RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÉRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ YAHIA FARES DE MÉDÉA
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE



MEMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse et Modélisation Mathématique

par

GHERDAOUI Rabah

Existence de solutions pour des équations elliptiques gouvernées par l'opérateur p(x)-Laplacien.

Soutenu publiquement le 22 Mai 2017 devant le jury composé de

Président :	N. BENAICHOUCHE	$M : A : A$	Université de Médéa
Examinateur :	M. BENCHAA	$M : A : A$	Université de Médéa
Examinateur :	W. OUKIL	$M : C : B$	Université de Médéa
Encadreur :	H. AYADI	$M : A : A$	Université de Médéa

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2016-2017

Remerciements

Louange á Allah,
le miséricordieux , sans Lui rien
de tout cela n'aurait pu être. Nous
remercions Allah qui nous a orienté
au chemin du savoir et les portes de la science.
Mon encadreur pour son encouragement,
son aide et son suivi pour terminer ce travail.
Je tiens á remercier également les membres de
jury pour avoir accepter de jurer ce mémoire.
Mes remerciements les plus sincéres sont
adressés á mes enseignants, qui ont
contribué durant nos études á
notre formation et tous les
enseignants de l'Université
DR.YAHIA FARES de Médéa
Enfin, merci á
ma famille, pour son
amour et son soutien
constant.

Résumé

Dans ce travail, on montre l'existence et l'unicité d'une solution faible dans un espace de Sobolev à exposant variable approprié pour le p(x)-Laplacien avec second membre est suffisamment régulier, en suite, on montre l'existence de solutions pour un problème semi-linéaire en utilisant deux méthodes,méthode de point fixe de Schauder et la méthode variationnelle

.

Abstract

In this work, we show the existence and the uniqueness of a weak solution in a Sobolev space with variable exponent suitable for the p (x) -Laplacian with second member is sufficiently regular, then we show the existence Of solutions for a semi-linear problem using two methods, Schauder's fixed point method and the variational method.

Table des matières

1 Rappels **9**

1.1 Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$ 9

1.2 Distributions 11

1.3 Espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$: 12

2 Rappels sur les méthodes de résolution **15**

2.1 Méthode des opérateurs monotones 15

2.2 Méthode variationnelle 21

2.3 Méthode de point fixe 26

3 Espaces de Lebesgue et Sobolev à exposant variable **30**

3.1 Espaces de Lebesgue à exposant variable 30

3.2 Espace de Sobolev à exposant variable 41

4 Existence de solutions pour p (x) -Laplacien Dirichlet problème **43**

4.1 Méthode variationnelle 43

4.2 Méthode de point fixe 49

Conclusion **53**

Notations

$\mathbb{R}^N$	espace euclidien de dimension$n$,$n \geq 1$.
Ω	ouvert de$\mathbb{R}^N$;
$\overline{\Omega}$	la fermeture deΩ;
$mes\,(\Omega) = \|\Omega\|$	la mesure (de Lebesgue) de l'ensembleΩ
$\partial\Omega$	la frontière deΩ
$p.p\ \Omega$	la presque partout surΩ.
$p^{'}$	exposant conjugué de p, c'est-à-dire $p^{'} = \frac{p}{p-1}$.
$p^* = \frac{Np}{N-p}$	L'exposant critique de Sobolev. pour $1 \leq p < N$.
∂_i	la dérivée partielle$\frac{\partial}{\partial x_i}$,pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, .., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$,
	on pose$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} ... \partial_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{\|\alpha\|}}{\partial_1^{\alpha_1} ... \partial_n^{\alpha_n}}$telle que$\|\alpha\| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$
	$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n}$ pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.
∇u	le gradient de u, $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$.
div$u$	la divergence de$u$, div $u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$.
$\triangle u$	le Laplacien de u, $\triangle u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.
$Suppf$	support de la fonction $f, supp(f) = \{x \in \Omega, f(x) \neq 0\}$.
B_X	la boule ouvert dans$X$.
$E^{'}$	le dual topologique de$E$.
$(\cdot, \cdot)$	Produit scalaire.
$\prec \cdot, \cdot \succ_{E^{'} \times E}$	le crochet de dualité entre l'espace$E$ et son dual topologique.

INTRODUCTION

Les équations aux dérivées partielles, constituent une branche importante des mathématiques appliquées. Elles sont utilisées dans la modélisation de nombreux phénomènes de natures différentes. Les EDP sont probablement apparues pour la première fois lors de la naissance de la mécanique rationnelle au cours du 17ème siècle (Newton, Leibniz...). Ensuite le "catalogue" des EDP s'est enrichi au fur et à mesure du développement des sciences et en particulier de la physique. S'il ne faut retenir que quelques noms, on se doit citer celui d'Euler, puis ceux de Navier et Stokes, pour les équations de la mécanique des fluides, ceux de Fourier pour l'équation de la chaleur, de Maxwell pour celles de l'électromagnétisme, de Schrödinger et Heisenberg pour les équations de la mécanique quantique, et bien sûr de Einstein pour les EDP de la théorie de la relativité. L'analyse mathématique de ces équations aux dérivées partielles nécessite un choix approprié des espaces fonctionnels (Sobolev, Lebesgue ....) et une définition claire de la notion de solution (l'existence et parfois l'unicité).

L'opérateur p-Laplacien apparaît aussi bien en mathématiques pures ; par exemple en géométrie riemannienne, qu'en mathématiques appliquées. En effet, il intervient dans de nombreux domaines en sciences expérimentales : problèmes de réaction diffusion non linéaires, dynamique des populations, écoulements de fluides non newtoniens, écoulements dans les milieux poreux, élasticité non linéaire, extraction de pétrole.

