du temps minimal (Section 3). Finalement, dans la dernière section, nous résolvons le problème considéré avec quatre méthodes: la méthode analytique, la méthode de tir et technique de discrétisation utilisant la formule d'Euler. Ensuite, nous comparons les résultats obtenus en effectuant plusieurs simulations numériques avec MATLAB. L'objectif est donc de maximiser la vitesse de l'engin qui se déplace du point initial $h(0) = 0$, à une hauteur h_1 donnée. Ceci nous conduit à la résolution du problème de contrôle optimal suivant:

$$\begin{cases} \text{Maximiser } J(u,T) = v(T), \\ \dot{h}(t) = v(t), \\ \dot{v}(t) = w(t) - g, \\ \dot{w}(t) = \alpha[w(t) - u(t)], \\ h(0) = h_0,\ v(0) = 0,\ w(0) = g, \\ h(T) = h_1,\ \mid u(t) \mid \leq 1,\ t \in [0,T],\ T \text{ fix.} \end{cases} \tag{3.0.1}$$

Ce problème s'écrit sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{cases} \text{Maximiser } J(u,T) = c'x(T), \\ \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r, \\ x(0) = x_0,\ Qx(T) = h_1,\ \mid u(t) \mid \leq 1,\ t \in [0,T],\ T \text{ fix}, \end{cases} \tag{3.0.2}$$

où $x(t) = \begin{pmatrix} h(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$, $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix}$, $r = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$Q = (1,0,0) \text{ et } c' = (0,1,0).$$

Le symbole "$'$" désigne l'opération de transposition.

La matrice de Kalman est donnée par:

$$K = (B, AB, A^2B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & -\alpha & -\alpha^2 \\ -\alpha & -\alpha^2 & -\alpha^3 \end{pmatrix},\ det(K) = \alpha^3 \neq 0.$$

Le rang de la matrice K est Rang$(K) = 3$, donc le système est contrôlable [4].

Nous résolvons d'abord le problème (3.0.1) analytiquement, puis nous le résolvons numériquement, et ce, avec trois méthodes, à savoir: la méthode de tir, la méthode de discrétisation de Cauchy et la méthode de discrétisation d'Euler.

3.0.1 Résolution analytique

Dans cette partie, nous résolvons le problème (3.0.1) théoriquement en utilisant le principe du maximum de Pontryagin.

Le Hamiltonien du problème (3.0.1) est donné par:

$$H(t, x(t), p(t), u(t)) = p_h(t)v(t) + p_v(t)[w(t) - g] + \alpha p_w(t)[w(t) - u(t)]. \tag{3.0.3}$$

Les composantes du vecteur adjoint sont des solutions du système suivant:

$$\begin{cases} \dot{p}_h(t) = 0, \\ \dot{p}_v(t) = -p_h(t), \\ \dot{p}_w(t) = -p_v(t) - \alpha p_w(t),\ t \in [0,T]. \end{cases} \tag{3.0.4}$$

Du système (3.0.4), on en déduit que

$$\begin{cases} p_h(t) = \lambda_1, \\ p_v(t) = -\lambda_1 t + \lambda_2, \\ p_w(t) = \frac{1}{\alpha^2}(\alpha^2\lambda_3 e^{-\alpha t} + \alpha\lambda_1 t - \lambda_1 - \alpha\lambda_2), \\ \lambda_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, 3, \end{cases} \tag{3.0.5}$$

avec

$$p_h(0) = \lambda_1,\ p_v(0) = \lambda_2,\ p_w(0) = \frac{1}{\alpha^2}(-\lambda_1 - \alpha\lambda_2 + \alpha^2\lambda_3). \tag{3.0.6}$$

Le maximum du Hamiltonien (3.0.3) est donné par:

$$\begin{aligned} H(t, x(t), p(t), u^*(t)) &= \max_{-1\leq u(t)\leq 1} H(t, x(t), p(t), u(t)) \\ &= p_h(t)v(t) + p_v(t)[w(t) - g] + \alpha p_w(t)w(t) \\ &\quad +\alpha \max_{-1\leq u(t)\leq 1}[-p_w(t)u(t)]. \end{aligned}$$

