RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Dr. Yahia Fares, Médéa
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique



MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MASTER
SPÉCIALITÉ : **ANALYSE ET MODÉLISATION MATHÉMATIQUES**

Présenté par :
MESSAOUI Khokha

Intitulé :

Résolution Numérique des Problèmes de Contrôle Optimal Fractionnaire via les polynômes de Bernoulli

Soutenu publiquement le 14 Juin 2017 à Médéa devant le jury composé de

S. RAFAA	M.A.A	Université de Médéa	Président.
H. AYADI	M.A.A	Université de Médéa	Examinateur.
N. MEKDACHE	M.A.A	Université de Médéa	Examinateur.
A. BOKHARI	M.A.A	Université de Médéa	Encadreur.

Table des matières

Résumé vi

Notations viii

Introduction ix

1 Calcul fractionnaire 1

1.1 Espace fonctionnels 1

1.1.1 Espaces des fonctions intégrales 1

1.1.2 Espaces des fonctions continues 2

1.2 Outils de base 2

1.2.1 Fonctions utiles 2

1.3 La dérivation fractionnaire 3

1.3.1 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$ 3

1.3.2 L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville 4

1.3.3 La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville 6

1.3.4 La dérivée fractionnaire au sens de Caputo 8

2 Les matrices opérationnelles de Bernoulli 11

2.1 Les nombres et les polynômes de Bernoulli 11

2.2 Approximation d'une fonction 17

2.3 Les matrices opérationnelles 22

2.3.1 La matrice opérationnelle de dérivation 23

2.3.2 La matrice opérationnelle d'intégration 25

2.3.3 La matrice opérationnelle de produit 29

2.4 La méthode de résolution 32

3 Application **36**

3.1 Exemple 1 36

3.2 Exemple 2 43

3.3 Exemple 3 48

Annexe **53**

Conclusion **62**

Bibliographie **63**

Remerciements

Avant tout je remercie **ALLAH** tout puissant de m'avoir donné le courage et la patience pour terminer ce travail.

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma reconnaissance.

Je voudrais tout d'abord adresser toute ma gratitude à Monsieur **A. BOKHARI**, Maître Assistant à l'université Dr. Yahia Farès de Médéa, d'avoir accepté d'encadrer mon mémoire, ainsi pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Je remercie également Monsieur **S. RAFAA**, Maître Assistant à l'université Dr. Yahia Farès de Médéa, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à Monsieur **H. AYADI**, Maître Assistant à l'université Dr. Yahia Farès de Médéa, pour son aide, sa disponibilité, et ses bons conseils.

Je remercie également Monsieur **N. MEKDACHE**, Maître Assistant à l'université Dr. Yahia Farès de Médèa, pour son aide, sa disponibilité.

Je lui témoigne ma gratitude pour avoir pu prendre part à ce jury.

Enfin, merci d'avance à ceux ou celles qui voudront bien me lire ou m'écouter et surtout m'aider à progresser.

Dédicace

Je dédie ce travail

À ma très chère **mère**

Tu es l'exemple de dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi. Puisse **ALLAH**, le tout puissant, te préserver et t'accorder santé, longue vie et bonheur.

À mon très chère **père**

Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être. Ce travail est le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation.

À mes frères : **Ramdhan**, **Chaeban**, **Moussa**, **Amar** et **Redha**.

À mes sœurs : **Fatma** et **Loulou**.

À mes **nièces**.

Vous vous êtes dépensés pour moi sans compter. En reconnaissances de tous les sacrifices consentis par tous et chacun pour me permettre d'atteindre cette étape de ma vie.

À mes neveux, meilleurs vœux de succès dans vos études.

À toute la famille **MESSAOUI** et **BOUALAME**.

À mes enseignants de l'école primaire jusqu'à l'université dont les conseils précieux m'ont guidé, qu'ils trouvent ici l'expression de ma reconnaissance.

À mes **amies** et **À** leurs familles.

Je vous remercie de votre patience vous m'a aidée toujours à avancer vous êtes tous des grandes amies si gentilles, merci d'être toujours près de moi, amies avec les quelles je souris.

À toute la promotion d 'analyse et modélisation mathématiques.

À tous ce qui m'aiment. À tous ce que j'aime surtout Redha.G.

2016-2017

KHOKHA

Résumé

Dans ce mémoire, nous présentons une méthode numérique pour résoudre des problèmes de contrôle optimal fractionnés (PCOF). La dérivée fractionnaire en système dynamique est décrite au sens de Caputo. La méthode est basée sur les polynômes de Bernoulli. Les matrices opérationnelles de l'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville et de la multiplication des polynômes de Bernoulli sont dérivées. Les propriétés des polynômes de Bernoulli sont utilisées pour réduire les problèmes d'optimisation donnés au système d'équations algébriques. En utilisant la méthode itérative de Newton (En utilisant le logiciel Matlab), ce système est résolu et la solution des PCOF est atteinte. Des exemples illustratifs sont inclus pour démontrer la validité et l'applicabilité de la technique.

Mots clés

Contrôle optimal fractionnaire, dérivé fractionnaire de Caputo, intégration fractionnaire de Riemann-Liouville, polynôme de Bernoulli, matrice opérationnelle, solution numérique.

Abstract

In this thesis, we present an numerical method for solving fractional optimal control problems (FOCPs). The fractional derivative in the dynamic system is described in the Caputo sense. The method is based upon Bernoulli polynomials. The operational matrices of fractional Riemann–Liouville integration and multiplication for Bernoulli polynomials are derived. The properties of Bernoulli polynomials are utilized to reduce the given optimization problems to the system of algebraic equations. By using Newton's iterative method, this system is solved and the solution of FOCPs are achieved. Illustrative examples are included to demonstrate the validity and applicability of the technique.

Keywords

Fractional order optimal control, Caputo fractional derivative, Riemann–Liouville fractional integration, Bernoulli polynomials, operational matrix, numerical solution.

Notations

Notations générales

$\mathbb{N}$: l'ensemble des nombres naturels {1, 2, 3, ...}.

$\mathbb{N}_0$: l'ensemble des nombres naturels {0, 1, 2, 3, ...}.

$\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}^n$: espace euclidien de dimension $n, n \geq 1$.

$\mathbb{C}$: l'ensemble des nombres complèxe.

$Re(\alpha)$: la partie réel de nombre complèxe α.

$[s]$: la partie entière de nombre réel s.

$|x|$: la norme euclidienne de x avec

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ω ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$.

$\omega = [0, 1]$.

Δ : la différence du premier ordre avec l'intervalle ω

$$\Delta f(x) = \frac{f(x+1) - f(x)}{1}.$$

Espaces fonctionnels

$\mathcal{C}^n(\Omega)$ l'espace des fonctions n fois continûment différentiables sur Ω.

$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions infiniment différentiables sur Ω.

$L^p(\Omega)$ ensemble des fonctions f mesurables sur Ω telles que $\int_\Omega |f|^p dx < \infty$.

$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{P}}$.

$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable}, \ \exists \text{ une constante } c > 0; |f(x)| \leq c \ p.p. \text{ dans } \Omega \}$.

$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{ c > 0; \ |f(x)| \leq c \ \ p.p. \text{ dans } \Omega \}$.

Introduction

Le concept de calcul fractionnaire n'est pas nouveau, en effet il est ancien que le calcul classique [25]. L'histoire du calcul fractionnaire remonte à plus de 300 ans. En 1695, Leibniz a posé une question à l'Hôpital en échangeant une lettre, " Le sens de la dérivée d' ordre entier peut être généralisé au dérivée d' ordres non entiers ?" Cette question révolutionnaire a suscité la curiosité de l'hôpital, le 30 septembre 1695, il répondit à Leibniz avec une autre question, "Que faire si l'ordre sera $\frac{1}{2}$?" Leibniz a répondu, " Par conséquent, il s'ensuit que sera égal à $x\sqrt{dx : x}$. utiles seront tirées. De nombreux systèmes physiques du monde réel sont gouvernés par une dynamique d'ordre fractionnaire, c'est-à-dire que leur comportement est régi par des équations différentielles fractionnaires (EDFs)[23]. Les EDFs ont suscité un intérêt considérable en raison de leur capacité à modéliser des phénomènes complexes tels que des matériaux viscoélastiques [5], économie [6], mécanique des milieux continus et mécanique statistique [22], mécanique solide [26] et la dynamique des interfaces entre les nanoparticules douces et les surfaces rugueuses [9]. Lorsque les EDFs sont utilisés en conjonction avec l'indice de performance et un ensemble de conditions initiales, ils entraînent des problèmes de contrôle optimal fractionnaire (PCOFs) [1, 2, 3, 20, 21, 28, 29].

La Théorie de contrôle traite des systèmes qui peuvent être contrôlés, c'est-à-dire dont l'évolution peut être influencée par un operateur externe. Nous considérons des systèmes de contrôle qui peuvent être définis comme un système d'équations différentielles en fonction de certains paramètres. Le modèle mathématique, qui représente le système physique, consiste en un ensemble de relations qui décrivent la réponse ou la sortie du système pour différentes entrées. Des contraintes fondées sur la situation physique sont incorporées dans cet ensemble de relations.

Le problème de contrôle optimal peut être interprété comme une extension du calcul des variations. Le contrôle optimal a trouvé ses applications dans de nombreux domaines scientifiques, allant des mathématiques et de l'ingénierie aux sciences biomédicales et sciences de gestion.

La formulation d'un problème de contrôle optimal nécessite

- Une description (ou modèle) mathématique du processus à contrôler (généralement sous forme variable d'état),
- Une fonction objectif (Critère de qualité) ou fonction-coût.
- Un énoncé des conditions aux limites et des contraintes physiques sur les états et / ou les contrôles.

Les problèmes de contrôle optimal fractionnaire peuvent être définis par différentes définitions de dérivées fractionnaires. Les types les plus importants de dérivées fractionnaires sont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo. Les conditions nécessaires d'optimalité pour les PCOFs sont traitées par Agrawal [1, 4], dont la dérivation était au sens de Riemann-Liouville. Ces conditions sont obtenues en utilisant les dérivés fractionnaire au sens de Caputo [3]. Les conditions nécessaires d'optimalité pour les PCOFs donnent des systèmes d'équations Hamiltoniennes dont il existe des opérateurs différentiels fractionnaires droite et des opérateurs gauche. La résolution exacte(solution analytique) du systèmes Hamiltoniens- sauf dans des cas très particuliers- est très difficile. Ces systèmes Hamiltoniens ont été résolu approximativement par [1, 2, 3] pour les dérivés fractionnaires au sens de Riemann-Liouvillea. Les auteurs Yousefi et al. [30] ont utilisé les dérivées fractionnaires au sens de Caputo. D'autre part, Lotfi et al.[20, 21] ont résolu les PCOFs par une méthode directe sans utiliser les formules Hamiltoniennes.

Nous distinguons deux approches de résolution numérique, pour le problème de contrôle optimal :

- Les méthodes indirectes [15], basées sur l'équation d'Euler-Lagrange. Le principal avantage de ces méthodes, est le fait qu'elles produisent aussi l'existence et l'unicité des résultats, des solutions exactes quand le TPBVP (Two-point boundary value problem) associé peut être résolu analytiquement et des estimations d'erreurs quand il est résolu numériquement. Cependant, cette approche présente aussi certains inconvénients [14, 7], telles que la nécessité de dériver des expressions analytiques par

fois délicates, manque de robustesse et l'exigence d'une connaissance approfondie du modèle mathématique et physique du système.

– Les méthodes directes, qui sont basée sur la discrétisation ou la paramétrisation de l'état et / ou des variables de contrôle [10, 11, 12, 13, 17]. La solution optimale est obtenues alors directement par une minimisation de la fonction objectif soumis aux contraintes, en appliquant les techniques de l'optimisation statique.

L'avantage principal d'employer des fonctions orthogonales est ce qu'elles réduisent les problèmes de système dynamique à ceux de résoudre un système des équations algébriques en employant les matrices opérationnelles de l'intégration et de multiplication. Les polynômes de Bernoulli et les séries de Taylor ne sont pas considérées comme des fonctions orthogonales. Néanmoins, ils possèdent des matrices opérationnelles d'intégration. En outre, Saadatmandi et Dehghan [27] été présentés la matrice opérationnelle des dérivées a gauche au sens de Caputo. De plus, les matrices opérationnelles de l'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville pour les polynômes de Legendre et les ondelettes de Haar sont données par Lotfi et al. [20] et Li et Zhao [19], respectivement.

Dans ce mémoire nous aurons utilisé la matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire au sens de Caputo basée sur les polynômes de Bernoulli. Nous concentrons sur les problèmes de commande optimale dont la fonction objectif est quadratique et la dérivée fractionnaire est au sens de Caputo dans le système dynamique comme suit [20] :

$$(P)\quad \begin{cases} J(x,\,u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}[p(t)x^2(t) + s(t)u^2(t) + m\,(t)\,x\,(t)\,u\,(t)]\,dt, \\ D^q x(t) = a(t)x(t) + r(t)u(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Où $p(t) \geq 0$, $s(t) \geq 0$, $m(t) \geq 0$ et $r(t) \neq 0$.

L'objectif de ce mémoire est l'utilisation d'une méthode directe en s'appuyant sur la théorie d'approximation par les polynomes de Bernoulli pour résoudre le problème (P). Ici, les matrices opérationnelles de l'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville $F^{(q)}$ et la multiplication $\tilde{A}$ sont calculées. Pour le problème (P), la méthode consiste à ramener le PCOF (P) à un ensemble d'équations algébriques, d'abord, en augmentant le système

dynamique et le vecteur de commande $u(t)$ en fonction de polynômes de Bernoulli et des coefficients inconnus.

Ce mémoire est organisé comme suite :

Chapitre 1 : nous décrivons quelques définitions et préliminaires mathématiques sur le calcul fractionnaire pour notre développement.

Chapitre 2 : nous préséntons les polynômes de Bernoulli, l'approximation d'une fonction, les matrices opérationnelles de dérivation, d'intégration et la matrice opérationnelle de multiplication.

Chapitre 3 : nous considérons des exemples numériques illustratif pour démontrer l'applicabilité et l'exactitude de la méthode numérique proposé.

Chapitre 1

Calcul fractionnaire

1.1 Espace fonctionnels

1.1.1 Espaces des fonctions intégrales

Définition 1.1 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$,$n \geq 1$ et $1 \leq p \leq +\infty$. L'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ est défini par :*

1 . Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est l'espace des (classes de) fonctions f réelles sur Ω telles que f est mesurable et

$$\int_{\Omega} \mid f(x) \mid \; dx \; < \; +\infty. \tag{1.1.1}$$

2 . Pour $p = +\infty$, l'espace $L^{\infty}(\Omega)$ est l'espace des (classes de) fonctions mesurables f bornées presque partout $(p.p)$ sur Ω.

Théorème 1.1 *Soient $p \in \mathbb{R}$ tel que $1 \leq p \leq +\infty$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $n \geq 1$, on a*

1 . Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :

$$\| \; f \; \|_{L^p(\Omega)} = (\int_{\Omega} \mid f(x) \mid^p \; dx)^{1/p}.$$

2 . L'espace $L^{\infty}(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :

$$\| \; f \; \|_{\infty} = \sup_{x \in \Omega} ess \mid f(x) \mid .$$

Où $\sup_{x \in \Omega} ess \mid f(x) \mid = inf\{M \geq 0 : \mid f(x) \mid \leq M \;\; p.p \;\; sur \; \Omega\}$.

1.1.2 Espaces des fonctions continues

Définition 1.2 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}_0$. On désigne par $C^n(\Omega)$ l'espace des fonctions f qui ont leurs dérivées d'ordre inférieur ou égal à n continues sur Ω. En particulier si $n = 0$, $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$ l'espace des fonctions f continues sur Ω.*

Définition 1.3 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}$. On désigne par $AC(\Omega)$ l'espace des fonctions primitives des fonctions intégrables, c'est à dire : il existe c constante tel que*

$$AC(\Omega) = \left\{ f \setminus \exists \varphi \in L(\Omega) : f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)\, dt \right\}. \tag{1.1.2}$$

et on appelle $AC(\Omega)$ l'espace des fonctions absolument continues sur Ω.

Définition 1.4 *Pour $n \in \mathbb{N}_0$, on désigne par $AC^n(\Omega)$ l'espace des fonctions f ayant des dérivées jusqu'à l'ordre $(n-1)$ continues sur Ω telles que $f^{(n-1)} \in AC(\Omega)$*
c'est à dire :

$$AC^n(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \quad et \quad f^{(n-1)} \in AC(\Omega) \right\}. \tag{1.1.3}$$

1.2 Outils de base

1.2.1 Fonctions utiles

L'un des outils de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma.

i) **La fonction Gamma**

La fonction Gamma est en mathématiques, une fonction complexe, considérée également comme une fonction spéciale. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes.