Les méthodes des opérateurs monotones, variationnelle et point fixe sont des méthodes parmi les méthodes les plus utilisées dans la résolution des équations aux dérivées partielles (équation laplacien),

Le but de ce mémoire est de présenter des résultats récents concernant l'existence des solutions faibles de certaines classes de systèmes d'équations aux dérivées partielles elliptiques

non linéaires faisant intervenir l'opérateur $p(x)$-Laplacien, on commence par l'étude d'un problèmes non linéaires uniformément elliptique faisant intervenir l'opérateur p-Laplacien du type

$$\begin{cases} -\triangle_p u = f(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0 & ,x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

avec : $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert bornée , $1 < p < N$ et $f \in L^q(\Omega)$ avec $q \geq p^{*'}$

Lorsque l'exposant p est une fonction dépend de x, on parle d'un problème faisant intervenir l'opérateur $p(x)$-Laplacien. Dans ce contexte, nous considérons le problème modèle suivant :

$$\begin{cases} -\triangle_{p(x)} u = f(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0 & ,x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

avec : $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert bornée , $1 < p < N$ et $f \in (W_0^{1,p(.)}(\Omega))'$.

Notre projet comporte quatre chapitres

Le chapitre 1 est entièrement consacré à l'exposé des définitions et résultats nécessaire à la suite de ce travail. On rappelle tout d'abord quelques résultats de base sur les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$ et les espaces de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$

Le second chapitre est consacré aux méthodes de résolution des equations pour le problème p-Laplacien pour prouver l'existance de solution.

Dans le troisiéme chapitre, on présente l'étude de l'espace de Lebesgue et de Sobolev à exposant variable.

En fin, dans le dernier chapiter, on étude l'existance de solution pour le problème $p(x)$-laplacien par les méthodes de résolutions entamées dans le 2eme chapitre.

Chapitre 1

Rappels

Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions et rappels des résultats nécessaires pour la suite de ce travail. Après avoir rappelé quelques résultats de base sur les espaces de Lebesgue et de Sobolev classiques.
Dans la suite Ω sera un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ avec $N \in \mathbb{N}^*$, muni de la mesure de Lebesgue.

1.1 Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Définition 1.1 *Soit $p \in \mathbb{R}$ tel que $1 \leq p < \infty$, on définit l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ par*

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \; mesurable \;\; ; \int\limits_{\Omega} |u|^p dx < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.1}$$

Et sont duale $L^{p'}(\Omega)$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
Et pour $p = \infty$, on définit $L^\infty(\Omega)$ par

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \;\; mesurable \; ; \sup_{x \in \Omega} \operatorname{ess} |u(x)| \leq M \; p.p \;\; \Omega \right\},$$

muni de la norme

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} ess|u(x)|.$$

$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.

Si $p = 2$ l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni de produit scalaire

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega fg \, dx.$$

Proposition 1.1 *1. $L^p(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$ et réflexif pour $1 < p < \infty$.*

2. Le dual de $L^p(\Omega)$ pour $1 < p < \infty$ est isomorphe à $L^{p'}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

3. $L^1(\Omega)$ est séparable mais pas réflexif et son dual est $L^\infty(\Omega)$.

4. $L^\infty(\Omega)$ n'est pas ni séparable ni réflexif et son dual est contient strictement $L^1(\Omega)$.

Proposition 1.2 ***(Inégalité de Young)***

Soient $(x_i)_{i=1,n} \geq 0$ et $(p_i)_{i=1,n} \geq 0$ avec

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_n} = 1,$$

alors

$$x_1 x_2 ... x_n \leq \frac{x_1^{p_1}}{p_1} + \frac{x_2^{p_2}}{p_2} + ... + \frac{x_n^{p_n}}{p_n}.$$

En particulier, on a pour $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$xy \leq \frac{1}{p}\varepsilon^p x^p + \frac{1}{q}\frac{y^q}{\varepsilon^q}, \ \forall \varepsilon > 0.$$

Lemme 1.3 ***(Inégalité de Hölder généralisée)*** *Soient $p, q, r \in [1, +\infty[$ avec $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Si $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$, alors $u, v \in L^r(\Omega)$ et on :*

$$||uv||_{L^r(\Omega)} \leq ||u||_{L^p(\Omega)} ||v||_{L^q(\Omega)}.$$

Lemme 1.4 ***(Inégalité d'interpolation)*** *Soient $1 \leq p \leq q \leq +\infty$.*

Si $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ alors $u \in L^r(\Omega)$ $\quad \forall r \in [p, q]$ et on :

$$||u||_{L^r(\Omega)} \leq ||u||^\theta_{L^p(\Omega)} ||u||^{1-\theta}_{L^q(\Omega)} \quad \text{où} \quad \frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}, \quad \text{avec} \quad \theta \in [0, 1].$$

Corollaire 1.5 *Soient $p, q \in [1, +\infty[$ tel que $1 \leq p \leq q \leq +\infty$.*

Si $|\Omega| < \infty$ alors

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

Convergence dans $L^p(\Omega)$

Définition 1.2 *Soient $p, p' \in [1, +\infty]$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $(f_n)_n \subset L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$.*

- *On dit que f_n converge fortement vers f dans $L^p(\Omega)$ et on note $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} ||f_n - f||_{L^p(\Omega)} = 0$.*
- *On dit que f_n converge faiblement vers f dans $L^p(\Omega)$ et on note $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(\Omega)$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_\Omega (f_n - f)\cdot\varphi \ = 0 \quad \forall \varphi \in L^{p'}(\Omega)$.*
- *On dit que f_n converge faible $\star$ vers f dans L^∞ et on note $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ dans $L^p(\Omega)$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_\Omega (f_n - f)\cdot\varphi \ = 0 \quad \forall \varphi \in L^1(\Omega)$.*