Le contrôle maximisant le Hamiltonien est

$$u^*(t) = -\text{signe}(p_w(t)). \tag{3.0.7}$$

Les conditions de transversalité permettent d'avoir des conditions sur les vecteurs adjoints lorsque le temps final T est fixé [**?**]. Le vecteur $x(T)$ doit vérifier la contrainte $600 - Qx(T) = 0$. Les conditions de transversalité sont données par:

$$-p_h(T) - \frac{\partial g(T, x(T))}{\partial h(T)} + \frac{\partial(600 - Qx(T))}{\partial h(T)}b = 0, \tag{3.0.8}$$

$$-p_v(T) - \frac{\partial g(T, x(T))}{\partial v(T)} + \frac{\partial(600 - Qx(T))}{\partial v(T)}b = 0, \tag{3.0.9}$$

$$-p_w(T) - \frac{\partial g(T, x(T))}{\partial w(T)} + \frac{\partial(600 - Qx(T))}{\partial w(T)}b = 0, \tag{3.0.10}$$

où $g(T, x(T)) = -v(T)$ et $b \in \mathbb{R}$.

D'où on obtient les conditions aux limites suivantes:

$$p_h(T) = -b,\ p_v(T) = 1,\ p_w(T) = 0. \tag{3.0.11}$$

En utilisant les conditions aux limites (3.0.11) et les relations (3.0.5), on obtient:

$$\begin{cases} p_h(t) = -b, \\ p_v(t) = b(t-T) + 1, \\ p_w(t) = \frac{1}{\alpha^2}((\alpha - b)(e^{-\alpha(t-T)} - 1) - \alpha b(t-T)),\ t \in [0, T]. \end{cases} \tag{3.0.12}$$

Puisque le contrôle optimal est égal au signe opposé du vecteur adjoint $p_w(t)$, alors les temps de commutation sont donnés par les racines de l'équation $p_w(t) = 0$. Comme A est une matrice d'ordre 3 et toutes ses valeurs propres sont réelles, le problème admet au plus une commutation $t_c < T$ [4].

Afin de choisir la stratégie optimale, examinons les différentes stratégies possibles suivantes:

- Stratégie 1: $u(t) = 1,\ \forall t \in [0, T]$;
- Stratégie 2: $u(t) = -1,\ \forall t \in [0, T]$;
- Stratégie 3: $u(t) = 1$ pour $t \in [0, t_c[$, puis $u(t) = -1$, pour $t \in [t_c, T]$;
- Stratégie 4: $u(t) = -1$ pour $t \in [0, t_c[$, puis $u(t) = 1$, pour $t \in [t_c, T]$.

Stratégie 1:

Nous avons, $\dot{w}(t) = \alpha[w(t) - 1]$, ce qui implique que

$$\begin{cases} w(t) = c_1 e^{\alpha t} + 1, \\ v(t) = \frac{c_1}{\alpha} e^{\alpha t} + (1-g)t + c_2, \\ h(t) = \frac{c_2}{\alpha^2} e^{\alpha t} + \frac{(1-g)}{2} t^2 + c_2 t + c_3,\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.0.13}$$

En utilisant les conditions initiales, on obtient

$$\begin{cases} w(t) = (g-1)e^{1.42t} + 1, \\ v(t) = (g-1)\left(\frac{1}{1.42} e^{1.42t} - t - \frac{1}{1.42}\right), \\ h(t) = (g-1)\left(\frac{1}{1.42^2} e^{1.42t} - \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{1.42} t - \frac{1}{1.42^2}\right). \end{cases} \tag{3.0.14}$$

Pour $t = T$, on aura $h(T) = 549.0243 < 600$, donc la stratégie 1 n'est pas réalisable.