Définition 1.5 *Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $Re(\alpha) > 0$, on définit la fonction suivante*

$$\Gamma : \alpha \to \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1}\, dt. \tag{1.2.1}$$

Cette intégrale converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement positive. En intégrant par parties, on peut voir que

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\, \Gamma(\alpha), \qquad Re(\alpha) > 0. \tag{1.2.2}$$

En particulier

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.2.3}$$

Exemple 1.1

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) \;=\; \frac{\pi}{sin(\pi z)},$$

et avec $z = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi} \\ -\frac{1}{2}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

ii) **La fonction Bêta**

La fonction Bêta (qui est un type d'intégrale d'Euler, au même titre que la fonction Gamma) est une fonction définie par :

$$B(p,q) = \int_0^1 \tau^{p-1}(1-\tau)^{q-1}\, d\tau, \quad Re(p) > 0, \;\; Re(q) > 0. \tag{1.2.4}$$

La relation entre la fonction Gamma et la fonction Bêta est

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad Re(p) > 0, \;\; Re(q) > 0. \tag{1.2.5}$$

1.3 La dérivation fractionnaire

L'idée principale de la dérivation et l'intégration fractionnaire est la généralisation de la dérivation et l'intégration itérées(ordinnaire). Le terme fractionnaire est un terme trompeur mais il est retenu pour suivre l'usage dominant.

1.3.1 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a,\, b]$

Soit f une fonction continue sur l'intervalle Ω. On considère l'intégrale

$$I^{(1)}f(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

$$I^{(2)}f(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(u)\, du.$$

En permutant l'ordre d'intégration, on obtient

$$I^{(2)}f(x) = \int_a^x (x-t)f(t)\, dt.$$

Plus généralement le n^{eme} itéré de l'opérateur I peut s'écrire

$$I^{(n)}f(x) = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 ... \int_a^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{(n-1)}f(t)dt, \tag{1.3.1}$$

pour tout entier n.

Cette formule est appelée formule de Cauchy s'est depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $(n-1)! = \Gamma(n)$, Riemann rendu compte que le second membre de (1.3.1) pourrait avoir un sens même quand n prenant une valeur non-entière, il était naturel de définir l'intégration fractionnaire.

1.3.2 L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 1.6 *Soit $f \in L^1(\Omega)$. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $q \in \mathbb{C}$, $(Re(q) > 0)$ notée $I_a^q f$ est définie par :*

$$I_a^q f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^t (t-x)^{(q-1)} f(x)\, dx & q > 0, \\ f(t) & q = 0. \end{cases} \tag{1.3.2}$$

Pour $t \in \Omega$, l'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville donne

$$I^q t^v = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v+1+q)} t^{v+q} \qquad v > -1. \tag{1.3.3}$$

la preuve est donnée dans l'exemple(1.3).

Propriétés de l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Par convention

$$I^0 f(t) \;:=\; f(t)$$

i. e, $I^0 := I$ est l'opérateur identique.

L'opérateur de l'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est linéaire.

Théorème 1.2 *Soient f et g deux fonctions dont les intégrations fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre q existent. Alors pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $I^q(\lambda f + g)$ existe et on a :*

$$I^q(\lambda f(t) + g(t)) \quad = \quad \lambda I^q f(t) + I^q g(t). \tag{1.3.4}$$

Proposition 1.1 *Si $f(t)$ continue pour $t \geq 0$ donc on a :*

$$\lim_{q \to 0} I^q f(t) \quad = \quad f(t).$$

(voir Podlubny [24], pp. $65 - 67$).

Théorème 1.3 *Pour $f \in C(\Omega)$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe :*

$$I^{(q)}[I^{(p)} f(t)] = I^{(q+p)} f(t), \quad \textit{pour} \quad q > 0, \ p > 0. \tag{1.3.5}$$

Preuve. La preuve découle directement de la définition

$$I_a^{(q)}[I^{(p)} f(t)] = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^t (t-u)^{q-1} \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^u (u-x)^{p-1} f(x)\, dx\, du. \tag{1.3.6}$$

Or $f \in C(\Omega)$, par le changement $y = \frac{u-x}{t-x}$ on obtient :

$$I_a^{(q)}[I^{(p)} f(t)] = \frac{B(q,p)}{\Gamma(q)\Gamma(p)} \int_a^t (t-x)^{q+p-1} f(x) dx = I^{(q+p)} f(t). \tag{1.3.7}$$

Où $B(q,p)$ désigne la fonction Bêta. ∎

Exemple 1.2 *On considère la fonction f telle que $f(t) = (t-a)^m$.*
A l'aide de changement de variable $\tau = a + x(t-a)$ on trouve :

$$\begin{aligned}
I_a^q (t-a)^m &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^t (t-\tau)^{q-1} (\tau - a)^m \, d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(q)} (t-a)^{q+m} \int_0^1 (1-x)^{q-1} x^m \, dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(q)} (t-a)^{q+m} \beta(m+1,\, q) \\
&= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(q+m+1)} (t-a)^{q+m}.
\end{aligned}$$

Pour $q = 0.5,\ m = 1$ et $a = 0$, on aura

$$I^{0.5}(t) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2.5)} t^{1.5} = \frac{\sqrt{t^3}}{\Gamma(2.5)}.$$

Exemple 1.3 *Soit $f(t) = t^n$ avec $n > -1$ on a :*

$$(I_0^q f)(t) := I^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^t x^n (t-x)^{q-1}\, dx. \tag{1.3.8}$$

En posant : $x = tu$, donc (1.3.8) devient :

$$I^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^1 (tu)^n (1-u)^{q-1} t\, du.$$

En utilisant la fonction Bêta (1.2.4) puis de la relation (1.2.5) on arrive à :

$$\begin{aligned} I^q f(t) &= \frac{t^{n+q}}{\Gamma(q)} \int_0^1 (u)^n (1-u)^{q-1}\, du \\ &= \frac{t^{n+q}}{\Gamma(q)} B(n+1, q) \\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(q+n+1)} t^{q+n}. \end{aligned}$$

1.3.3 La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.7 *Soit $f \in L^1(\Omega)$ une fonction intégrable sur Ω, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $q \in \mathbb{C}\,(Re(q) > 0)$ notée $D^q f$ est définie par :*

$$(D_a^q f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} (\frac{d}{dt})^n \int_a^t (t-x)^{n-q-1} f(x) dx. \tag{1.3.9}$$

Où $n - 1 \leq [Re(q)] < n$ et $t > a$.

En particulier, pour $q = m \in \mathbb{N}$, on a

$$(D_a^0 f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1)} (\frac{d}{dt}) \int_a^t f(x) dx.$$

$$(D_a^m f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1)} (\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}) \int_a^t f(x) dx = \frac{d^m}{dt^m} f(t).$$

Par suite la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coïncide avec la dérivée classique pour $q \in \mathbb{N}$.

Remarque 1.1

$$(D_a^q f)(t) = (\frac{d}{dt})^n (I_a^{n-q} f)(t), \tag{1.3.10}$$

tel que : $n = [Re(q)] + 1, \ \ t > a.$

Exemple 1.4 *1 . Soit* $f(t) = (t-q)^p$ *avec* $p > -1$,

pour $q \geq 0$ *tel que* $n - 1 \leq q \leq n$, *on a d'aprés la remarque (1.1) puis l'exemple :*

$$D_a^q f(t) =^r D^n I^{n-q} f(t) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-q+1)} D^n (t-a)^{n-q+p}.$$

Alors, pour $(q-p) \in \{1, 2, ..., n\}$ *on a :*

$$D_a^q f(t) = D^q (t-a)^{q-j} = 0, \ \ j \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Par ailleurs si $(q-p) \notin \{1, 2, ..., n\}$ *on trouve*

$$D_a^q f(t) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-q+1)} (t-a)^{p-q}.$$

2 . En particulier, si $p = 0$ *et* $q > 0$, *la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction constante* $f(t) = C$ *est non nulle, sa valeur est :*

$$D_a^q f(t) = \frac{C(t-a)^{-q}}{\Gamma(1-q)}.$$

La proposition suivante établit une condition suffisante d'existence de la dérivée fractionnaire.

Proposition 1.2 *Soient* $q \geq 0$ *et* $n = [q] + 1$, *si* $f \in AC^n(\Omega)$ *alors la dérivée fractionnaire* ${}^r D_a^q f$ *existe presque partout sur* Ω *et de plus, elle est donnée par :*

$$D_a^q f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-q+1)} (x-a)^{q-j} + \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_a^t (t-x)^{n-q-1} f^n(x) \, dx. \tag{1.3.11}$$

Propriétés de la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Par analogie avec la dérivation usuelle, et comme conséquence directe de la relation (1.3.2), l'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est linéaire.

Théorème 1.4 *Soient* f *et* g *deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'ordre* q *existent. Alors pour* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $D_a^q(\lambda f + \mu g)$ *existe et on a :*

$$D_a^q(\lambda f + \mu g) = \lambda D_a^q f + \mu D_a^q g. \tag{1.3.12}$$

L'opérateur de dérivation au sens de Riemann-Liouville possède des propriétés résumées dans la proposition suivante :

Proposition 1.3 *Soient $q > 0$, $p > 0$ tels que $n - 1 \leq q \leq n$ et $m - 1 \leq p \leq m$.*

1 . Pour $f \in L^1(\Omega)$, légalité :

$$D_a^q \left(I_a^q f(t)\right) = f(t), \tag{1.3.13}$$

est vrai pour $t \in \Omega$ presque par tout.

2 . Si $q > 0$, $p > 0$, alors pour $f \in L^1(\Omega)$, la relation :

$$D_a^p (D_a^q f)(t) = (I^{q-p} f)(t), \tag{1.3.14}$$

est vrai presque partout sur Ω.

3 . Si $p \geq q > 0$ et la dérivée fractionnaire ${}^r D^{q-p} f$ existe, alors on a :

$$D_a^p (I^q f)(t) = (D_a^{p-q} f)(t). \tag{1.3.15}$$

1.3.4 La dérivée fractionnaire au sens de Caputo

La définition de la dérivation fractionnaire de type Riemann-Liouville a joué un rôle important dans le développement de la théorie des dérivées et intégrales fractionnaires à cause de leurs applications dans les mathématiques pures (solutions des équations différentielles d'ordre entier, définition de nouvelles classes de fonction, sommation des séries, ...). Cependant, la technologie moderne demande une certaine révision de l'approche mathématique pure bien connue, plusieurs auteurs y compris Caputo $(1967 - 1969)$ se sont rendus compte que cette définition doit être révisée, car les problèmes appliqués en mécanique des solides et en rhéologie, exigent des conditions initiales physiquement interprétables par des dérivées classiques, ce qui n'est pas le cas dans la modélisation par l'approche de Riemann-Liouville qui exige la connaissance des conditions initiales des dérivées fractionnaires.

Définition 1.8 *Soient $q \in \mathbb{C}$ avec $Re(q) > 0$, $n \in \mathbb{N}$ tel que $n - 1 < Re(q) < n$ et $f \in C^n(\Omega)$. La dérivée fractionnaire d'ordre q au sens de Caputo de la fonction f notée ${}^c D_a^q$*

est définie par :

$$\begin{aligned} {}^cD_a^q f(t) &:= I^{(n-q)} D^{(n)} f(t), \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_a^t f^{(n)}(x)(t-x)^{n-q-1} dx. \end{aligned} \tag{1.3.16}$$

Soit $t \in \Omega$, l'opérateur de la dérivation fractionnaire de Caputo donne :

$${}^cD^q t^v = \begin{cases} 0 & si\ \ v \in \mathbb{N}_0\ et\ \ v < \lceil q \rceil, \\ \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v+1-q)} t^{v-q} & si\ \ v \in \mathbb{N}_0\ et\ \ v \geq \lceil q \rceil,\ où\ v \notin \mathbb{N}\ et\ \ v > \lceil q \rceil. \end{cases}$$

Où $\lceil q \rceil$ le plus petit nombre entier supérieur ou égal à q,
et $\lfloor q \rfloor$ le plus grand nombre entier inférieur ou égal à q.

Remarque 1.2 *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $q \in]n-1, n[$ s'obtient par une application de l'opérateur d'intégration fractionnaire d'ordre $m-q$ suivi d'une dérivation classique d'ordre m, alors que la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est le résultat de la permutation de ces deux opérations.*

Exemple 1.5 *1 .* ***La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo.***

Si f est constante sur Ω, $f(t) = C$ alors :

$${}^cD_a^q C = 0. \tag{1.3.17}$$

2 . ***La dérivée de $f(t) = (t-a)^\beta$ au sens de Caputo.***

Soit q un entier et $0 \leq n-1 < q < n$ avec $\beta > n-1$, alors on a

$$f^{(n)}(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-n},$$

d'oú

$${}^cD^q (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-q)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^t (t-x)^{n-q-1} (x-a)^{\beta-n}\, dx,$$

effectuant le changement de variable $x = a + s(t-a)$ *on obtient*

$$\begin{aligned}
{}^{c}D^{q}(t-a)^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-q)\Gamma(\beta-n+1)} \int_{a}^{t} (t-x)^{n-q-1}(x-a)^{\beta-n}\,dx \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-q)\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-q} \int_{0}^{1} (1-s)^{n-q-1}s^{\beta-n}\,ds \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)B(n-q,\beta-n+1)}{\Gamma(n-q)\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-q} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-q)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-q)\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(\beta-q+1)}(t-a)^{\beta-q} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-q+1)}(t-a)^{\beta-q}.
\end{aligned}$$

Chapitre 2

Les matrices opérationnelles de Bernoulli

2.1 Les nombres et les polynômes de Bernoulli

En mathématiques, les polynômes de Bernoulli apparaissent dans l'étude de plusieurs fonctions spéciales, ils se manifestent dans la réprésentation intégrable des fonctions périodiques différentiables, puisqu'ils sont employés pour approximer telles fonctions en terme de polynôme. À la différence des polynômes orthogonaux, les polynômes de Bernoulli possèdent des matrices opérationnelles et des différentiations (et également de l'intégration).
Dans cette section, nous mentionnons quelques propriétés des polynômes de Bernoulli qui seront d'importance fondamentale dans la suite.

Nombres de Bernoulli

Définition 2.1 *Les nombres de Bernoulli β_m, $m = 0, 1, 2, \ldots$ sont définis par la relation de récurrence :*

$$\begin{cases} \beta_0 = 1, \\ \sum\limits_{i=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ i \end{pmatrix} \beta_i = \beta_m, \quad m = 2, 3, 4, ... \end{cases} \tag{2.1.1}$$

On voit immédiatement que les β_m sont des nombres rationnels et que $(m+1)!\,\beta_m$ est un entier.

Les premies nombres de Bernoulli

Les premies nombres de Bernoulli sont donnés par le tableau suivant :

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
β_m	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$

Définition 2.2 *Les nombres de Bernoulli peuvent aussi être définis par l'intermédiaire de fonction génératrice.*
Leur fonction génératrice exponentielle est $t/(e^t - 1)$, de telle sorte que

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \frac{t^m}{m!}. \tag{2.1.2}$$

Pour tout $\mid t \mid < 2\pi$. (Le rayon de convergence de cette série entière).

Remarque 2.1 *À l'aide de la fonction génératrice, on peut démontrer que $\beta_m = 0$ lorsque m est impair et différent de 1, et que les signes des β_m alterment pour m pair. On a donc*

$$\beta_{2m} = (-1)^{m-1} \mid \beta_{2m} \mid . \tag{2.1.3}$$

Ces nombres jouent un rôle considérable dans une foule de questions d'Analyse. À l'aide des nombres de Bernoulli, on peut facilement résoudre l'équation

$$f(t+1) - f(t) = mt^{m-1},$$

m étant un entier positif. En effet, on sait trouver un polynôme qui satisfait à cette équation. Ce polynôme est du degré m et il est déterminé par une constante arbitrare.