Théorème 1.1 ***(Convergence dominée)*** *Soit $p \geq 1$, et soient $(f_n)_n \subset L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$, on suppose que $f_n \to f$ p.p. dans Ω et qu'il existe $g \in L^p(\Omega)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on : $|f_n| \leq g$ p.p. dans Ω. Alors $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$.*

Théorème 1.2 ***(Convergence monotone)*** *Soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables positives, croissantes tells que $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ p.p sur Ω, alors :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\, dx.$$

Lemme 1.6 *(Lemme de Fatau) Soient Ω un ouvert, $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables positives.Alors*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to+\infty} f_n dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n dx.$$

1.2 Distributions

Définition 1.3 *On désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ à l'espace des fonctions de classe C^∞ sur Ω à support compact, un élément de $\mathcal{D}(\Omega)$ est appelé fonction test.*

Le dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$ noté par $\mathcal{D}'(\Omega)$, un élément T de $\mathcal{D}(\Omega)$ est appelé distribution sur Ω définie par :

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathcal{D}(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ & \varphi & \mapsto & < T, \varphi >_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} . \end{array}$$

Proposition 1.7 *$\mathcal{D}(\Omega)$ est un sous-espace dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < +\infty$.*

Définition 1.4 *Soit $K \subset \Omega$ compact, on note*

$$\mathcal{D}_K(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \ / \ \ supp(\varphi) \subset K\}.$$

Proposition 1.8 *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Donc pour tout compact $K \subset \Omega$, ils existent $C > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que*

$$| < T, \varphi > | \leq C \cdot \sup_{x \in K, \ |\alpha| \leq m} |D^\alpha \varphi(x)|, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

La plus petit constant m vérifie l'inégalité président s'appele ordre de la distribution T.

Définition 1.5 ***(Dérivées aux sens de distributions)***

Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $k \in \{1...N\}$, $\alpha \in \mathbb{N}^N$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

On appelle dérivé partielle de T par rapport à la k-ième variable et on la note $\dfrac{\partial T}{\partial x_k}$ la distribution définie par :

$$< \frac{\partial T}{\partial x_k}, \varphi >= - < T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} > \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

par récurrence, on définit la dérivé partielle de T d'ordre α par :

$$< D^\alpha T, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha \varphi > \ , \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

1.3 Espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$:

Définition 1.6 *Pour $1 \leq p \leq +\infty$,On définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ par :*

Pour $1 \leq p < +\infty$

$$W^{1,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega) \ ; \quad |\nabla u| \in L^p(\Omega) \Big\},$$

muni de la norme

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega)} = \Big(||u||^p_{L^p(\Omega)} + ||\nabla u||^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{p}},$$

pour faire un espace de Banach.

Pour $p = +\infty$,

$$W^{1,\infty}(\Omega) = \Big\{ u \in L^\infty(\Omega) \ ; \quad |\nabla u| \in L^\infty(\Omega) \Big\},$$

muni de la norme

$$||u||_{W^{1,+\infty}(\Omega)} = \max\Big(||u||_{L^\infty(\Omega)}, ||\nabla u||_{L^\infty(\Omega)}\Big).$$

Pour $p = 2$, l'espace $W^{1,2}(\Omega)$ noté $H^1(\Omega)$ est de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)},$$

Proposition 1.9 *Soit $1 \leq p < +\infty$, L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < +\infty$, et réflexif pour $1 < p < +\infty$.*

Définition 1.7 *Soit $1 \leq p < +\infty$, On note $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}$, la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.*

Par conséquence si Ω est lipschitzien ,alors

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \Big\{u \in W^{1,p}(\Omega) \ ; \quad u_{|\partial\Omega} = 0\Big\}.$$

Donc par définition, l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, donc on peut identifier le dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ à un sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$ noté $W^{-1,p'}(\Omega)$ avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

Théorème 1.3 ***(Inégalité de Poincaré)***
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, Lipschitzien et borné au moins d'une direction et $p \in [1, +\infty[$. Alors il existe $C = C(p, \Omega) > 0$, tel que :

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leq C \cdot ||\nabla u||_{L^p(\Omega)} \qquad \forall\ u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

par conséquence L'application

$$u \longmapsto \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

est une norme équivalente à la norme usuelle.

Définition 1.8 *Soient $p \in [1, +\infty)$, $(f_n)_n \subset W^{1,p}(\Omega)$ et $f \in W^{1,p}(\Omega)$.*

- *On dit que f_n converge fortement vers f dans $W^{1,p}(\Omega)$ et on note $f_n \to f$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ si*

$$f_n \to f \quad dans \quad L^p(\Omega) \quad et \quad \nabla f_n \to \nabla f \quad dans \quad L^p(\Omega).$$

- *On dit que f_n converge faiblement vers f dans $W^{1,p}(\Omega)$ et on note $f_n \rightharpoonup f$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ si*

$$f_n \rightharpoonup f \quad dans \quad L^p(\Omega) \quad et \quad \nabla f_n \rightharpoonup \nabla f \quad dans \quad L^p(\Omega).$$

Théorème 1.4 (Injections de Sobolev-Rellich-Kondrachov) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ et $p^* = \frac{Np}{N-p}$. Alors*

- *Si $1 \leq p < N$ alors l'injection $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compacte pour $q \in [1, p^*)$, et continue pour $q = p^*$. En particulier l'injection $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ est compacte pour tout $p \in [1, +\infty)$.*
- *Si $p = N$ alors l'injection $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compacte et continue pour $q \in [1, +\infty)$.*
- *Si $p > N$ alors l'injection $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ est compacte et continue.*

Chapitre 2

Rappels sur les méthodes de résolution

Dans ce chapitre ,nous rappelons quelques méthodes utilisées pour démontre l'existence des solutions faibles du problème p-Laplacien.