Stratégie 2:

Nous avons $\dot{w}(t) = \alpha[w(t) + 1]$, ce qui implique que

$$\begin{cases} w(t) = d_1 e^{\alpha t} - 1, \\ v(t) = \frac{d_1}{\alpha} e^{\alpha t} - (1+g)t + d_2, \\ h(t) = \frac{d_1}{\alpha^2} e^{\alpha t} - \frac{(1+g)}{2} t^2 + d_2 t + d_3, \ d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.0.15}$$

En utilisant les conditions initiales, on obtient

$$\begin{cases} w(t) = (g+1)e^{1.42t} + 1, \\ v(t) = (g+1)\left(\frac{1}{1.42} e^{1.42t} - t - \frac{1}{1.42}\right), \\ h(t) = (g+1)\left(\frac{1}{1.42^2} e^{1.42t} - \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{1.42} t - \frac{1}{1.42^2}\right). \end{cases} \tag{3.0.16}$$

Pour $t = T$, on aura $h(T) = 673.7083 > 600$, donc la stratégie 2 n'est pas réalisable.

Stratégie 3:

Les équations du premier morceau des trajectoires, lorsque $u(t) = 1$, $t \in [0, t_c[$, sont

$$\begin{cases} w(t) = (g-1)e^{1.42t} + 1, \\ v(t) = (g-1)\left(\frac{1}{1.42} e^{1.42t} - t - \frac{1}{1.42}\right), \\ h(t) = (g-1)\left(\frac{1}{1.42^2} e^{1.42t} - \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{1.42} t - \frac{1}{1.42^2}\right). \end{cases} \tag{3.0.17}$$

Les équations du deuxième morceau des trajectoires, lorsque $u(t) = -1$, $t \in [t_c, T]$, sont

$$\begin{cases} w(t) = \beta_1 e^{1.42t} + 1, \\ v(t) = \frac{\beta_1}{1.42} e^{1.42t} - (g+1)t + \beta_2, \\ h(t) = \frac{\beta_1}{1.42^2} e^{1.42t} - \frac{(g+1)}{2} t^2 + \beta_2 t + \beta_3, \ \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.0.18}$$

Au point d'intersection des deux morceaux, nous obtenons

$$\beta_1 = (g-1) + 2e^{-1.42t_c}, \ \beta_2 = 2t_c - \frac{(g+1)}{1.42}, \ \beta_3 = -t_c^2 + \frac{2}{1.42} t_c - \frac{(g+1)}{1.42^2}.$$

Calculons t_c tel que $h(T) = 600$.

Cette dernière condition, nous permet d'obtenir l'équation suivante:

$$142.86 e^{-1.42t_c} - t_c^2 + 8.41 t_c - 69.15 = 0. \tag{3.0.19}$$

La solution numérique de cette dernière équation est donnée par: $t_c = 0.557$s.

En remplaçant les valeurs de β_1 et β_2 dans la deuxième équation du système (3.0.18), on obtient

$$J(u,T) = v(T) = 940.8949\ m.s^{-1}.$$

Stratégie 4:

Les équations du première morceau des trajectoires, lorsque $u(t) = -1$, $t \in [0, t_c[$ sont

$$\begin{cases} w(t) = (g+1)e^{1.42t} - 1, \\ v(t) = (g+1)\left(\frac{1}{1.42}e^{1.42t} - t - \frac{1}{1.42}\right), \\ h(t) = (g+1)\left(\frac{1}{1.42^2}e^{1.42t} - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{1.42}t - \frac{1}{1.42^2}\right). \end{cases} \tag{3.0.20}$$

Les équations du deuxième morceau des trajectoires, lorsque $u(t) = 1$, $t \in [t_c, T]$, sont

$$\begin{cases} w(t) = \gamma_1 e^{\alpha t} + 1, \\ v(t) = \frac{\gamma_1}{\alpha}e^{\alpha t} + (1-g)t + \gamma_2, \\ h(t) = \frac{\gamma_1}{\alpha^2}e^{\alpha t} + \frac{(1-g)}{2}t^2 + \gamma_2 t + \gamma_3,\ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.0.21}$$

Au point d'intersection des deux morceaux, nous obtenons

$$\gamma_1 = (g+1) - 2e^{-1.42t_c},\ \gamma_2 = -2t_c - \frac{(g-1)}{1.42},\ \gamma_3 = t_c^2 - \frac{2}{1.42}t_c - \frac{(g-1)}{1.42^2}.$$

Donc calculons t_c tel que $h(T) = 600$.