Définition 2.3 *Les polynômes de Bernoulli sont les polynômes $\beta_m(t)$ qui satisfont à l'équation aux différences finies*

$$\Delta\beta_m(t) = mt^{m-1}, \tag{2.1.4}$$

alors, pour $t = 0$, $\beta_m(0)$ est égale au nombre de Bernoulli β_m, i.e : $\beta_m(0) = \beta_m$.
Soit

$$\beta_m(t) = \sum_{i=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ i \end{pmatrix} \alpha_i t^{m-i}.$$

En substituant cette expression dans l'équation (2.1.4) on voit que les coefficients α_m doivent satisfaire à la relation de récurrence

$$\begin{cases} \alpha_0 = 1, \\ \sum_{i=0}^{m} \alpha_i = \alpha_m. \quad m = 2,\ 3,\ 4,\ .... \end{cases}$$

Mais cette relation coïncide avec celle qui détermine les nombres de Bernoulli. On a donc $\alpha_m = \beta_m$ et par conséquent les polynômes de Bernoulli sont définis par la relation :

$$\beta_m(t) = \sum_{i=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ i \end{pmatrix} \beta_i t^{m-i}. \tag{2.1.5}$$

Donc les premiers polynômes de Bernoulli sont donnés par :

$$\begin{aligned} \beta_0(t) &= 1. \\ \beta_1(t) &= t - \tfrac{1}{2}. \\ \beta_2(t) &= t^2 - t + \tfrac{1}{6}. \\ \beta_3(t) &= t^3 - \tfrac{3}{2}t^2 + \tfrac{1}{2}t. \qquad . \\ \beta_4(t) &= t^4 - 2t^3 + t^2 - \tfrac{1}{30}. \\ \beta_5(t) &= t^5 - \tfrac{5}{2}t^4 + \tfrac{5}{3}t^3 - \tfrac{1}{6}t. \\ \beta_6(t) &= t^6 - 3t^5 + \tfrac{5}{2}t^4 - \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{42}. \end{aligned}$$

Définition 2.4 *F.Costabile a défini les polynômes de Bernoulli de dégré m comme :*

$$\beta_0(t) = 1,$$

et pour $m \in \mathbb{N}$.

$$\beta_m(t) = \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 & \dots & t^{m-1} & t^m \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{m} & \frac{1}{m+1} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & \dots & m-1 & m \\ 0 & 0 & 0 & \binom{3}{2} & \dots & \binom{m-1}{2} & \binom{m}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{m-1}{m-2} & \binom{m}{m-2} \end{vmatrix}$$

Selon [18], les polynômes de Bernoulli forment une base complète pendant l'intervalle $\omega = [0,\ 1]$.

Propriétés des polynômes de Bernoulli

Les polynômes de Bernoulli jouent un rôle important en différents secteurs des mathématiques. incluent la théorie de nombre et la théorie de différences finies. Ces polynômes ont beaucoup de propriétés semblables.

1) Les polynômes de Bêrnoulli vérifient la fonction génératrice suivante :

$$\frac{xe^{tx}}{e^x - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m(t)\frac{x^m}{m!}. \tag{2.1.6}$$

2) La dérivation de polynôme de Bernoulli par rapport à t, est donnée par la relation :

$$\beta'_m(t) = m\beta_{m-1}(t), \quad m = 1, 2, ... \tag{2.1.7}$$

d'où encore,

$$\beta_m^{(p)}(t) = m(m-1)...(m-p+1)\beta_{m-p}(t). \quad m = 1, 2, ..., \text{et } p \geq 2. \tag{2.1.8}$$

3) Les polynômes de Bernoulli peuvent être définis par

$$\beta_m(t) = m\int_0^t \beta_{m-1}(x)\,dx + \beta_m. \tag{2.1.9}$$

4) Soit $t \in \omega$, on a

$$\int_0^1 \beta_m(t)\,dt = 0, \quad m = 1, 2, ... \tag{2.1.10}$$

5) L'intégrale intéressante suivante pour un produit de deux polynômes de Bernoulli apparaît dans le livre de Nörlund, pour tous m, $n \geq 1$. On a :

$$\int_0^1 \beta_n(t)\beta_m(t)\,dt = (-1)^{n-1}\frac{m!n!}{(m+n)!}\beta_{m+n}. \tag{2.1.11}$$

6) Les polynômes de Bernoulli vérifient

$$\beta_m(t+1) - \beta_m(t) = mt^{m-1}, \tag{2.1.12}$$

$$\beta_m(t+1) = \sum_{k=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} \beta_k(t), \tag{2.1.13}$$

D'aprés les équations (2.1.12) et (2.1.13), pour n'importe quel nombre entier $m \geq 0$ on a :

$$\sum_{k=0}^{m} \begin{pmatrix} m+1 \\ k \end{pmatrix} \beta_k(t) \quad = \quad (m+1)t^m \tag{2.1.14}$$

Donc on obtient $(m+1)$ équations peut eécrites sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{m+1}\begin{pmatrix} m+1 \\ 0 \end{pmatrix} & \frac{1}{m+1}\begin{pmatrix} m+1 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots & \frac{1}{m+1}\begin{pmatrix} m+1 \\ m \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0(t) \\ \beta_1(t) \\ \vdots \\ \beta_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^m \end{bmatrix}$$

On pose :

$$Q = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{m+1}\begin{pmatrix} m+1 \\ 0 \end{pmatrix} & \frac{1}{m+1}\begin{pmatrix} m+1 \\ 1 \end{pmatrix} & \cdots & \frac{1}{m+1}\begin{pmatrix} m+1 \\ m \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

Q est une matrice triangulaire inférieure de dimension $(m+1) \times (m+1)$ avec les éléments diagonaux déffirents de zéro et $det(Q) = 1$. Alors, elle est inversible.

Donc le vecteur de Bernoulli peut être donné directement par :

$$B(t) = Q^{-1}T(t), \tag{2.1.15}$$

avec

$$\{Q\}_{i,j=1}^{m+1} \quad = \quad \begin{cases} \frac{1}{i}\begin{pmatrix} i \\ j-1 \end{pmatrix} & \text{si} \quad i \geq j, \\ 0 & \text{si} \quad i < j. \end{cases}$$

Pour $i = \overline{0..m}$, et d'aprés l'équation (2.1.5) nous pouvons obtenir la matrice $\beta_i(t)$ de la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\beta_i(t) &= \sum_{k=0}^{i} \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} \beta_k t^{i-k} \\
&= \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} \beta_i + \begin{pmatrix} i \\ i-1 \end{pmatrix} \beta_{i-1} t + ... + \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \beta_1 t^{i-1} + \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \beta_0 t^i \\
&= \left[\begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} \beta_i \quad \begin{pmatrix} i \\ i-1 \end{pmatrix} \beta_{i-1} \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \beta_0 \quad \overbrace{0 \ 0 \ \cdots \ 0}^{m-i} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^{i+1} \\ \vdots \\ t^m \end{bmatrix} \\
&= M_i T(t).
\end{aligned}$$

Où

$$T(t) = \left[\begin{array}{ccccc} 1 & t & t^2 & \cdots & t^m \end{array} \right],$$

et

$$M_i = \left[\begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} \beta_i \quad \begin{pmatrix} i \\ i-1 \end{pmatrix} \beta_{i-1} \quad \cdots \quad \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \beta_1 \quad \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \beta_0 \quad \overbrace{0 \ 0 \ \cdots \ 0}^{m-i} \right].$$

Maintenant, nous pouvons augmenter la matrice $B(t) = [\beta_0(t),\ \beta_1(t),\ ...,\ \beta_m(t)]^T$ par :

$$\begin{aligned}
B(t) &= [\beta_0(t),\ \beta_1(t),\ ...,\ \beta_m(t)]^T \\
&= [M_0 T(t),\ M_1 T(t),\ ...,\ M_m T(t)]^T \\
&= [M_0,\ M_1,\ ...,\ M_m]^T T(t) \\
&= \begin{bmatrix} \beta_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \beta_1 & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \beta_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix} \beta_m & \begin{pmatrix} m \\ m-1 \end{pmatrix} \beta_{m-1} & \begin{pmatrix} m \\ m-2 \end{pmatrix} \beta_{m-2} & \cdots & \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix} \beta_0 \end{bmatrix} T(t) \\
&= MT(t).
\end{aligned}$$

Donc, on a :

$$B(t) \quad = \quad MT(t), \tag{2.1.16}$$

où M est de dimension $(m+1) \times (m+1)$ tel que :

$$\{M\}_{i,j=1}^{m+1} \quad = \quad \begin{cases} \beta_{i-j} \begin{pmatrix} i-1 \\ i-j \end{pmatrix} & \text{si} \quad i \geq j, \\ 0 & \text{si} \quad i < j. \end{cases}$$

Alors M est une matrice triangulaire inférieure et $det(M) = 1$. Donc, elle est inversible. D'aprés, les équations (2.1.15) et (2.1.16), on obtient

$$M \quad = \quad Q^{-1}.$$

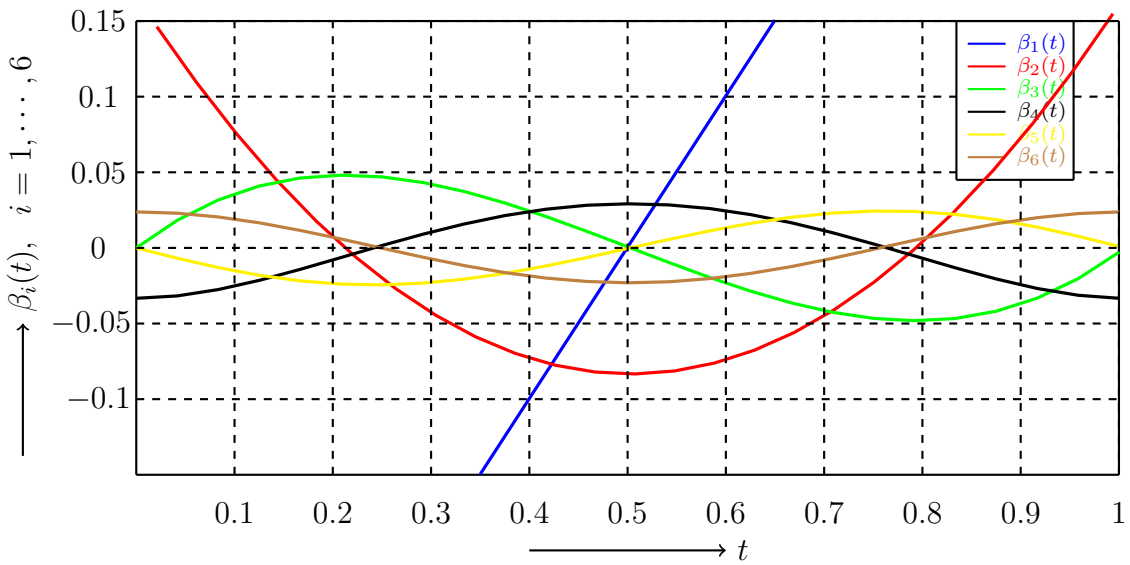


Fig 2.1 : Les polynômes de Bernoulli sur ω.

Dans la figure (2.1), le comportement de plusieurs polynômes de Bernoulli dans ω. On a pu observer géométriquement la propriété (2.1.10).

2.2 Approximation d'une fonction

Supposons que $L^2(\omega)$ est un espace de Hilbert et soit $Y = Vect\{\beta_0(t), \beta_1(t), ..., \beta_m(t)\}$ un sous-espace fermé de dimension finié, donc Y est un sous-espace complet de H.

Donc, si $f(t)$ est un élément arbitraire dans $L^2(\omega)$, il a une meilleure approximation unique dans Y sachant que :

$$\exists\, f_0(t) \in Y, \;\; \text{telle que } \forall y(t) \in Y, \qquad \| f(t) - f_0(t) \| \leq \| f(t) - y(t) \| .$$

Cela implique que

$$\forall y(t) \in Y, \qquad \langle f(t) - f_0(t)\,,\, y(t) \rangle = 0, \tag{2.2.1}$$

où $\langle , \rangle$ désigne le produit scalaire. Comme $f_0(t) \in Y$, il existe des coefficients uniques c_0, c_1, ..., c_m tels que

$$f(t) \simeq f_0(t) = \sum_{i=0}^{m} c_i \beta_i(t) = C^T B(t). \tag{2.2.2}$$

où C et $B(t)$ sont donnés par

$$C = [c_0,\, c_1,\, ...,\, c_m]^T. \tag{2.2.3}$$

$$B(t) = [\beta_0(t),\, \beta_1(t),\, ...,\, \beta_m(t)]^T. \tag{2.2.4}$$

En utilisant l'équation (2.2.1), nous aurons :

$$\langle f(t) - C^T B(t), \beta_i(t) \rangle \;\; = \;\; 0, \quad i = 0,\, 1,\, ...,\, m.$$

Pour simplifer, nous écrivons

$$C^T \langle B(t), B(t) \rangle = \langle f(t), B(t) \rangle, \tag{2.2.5}$$

où $\langle B(t), B(t) \rangle$ est une matrice de dimension $(m+1) \times (m+1)$. Soit

$$H = \langle B(t), B(t) \rangle = \int_0^1 B(t) B^T(t)\, dt. \tag{2.2.6}$$

La matrice H de l équation (2.2.6) peut être calculée en utilisant la relation (2.1.11).
Toute fonction $f(t) \in L^2(\omega)$ peut être développée en série de polynômes de Bernoulli comme :

$$f(t) \;\; = \;\; C^T B(t). \tag{2.2.7}$$

Où, à partir des équations (2.2.5) et (2.2.6), on obtient

$$C \;\; = \;\; H^{-1} \langle f(t), B(t) \rangle. \tag{2.2.8}$$

Lemme 2.1 *Supposons que* $f(t) \in C^{m+1}(\omega)$ *et soit* $Y = Vect\{\beta_0(t), \beta_1(t), ..., \beta_m(t)\}$. *Si* $C^T B(t)$ *est la meilleure approximation de* $f(t)$ *dans* Y. *On a*

$$\| f(t) - C^T B(t) \|_{L^2(\omega)} \leq \frac{k}{(m+1)!\sqrt{2m+3}}. \tag{2.2.9}$$

Où $k = \max_{t\in\omega} | f^{(m+1)}(t) |$.

Preuve. L'ensemble $\{1, t, ..., t^m\}$ est la base de polynômes du dégrée m. On définie

$$y_1(t) = f(0) + tf'(0) + \frac{t^2}{2!}f''(0) + ... + \frac{t^m}{m!}f^{(m)}(0),$$

l'expréssion de formule de Taylor. On obtient

$$| f(t) - y_1(t) | = | f^{(m+1)}(\xi_t)\frac{t^{m+1}}{(m+1)!} | .$$

Où $\xi_t \in \omega$. Depuis, si $C^T B(t)$ est la meilleure approximation de $f(t)$ dans Y. On a :

$$\begin{aligned}
\| f(t) - C^T B(t) \|^2_{L^2(\omega)} &\leq \| f(t) - y_1(t) \|^2_{L^2(\omega)} \\
&= \int_0^1 | f(t) - y_1(t) |^2 \, dt \\
&= \int_0^1 \| f^{(m+1)}(\xi_t) \|^2 \, (\frac{t^{m+1}}{(m+1)!})^2 \, dt \\
&\leq \frac{k^2}{(m+1)!)^2} \int_0^1 t^{2m+2} \, dt \\
&= \frac{k^2}{(m+1)!^2(2m+3)}.
\end{aligned}$$

■

Théorème 2.1 *[16] Supposons que* $f(t) \in L^2(\omega)$, *soit* $f_N(t)$ *est la meilleure approximation de* $f(t)$, *tel que*

$$f_N(t) = \sum_{i=0}^{N} c_i\beta_i(t) = C^T B(t). \tag{2.2.10}$$

Où C, $B(t)$ *sont définis dans les équations (2.2.3) et (2.2.4), nous aurons*

$$\lim_{N\to\infty} \| f(t) - f_N(t) \|_{L^2(\omega)} = 0.$$

Exemple 2.1 *Soit la fonction* $f(t) = \sqrt{t}$, *selon la base :*

$$B_{5\times 1}(t) = \left[1,\, t - \frac{1}{2},\, t^2 - t + \frac{1}{6},\, t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t, t^4 - 2t^3 + t^2 - \frac{1}{30}\right]^T.$$

Pour calculer les résultats, on utilise le Matlab (voir Programme Matlab d'approximation d'une fonction (3.1) dans l'annexe). Alors

$$H = \langle B(t), B(t)\rangle = \int_0^1 B(t)B^T(t)dt = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{120} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} & 0 & -\frac{1}{630} \\ 0 & -\frac{1}{120} & 0 & \frac{1}{840} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{630} & 0 & \frac{1}{2100} \end{pmatrix}$$

donc

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 280 & 0 \\ 0 & 0 & 3780 & 0 & 12600 \\ 0 & 280 & 0 & 2800 & 0 \\ 0 & 0 & 12600 & 0 & 44100 \end{pmatrix}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \langle f(t), B(t)\rangle &= \left[\int_0^1 f(t)\beta_0(t)\,dt, \int_0^1 f(t)\beta_1(t)\,dt, \int_0^1 f(t)\beta_2(t)\,dt, \int_0^1 f(t)\beta_3(t)\right]^T \\ &= \left[\frac{2}{3}, \frac{1}{15}, -\frac{1}{315}, -\frac{2}{315}, \frac{1}{1155}\right]^T, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} C &= H^{-1}\langle f(t), B(t)\rangle \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 280 & 0 \\ 0 & 0 & 3780 & 0 & 12600 \\ 0 & 280 & 0 & 2800 & 0 \\ 0 & 0 & 12600 & 0 & 44100 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{15} \\ -\frac{1}{315} \\ -\frac{2}{315} \\ \frac{1}{1155} \end{bmatrix} \\ &= \left[\frac{2}{3}, \frac{8}{9}, -\frac{12}{11}, \frac{8}{9}, -\frac{20}{11}\right]^T. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2 \simeq C^T B(t) \\ &= \frac{10}{99} + \frac{80}{33}t - \frac{140}{33}t^2 + \frac{448}{99}t^3 - \frac{20}{11}t^4. \end{aligned}$$

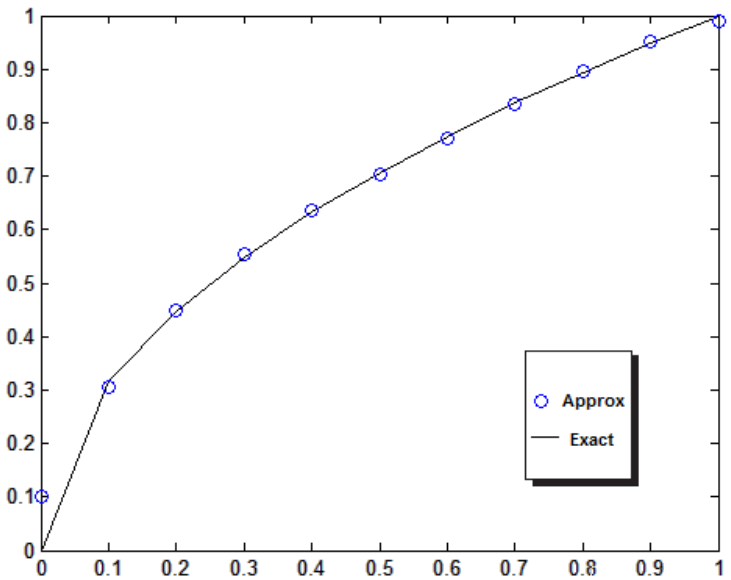


Fig 2.2 : Approximation de $\sqrt{t}$.