2.1 Méthode des opérateurs monotones

Dans ce section, nous donnons une méthode de résolution de problème aux limits non linéaires c'est la méthode des opérateur monotones. Dans tout ce qui suite, V design un espace de Banach et $V^{'}$ son dual.

Définition 2.1 *(**Opérateurs monotones**) Un opérateur $A : V \longrightarrow V^{'}$ est dit*

1) Monotone si

$$\forall u, v \in V, \quad \langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0.$$

2) Strictement monotone si de plus $\langle Au - Av, u - v\rangle = 0$ implique $u = v$.

Définition 2.2 *(**Opérateur borné**)Soient V et W deux espace de Banach et $A : V \longrightarrow W$ un opérateur, on dira que A est bornée s'il envoie tout bornée de V dans un bornée de W, c'est-à-dire,*

$$\forall \rho > 0, \ \exists\, c_\rho > 0 \ ; \ \ A(B_V(0, \rho)) \subset B_W(0, c_\rho).$$

Définition 2.3 *(**Opérateur hémicontinu**) Un opérateur $A : V \longrightarrow W$ est dit hémicontinu au point u de V si :*

$$\forall v \in V,\ \forall\, \{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}\ \ \lambda_n \longrightarrow 0 \Longrightarrow\ A(u+\lambda_n v) \rightharpoonup Au\ \ \textit{faiblement dans } W.$$

Lemme 2.1 *Soit* $\mathbb{R}^N \ni \xi \to p(\xi) \in \mathbb{R}^N$ *une application continue.Supposons qu'il existe* $\rho > 0$ *tel qu'on ait*

$$\langle p(\xi), \xi\rangle \leq 0, \forall \xi \in S_\rho = \{\xi \in \mathbb{R}^N; |\xi| = \rho\}. \tag{2.1}$$

Alors, il existe $\xi \in \bar{B}_\rho$ *tel que* $p(\xi) = 0$.

Lemme 2.2 *Soient* X *un espace de Banach de dimension finie et* Q *une application continue de* X *dans son dual* X'. *Supposons qu'il existe une fonction réelle* γ *définie sur l'intervalle* $(0, +\infty)$ *telle que* $\lim\limits_{r\to\infty} \gamma(r) = +\infty$ *et*

$$\langle Q(u), u\rangle \geq \gamma(\|u\|_X)\|u\|_X, \quad \forall u \in X. \tag{2.2}$$

Alors $Q(X) = X'$, *c'est-à-dire,l'équation*

$$Q(u) = f,$$

possède au moins une solution $u \in X$ *pour tout* $f \in X'$.

Théorème 2.1 *Soient* V *un espace de Banach réflexif et* $A : V \longrightarrow V'$ *un opérateur :*

- *borné.*
- *hémicontinu.*
- *coercitif au sans que :*

$$\lim_{\|v\|_V \longrightarrow +\infty} \frac{\langle Av, v\rangle}{\|v\|_V} = +\infty.$$

- *monotone .*

Alors

$$\forall f \in V',\ \exists\ u \in V\ \ ;\ Au = f.$$

Preuve. La démonstration procédé dans plusieurs étapes.

Étape1 : montrons que pour f fixés dans V', l'équation $Au = f$ possède au moins une solution. Comme l'opérateur donné par $A_f u = Au - f$ possède les memes propriétés que A, donc montrons que $A_f u = 0$ admet une solution,si elle est vérifie les conditions de théorème 2.1 .Pour simplifie la notation on pose :$A_f u = Au = 0$.

Étape2 : Soit F la famille de tout les sous-espaces de V de dimensions finies.

Pour $F \in \mathsf{F}$ nous définissons l'opérateur $j_F u = u \quad \forall u \in F$, donc on a $j_F u$ est linéaire continue de F dans F.

Et soit j_F^* l'opérateur adjoint de j_F,définie par

$$\langle j_F^* v, u\rangle = \langle v, j_F u\rangle \qquad \forall u \in F, v \in V',$$

l'opérateur j_F^* linéaire linéaire et continu sur V' à valeur dans F'.

Pour $u \in F$ posons

$$\begin{aligned} A_F \quad &: F \longrightarrow F'. \\ A_F u \quad &= (j_F^* \circ A \circ j_F)\, u. \end{aligned}$$

L'opérateur A_F est continu de F dans F' car A,j_F^* et j_F sont continu.Posons pour $r > 0$,

$$\gamma(r) = \inf_{u \in V, \|u\| = r} \frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|}.$$

La coercitivité de l'opérateur A implique que $\lim_{r\to\infty} \gamma(r) = +\infty$,de plus ,on a

$$\langle A_F u, u\rangle = \langle Au, j_F u\rangle = \langle Au, u\rangle \geq \gamma(\|u\|_V)\|u\|_V, \quad u \in F. \tag{2.3}$$

D'après lemme2.2 ,pour tout $F \in \mathsf{F}$, il existe au moins un élément $u_F \in F$ tel que

$$A_F(u_F) = 0. \tag{2.4}$$

Étape3 : montrons que toutes les solutions dans la boule fermé $\bar{B}(0, r_0)$, pour cela,il suffit de montrer que il existe $r_0 > 0$ tel que $\|u_F\|_V \leq r_0, \quad \forall F \in \mathsf{F}, \quad \forall u_F \in F$ solution de (2.4).

Si un tel r_0 n'existe pas, on peut trouver une suite d'espaces $\{F_n\}$ de dimension finie, et suite $\{u_n\} \quad (u_n \in F_n \; solution \; de (2.4))$ tel que $\lim_{n\longrightarrow\infty} \|u_n\|_V = \infty$, et donc $\lim_{r\longrightarrow\infty} \gamma(\|u_n\|_V) = \infty$ ceci conduit à une contradiction. L'inégalité (2.3) implique

$$\gamma(\|u_n\|_V)\|u_n\|_V \leq \langle A_{F_n} u_n, u_n\rangle = 0.$$

Cela démontre que toute solution approchée u_n dans la boule fermée $\bar{B}(0, r_0)$ qui est compacte pour la topologie faible puisque l'espace V est supposé réflexif.