Cette dernière condition nous permet d'obtenir l'équation suivante:

$$142.8555e^{-1.42t_c} + t_c^2 + 8.4085t_c + 91.8798 = 0. \tag{3.0.22}$$

La solution numérique de cette dernière équation est donnée par: $t_c = 0.331$s.

D'après le système (3.0.21), la valeur optimale du critère de qualité du problème (3.0.1) est égale à

$$J(u,T) = v(T) = 931.6531\ m.s^{-1}.$$

Remarquons que la valeur optimale du critère de qualité donnée par la stratégie 3 est supérieur à celui trouvé par la stratégie 4, et qui est du type bang-bang. Les résultats théoriques sont tracés dans la figure 3.0.1 . Nous avons donc déterminé par le principe

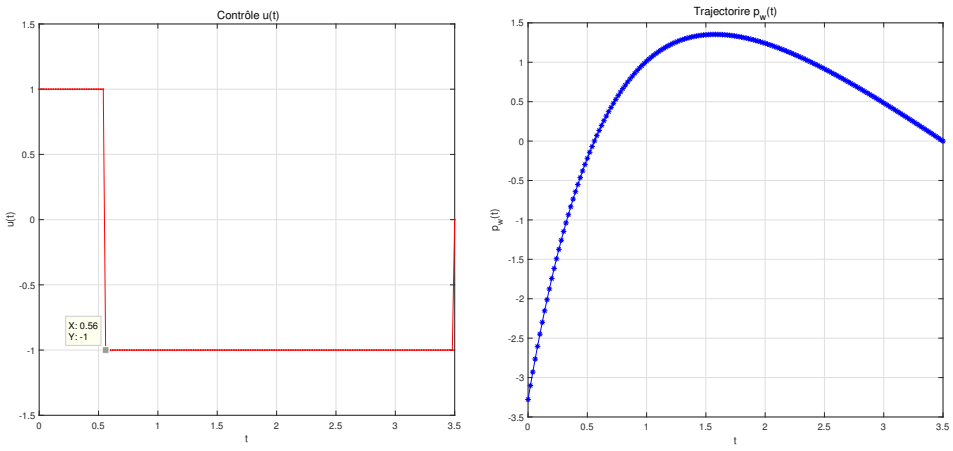


Figure 3.0.1 : Graphes de $t \longmapsto u(t)$ et $t \longmapsto p_w(t)$

du maximum de Pontryagin une trajectoire optimale qui maximise $v(T)$ et qui vérifie la condition aux limites $h(T) = 600$. Ce contrôle optimal est donné par:

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 0.55[; \\ -1, & t \in [0.55, 3.5]; \end{cases} \tag{3.0.23}$$