Exemple 2.2 *Soit la fonction* $f(t) = te^t$, *selon la base :*

$$B_{4\times 1}(t) = \left[1,\, t - \frac{1}{2},\, t^2 - t + \frac{1}{6},\, t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t\right]^T.$$

En utilisant le Matlab (voir (3.1) dans l'annexe), on obtient :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{120} \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{120} & 0 & \frac{1}{840} \end{pmatrix}$$

donc

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 280 \\ 0 & 0 & 180 & 0 \\ 0 & 280 & 0 & 2800 \end{pmatrix}$$

D'autre part

$$\langle f(t), B(t)\rangle \quad = \quad \left[1,\, e-\frac{5}{2},\, -3e+\frac{49}{6},\, -34+\frac{25}{2}e\right]^T$$

donc

$$C \quad = \quad [1,\, -9620+3540e,\, -540e+1470,\, -95900+35280e]^T.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} f(t) \quad &= \quad te^t \simeq C^T B(t) \\ &= \quad 5056-59040t+21720te-1860e-53460t^2e+145320t^2-95900t^3+35280t^3e. \end{aligned}$$

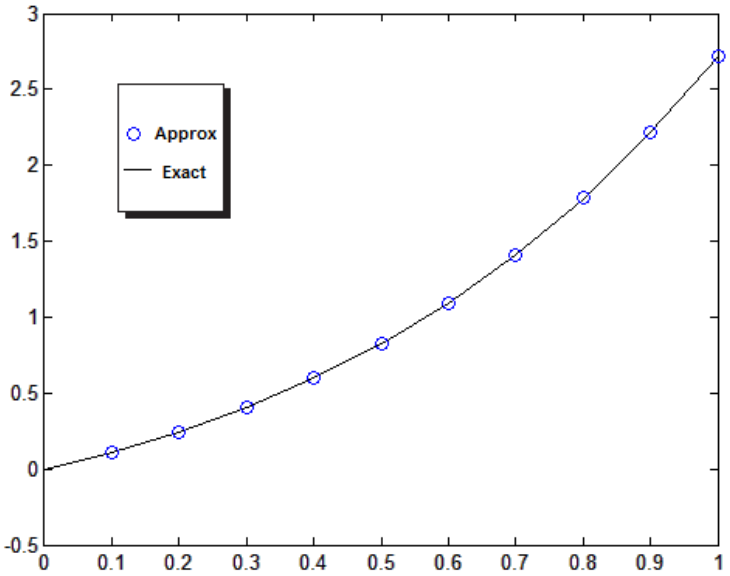


Fig 2.3 *: Approximation de* te^t.

2.3 Les matrices opérationnelles

Les matrices opérationnelles sont utilisées pour résoudre beaucoup de problèmes physiques et technologiques par exemple : les systèmes dynamiques, systèmes de commande optimal, systèmes robotiques etc. En outre, elles sont employées dans plusieurs secteurs d'analyse numérique, et elles tiennent l'importance particulière dans tels sujets comme les équations intégrales, les équations différentielles, calcul variationnel etc. Dans beaucoup de livres, on utilisé la matrice opérationnelle pour des méthodes spectrales.
Commençons cette section par présenter les matrices opérationnelles. Soit

$$B(t) \quad = \quad [\beta_0(t),\, \beta_1(t),\, ...,\, \beta_m(t)]^T,$$

les matrices D et F sont appelées réspectivement matrices opérationnelles des dérivés et des intégrales si et seulement si :

$$\frac{d}{dt}B(t) \simeq DB(t), \tag{2.3.1}$$

$$\int_0^t B(x)\,dx \simeq FB(t). \tag{2.3.2}$$

En outre, soit $A = [a_0, a_1, ..., a_m]$, $\tilde{A}$ est appelé matrice opérationnelle du produit si et seulement si

$$B(t)B^T(t)A \simeq \tilde{A}B(t). \tag{2.3.3}$$

2.3.1 La matrice opérationnelle de dérivation

Théorème 2.2 *Soit $B(t)$ le vecteur de Bernoulli, D est la matrice opérationnelle de dérivation de dimension $(m+1)\times(m+1)$, tel que les éléments de D sont obtenus par :*

$$\{D_{i,j}\}_{i,j=0}^{m} = \begin{cases} i & si \;\; i = j+1, \\ 0 & si \; non. \end{cases}$$

Preuve. En utilisant l'équation (2.1.7), nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}B(t) &= \left[\frac{d}{dt}\beta_0(t), \frac{d}{dt}\beta_1(t), ..., \frac{d}{dt}\beta_m(t)\right] \\ &= [0, \beta_0(t), 2\beta_1(t), 3\beta_2(t), ..., m\beta_{m-1}(t)] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0(t) \\ \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \\ \beta_3(t) \\ \vdots \\ \beta_m(t) \end{bmatrix} = DB(t). \end{aligned}$$

■

Proposition 2.2 *Soient $n \geq 1$ et $B(t)$ le vecteur de Bernoulli, la matrice opérationnelle de dérivation d'ordre entier n notée D^n, de sorte que*

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n}B(t) &= \left[\frac{d^n}{dt^n}\beta_0(t),\ \frac{d^n}{dt^n}\beta_1(t),\ ...,\ \frac{d^n}{dt^n}\beta_m(t)\right] \\ &= D^n B(t). \end{aligned}$$

Exemple 2.3 *Pour $m = 3$ on a $B_{4\times1}(t) = \left[1,\ t-\frac{1}{2},\ t^2-t+\frac{1}{6},\ t^3-\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{2}t\right]^T$.*
Alors la première dérivée de $B_{4\times1}(t)$ est :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}B(t) &= \left[0,\ 1,\ 2\left(t-\frac{1}{2}\right),\ 3\left(t^2-t+\frac{1}{6}\right)\right] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0(t) \\ \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \\ \beta_3(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La deuxèime dérivée de $B_{4\times1}(t)$ est :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}B(t) &= \left[0,\ 0,\ 2,\ 6\left(t-\frac{1}{2}\right)\right] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0(t) \\ \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \\ \beta_3(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad D^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sont les matrices opérationnelles de dérivation d'ordre 1 et d'ordre 2 (réspectivement).

2.3.2 La matrice opérationnelle d'intégration

La matrice opérationnelle d'intégration d'ordre entier

Soit $B(t)$ le vecteur de Bernoulli, F est la matrice opérationnelle d'intégration de dimension $(m+1)\times(m+1)$, en utilisant l'équation (2.1.9) on obtient :

$$\int_0^t B(x)\,dx \quad \simeq \quad FB(t).$$

$$\int_0^t B(x)\,dx \quad = \quad \begin{bmatrix} \int_0^t \beta_0(x)\,dx \\ \int_0^t \beta_1(x)\,dx \\ \vdots \\ \int_0^t \beta_m(x)\,dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1(t)-\beta_1 \\ \frac{\beta_2(t)-\beta_2}{2} \\ \frac{\beta_3(t)-\beta_3}{3} \\ \vdots \\ \frac{\beta_{m+1}(t)-\beta_{m+1}}{m+1} \end{bmatrix}$$

en utilisant l'expréssion de $\beta_i(t)$, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\beta_i(t)-\beta_i}{i} &= \frac{1}{i}\sum_{k=0}^{i}\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix}\beta_k t^{i-k} + \frac{1}{i}\beta_i \\ &= \frac{1}{i}\begin{pmatrix} i \\ i-1 \end{pmatrix}\beta_{i-1}t + \frac{1}{i}\begin{pmatrix} i \\ i-2 \end{pmatrix}\beta_{i-2}t^2 + ... + \frac{1}{i}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\beta_1 t^{i-1} + \frac{1}{i}\beta_0 t^i \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{i}\begin{pmatrix} i \\ i-1 \end{pmatrix}\beta_{i-1} & \frac{1}{i}\begin{pmatrix} i \\ i-2 \end{pmatrix}\beta_{i-2} & \cdots & \frac{1}{i}\beta_0 & \underbrace{0 \quad \cdots \quad 0}_{m-i} \end{bmatrix} T(t) \\ &= U_i T(t) = U_i Q B(t), \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

où $i = 1, 2, ..., m$. Ainsi nous devons juste approximer $\frac{\beta_{m+1}(t)-\beta_{m+1}}{m+1}$. En utilisant l'équation (2.2.2), nous avons

$$\frac{\beta_{m+1}(t)-\beta_{m+1}}{m+1} \quad \simeq \quad \sum_{j=0}^{m}\gamma_j\beta_j(t) = \psi^T B(t) \tag{2.3.5}$$

où $\psi = [\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_m]^T$, On remplace les équations (2.3.4) et (2.3.5) dans l'équation (2.3.4), nous avons :

$$\begin{aligned}\int_0^t B(x)\,dx &= \begin{bmatrix} U_1QB(t) \\ U_2QB(t) \\ \vdots \\ U_mQB(t) \\ \psi^TMQB(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_m \\ \psi^TM \end{bmatrix} QB(t) \\ &= UQB(t) \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

$$\Rightarrow \qquad F = UQ,$$

où

$$U = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & \cdots & U_m & \psi^TM \end{bmatrix}^T.$$

Exemple 2.4 *Soit* $B_{3\times1}(t) = \left[1, t - \frac{1}{2}, t^2 - t + \frac{1}{6}\right]^T$. *On calcule l'intégrale de* $B(t)$. *Donc, on a :*

$$\begin{aligned}\int_0^t B(x)\,dx &= \begin{bmatrix} \beta_1(t) - \beta_1 \\ \frac{\beta_2(t)-\beta_2}{2} \\ \frac{\beta_3(t)-\beta_3}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \psi^TM \end{bmatrix} QB(t) \\ &= UQB(t). \end{aligned}$$

Où

$$U = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & \psi^TM \end{bmatrix}^T$$

Tel que :

$$\beta_1(t) - \beta_1 = \begin{bmatrix} 0 & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \beta_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\beta_2(t)-\beta_2}{2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\beta_1 & \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\beta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\\ t\\ t^2 \end{bmatrix}$$

Pour l'approximation de $\frac{\beta_3(t)-\beta_3}{3}$*, en utilisant le code Matlab (3.1)(voir dans l'annexe).*

On obtient :

$$\psi = \left[0, -\frac{1}{30}, 0\right]^T.$$

Donc

$$\psi^T M = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{30} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 & 0 & 0 \\ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\beta_1 & \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\beta_0 & 0 \\ \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\beta_2 & \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\beta_1 & \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\beta_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{60} & -\frac{1}{30} & 0 \end{bmatrix}.$$

Donc la matrice d'intgration est :

$$F = UQ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{60} & -\frac{1}{30} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} & \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} & 0 \\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} & \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} & \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{30} & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice opérationnelle d'intégration d'ordre fractionnaire

L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville du vecteur $B(t)$ donné dans l'équation (2.2.4) peut être exprimé par :

$$I^{(q)}B(t) = F^{(q)}B(t).$$

Où $F^{(q)}$ est une matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de dimension $(m+1)\times(m+1)$. Dans cette section, nous dérivons la matrice $F^{(q)}$. En utilisant les équations (1.3.3) et (2.1.5) pour $i = 0, 1, ..., m$ et linéarités de l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann Liouville nous obtenons :

$$\begin{aligned} I^q\beta_i(t) &= I^q\left(\sum_{r=0}^{i}\begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix}\beta_{i-r}t^r\right) \\ &= \sum_{r=0}^{i}\begin{pmatrix} i \\ r \end{pmatrix}\beta_{i-r}I^q t^r \\ &= \sum_{r=0}^{i}\frac{i!}{(i-r)!\Gamma(r+1+q)}\beta_{i-r}t^{q+r} \\ &= \sum_{r=0}^{i}b_{i,r}^{(q)}t^{q+r}. \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Où

$$b_{i,r}^{(q)} = \frac{i!}{(i-r)!\Gamma(r+1+q)}\beta_{i-r}. \tag{2.3.8}$$

Et t^{q+r} peut être développée en série de polynômes de Bernoulli comme

$$t^{q+r} \simeq \sum_{j=0}^{m} c_{r,j}\beta_j(t). \tag{2.3.9}$$

On remplace l'équation (2.3.9) dans l'équation (2.3.7) pour $i = 0, 1, ..., m$, on obtient

$$I^q\beta_i(t) \simeq \sum_{r=0}^{i} b_{i,r}^{(q)}\sum_{j=0}^{m} c_{r,j}\beta_j(t) = \sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{r=0}^{i}\theta_{i,j,r}\right)\beta_j(t). \tag{2.3.10}$$

Où

$$\theta_{i,j,r} = b_{i,r}^{(q)}c_{r,j}. \tag{2.3.11}$$

Donc l'équation (2.3.10) devient

$$I^q\beta_i(t) \simeq \left[\sum_{r=0}^{i}\theta_{i,0,r}, \sum_{r=0}^{i}\theta_{i,1,r}, ..., \sum_{r=0}^{i}\theta_{i,m,r}\right]B(t), \qquad i = 0, 1, ..., m. \tag{2.3.12}$$

Par conséquent, nous obtenons la matrice d'intégration d'ordre fractionnaire q, $F^{(q)}$:

$$F^{(q)} = \begin{bmatrix} \theta_{0,0,0} & \theta_{0,1,0} & \cdots & \theta_{0,m,0} \\ \sum_{r=0}^{1} \theta_{1,0,r} & \sum_{r=0}^{1} \theta_{1,1,r} & \cdots & \sum_{r=0}^{1} \theta_{1,m,r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{r=0}^{m} \theta_{m,0,r} & \sum_{r=0}^{m} \theta_{m,1,r} & \cdots & \sum_{r=0}^{m} \theta_{m,m,r} \end{bmatrix} \tag{2.3.13}$$

2.3.3 La matrice opérationnelle de produit

Soient $B(t) = [\beta_0(t), \beta_1(t), ..., \beta_m(t)]^T$ et $A = [a_0, a_1, ..., a_m]^T$, la propriété suivante du produit de deux vecteurs de polynômes de Bernoulli sera également employée :

$$B(t)B^T(t)A \simeq \tilde{A}B(t), \tag{2.3.14}$$

où $\tilde{A}$ est la metrice opérationnelle de multiplication de dimension $(m+1) \times (m+1)$. En utilisant les matrices de transformation entre les polynômes de $B(t)$ et de $T(t)$ de la section précédente, nous avons :

$$B(t)B^T(t)A = MT(t)T^T(t)M^TA.$$

On pose $R = M^TA$. Maintenant, on suppose que :

$$T(t)T^T(t)R = \tilde{R}T(t). \tag{2.3.15}$$

Puis, nous avons :

$$B(t)B^T(t)A = M\tilde{R}T(t) = M\tilde{R}QB(t),$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{A} = M\tilde{R}Q,$$

alors, afin de réaliser $\tilde{A}$, il est suffisant d'obtenir $\tilde{R}$. En utilisant l'équation (2.3.15), nous avons :

$$\begin{aligned} T(t)T^T(t)R &= \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & \cdots & t^m \\ t & t^2 & t^3 & \cdots & t^{m+1} \\ t^2 & t^3 & t^4 & \cdots & t^{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^m & t^{m+1} & t^{m+2} & \cdots & t^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & \cdots & r_m \\ 0 & r_0 & r_1 & \cdots & r_{m-1} \\ 0 & 0 & r_0 & \cdots & r_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & r_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^m \end{bmatrix} = \tilde{R}T(t). \end{aligned}$$

Exemple 2.5 *Pour $m = 2$, soient $B(t) = [1,\, t - \frac{1}{2},\, t^2 - t + \frac{1}{6}]^T$, $A = [1,\, 0,\, 0]^T$ et $T(t) = [1,\, t,\, t^2]^T$. On a :*

$$\begin{aligned} B(t)B^T(t)A &\simeq \tilde{A}B(t) \\ &= MT(t)T^T(t)M^TA. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} R &= M^TA \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

puis, on calcule $\tilde{R}$ *tel que* $T(t)T^T(t)R = \tilde{R}T(t)$,

$$\begin{aligned} T(t)T^T(t)R &= \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & t^2 & t^3 \\ t^2 & t^3 & t^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{R}} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

D'où

$$B(t)B^T(t)A = M\tilde{R}T(t) = M\tilde{R}QB(t).$$

Par conséquent, $\tilde{A}$ *la matrice opérationnelle de produit est :*

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= M\tilde{R}Q \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{3\times 3}. \end{aligned}$$

2.4 La méthode de résolution

Dans cette section, nous considérons le problème (P) donné.