Étape4 : Soit $F_0 \in \mathsf{F}$ et posons

$$\mathsf{F}_{F_0} = \{F \in \mathsf{F}; F_0 \subset F\},$$

et soit U_{F_0} l'ensemble de tout les élément $u \in V$ solution de (2.4) pour au moins $F \in \mathsf{F}_{F_0}$, donc on a $U_{F_0} = \{u \in V, \exists F \in \mathsf{F}_{F_0}, A_F u = 0\}$. Soit $\bar{U}^w_{F_0}$ la ferméture faible de U_{F_0} , et donc $\bar{U}^w_{F_0} \subset \bar{B}(0, r_0)$ pour tout $F_0 \in \mathsf{F}$, donc on a l'intersection de la famille $\varphi = \{\bar{U}^w_{F_0}\}_{\{F_0 \in \mathsf{F}\}}$ non vide,alors il existe $u_0 \in \cap_{F_0 \in \mathsf{F}} \bar{U_{F_0}}^w$.

Il s'agit montre que u_0 est solution de $Au_0 = 0$.

Étape5 : On constate que

$$0 \leq \langle Av, v - u_0 \rangle, \quad \forall v \in V.$$

En effet, soit $v \in V$ et choisissons $F \in \mathsf{F}$ tel que $v \in F$.Si u_F solution de (2.4) ,

alors la monotonie de A permet d'écrire :

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle Av - Au_F, v - u_F \rangle &= \langle Av, v - u_F \rangle - \langle Au_F, v - u_F \rangle \\ &= \langle Av, v - u_F \rangle - \langle Au_F, j_F(v - u_F) \rangle \\ &= \langle Av, v - u_F \rangle - \langle A_F u_F, v - u_F \rangle \\ &= \langle Av, v - u_F \rangle, \end{aligned}$$

d'où

$$0 \leq \langle Av, v - u \rangle, \quad \forall u \in U_F. \tag{2.5}$$

Donc d'après la continuité fort (donc faible) de l'application $u \longmapsto \langle Av, v - u \rangle$, on voit que l'inégalité (2.5) est vraie pour u dans $\bar{U}^w_F$, cela implique que

$$0 \leq \langle Av, v - u_0 \rangle, \quad \forall u \in V. \tag{2.6}$$

Étape6 : prenons dans l'inégalité (2.6) $v = u_0 + tw$ avec $w \in V$ et $t > 0$,donc on a

$$0 \leq \langle A(u_0 + tw), tw \rangle = t \langle A(u_0 + tw), w \rangle,$$

alors

$$0 \leq \langle A(u_0 + tw), w \rangle.$$

Faisons tendre t vers zéro, l'hémicontinuité de A implique que

$$0 \leq \langle Au_0, w \rangle \quad \forall w \in V, \tag{2.7}$$

on peut alors remplaces w par $-w$ on obtient

$$0 \leq \langle Au_0, -w \rangle = -\langle Au_0, w \rangle. \tag{2.8}$$

Les relation (2.7) et (2.8) implique alors que

$$0 = \langle Au_0, w\rangle \quad \forall w \in V,$$

par d'où $Au_0 = 0$. Ce que termine la prouve. ■

Application

Résolution d'un problème de Dirichlet P-laplacien

On considère le problème

$$\begin{cases} -\triangle_p u = -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = & f \quad \text{dans}\Omega \\ u = & 0 \quad \text{sur}\partial\Omega \end{cases} \tag{2.9}$$

Où Ω est une ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, avec $1 < p < +\infty$ et $p' = \dfrac{p}{p-1}$.

Lemme 2.3 *Si* $1 < p < 2$

$$[(|\eta|^{p-2}\eta - |\xi|^{p-2}\xi)(\eta - \xi)] \geq (p-1)\frac{|\eta - \xi|^2}{(|\eta| + |\xi|)^{(2-p)/p}}. \tag{2.10}$$

Si $p \geq 2$

$$(|\eta|^{p-2}\eta - |\xi|^{p-2}\xi)(\eta - \xi) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^p |\eta - \xi|^p. \tag{2.11}$$

Théorème 2.2 *Le problème 2.9 admet une solution unique* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Preuve. On commence par l'existence, pour montre l'existence de la solution de problème (2.9), on utilise le théorème 2.1. On prendre $Au = -div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, et on a

- A est borné en effet,
  soit $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on a $\langle Au, v\rangle = \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v \, dx$
  soit $\rho > 0$ pour $u \in B_{W_0^{1,p}(\Omega)}(0,\rho)$ on a :

$$\begin{aligned} \|Au\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} &= \sup_{v\in W_0^{1,p}(\Omega), \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\leq 1} |\langle Au, v\rangle| \\ &= \sup_{v\in W_0^{1,p}(\Omega), \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\leq 1} |\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v|. \end{aligned}$$

  On a

$$\begin{aligned} |\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v| &\leq \int_\Omega |\nabla u|^{p-1}|\nabla v| \\ &\leq \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_\Omega |\nabla v|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)}\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \rho^{p-1}, \end{aligned}$$

donc :

$$\|Au\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq \rho^{p-1},$$

alors

$$A(B_{W_0^{1,p}(\Omega)}(0,\rho)) \subset B_{W^{-1,p'}(\Omega)}(0,\rho^{p-1}).$$

Donc A est borné.