et

$$J(u^*, T) = v^*(T) = 940.8949 \ m.s^{-1}.$$

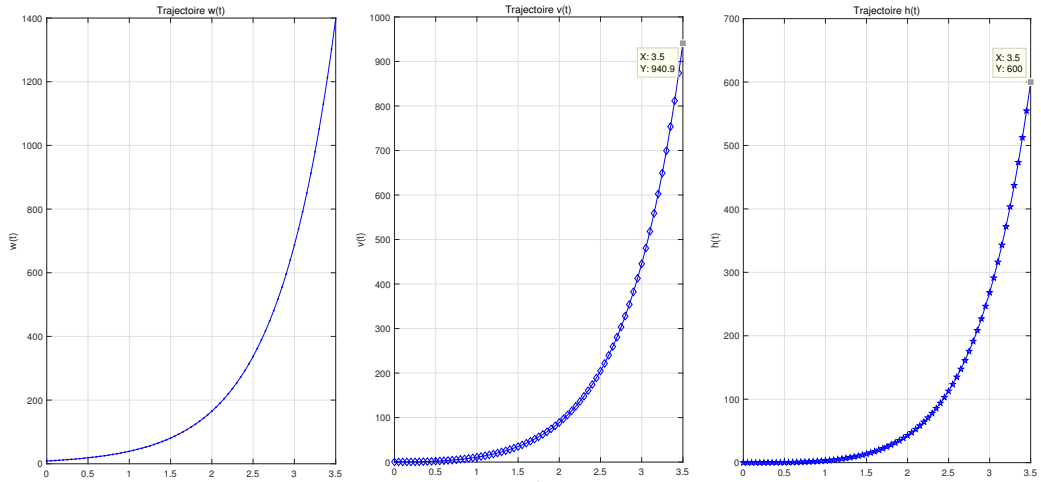


Figure 3.0.2 : Trajectoires optimales $t \longmapsto h(t)$, $t \longmapsto v(t)$ et $t \longmapsto w(t)$

3.0.2 Résolution numérique par la méthode de tir

En regroupant les résultats trouvés précédemment par le principe du maximum de Pontryagin, on aura le problème aux limites suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) - g, \\ \dot{x}_3(t) = \alpha[x_3(t) + \text{signe}(p_3(t))], \\ \dot{p}_1(t) = 0, \\ \dot{p}_2(t) = -p_1(t), \\ \dot{p}_3(t) = -p_2(t) - \alpha p_3(t), \\ x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, x_3(0) = g, \\ p_1(0) = \lambda_1, p_2(0) = \lambda_2, p_3(0) = \frac{1}{\alpha^2}(\alpha^2\lambda_3 - \lambda_1 - \alpha\lambda_2), \alpha > 0, \\ x_1(T) = 600,\ p_1(T) = -b,\ p_2(T) = 1,\ p_3(T) = 0. \end{cases} \tag{3.0.24}$$

où

$$x(t) = (x_j(t),\ j = 1, \ldots, 3) = (h(t), v(t), w(t)),$$

et

$$p(t) = (p_j(t),\ j = 1, \ldots, 3) = (p_h(t), p_v(t), p_w(t)).$$

Nous construisons la fonction de tir suivante:

$$\begin{array}{rccc} G: & \mathbb{R}^6 & \longrightarrow & \mathbb{R}^6 \\ & (p(0),p(T)) & \longmapsto & G(p(0),p(T)), \end{array} \tag{3.0.25}$$

avec

$$G(p(0),p(T)) = \begin{pmatrix} p_1(0)-\lambda_1 \\ p_2(0)-\lambda_2 \\ p_3(0)-\frac{1}{\alpha^2}(\alpha^2\lambda_3-\lambda_1-\alpha\lambda_2) \\ p_1(T)+b \\ p_2(T)-1 \\ p_3(T)-0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, le problème (3.0.24) est équivalent au problème suivant:

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t), \\ \dot{z}_2(t) = z_3(t) - g, \\ \dot{z}_3(t) = \alpha[z_3(t) + \text{signe}(z_6(t))], \\ \dot{z}_4(t) = 0, \\ \dot{z}_5(t) = -z_4(t), \\ \dot{z}_6(t) = -z_5(t) - \alpha z_6(t), \\ z_1(0) = 0,\ z_2(0) = 0,\ z_3(0) = g, \\ z_1(T) = h_1,\ G(p(0),p(T)) = 0. \end{cases} \tag{3.0.26}$$

où $z(t) = (z_j, j = 1,\ldots,6) = (x(t),p(t))$.

Nous déterminons la solution numérique du système non linéaire $G(p(0),p(T)) = 0$ en utilisant la méthode de Newton. En mettant en oeuvre cette méthode avec Matlab, nous retrouvons les résultats tracés dans la figure 3.0.3 .

Ces résultats montrent que le temps de commutation est $t_c = 0,557$s, la vitesse maximale est $v^*(T) = 940,8949\ m.s^{-1}$. Le temps d'exécution de la méthode de tir est $t = 1.9781$s. Remarquons que la méthode de tir a obtenu les mêmes résultats que ceux de la méthode analytique en un temps très court. Ceci montre que la méthode de tir est rapide et donne des résultats précis pour le problème étudié.