Pour la simplicité et sans perte de généralité, nous considérons $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ et $t \in [0, 1]$ Par conséquence, nous considérons le problème de commande optimale fractionnaire donné par :

$$J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^1 [p(t)x^2(t) + s(t)u^2(t) + m(t)x(t)u(t)]\, dt \tag{2.4.1}$$

$$D^q x(t) = a(t)x(t) + r(t)u(t), \qquad x(0) = x_0. \tag{2.4.2}$$

On approxime le temps partiel d'état $D^q x(t)$ et le contrôle variable $u(t)$ avec le polynôme de Bernoulli tel que :

$$D^q x(t) \simeq C^T B(t). \tag{2.4.3}$$

$$u(t) \simeq U^T B(t). \tag{2.4.4}$$

Où $C^T = [c_0, c_1, ..., c_m]$ et $U^T = [u_0, u_1, ..., u_m]$ sont des inconnus. D'un part en utilisant les équations (1.3.17) et (2.3.2), $x(t)$ peut être représenté par :

$$x(t) = I^q D^q x(t) + x(0) \simeq (C^T F^{(q)} + d^T) B(t), \tag{2.4.5}$$

où $F^{(q)}$ est la matrice opérationnelle d'intégration d'ordre fractionnaire q et $d^T = [x_0, 0, ..., 0]$. D'autre part, en utilisant l'équation (2.2.2), nous développons les fonctions $p(t)$, $s(t)$, $m(t)$, $a(t)$ et $r(t)$, en série de polynômes de Bernoulli tels que :

$$p(t) \simeq P^T B(t), \qquad s(t) \simeq S^T B(t), \qquad m(t) \simeq M^T B(t). \tag{2.4.6}$$

$$a(t) \simeq A^T B(t), \qquad r(t) \simeq R^T B(t). \tag{2.4.7}$$

et

$$P^T B(t) B^T(t) \simeq B^T(t) \tilde{P}^T, \qquad S^T B(t) B^T(t) \simeq B^T(t) \tilde{S}^T \tag{2.4.8}$$
$$M^T B(t) B^T(t) \simeq B^T(t) \tilde{M}^T.$$

En utilisant les équations (2.4.4), (2.4.5), (2.4.6) et les matrices opérationelles de produit $\tilde{P}$, $\tilde{S}$ et $\tilde{M}$. Nous approximons l'équation J par :

$$\begin{aligned}
J &\simeq \frac{1}{2}\int_0^1 \big[P^T B(t)(C^T F^{(q)} + d^T)B(t)B^T(t)(C^T F^{(q)} + d^T)^T + S^T B(t)U^T B(t)B^T(t)U \\
&\qquad + M^T B(t)(C^T F^{(q)} + d^T)B(t)U^T B(t)\big]\ dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \big[P^T B(t)B^T(t)(C^T F^{(q)} + d^T)^T B^T(t)(C^T F^{(q)} + d^T)^T + S^T B(t)B^T(t)UB^T(t)U \\
&\qquad + M^T B(t)B^T(t)UB^T(t)(C^T F^{(q)} + d^T)^T\big]\ dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[B^T(t)^T \tilde{P}^T (C^T F^{(q)} + d^T)^T B^T(t)(C^T F^{(q)} + d^T)^T + B^T(t)\tilde{S}^T UB^T(t)U \\
&\qquad + B^T(t)\tilde{M}^T UB^T(t)(C^T F^{(q)} + d^T)^T\Big]\ dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[(C^T F^{(q)} + d^T)B(t)B^T(t)\tilde{P}^T (C^T F^{(q)} + d^T)^T + U^T \tilde{S}B(t)B^T(t)U \\
&\qquad + U^T \tilde{M}B(t)B^T(t)(C^T F^{(q)} + d^T)^T\Big]\ dt \\
&= \frac{1}{2}\left[(C^T F^{(q)} + d^T)\int_0^1 B(t)B^T(t)\ dt\tilde{P}^T (C^T F^{(q)} + d^T)^T + U^T\tilde{S}\int_0^1 B(t)B^T(t)\ dtU\right] \\
&\qquad + U^T\tilde{M}\int_0^1 B(t)B^T(t)\ dt(C^T F^{(q)} + d^T)^T\Bigg] \\
&= \frac{1}{2}\Big[(C^T F^{(q)} + d^T)H\tilde{P}^T (C^T F^{(q)} + d^T)^T + U^T\tilde{S}HU + U^T\tilde{M}H(C^T F^{(q)} + d^T)^T\Big] \qquad (2.4.9)
\end{aligned}$$

Le système dynamique dans l'équation (2.4.2) peut être écrit par :

$$C^T B(t) = A^T B(t)B^T(t)(C^T F^{(q)} + d^T) + R^T B(t)B^T(t)U.$$

D'où,

$$C^T B(t) - A^T B(t)B^T(t)(C^T F^{(q)} + d^T) - R^T B(t)B^T(t)U = 0. \qquad (2.4.10)$$

Maintenant, en utilisant l'équation (2.3.14) et

$$R^T B(t)B^T(t) \simeq B^T(t)\tilde{R}^T. \qquad (2.4.11)$$

Alors l'équation (2.4.10) devient :

$$C^T B(t) - B^T(t)\tilde{A}^T (C^T F^{(q)} + d^T)^T - B^T(t)\tilde{R}^T U = 0$$

or

$$(C^T - (C^T F^{(q)} + d^T)\tilde{A}^T - U^T\tilde{R})B(t) = 0, \tag{2.4.12}$$

et en utilisant l'équation (2.4.12) nous convertissons le système dynamique dans l'équation (2.4.2) en système des équations algébriques suivantes :

$$C^T - (C^T F^{(q)} + d^T)\tilde{A}^T - U^T\tilde{R} = 0.$$

On pose

$$\tilde{J}[C,\, U,] \;\; = \;\; C^T - (C^T F^{(q)} + d^T)\tilde{A}^T - U^T\tilde{R}. \tag{2.4.13}$$

Alors, on obtient le problème $(\tilde{P})$ suivant :

$$(\tilde{P}) \qquad \begin{cases} minJ[C,\, U] \\ \\ \tilde{J}[C,\, U] = 0. \end{cases} \tag{2.4.14}$$

Pour résoudre le problème $(\tilde{P})$, on forme la fonction auxiliaire L appelée lagrangien :

$$L[C,\, U,\, \lambda] \;\; = \;\; J[C,\, U] + \lambda\tilde{J}[C,\, U]. \tag{2.4.15}$$

Où $\lambda = [\lambda_0,\, \lambda_1,\, ...,\, \lambda_m]^T$ est une variable inconnue appelée le multiplicateur de Lagrange. Plus sur cette méthode (voir la méthode des multiplicateurs de Lagrange (3.2) dans l'annexe).

Maintenant, les conditions nécessaires pour l'extremum sont :

$$\frac{\partial L}{\partial C} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial U} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0. \tag{2.4.16}$$

Pour résoudre les équations (2.4.16), d'abord nous évaluons J numériquement et trouvons $\frac{\partial J}{\partial C}$ et $\frac{\partial J}{\partial U}$. Donc nous résolvons :

$$\frac{\partial L}{\partial C} \;\; = \;\; \frac{\partial J}{\partial C} + \lambda - F^{(q)}\tilde{A}\lambda = 0.$$

$$\frac{\partial L}{\partial U} \;\; = \;\; \frac{\partial J}{\partial U} - \lambda\tilde{R} = 0.$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} \;\; = \;\; \tilde{J} = 0.$$

Les équations ci-dessus peuvent être résolues pour C, U, λ en utilisant le Matlab.

Pour ce problème en employant $x(0) = x_0$ et l'équation (2.4.5). nous choisissons les conjectures d'initiale tels que $(C^T F^{(q)} + d^T)B(0) = x_0$. Aprés la solution de l'équation (2.4.16). $u(t)$ et $x(t)$ peut être obtenu à partir des équations (2.4.4), (2.4.5).

Chapitre 3

Application

Dans ce chapitre, des exemples sont donnés pour démontrer l'applicabilité et l'exactitude de notre méthode.
On démontre l'efficacité de la méthode et l'avantage des polynômes de Bernoulli pour résoudre des problèmes de commande optimale d'ordre fractionnaire.

3.1 Exemple 1

Trouvez la commande $u(t)$ ce qui réduit au minimum la forme quadratique J suivante :

$$J(x,\, u) \;=\; \frac{1}{2}\int_0^1 [x^2(t) + u^2(t)]\, dt \tag{3.1.1}$$

Où système dynamique

$$D_t^q x(t) \;=\; -x(t) + u(t), \tag{3.1.2}$$

avec l'état terminal libre et l'état initial

$$x(0) \;=\; 1. \tag{3.1.3}$$

Selon (Agrawal, 1989), la solution analytique du problème défini ci-dessus pour $q = 1$ est :

$$x(t) \;=\; cosh(\sqrt{2}t) + \gamma sinh(\sqrt{2}t)$$

$$u(t) \;=\; (1 + \sqrt{2}\gamma)cosh(\sqrt{2}t) + (\sqrt{2} + \gamma)sinh(\sqrt{2}t),$$

où

$$\gamma \quad = \quad -\frac{cosh(\sqrt{2}) + \sqrt{2}sinh(\sqrt{2})}{\sqrt{2}cosh(\sqrt{2}) + sinh(\sqrt{2})} \simeq -0.98.$$

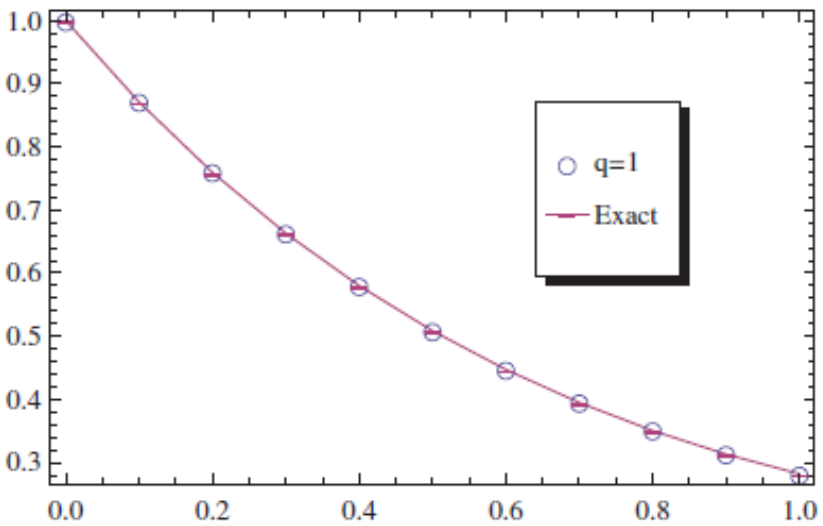


Fig 3.1 : La solution exacte de $x(t)$.

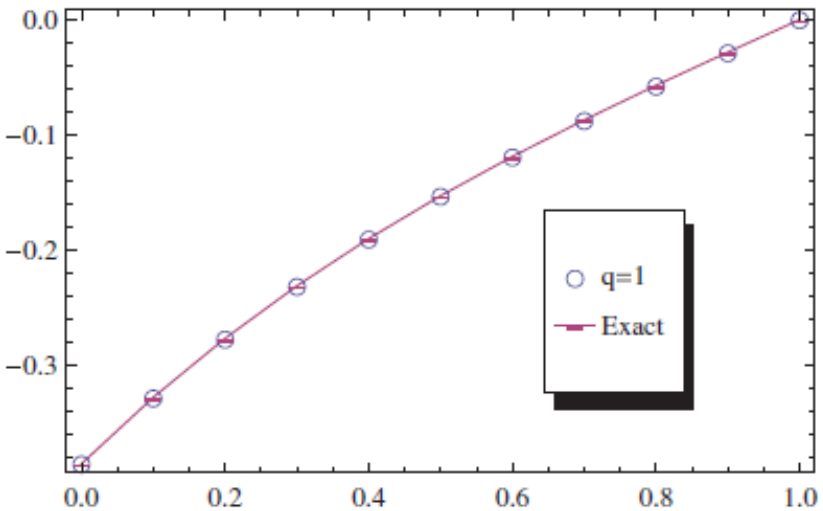


Fig 3.2 : La solution exacte de $u(t)$.

D'aprés les équations (2.4.3), (2.4.4), on approche $D^q x(t)$ et $u(t)$,
où $C_q^T = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_m \end{bmatrix}$, et $U_q^T = \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_m \end{bmatrix}$.
En utilisant l'équation (2.3.13), pour calculer les matrices opérationnelles d'intégration fractionnaire pour différente valeurs de q. Cettes matrices pour $m = 3$ et $q = 0.8, 0.9, 1$.

Pour $q = 0.8$:

Selon la base $B(t) = [\beta_0(t), \beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t)]$, d'où l'équation (2.3.13) on a :

$$\Theta_{i,j,r} = b_{i,r}^{(0.8)} c_{r,j}.$$

Alors d'aprés l'équation (2.3.11), pour $i = \overline{0..3}$ et $r = \overline{0..i}$ on obtient :

$b_{0,0}^{(0.8)} = \frac{0!}{0!\Gamma(0+1+0.8)}\beta_0 = 1.073671274.$

$b_{1,0}^{(0.8)} = -0.5368356370, \quad b_{1,1}^{(0.8)} = 0.5964840410.$

$b_{2,0}^{(0.8)} = 0.1789452123, \quad b_{2,1}^{(0.8)} = -0.5964840410, \quad b_{2,2}^{(0.8)} = 0.4260600294.$

$b_{3,0}^{(0.8)} = 0, \quad b_{3,1}^{(0.8)} = 0.2982420205, \quad b_{3,2}^{(0.8)} = -0.6390900440, \quad b_{3,3}^{(0.8)} = 0.3363631811.$

Et d'aprés l'équation (2.3.9), pour $r = \overline{0..3}$ et $j = \overline{0..3}$ on a :

$$c_{r,j} = H^{-1}\langle t^{0.8+r}, B(t)\rangle.$$

Alors en utilisant le code Matlab (3.1) on obtient :

$c_{0,j} = \begin{bmatrix} 0.5555555556 & 0.981620718 & -0.2506265663 & 0.29239766 \end{bmatrix}, \quad j = \overline{0..3}.$

$c_{1,j} = \begin{bmatrix} 0.3571428571 & 1.001425979 & 0.8458646616 & -0.13611615 \end{bmatrix}, \quad j = \overline{0..3}.$

$c_{2,j} = \begin{bmatrix} 0.2631578947 & 0.999519589 & 1.429219601 & 0.78466958 \end{bmatrix}, \quad j = \overline{0..3}.$

$c_{3,j} = \begin{bmatrix} 0.2083333333 & 1.000546108 & 1.686105477 & 1.81580590 \end{bmatrix}, \quad j = \overline{0..3}.$

Donc on a :

$$F^{(0.8)} = \begin{bmatrix} 0.5964840412 & 1.053937967 & -0.2690905447 & 0.3139389681 \\ -0.085212 & 0.0703656 & 0.6390900439 & -0.23816059 \\ -0.001494947 & 0.004177058 & 0.05954015 & 0.4678306 \\ 0.00840908 & -0.003568839 & -0.09398383 & 0.068700176 \end{bmatrix}$$

En outre, selon l équation (2.4.7) nous avons :

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^T = S^T = R^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Et d'aprés l'équation (3.1.3) on a : $d^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Des équations (2.3.14) et (2.4.11) nous obtenons :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -I_{4\times 4}.$$

$$\tilde{P} = \tilde{S} = \tilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{4\times 4}.$$

Où $I_{4\times 4}$ est la matrice identité.