- A est coercive, en effet,

  Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ on a $\quad \langle Au, u\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^p dx,$

  donc

  $$\frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} \geq \frac{\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)}}{\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}} = \|u\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} \geq C\|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

  Alors

  $$\lim_{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\longrightarrow\infty} \frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} = +\infty.$$

- A est strictement monotone, en utilisant lemme 2.3.

  Donc pour tout $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, telles que, $u \neq v$, on a

  $$\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2}|\nabla u| - |\nabla v|^{p-2}|\nabla v|\right)\nabla(u-v)dx = \langle Au - Av, u - v\rangle > 0.$$

- A est hémicontinu, en effet,

  Soient $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$ tel que $\lambda_n \longrightarrow 0$. Montrons que $A(u + \lambda_n v) \rightharpoonup Au$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

  Soit $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on a :

  $$\langle A(u+\lambda_n v), w\rangle = \int_\Omega |\nabla(u+\lambda_n v)|^{p-2}\nabla(u+\lambda_n v)\nabla w,$$

par la continuité,on obtient

$$|\nabla(u+\lambda_n v)|^{p-2}\nabla(u+\lambda_n v) \longrightarrow |\nabla u|^{p-2}\nabla u \;\; p.p\,\Omega,$$

et comme $\{\lambda_n\}$ est convergente donc elle est bornée dans $\mathbb{R}$, $\exists c>0 \quad |\lambda_n| \leq c$.

Par conséquence,

$$||\nabla(u+\lambda_n v)|^{p-2}\nabla(u+\lambda_n v)| \leq 2^{p-2}(|\nabla u|^{p-1}+c|\nabla v|^{p-1}) \in {}^{p'}(\Omega).$$

En utilisant la convergence dominé, on obtient

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\langle A(u+\lambda_n v),w\rangle = \langle \lim_{n\longrightarrow\infty} A(u+\lambda_n v),w\rangle = \langle Au,w\rangle,$$

d'où la hémicontinuité de A.

Il résulte alors du théorème2.1 l'existence de $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solution de problem (2.9).

L'UNICITÉ

Soit u_1,u_2 deux solutions faibles de (2.9), alors :

$$\int_\Omega |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 \nabla v = \int_\Omega fv \qquad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

et

$$\int_\Omega |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2 \nabla v = \int_\Omega fv \qquad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Donc

$$\int_\Omega (|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2)\nabla v = 0, \tag{2.12}$$

en prendre $v = u_1 - u_2$, dons (2.12), on obtient ,

$$\int_\Omega (|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2)\nabla(u_1-u_2) = 0.$$

Comme A est strictement monotone alors $u_1 = u_2$.

D'où l'unicité de la solution u. ∎

2.2 Méthode variationnelle

Pour démontrer l'existence d'une solution faible pour le problème (2.9) , on utilise souvent les techniques variationnelles et des arguments de minimisation des fonctionnelles .

Soit X espace de Banach et A un opérateur de X dans X' pour $f \in X'$ on considérons l'équation

$$Au = f, \tag{2.13}$$

où u est l'inconnu à chercher dans X.

On suppose qu'il existe un fonctionnelle $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ possédant un gradient ∇J en tout point $u \in X$, tel que $\nabla J(u) = Au - f \qquad \forall u \in X$, on observe que $u \in X$ est une solution de (2.13) si seulement se u est un point critique de J, c'est-à-dire,$\nabla J(u) = 0$.

Définition 2.4 *(**Semi continuité inférieure**) Soient X espace de Banach et $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ un fonctionnelle, on dit que :*

i) J est semi-contenue inférieurement (s.c.i) au point $x \in X$ si

$$\forall \{x_n\} \subset X, x_n \longrightarrow x \text{ dans } X \Rightarrow \liminf_{n \longrightarrow \infty} J(x_n) \geq J(x).$$

ii) J est semi-contenue inférieurement faible au point $x \in X$ si

$$\forall \{x_n\} \subset X : x_n \rightharpoonup x \text{ dans } X \Rightarrow \liminf_{n \longrightarrow \infty} J(x_n) \geq J(x).$$

J est semi-contenue inférieure si elle est semi contenue inférieure en tout point de X.

Définition 2.5 *Soit X espace de Banach $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :*

i) J est convexe si

$$\forall x, y \in X, \forall \lambda \in [0,1] \qquad J(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda J(x) + (1-\lambda)J(y).$$

ii) J est strictement convexe si

$$\forall x, y \in X \text{ tel que } x \neq y \ , \forall \lambda \in]0,1[: \qquad J(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda J(x) + (1-\lambda)J(y).$$

Définition 2.6 *(**Différentiabilité au sens de Gateux**) Soient X et Y deux espace de Banach et $A : X \longrightarrow Y$ un opérateur*

i) Si pour $u, v \in X$ le quotient

$$\frac{A(u+tv) - A(u)}{t} \in Y,$$

à une limite finie lorsque $t \longrightarrow 0$, on la note $A'(u,v)$ et on l'appelle le G-différentielle de A au point u dans la direction v.

ii) Si $A'(u,v)$ existe pour tout $v \in X$, on dit Aest G-différentiable au point u.

iii) si $A^{'}(u,v)$ existe pour tout $v \in X$ et si l'opérateur $v \longmapsto A^{'}(u,v)$ est linéaire continue on l'appelle la G-dérivée de A au point u.

On note G-dérivée au point u par $A^{'}(u)$ donc $A^{'}(u).v = A^{'}(u,v)$ avec $A^{'}$ linéaire continue de X dans Y.

Théorème 2.3 *Soit X un espace de Banach réflexif et soit $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction faiblement sci sur X. Supposons que*

$$\lim_{\|u\|_X \longrightarrow \infty} J(u) = +\infty.$$

Alors J possède au moins un minimum sur X, c'est-à-dire, il existe $u \in X$ tel que $J(u) = \min_{v \in X} J(v)$.
De plus si J est différentiable au sens de Gateux, alors $\nabla J(u) = 0$.