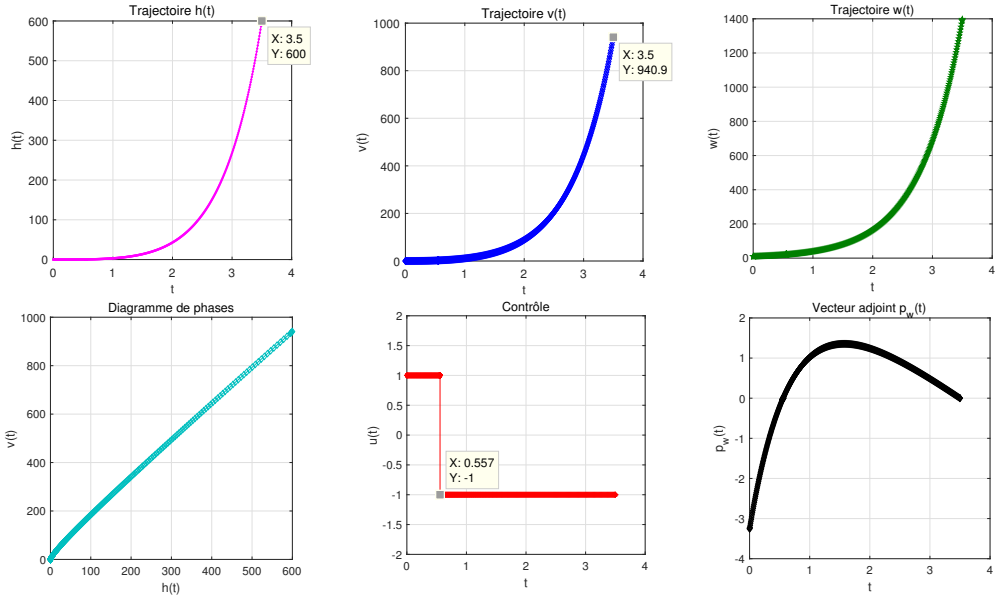


Figure 3.0.3 : Résultats de la méthode de tir

3.0.3 Résolution numérique par la méthode de discrétisation d'Euler

Pour un nombre de sous-intervalles N choisi à l'avance, on aura le pas de discrétisation $\theta = \frac{T}{N}$ et les instants suivants:

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = T.$$

L'application du schéma d'Euler pour la résolution des problèmes de Cauchy nous donne le problème de programmation linéaire suivant:

$$\begin{cases} \text{Maximiser } J(u,T) = v(T), \\ h(t_{i+1}) = h(t_i) + \theta v(t_i),\ h(0) = 0,\ i = 0,1,\ldots,N-1, \\ v(t_{i+1}) = v(t_i) + \theta[w(t_i) - g],\ v(0) = 0,\ i = 0,1,\ldots,N-1, \\ w(t_{i+1}) = w(t_i) + \alpha\theta[w(t_i) - u(t_i)],\ w(0) = g,\ i = 0,1,\ldots,N-1, \\ h(t_N) = 600,\ h(t_j) \geq 0,\ v(t_j) \geq 0,\ w(t_j) \geq 0,\ j = 1,\ldots,N, \\ -1 \leq u(t_i) \leq 1,\ i = 0,\ldots,N-1. \end{cases} \tag{3.0.27}$$

En posant $\beta = (1+\alpha\theta)$, les contraintes du problème précédent peuvent s'écrire aussi comme suit:

$$\begin{cases} h(t_{i+1}) - h(t_i) - \theta v(t_i) = 0,\ h(0) = 0,\ i = 0, \ldots, N-1, \\ v(t_{i+1}) - v(t_i) - \theta w(t_i) = -\theta g,\ v(0) = 0,\ i = 0, \ldots, N-1, \\ w(t_{i+1}) - \beta w(t_i) + \alpha\theta u(t_i) = 0,\ w(0) = 0,\ i = 0, \ldots, N-1, \\ h(t_N) = 600, \\ h(t_j) \geq 0,\ v(t_j) \geq 0,\ w(t_j) \geq 0,\ j = 1, \ldots, N, \\ -1 \leq u(t_j) \leq 1,\ j = 0, \ldots, N-1. \end{cases} \tag{3.0.28}$$