Alors d'aprés (2.4.9) l'equation (3.1.1) devient :

$$J[C,\, U] \simeq \frac{1}{2}\left[(C^T F^{(0.8)} + d^T) H \tilde{P}^T (C^T F^{(0.8)} + d^T)^T + U^T \tilde{S} H U\right],$$

et de (2.4.13) l'équation (3.1.2) devient :

$$\tilde{J}[C,\, U] = C^T - (C^T F^{(0.8)} + d^T)\tilde{A}^T - U^T \tilde{R}.$$

Donc, on obtient le problème (P') suivant :

$$(P') \quad \begin{cases} min J[C,\, U] = \frac{1}{2}\left[(C^T F^{(0.8)} + d^T) H \tilde{P}^T (C^T F^{(0.8)} + d^T)^T + U^T \tilde{S} H U\right] \\ \\ \tilde{J}[C,\, U] = C^T - (C^T F^{(0.8)} + d^T)\tilde{A}^T - U^T \tilde{R} = 0. \end{cases}$$

Pour résoudre le problème (P'), on forme la fonction lagrangien L suivante :

$$L[C,\, U,\, \lambda] = J[C,\, U] + \lambda \tilde{J}[C,\, U].$$

Où $\lambda = [\lambda_0,\, \lambda_1,\, \lambda_2,\, \lambda_3]^T$ est le multiplicateur de Lagrange.

les points stationnaires du problème (P') comme solution du système obtenu en annulant

les dérivées partielles de L par rapport à toutes les variables C, U et λ Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial C} &= \frac{\partial J}{\partial C} + \lambda - \tilde{A}\lambda = 0. \\
\frac{\partial L}{\partial U} &= \frac{\partial J}{\partial C} - \tilde{R}\lambda = 0. \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= C^T - (C^T F^{(0.8)} + d^T)\tilde{A} - U^T\tilde{R} = 0.
\end{aligned}$$

Pour résoudre ce système en utilisant le Matlab (voir (3.3) dans l'annexe).

Par conséquent

$$C^T_{(0.8)} = \begin{bmatrix} -0.688829 & 1.03386 & -0.786875 & 1.10218 \end{bmatrix}.$$

$$U^T_{(0.8)} = \begin{bmatrix} -0.177357 & 0.373404 & -0.0912257 & 0.347296 \end{bmatrix}.$$

On remplace $C_{(0.8)}$ dans léquation (2.4.5) et $U_{(0.8)}$ dans léquation (2.4.4).

Alors les solutions approximatives sont données par :

$$x(t) = 0.957640984 - 1.733544026t + 1.827968118t^2 - 0.754879245t^3.$$

$$u(t) = -0.37926328 + 0.6382777t - 0.6121697t^2 + 0.347296t^3.$$

même manière

Pour $q = 0.9$ **:**

On a :

$$F^{(0.9)} = \begin{bmatrix} 0.547239 & 1.03268 & -0.130641 & 0.136862 \\ -0.0849164 & 0.0312455 & 0.571886 & -0.108498 \\ -0.000725781 & 0.00184182 & 0.0249718 & 0.399676 \\ 0.00844276 & -0.00177514 & -0.082882 & 0.0289939 \end{bmatrix}$$

et on obtient :

$$C^T_{(0.9)} = \begin{bmatrix} -0.702554 & 1.0756 & -0.751538 & 0.717457 \end{bmatrix}.$$

$$U^T_{(0.9)} = \begin{bmatrix} -0.171752 & 0.381037 & -0.122865 & 0.225034 \end{bmatrix}.$$

Les solutions approximatives sont données par :

$$x(t) = 0.98286307650 - 1.5694481209t + 1.36730520162t^2 - 0.49242274754t^3.$$

$$u(t) = -0.382748 + 0.616419t - 0.460416t^2 + 0.225034t^3.$$

Pour $q = 1$:

On a :

$$F^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{120} & 0 & -\frac{1}{14} & 0 \end{bmatrix}$$

et on obtient :

$$C_{(1)}^T = \begin{bmatrix} -0.71803 & 1.10385 & -0.685392 & 0.351225 \end{bmatrix}.$$

$$U_{(1)}^T = \begin{bmatrix} -0.166106 & 0.385819 & -0.158556 & 0.12276 \end{bmatrix}.$$

les solutions approximatives sont données par :

$$x(t) = 0.998745625 - 1.3590995t + 0.8695335t^2 - 0.228464t^3.$$

$$u(t) = -0.3854415 + 0.605755t - 0.342696t^2 + 0.12276t^3.$$

Pour $m = 3$, 4, 5, et $q = 1$ en étude l'erreur de $x(t)$ et $u(t)$ via les polynômes de Bernoulli on obtient :

	$x(t)$			$u(t)$		
t	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$
0	1.23×10^{-3}	8.99×10^{-5}	6.25×10^{-6}	3.77×10^{-4}	4.83×10^{-5}	1.88×10^{-6}
0.1	3.30×10^{-4}	3.67×10^{-5}	2.39×10^{-6}	1.11×10^{-4}	1.95×10^{-5}	7.08×10^{-7}
0.2	4.86×10^{-4}	1.01×10^{-5}	1.21×10^{-6}	1.42×10^{-4}	2.26×10^{-5}	5.20×10^{-7}
0.3	7.79×10^{-5}	2.65×10^{-5}	1.72×10^{-6}	3.61×10^{-4}	1.36×10^{-5}	4.98×10^{-7}
0.4	2.35×10^{-4}	1.53×10^{-5}	6.82×10^{-7}	1.13×10^{-4}	1.40×10^{-5}	2.49×10^{-7}
0.5	3.58×10^{-4}	4.23×10^{-6}	1.93×10^{-6}	1.38×10^{-4}	1.27×10^{-5}	5.81×10^{-7}
0.6	2.31×10^{-4}	2.91×10^{-5}	3.11×10^{-7}	4.73×10^{-5}	1.52×10^{-5}	4.97×10^{-7}
0.7	2.03×10^{-4}	2.14×10^{-5}	1.90×10^{-6}	5.58×10^{-5}	1.21×10^{-5}	5.93×10^{-7}
0.8	5.21×10^{-4}	1.73×10^{-5}	9.17×10^{-7}	1.61×10^{-4}	8.43×10^{-6}	2.41×10^{-7}
0.9	2.43×10^{-4}	3.46×10^{-5}	2.49×10^{-6}	6.27×10^{-5}	1.89×10^{-5}	7.61×10^{-7}

Donc les valeurs approximatives de l'état $x(t)$ et la commande $u(t)$ convergent vers les solutions exactes.

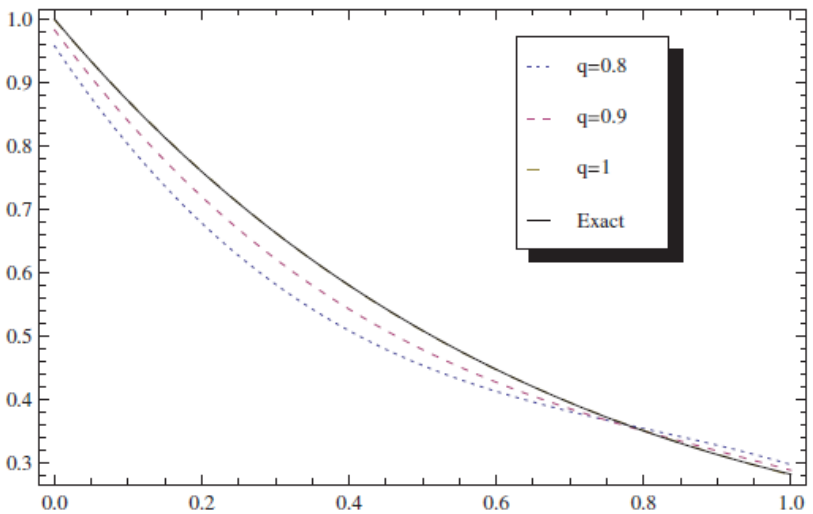


Fig 3.3 : Comparison de $x(t)$ pour $m = 3$ et $q = 0.8$, 0.9, 1.

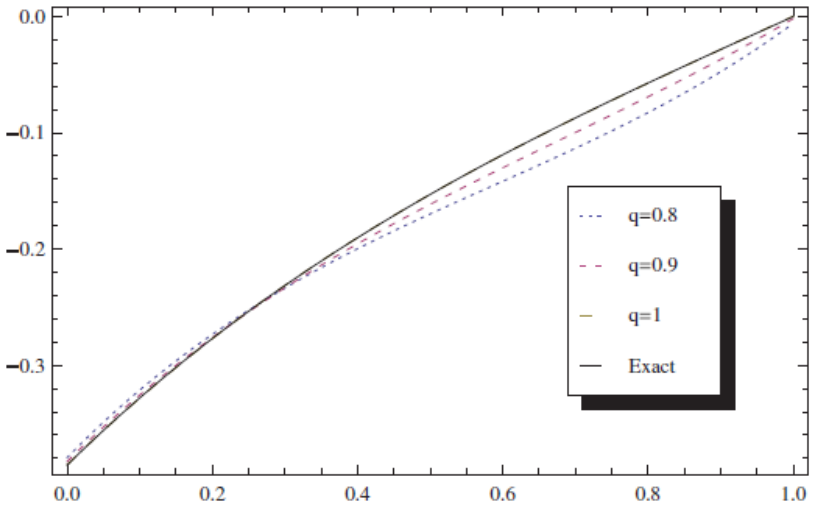


Fig 3.4 : Comparison de $u(t)$ pour $m = 3$ et $q = 0.8,\ 0.9,\ 1$.

Pour $m = 5$ et $q = 1$ la comparaison entre l'approximation et la solution exacte de J est donnée par :

	l'approximation	la solution exacte
J	0.1929092980927	0.1929092980932

3.2 Exemple 2

Trouvez la commande $u(t)$, ce qui réduit au minimum la forme quadratique J suivante :

$$J(x,\ u) \quad = \quad \frac{1}{2}\int_0^1 [x^2(t) + u^2(t)]\, dt \tag{3.2.1}$$

Où système dynamique

$$D_t^q x(t) \quad = \quad tx(t) + u(t) \tag{3.2.2}$$

avec l'état terminal libre et l'état initial

$$x(0) \quad = \quad 1 \tag{3.2.3}$$

Soit $m = 5$, en utilisant le Matlab (voir dans l'annexe (3.3)) on a :
$B(t) = \left[\begin{array}{cccccc} \beta_0(t) & \beta_1(t) & \beta_2(t) & \beta_3(t) & \beta_4(t) & \beta_5(t) \end{array} \right]$.

D'aprés l'équation (2.3.13) on obtient :

Pour $q = 0.8$:

$$F^{(0.8)} = \begin{bmatrix} 0.596484 & 1.062744 & -0.422194 & 0.930355 & -0.535861 & 1.109548 \\ 0.085212 & 0.065328 & 0.734063 & -0.590821 & 0.332406 & -0.634789 \\ -0.001494 & 0.006463 & 0.00458 & 0.627878 & -0.19236 & 0.288085 \\ 0.008409 & -0.00434 & 0.003148 & 0.014721 & 0.339961 & -0.097162 \\ 0.000415 & -0.001824 & 0.008337 & -0.029323 & 0.091469 & 0.230468 \\ -0.003997 & 0.002063 & -0.01329 & 0.0130937 & -0.211251 & 0.0900255 \end{bmatrix}$$

Pour $q = 0.9$:

$$F^{(0.9)} = \begin{bmatrix} 0.547239 & 1.036122 & -0.193272 & 0.377605 & -0.21921 & 0.433338 \\ -0.084916 & 0.029259 & 0.611414 & -0.247547 & 0.138349 & -0.250288 \\ -0.000726 & 0.002765 & 0.000839 & 0.464273 & -0.084464 & 0.116275 \\ 0.008443 & -0.002122 & 0.001504 & 0.004734 & 0.295352 & -0.043668 \\ 0.000202 & -0.000781 & 0.003522 & -0.011622 & 0.038506 & 0.219963 \\ -0.004017 & 0.001009 & -0.010285 & 0.005703 & -0.181166 & 0.038205 \end{bmatrix}$$

Pour $q = 0.99$:

$$F^{(0.99)} = \begin{bmatrix} 0.504625 & 1.003956 & -0.017682 & 0.030727 & -0.017918 & 0.033949 \\ -0.083542 & 0.002653 & 0.510562 & -0.020827 & 0.011496 & -0.019784 \\ -0.00007 & 0.000236 & 0.000006 & 0.345018 & -0.007405 & 0.009397 \\ 0.00835 & -0.000205 & 0.00014 & 0.000307 & 0.254492 & -0.003901 \\ 0.000019 & -0.000067 & 0.000297 & -0.000923 & 0.003269 & 0.202307 \\ -0.003975 & 0.000098 & -0.00783 & 0.000494 & -0.154417 & 0.003266 \end{bmatrix}$$

de l'équations (2.4.7) et (2.4.6) on obtient :

$$A^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad R^T = P^T = S^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

et on a :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{120} & 0 & \frac{1}{252} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{30} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{17}{132} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{65}{132} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{P} = \tilde{S} = \tilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{6\times 6}.$$

On résoudre l'équation (2.4.16), on obtient les vecteurs C et U pour $q = 0.8, 0.9, 0.99$, tel que :

$$C^T_{(0.8)} = \begin{bmatrix} -1,2451496 & 3,1217079 & -17,131793 & -51,355511 & -30,839177 & -122,1994 \end{bmatrix}.$$

$$U^T_{(0.8)} = \begin{bmatrix} -0,0724073 & -0,225901 & -3,6920898 & -55,27087 & -9,6592815 & -105,7951 \end{bmatrix}.$$

$$C^T_{(0.9)} = \begin{bmatrix} -1,3092259 & 1,8278087 & -9,0308834 & -51,175153 & -17,545867 & -114,835 \end{bmatrix}.$$

$$U^T_{(0.9)} = \begin{bmatrix} -0,0678604 & 0,0699515 & -4,1804072 & -55,17533 & -10,717102 & -107,372 \end{bmatrix}.$$

$$C^T_{(0.99)} = \begin{bmatrix} -1.5017623 & 0.3036608 & -6.9124213 & -36.21167 & -14.54176 & -77.43797 \end{bmatrix}.$$

$$U^T_{(0.99)} = \begin{bmatrix} -0.1053299 & 0.2604839 & -4.5770332 & -37.94398 & -11.980178 & -74.38377 \end{bmatrix}.$$

Pour différente valeur de q, on remplace $U_{(q)}$ dans léquation (2.4.4) et $C_{(q)}$ dans léquation (2.4.5). On obtient les solutions approximatives de $u(t)$ et $x(t)$.

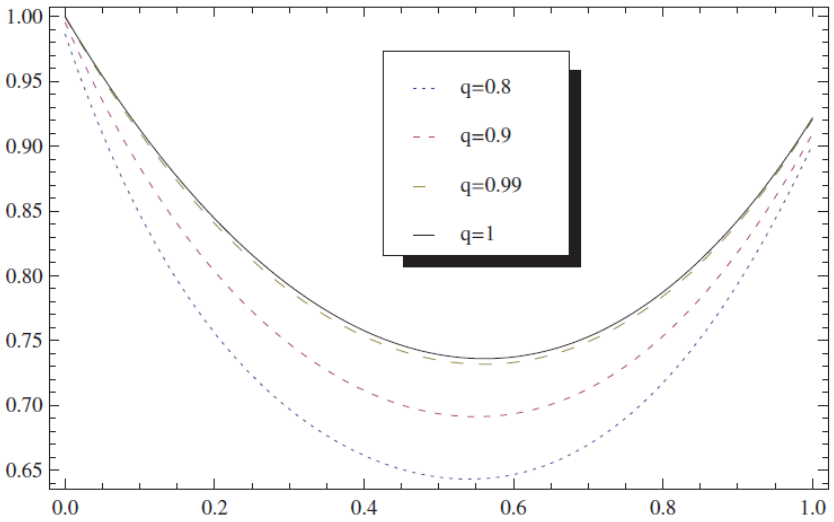


Fig 3.5 : Comparison de $x(t)$ pour $m = 5$ et $q = 0.8$, 0.9, 0.99, 1.