Théorème 2.4 *Soit X un espace de Banach réflexif et soit $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ un fonctionnelle*

- *convexe.*
- *sci fort sur X.*
- *coercive*

$$\lim_{\|u\|_X \longrightarrow \infty} J(u) = +\infty.$$

Alors J possède un minimum au mois sur X.
De plus si J est strictement convexe,alors il existe unique $u \in X$ tel que $J(u) = \min_{v \in X} J(v)$.

Théorème 2.5 *Soit $p \in]1, \infty[$, on suppose que $f \in L^q(\Omega)$ avec $q \geq p^{*^{'}} = \frac{Np}{N(p-1)+p}$. Alors il existe une solution faible unique $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ du problème*

$$\begin{cases} -\triangle_p u = f & dans\ \Omega, \\ u = 0 & sur\ \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.14}$$

Preuve.

1. Soit J définie dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ par :

$$\begin{aligned} J \ : \quad & W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ J(u) \ & = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p \ - \int_\Omega f u. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Soient $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$on a

$$J(u+tv) = \frac{1}{p}\int\limits_{\Omega} |\nabla u + t\nabla v|^p \ - \int\limits_{\Omega} fu \ \ - t\int\limits_{\Omega} fv.$$

Alors

$$J(u+tv) - J(u) = \frac{1}{p}\int\limits_{\Omega} |\nabla u + t\nabla v|^p - |\nabla u|^p \ - t\int\limits_{\Omega} fv.$$

En utilisons la formule des accroissements finies :

Soit $\theta = \theta(u,t) \in (0,1)$, et $h(x) = \frac{1}{p}|x|^p$ on a $\nabla h(x) = |x|^{p-2}x$,

donc

$$J(u+tv) - J(u) = \int\limits_{\Omega} t|\nabla u + t\theta\nabla v|^{p-2}\nabla u\nabla v \quad - t\int\limits_{\Omega} fv,$$

par suite

$$\frac{J(u+tv) - J(u)}{t} = \int\limits_{\Omega} |\nabla u + t\theta\nabla v|^{p-2}\nabla u\nabla v \ \ dx - \int\limits_{\Omega} fv,$$

d'où

$$J^{'}(u,v) = \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{J(u+tv) - J(u)}{t} = \lim_{t\longrightarrow 0}\int\limits_{\Omega} |\nabla u + t\theta\nabla v|^{p-2}\nabla u\nabla v \quad - \int\limits_{\Omega} fv,$$

d'autre part, nous avons pour $t \longrightarrow 0$,

$$|\nabla u + t\theta\nabla v|^{p-2}\nabla u\nabla v \longrightarrow |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v \qquad p.p\ x \in \Omega,$$

et comme $t < 1$, on a

$$|\nabla u + t\theta\nabla v|^{p-2}\nabla u\nabla v \leq 2^{p-2}\left(|\nabla u|^{p-1}\nabla v + |\nabla v|^{p-1}\nabla u\right) \quad \in L^1(\Omega).$$

Le théorème de convergence dominée implique que

$$(\nabla J(u), v) = J^{'}(u,v) = \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{J(u+tv) - J(u)}{t} = \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v - \int\limits_{\Omega} fv,$$

donc

$$(\nabla J(u), v) = \langle J^{'}(u), v\rangle = \langle -\ \triangle_p\, u - f, v\rangle \qquad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Alors, u est un point critique si seulement si u est un solution faible de problem (2.14).

2. J admet un point critique :

   Comme J est G-différentiable à suffit de montre que J admet une minimum.

   i) J est convexe,en effet

   Soient $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $t \in (0,1)$ on a

$$\begin{aligned} J(tu+(1-t)v) &= \int_\Omega |t\nabla u + (1-t)\nabla v|^p - t\int_\Omega fu - (1-t)\int_\Omega fv \\ &= \|t\nabla u + (1-t)\nabla v\|^p_{L^p(\Omega)} - t\int_\Omega fu - (1-t)\int_\Omega fv. \end{aligned}$$

   La fonction $x \longmapsto x^p$ est croissante et d'après propriété triangulaire de la norme on obtient

$$J(tu+(1-t)v) \leq tJ(u) + (1-t)J(v).$$

   Donc J est convexe

   ii) J est sci en effet :

   Soient $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $\{u_n\}$une suite de $W_0^{1,p}(\Omega)$ tel que $u_n \longrightarrow u$, alors

$$\frac{1}{p}\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{p}\|u_n\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}, \tag{2.16}$$

   et comme u_n converge fortement vers u, alors u_n converge faiblement vers u, donc

$$\forall\ f \in W^{-1,p'}(\Omega) \qquad \langle f, u_n\rangle \longrightarrow \langle f, u\rangle. \tag{2.17}$$

   En combinant (2.16) et (2.17), en obtint

$$\liminf_{n\to_\infty} J(u_n) \geq J(u),$$

   alors J est sci .

   iii) J est coercive :

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \int_\Omega fu\, dx \\ &\geq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \left(\int_\Omega |f|^{p^*{}'}\, dx\right)^{\frac{1}{p^{*'}}} \left(\int_\Omega |u|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\geq \tfrac{1}{p}\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} - C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}\ , \end{aligned}$$

   on utilisé l'inégalité de Sobolev

$$\lim_{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\longrightarrow+\infty} J(u) = +\infty.$$

Le théorème2.4 assure l'existence de $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que $J(u) = \min_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} J(v)$, et u est une solution faible de (2.14). L'unicité est similaire à la preuve dans la section précédente. ■

2.3 Méthode de point fixe

Définition 2.7 *(**Fonction de Carathéodory**) Soit f une fonction de $\Omega \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dit de Carathédory si*

1) L'application : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto f(x,t)$ est continue p.p $x \in \Omega$.