Posons

$$X = (x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{1,N}, x_{2,1}, x_{2,2}, \ldots, x_{2,N}, x_{3,1}, x_{3,2}, \ldots, x_{3,N}, u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}),$$

où

$$x_{1,j} = h(t_j),\ x_{2,j} = v(t_j),\ x_{3,j} = w(t_j),\ j = 0, 1, \ldots, N,\ u_j = u(t_j),\ j = 0, 1, \ldots, N-1,$$

avec $x_{1,0} = 0,\ x_{2,0} = 0,\ x_{3,0} = g$.

Après l'écriture du problème (3.0.27) sous la forme matricielle, nous obtenons le problème de programmation linéaire suivant:

$$\begin{cases} \text{Maximiser } F(X) = C'X, \\ AX = b, \\ L \leq X \leq U, \end{cases} \tag{3.0.29}$$

où $A \in \mathcal{M}_{3N+1,4N},\ b \in \mathbb{R}^{3N+1}$ et $X,\ L,\ U,\ C \in \mathbb{R}^{4N}$, avec

$$L_j = -\infty,\ U_j = +\infty,\ i = 1, 2, \ldots, 3N,\ L_i = -1,\ U_i = 1,\ i = 3N+1, \ldots, 4N.$$

Nous avons également résolu le programme linéaire (3.0.29) avec la méthode des points intérieurs de MATLAB. Les résultats obtenus (temps d'exécution de la méthode des points intérieurs T, nombre d'itérations NIT et la vitesse maximale $v(T)$) sont présentés dans le tableau 3.1.

D'après le tableau 3.1, on peut remarquer que la méthode de discrétisation d'Euler est très rapide. Cependant, elle ne peut pas atteindre la précision souhaitée.

Table 3.1: Simulation numérique par la technique de discrétisation d'Euler

N	$v(T)$	NIT	T
200	943.7800	12	0.0092
500	942.2125	12	0.0464
800	941.7509	11	0.1007
1200	941.4787	11	0.1726
2000	941.2552	31	1.6544
3000	941.1352	25	1.5569

3.0.4 Comparaison numérique

Les vitesses optimales trouvées par les trois méthodes sont presque similaires, néanmoins les temps d'exécution de ces méthodes sont largement différents. Pour $N = 900$, la méthode de discrétisation de Cauchy a donné la vitesse maximale avec une précision de 4 décimales et un temps d'exécution $T = 506.3828$s, tandis que la méthode discrétisation d'Euler a donné pour $N = 3000$ une vitesse optimale avec une erreur égale à 0.24, avec un temps d'exécution $T = 1.5569$s. Ceci montre que la méthode de Cauchy est très précise mais lente et la méthode d'Euler est très rapide mais moins précise. Notons également que la méthode de tir a donné une vitesse optimale avec une grande précision et a nécessité un temps d'exécution très court $T = 1.97$s.

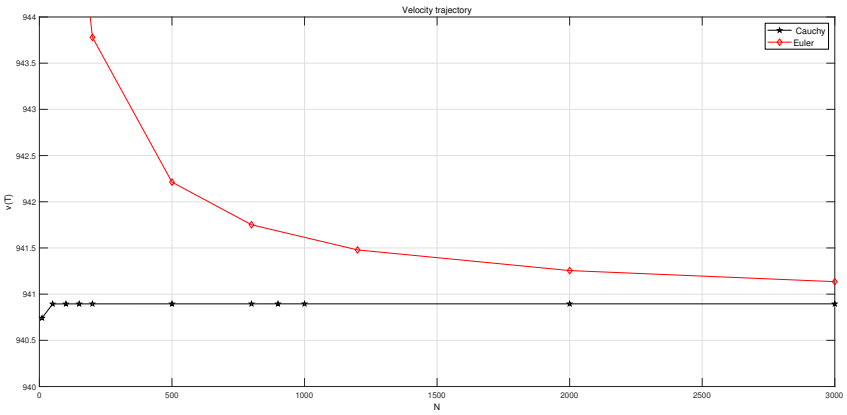


Figure 3.0.4 : Comparaison numérique $N \longmapsto v(T)$.