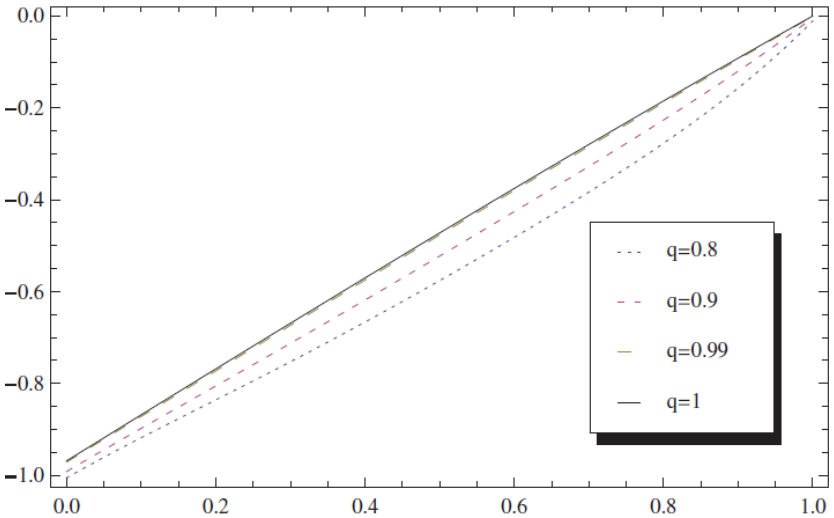


Fig 3.6 : Comparison de $u(t)$ pour $m = 5$ et $q = 0.8$, 0.9, 0.99, 1.

Pour $q = 0.8$ et $m = 3, 4, 5$. On obtient :

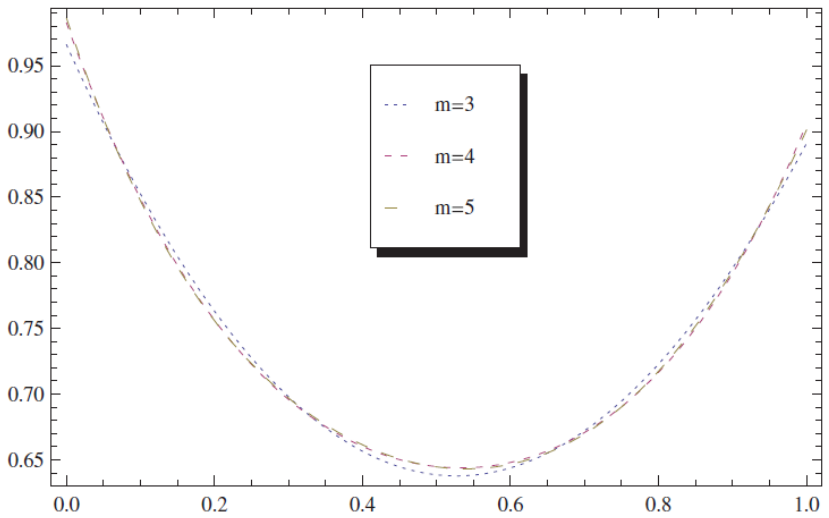


Fig 3.7 : Comparison de $x(t)$ pour $q = 0.8$ et $m = 3, 4, 5$.

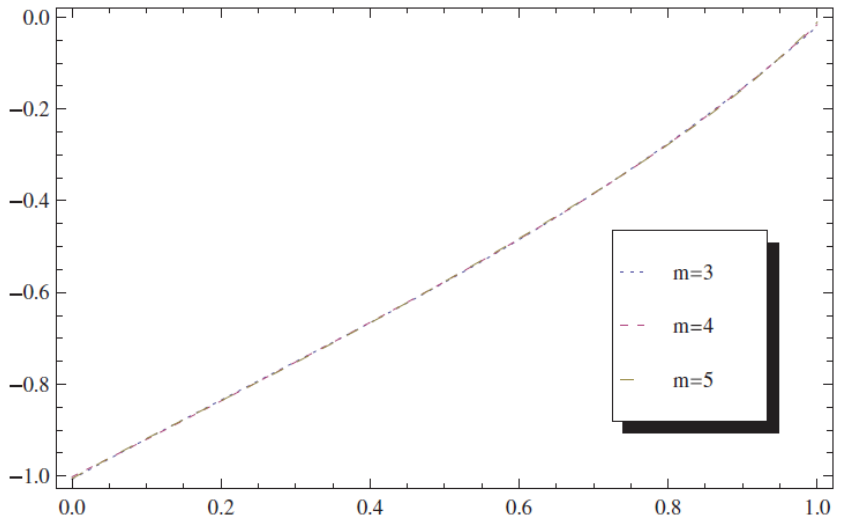


Fig 3.8 : Comparison de $u(t)$ pour $q = 0.8$ et $m = 3, 4, 5$.

La solution de J pour $m = 5$ et différentes valeurs de q est donnée par :

	q=0.8	q=0.9	q=0.99	q=1
J	0.466978	0.475883	0.483463	0.484268

3.3 Exemple 3

On considère le problème de commande optimale quadratique-linéaire suivant :

$$J(x,\, u) \;=\; \int_0^1 (x(t) - u(t))^2\, dt. \tag{3.3.1}$$

Où système dynamique

$$\dot{x}(t) + D^q x(t) \;=\; u(t) - x(t) + \frac{6t^{q+2}}{\Gamma(q+3)} + t^3, \tag{3.3.2}$$

avec les conditions initials

$$x(0) = 0, \qquad x(1) = \frac{6}{\Gamma(q+4)}. \tag{3.3.3}$$

Les solutions analytiques sont données par :

$$x_q(t) = \frac{6t^{q+3}}{\Gamma(q+4)}.$$

$$u_q(t) = \frac{6t^{q+3}}{\Gamma(q+4)}.$$

On a :

$$J(x,\, u) \;=\; \int_0^1 \left(x^2(t) + u^2(t) - 2x(t)u(t)\right)\, dt. \tag{3.3.4}$$

Alors d'aprés (2.4.9) l'equation (3.3.4) de la forme :

$$J[C,\, U] \;\simeq\; \left[(C^T F^{(q)} + d^T) H \tilde{P}^T (C^T F^{(q)} + d^T)^T + U^T \tilde{S} H U + U^T \tilde{M} H (C^T F^{(q)} + d^T)^T\right].$$

On pose

$$g_q(t) \;=\; \frac{6t^{q+2}}{\Gamma(q+3)} + t^3,$$

d'aprés (2.2.7) on développe $g_q(t)$ en série de polynômes de Bernoulli comme :

$$g_q(t) \;\simeq\; G^T B(t). \tag{3.3.5}$$

Où $G^T = \begin{bmatrix} g_0 & g_1 & \dots & g_m \end{bmatrix}$.

Alors d'aprés les équations (2.4.3), (2.4.4) et (3.3.5), le système dynamique (3.3.2) devient :

$$(C^T F^{(q)} + d^T) B'(t) + C^T B(t) - U^T B(t) + (C^T F^{(q)} + d^T) B(t) - G^T B(t) \;=\; 0,$$

d'où

$$[(C^T F^{(q)} + d^T)D + C^T - U^T + (C^T F^{(q)} + d^T) - G^T]B(t) \quad = \quad 0,$$

donc

$$\tilde{J}[C,\, U] = ((C^T F^{(q)} + d^T)D + C^T - U^T + (C^T F^{(q)} + d^T) - G^T) \quad = \quad 0.$$

Pour $m = 2$ et $q = 0.5$, On a : $B^T(t) = \begin{bmatrix} 1 & t - \frac{1}{2} & t^2 - t + \frac{1}{6} \end{bmatrix}$,
d'aprés l'équation (3.3.3) : $d^T(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\Gamma(3+0.5)} & 0 \end{bmatrix}$,
et d'aprés le Matlab on obtient : $G^T(t) = \begin{bmatrix} 0.7658304766 & 2.619434922 & 3.844683985 \end{bmatrix}$, et

$$F^{(0.5)} \quad = \quad \begin{bmatrix} 0.75225278 & 0.902703334 & -0.644788095 \\ -0.07522528 & 0.32239405 & 0.75225278 \\ -0.00358216 & -0.05015018 & 0.24423791 \end{bmatrix}$$

En outre, selon l'équation (2.4.7) nous avons :

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^T = S^T = R^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Des équations (2.3.14) et (2.4.11) nous obtenons :

$$\tilde{A} \quad = \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -I_{3\times 3}.$$

$$\tilde{P} = \tilde{S} = \tilde{R} \quad = \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{3\times 3}.$$

$$\tilde{M} \quad = \quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = -2I_{3\times 3}.$$

Où $I_{3\times 3}$ est la matrice identité. Et d'aprés l'équation (2.3.1) on a :

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc, on obtient le problème (P^*) suivant :

$$(P^*) \quad \begin{cases} minJ[C,\, U,] = \Big[(C^T F^{(0.5)} + d^T) H \tilde{P}^T (C^T F^{(0.5)} + d^T)^T + U^T \tilde{S} H U \\ \qquad\qquad + U^T \tilde{M} H (C^T F^{(0.5)} + d^T)^T \Big], \\ \\ \tilde{J}[C,\, U] = ((C^T F^{(0.5)} + d^T) D + C^T - U^T + (C^T F^{(0.5)} + d^T) - G^T) = 0. \end{cases}$$

Pour résoudre le problème (P^*), on forme lagrangien L suivante :

$$L[C,\, U,\, \lambda] = J[C,\, U] + \lambda \tilde{J}[C,\, U].$$

Où $\lambda = [\lambda_0,\, \lambda_1,\, \lambda_2]^T$.

En annulant les dérivées partielles de L par rapport à toutes les variables C, U et λ et en utilisant le Matlab (voir (3.4) dans l'annexe).

Par conséquent

$$C^T_{(0.5)} = \begin{bmatrix} 0.167918825 & 0.382488169 & 3.844684174 \end{bmatrix}$$

$$U^T_{(0.5)} = \begin{bmatrix} 0.083772363 & 0.597911643 & 1.118473573 \end{bmatrix}.$$

On remplace $C_{(0.5)}$ dans léquation (2.4.5) et $U_{(0.5)}$ dans l'équation (2.4.4), on obtient les solutions approximatives.

.

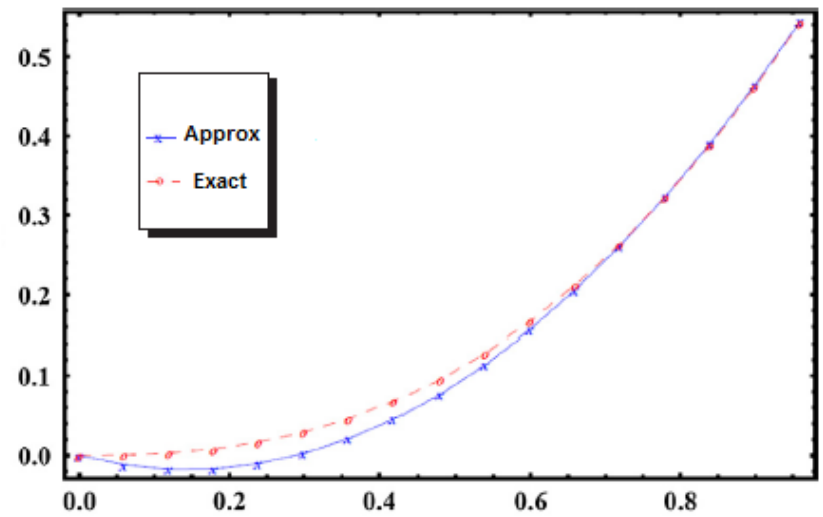


Fig 3.9 : Comparison de $x(t)$ pour $q = 0.5$ et $m = 2$.

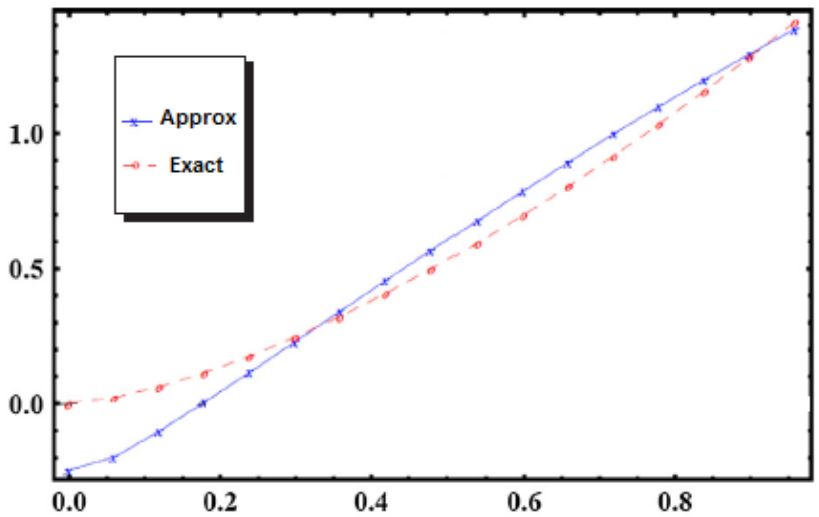


Fig 3.10 : Comparison de $u(t)$ pour $q = 0.5$ et $m = 2$.

.

.

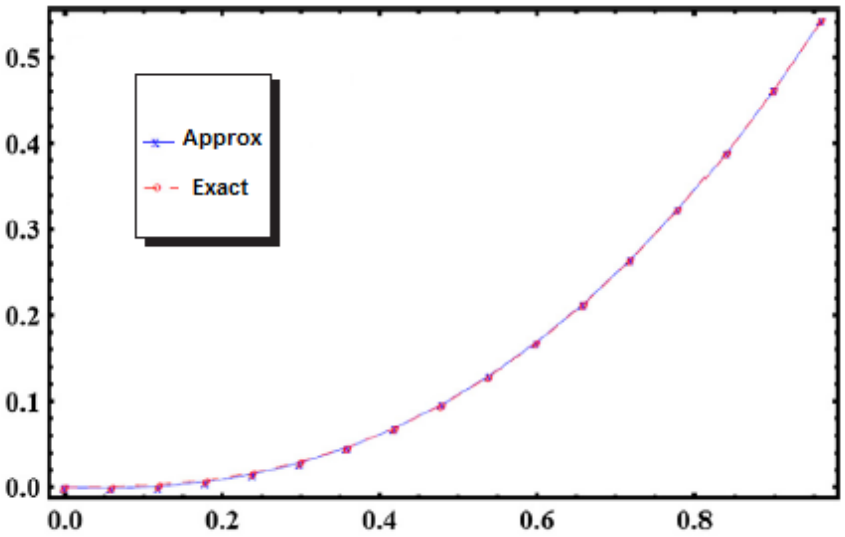


Fig 3.11 : Comparison de $x(t)$ pour $q = 0.5$ et $m = 3$.

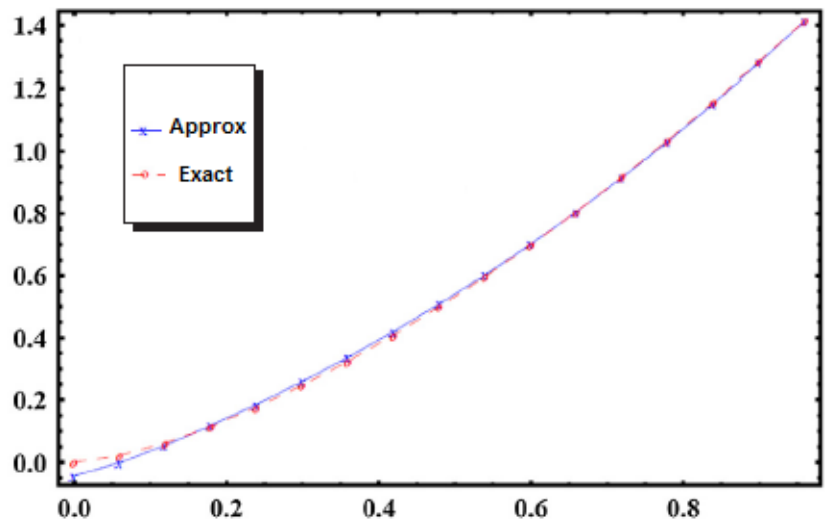


Fig 3.12 : Comparison de $u(t)$ pour $q = 0.5$ et $m = 3$.

Annexe

3.1 *Programme Matlab pour l'approximation d'une fonction*

```
syms t
b0=0*t+1;
b1=t-1/2;
b2=t^2-t+1/6;
b3=t^3-(3/2)*t^2+(1/2)*t;
b4=t^4-2*t^3+t^2-1/30;
B=[b0; b1; b2; b3; b4];
B=B(1:5,1);
H=int(B*B.',0,1);
syms t
f=sqrt(t);
  aa= f*B;
  aa=int(aa,0,1);
  CF=aa.'*(H^(-1));
  Approx = CF*B
  t=0:0.2:1;
  g=sqrt(t);
  rrr=-(20*t.^4)/11+(448*t.^3)/99-(140*t.^2)/33+(80*t)/33+10/99;
plot(t,g,'black',t,rrr,'bo')
legend({'Exact','Approx'},'Location','southwest',...
       'FontSize',8,'FontWeight','bold')
 xlabel('t','FontSize',10,...
        'FontWeight','bold','FontName',...
       'Times New Roman','Color','b')
ylabel('f(t)=sqrt(t)','FontSize',10,...
       'FontWeight','bold','FontName',...
       'Times New Roman','Color','b')
```

3.2 *La méthode des multiplicateurs de Lagrange*

La méthode des multiplicateurs de Lagrange (1788) est une méthode d'optimisation permettant de déterminer l'extremum local d'une fonction f sous contrainte que les variables de f sont liées par une relation g. A deux dimensions, par exemple, cette méthode permettrait de trouver les valeurs c et u où $f(c,\, u)$ est extremum sous contrainte que $g(c,\, u) = 0$.
tel que

$$(\tilde{P}) \qquad = \begin{cases} minf(c,\, u) \\ \\ g(c,\, u) = 0. \end{cases} \tag{3.3.6}$$

avec la fonction f est la fonction objectif et g est la contrainte.
Pour résoudre le problème (P'), on forme la fonction auxiliaire L appelée lagrangien :

$$L(c,\, u,\, \lambda) \;=\; f(c,\, u) + \lambda g(c,\, u), \tag{3.3.7}$$

où λ est une variable inconnue appelée le multiplicateur de Lagrange.
On trouve les points stationnaires du problème comme solution du système obtenu en annulant les dérivées partielles de L par rapport à toutes les variables c, u et λ Soit :

$$\frac{\partial L}{\partial c} \;=\; \frac{\partial f}{\partial c} + \lambda \frac{\partial g}{\partial c} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} \;=\; \frac{\partial f}{\partial u} - \lambda \frac{\partial g}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} \;=\; g(c,\, u) = 0.$$

3.3 *Programme Matlab pour résoudre problème de commande optimale*

```
clc
clear all
% format long
% format compact
 format long e
M=4;
syms t  c0 c1 c2 c3 c4 c5 c6 c7 c8
C=[c0 c1 c2 c3 c4 c5 c6 c7 c8]
C=C(1,1:M);
syms t  u0 u1 u2 u3 u4 u5 u6 u7 u8
U=[u0 u1 u2 u3 u4 u5 u6 u7 u8]
U=U(1,1:M);
syms t  y0 y1 y2 y3 y4 y5 y6 y7 y8
Y=[y0 y1 y2 y3 y4 y5 y6 y7 y8]
Y=Y(1,1:M);
%%%%%%%%% polynome de Bernoulli %%%%%%%%
syms t
b0=0*t+1;
b1=t-1/2;
b2=t^2-t+1/6;
b3=t^3-(3/2)*t^2+(1/2)*t;
b4=t^4-2*t^3+t^2-1/30;
b5=t^5-5/2*t^4+5/3*t^3-1/6*t;
b6=t^6-3*t^5+5/2*t^4-1/2*t^2+1/42;
b7=t^7-7/2*t^6+7/2*t^5-7/6*t^3+1/6*t;
b8=t^8-4*t^7+14/3*t^6-7/3*t^4+2/3*t^2-1/30;
B=[b0; b1; b2; b3; b4; b5; b6; b7; b8]
B=B(1:M,1)
%%%%%%%% calcul H %%%%%%%%
H=int(B*B.',0,1)
```

```
%%%%%%%%  coefficients au base de Bernoulli %%%%%%%%
Cp= C_coeappx(t,B,H,M,1)
Cs= C_coeappx(t,B,H,M,1)
Ca= C_coeappx(t,B,H,M,-1)
Cr= C_coeappx(t,B,H,M,1)
%%%%%%%% condition initial %%%%%%%%
         d(1)=1;
for i=2:M
        d(i)=0;
end
d
%%%%%%%% matrice de produit %%%%%%%%
  AA= A_multipe(0,t,B,H,M,-1)
  PP= A_multipe(0,t,B,H,M,1)
  RR= A_multipe(0,t,B,H,M,1)
  SS= A_multipe(0,t,B,H,M,1)
%%%%%%%% matrice opérationnelle d'intégration %%%%%%%%
F1= F_alpham(0,t,B,H,M,0.8)
F2= F_alpham(0,t,B,H,M,0.9)
%%%%%%%% calcul j %%%%%%%%
J=1/2*[((C*F1+d)*H)*PP'*(C*F1+d).'+[(U*SS)*H*U.']]
%%%%%%%% système dynamique %%%%%%%%
g=[C-(C*F1+d)*AA-U*RR]*Y.'
%%%%%%%% calcul L %%%%%%%%
L=J+g
%%%%%%%% calcul les dérivées de L %%%%%%%%
      LC = gradient(L,C)
      LU = gradient(L,U)
      LY = gradient(L,Y)
```

tel que les fonctions : C—coeappx, A—multipe et F—alpham sont définis par :

```
function CF= C_coeappx(t,B,H,M,ff)
          a=ff;
          aa=a*B;
          aa=int(aa,0,1);
          CF=aa.'*(H^(-1));
```

```
function A1= A_multipe(x,t,B,H,M,f)
          ae=f;
          aae=ae*B;
          aae=int(aae,0,1);
          Cab=aae.'*(H^(-1));
          dd=Cab*B*B.';
          A1=zeros(x,M);
          for i=1:M
              z=dd(i)*B;
             z=int(z,0,1);
          Cv=z.'*(H^(-1));
          A1=[A1;Cv];
          end
          A1=A1';
```

```
function F= F_alpham(x,t,B,H,M,q)
%%%%%%%% Calculation of crj %%%%%%%%
cr=zeros(x,M);
for r=0:M-1
         muu=q+r;
          g=t^muu;
          G=g*B;
          FF=int(G,0,1);
          C=FF.'*(H^(-1));
          cr=[cr;C];
end
cr;
%%%%%%%% calcule b_(i,r) %%%%%%%%
bl=[1 -1/2 1/6 0 -1/30 0 1/42 0 -1/30 0 5/66 0 -691/2730 0];
bb=zeros(M);
for i=0:M-1
    for r=0:M-1
        if i>=r
bb(i+1,r+1)=(factorial(i)*bl(i-r+1))/(factorial(i-r)*gamma(r+1+q));
        end
    end
end
bb;
```

```
%%%%%%%% matrice opérationnelle d'intégration %%%%%%%%
F =zeros(M);
for i=0:M-1
   for j=0:M-1
            s=0;
            for r=0:i
                 s=bb(i+1,r+1)*cr(r+1,j+1)+s;
           end
               F(i+1,j+1)=s;
    end
end
F;
```

Pour résoudre le système des équations on a :

```
clear all;
x0 = [ 1
  1
  1
  1
  1
 -1
 1
  1
  1
  2
  1
  1];
options = optimoptions('fsolve','Display','iter');
[x,fval] = fsolve(myfunnn,x0,options);
```

3.4 *Programme Matlab pour résoudre problème de commande optimale**

```
clc
clear all
% format long
% format compact
 format long e
M=3;
q=0.5;
syms t  c0 c1 c2 c3 c4 c5 c6
C=[c0 c1 c2 c3 c4 c5 c6];
C=C(1,1:M);
syms t  u0 u1 u2 u3 u4 u5 u6
U=[u0 u1 u2 u3 u4 u5 u6];
U=U(1,1:M);
syms t  y0 y1 y2 y3 y4 y5 y6
Y=[y0 y1 y2 y3 y4 y5 y6];
Y=Y(1,1:M);
%%%%%%%% polynome de Bernoulli %%%%%%%%
syms t
b0=0*t+1;
b1=t-1/2;
b2=t^2-t+1/6;
b3=t^3-(3/2)*t^2+(1/2)*t;
b4=t^4-2*t^3+t^2-1/30;
b5=t^5-5/2*t^4+5/3*t^3-1/6*t;
b6=t^6-3*t^5+5/2*t^4-1/2*t^2+1/42;
B=[b0; b1; b2; b3; b4; b5; b6]
B=B(1:M,1)
%%%%%%%% calcul H %%%%%%%%
H=int(B*B.',0,1)
```

```
%%%%%%%%  coefficients au base de Bernoulli %%%%%%%%
Cp= C_coeappx(t,B,H,M,1)
Cs= C_coeappx(t,B,H,M,1)
Cm= C_coeappx(t,B,H,M,-2)
Ca= C_coeappx(t,B,H,M,-1)
Cr= C_coeappx(t,B,H,M,1)
%%%%%%%% coefficients au base de Bernoulli %%%%%%%%
G= C_coeappx(t,B,H,M,6*t.^(q+2)/(gamma(q+3))+t.^3)
%%%%%%%% matrice de produit %%%%%%%%
  PP= A_multipe(0,t,B,H,M,1)
  SS= A_multipe(0,t,B,H,M,1)
  MM= A_multipe(0,t,B,H,M,-2)
  AA= A_multipe(0,t,B,H,M,-1)
  RR= A_multipe(0,t,B,H,M,1)
%%%%%%%% conditions initials %%%%%%%%
        d(1)=0;
        d(2)=6/(gamma(q+4));
for i=3:M
        d(i)=0;
end
d
```

```
%%%%%%%% matrice opérationnelle d'intégration %%%%%%%%
F1= F_alpham(0,t,B,H,M,q)
%%%%%%%% matrice opérationnelle de dérivation %%%%%%%%
D=[0 0 0;1 0 0;0 2 0];
%%%%%%%% calcul j %%%%%%%%
J=[((((C*F1+d)*H)*PP)*(C*F1+d).')+(U*SS*H*U.')+(U*MM*H*(C*F1+d).')]
%%%%%%%% système dynamique %%%%%%%%
g=[((C*F1+d)*D)+C-U+(C*F1+d)-G]*Y.';
%%%%%%%% calcul L %%%%%%%%
L=J+g;
%%%%%%%% calcul les dérivées de L %%%%%%%%
      LC = gradient(L,C)
      LU = gradient(L,U)
      LY = gradient(L,Y)
```

Pour résoudre le système des équations :

```
clear all;
x0 = [ 1
  1
  1
  1
  1
 -1
  1
  1
  1];
options = optimoptions('fsolve','Display','iter');
[x,fval] = fsolve(myfunnn,x0,options);
```

Conclusion

Les méthodes numériques de résolution des problèmes de contrôl optimale fractionnaire sont nombreuses, dans ce mémoire on a utilisé des matrices opérationnelles basées sur les polynômes de Bernoulli. La matrice opérationnelle de dérivation fractionnaire au sens de Caputo, La matrice opérationnelle d'intégration fractionnaire au sens de Riemann-liouville et la matrice opérationnelle de produit sont employées pour réduire le problème différentiel ou intégral en un ensemble d'équations algébriques en développant d'abord la fonction candidate en série polynômes de Bernoulli à coefficients inconnus. Nous avons utilisés les propriétés des polynômes de Bernoulli pour dériver cette matrice, nous avons embauché la technique de multiplicateurs de Lagrange pour trouver les solutions optimales, les résultat numériques obtenus montrent l'efficacité de cette méthode.

Bibliographie

[1] O.P. Agrawal, A general formulation and solution scheme for fractional optimal control problems. Nonlinear Dynamics 38 : 323–337, 2004.

[2] O.P. Agrawal, A formulation and numerical scheme for fractional optimal control problems. Journal of Vibration and Control 14 : 1291–1299, 2008.

[3] O.P. Agrawal, A quadratic numerical scheme for fractional optimal control problems. ASME Journal of Dynamic System, Measurement and Control 130 : 011010, 2008.

[4] O.P. Agrawal, D. Baleanu, A Hamiltonian formulation and a direct numerical scheme for fractional optimal control problems. Journal of Vibration and Control 13 : 1269–1281, 2007.

[5] R.L. Bagley, P. J. Torvik, Fractional calculus in the transient analysis of viscoelastically damped structures. AIAA Journal 23 : 918–925, 1985.

[6] R. T. Baillie, Long memory processes and fractional integration in econometrics. Journal of Econometrics 73 : 5–59, 1996.

[7] J. T. Betts, Practical Methods for Optimal Control and Estimation Using Nonlinear Programming, 2nd ed. SIAM, Philadelphia, 2010.

[8] J.V. Breakwell, The optimization of trajectories, J. Soc. Ind. Appl. Math. 7, 215–247 (1959).

[9] T. S. Chow, Fractional dynamics of interfaces between soft–nanoparticles and rough substrates. Physics Letters A 342 : 148–155, 2005.

[10] T.M. El-Gindy, H.M. El-Hawary, M.S. Salim, M. El-Kady, A Chebyshev approximation for solving optimal control problems, Computers & Mathematics with Applications 29 (1995) 35–45.

[11] G.N. Elnagar, State-control spectral Chebyshev parameterization for linearly constrained quadratic optimal control problems, Journal of Computational and Applied Mathematics 79 (1997) 19–40.

[12] F. Fahroo, I.M. Ross, Direct trajectory optimization pseudospectral method. J. Guid. Control Dyn. 25, 160–166 (2002).

[13] G.H. Hicks, Ray,W.H. Approximation methods for optimal control synthesis. Can. J. Chem. Eng. 49, 522–528 (1971).

[14] H. Jaddu, "Numerical methods for solving optimal control problems using Chebyshev polynomials", PHD Thesis, JAIST, Japan, 1998.

[15] H.B. Keller. Numerical Methods for Two-Point Boundary Value Problems. Dover, New York (1992).

[16] E. Keshavarz, Y. Ordokhani et M. Razzaghi, A numerical solution for fractional optimal control problems via Bernoulli polynomials. Journal of Vibration and Control, 2015.

[17] D. Kraft. On converting optimal control problems into nonlinear programming problems. In : Schittkowski, K. (ed.) Computational Mathematical Programming. Springer, Berlin, 261–280 (1985)

[18] E. Kreyszig, Introductory functional analysis with applications, John Wiley and Sons Press, New York, 1978.

[19] Y. Li, W. Zhao, Haar wavelet operational matrix of fractional order integration and its applications in solving the fractional order differential equations. Applied Mathematics and Computation 216 : 2276–2285, 2010.

[20] A. Lotfi , M. Dehghan et S. A. Yousefi, A numerical technique for solving fractional optimal control problems. Computers and Mathematics with Applications 62 : 1055–1067, 2011.

[21] A. Lotfi,S. A. Yousefi et M. Dehghan, Numerical solution of a class of fractional optimal control problems via the Legendre rthonormal basis combined with the operational matrix and the Gauss quadrature rule. Journal of Computational and Applied Mathematics 250 : 143–160, 2013.

[22] F. Mainardi, Fractional calculus : "Some basic problems in continuum and statistical mechanics". In : Carpinteri A and Mainardi F (eds) Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. New York : Springer-Verlag, pp. 291–348, 1997.

[23] K.B. Oldham, J. Spanier, The Fractional Calculus. New York : Academic Press, 1974.

[24] I. Podlubny, Fractional differential equations, Academic Press, San Diego 1999.

[25] Ross. B., 1977a, "The development of fractional calculus 1695-1900," Historia Math., 4, 75-89.

[26] Y. A. Rossikhin, M. V. Shitikova, Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids. Applied Mechanics Reviews 50 : 15–67, 1997.

[27] A. Saadatmandi, M. Dehghan, A new operationalmatrix for solving fractional–order differential equations. Computers and Mathematics with Applications 59 : 1326–1336, 2010.

[28] C. Tricaud, Y. Q. Chen, An approximation method for numerically solving fractional order optimal control problems of general form. Computers and Mathematics with Applications 59 : 1644–1655, 2010.

[29] C. Tricaud, Y. Q. Chen, Time-optimal control of systems with fractional dynamics. International Journal of Differential Equations 2010 : 1–16, 2010.

[30] S.A. Yousefi, A.Lotfi et M. Dehghan, The use of a Legendre multiwavelet collocation method for solving the fractional optimal control problems. Journal of Vibration and Control 13 : 2059–2065, 2011.