3.1 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons résolu un problème pratique en aéronautique en le formulant sous forme d'un problème de contrôle optimal linéaire. Pour la résolution théorique, on a utilisé le principe du maximum de Pontryagin qui donne une condition nécessaire d'optimalité. Numériquement, le problème considéré est résolu avec la méthode indirecte (méthode de tir) et deux techniques de discrétisation (technique utilisant la formule de Cauchy et celle utilisant la formule d'Euler). Les résultats trouvés sont presque identiques, mais on a remarqué une large différence dans les temps d'exécution des trois méthodes.

Bibliographie

[1] A. Agrachev and Y. Sachkov, *Regularity of minimizers and of adjoint states for optimal control problems under state constraints*, Convex Analysis Vol 13, 2004.

[2] M. Aidene and K.Louadj. Adaptive method for solving optimal problem wiht state and control variables, *Mathematical Problems in Engineering*, 2012.

[3] M. Aidene and K.Louadj. A problem of optimal control with free initial state, *ESAIM: Proceedings*, Vol 35, pp. 184-190, 2012,

[4] M. Aidene, I. L. Vorobev, and B. Oukacha. *Algorithm for solving a linear optimal control problem with minimax*, Performance Index Computational Mathematics and mathematical Physics 45 vol 10, pages 1691-1700, 2005.

[5] M. Aliane, N. Moussouni and M. Bentobache, Numerical methods for the optimal control of the heel angle of a rocket, *International Journal of Mathematics in Operations Research*, 2020.

[6] M. Aliane, M. Bentobache, N. Moussouni and Philippe Marthon, Direct method to solve linear-quadratic optimal control problems, *Numerical Algebra, Control and Optimization*, 2021.

[7] M. Aliane, N. Moussouni, M. Bentobache, Optimal control of a rectilinear motion of a rocket. *Statistics, Optimization & Information Computing*, **8** (2020),281-295.

[8] M. Aliane, N. Moussouni and M. Bentobache, Nonlinear optimal control of the heel angle of a rocket, *6th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CODIT'19)*; Paris, France, April 23-26; 2019.

[9] M. Aliane, N. Moussouni, M. Bentobache, Contrôle optimal non-linéaire de l'angle d'inclinaison d'une fusée, *Conférence internationale Tendances dans les Applications Mathématiques en Tunisie Algérie Maroc (TAMTAM 2019)*, Tlemcen, Algérie, 24-27 Février, 2019.

[10] M. Aliane, N. Moussouni, M. Bentobache, Optimal control of a rectilinear motion of a rocket, *Workshops on Pure and Applied Mathematics*, University of Msila, Algeria, Decembre 17-18, 2018.

[11] M.S. Aronna, J.F. Bonnans, and P. Martinon. *A shooting algorithm for optimal control problems with singular arcs*, J. Optim. Theory Appl, 158(2) :419-459, 2013.

[12] N. V. Balashevich, R. Gabasov, and F. M. Kirillova. *Numerical methods of program and positional optimization of the linear control systems*, Zh Vychisl Mat Fiz vol 40 n°6, pages 838-859, 2000.

[13] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali and C. M. Shetty, *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1979.

[14] M.S. Bazaraa, J.J. Jarvis, and H.D. Sherali, *Linear Programming and Network Flows*, Second edition, John Wiley & Sons, New York, 1990.

[15] R. E. Bellman. *Dynamic programming*, Princeton University Press Princeton NJ, 1963.

[16] P. Lascaux et R. Theodor, *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur : Méthodes directes*, volume 1. Dunod, Paris, 2000.