2) L'application : $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x,t)$ est mesurable $\forall \ t \in \mathbb{R}$.

Théorème 2.6 *Soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction Carathédory, on suppose qu'il existe une fonction $b \in L^q(\Omega)$ et une constante $c > 0$ telle que :*

$$|f(x,t)| \leq b(x) + c|t|^{\frac{q}{q'}} \qquad p.p\ x \in \Omega \ et \ \forall t \in \mathbb{R}, \quad avec \quad \frac{1}{q'} + \frac{1}{q} = 1. \tag{2.18}$$

Alors l'opérateur de Nemitski

$$N_f : L^q(\Omega) \longrightarrow L^{q'}(\Omega)$$
$$u(x) \longmapsto f(x, u(x)),$$

est continue.

Théorème 2.7 *(**Leray-Shauder-Schafer**) Soit T une application continue et compacte d'un espace localement convexe séparé E dans lui même, tel que ,l'ensemble :*

$$S = \{x \in E : \exists\ \lambda \in [0,1]; \quad x = \lambda T(x)\},$$

est borné. Alors pour tout $\lambda \in [0,1]$, il existe $x \in E$ tel que $x = \lambda T(x)$.

Théorème 2.8 *Soient Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^N$ et $p \in (1, \infty)$. On suppose $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction carathédory satisfiant (2.18) avec $1 < q < p < p^*$.*
Alors le problème :

$$\begin{cases} -\triangle_p u = f(x,u) & dans\ \Omega, \\ u = 0 & sur \partial\ \Omega, \end{cases} \tag{2.19}$$

possède une solution faible dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Preuve. démonstration procédé dans deux étapes :

Étape1 :

1. D'après l'application de la méthode monotone on a :

$$-\triangle_p\colon W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega),$$

est bijective donc il existe

$$(-\triangle_p)^{-1} : W^{-1,p'}(\Omega) \longrightarrow W_0^{1,p}(\Omega),$$

est continue en effet :

On note l'opérateur $A = -\triangle_p\colon W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$.

1 Montrons que A de type S_+, c'est-à-dire :

Si $u_n \rightharpoonup u$ et $\limsup_{n\to\infty}\langle Au_n - Au, u_n - u\rangle \leq 0$. Alors $u_n \longrightarrow u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

On a comme A est strictement monotone et $\limsup_{n\to\infty}\langle Au_n - Au, u_n - u\rangle \leq 0$ alors $\lim_{n\to\infty}\langle Au_n - Au, u_n - u\rangle = 0$.

• Et on a ∇u_n converge vers ∇u dans $L^p(\Omega)$ en effet :

D'une part :

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty}\langle Au_n - Au, u_n - u\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n(\nabla u_n - \nabla u)dx - \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u(\nabla u_n - \nabla u)dx\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega (|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u)dx = \lim_{n\to\infty} H_n(u). \end{aligned}$$

D'autre part :

(a) Pour $2 \leq p$, d'après Lemme2.3 on a :

$$\begin{aligned} 2^{2-p}\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^p\, dx &\leq \int_\Omega \left(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)(\nabla u_n - \nabla u)\, dx \\ &\leq \int_\Omega \left(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)(\nabla u_n - \nabla u)\, dx \\ &= H_n(u). \end{aligned}$$

(b) Pour $1 < p(x) < 2$, d'après Lemme2.3 on a :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla u_n - \nabla u|^p &\leq \int_\Omega \frac{|\nabla u_n - \nabla u|^p}{(|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p(2-p)}{2}}} (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p(2-p)}{2}} \\
&\leq \left(\int_\Omega \left(\frac{|\nabla u_n - \nabla u|^p}{(|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p(2-p)}{2}}} \right)^{\frac{2}{p}} \right)^{\frac{p}{2}} \left(\int_\Omega \left((|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p(2-p)}{2}} \right)^{\frac{2}{2-p}} \right)^{\frac{2-p}{2}} \\
&\leq \left(\int_\Omega \left(\frac{|\nabla u_n - \nabla u|^2}{(|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{2-p}} \right) \right)^{\frac{p}{2}} \left(\int_\Omega \left((|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p(2-p)}{2}} \right)^{\frac{2}{2-p}} \right)^{\frac{2-p}{2}} \\
&\leq C\,(p-1)^{-\frac{p}{2}} \left(\int_\Omega (p-1) \left(\frac{|\nabla u_n - \nabla u|^2}{(|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{2-p}} \right) \right)^{\frac{p}{2}} \\
&\leq C_1 H_n(u).
\end{aligned}$$

On a si $n \longrightarrow \infty$, alors $H_n(u) \longrightarrow 0$.

Donc de (a) et (b) on a

$$\|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0,$$

alors

$$\|u_n - u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Donc A de type (S_+)

2 Montrons que A^{-1} est continue.

Soient $f_n, f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, tel que $f_n \longrightarrow f$, et $u_n = A^{-1}(f_n), u = A^{-1}(f)$, alors $Au_n = f_n, Au = f$.

Donc $\{u_n\}$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, et comme $W_0^{1,p}(\Omega)$ réflixi, alors il existe $u_n \rightharpoonup u_0$, et comme $f_n \longrightarrow f$, alors

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \langle Au_n - Au_0, u_n - u_0 \rangle = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \langle f_n, u_n - u_0 \rangle = 0.$$

Comme A de type (S_+) alors $u_n \longrightarrow u_0$, conclus donc $u_n \longrightarrow u$ donc A^{-1} est continue.

2 D'après la condition de $f(x,u)$ l'opérateur de Nemitsky

$$(N_f u)(x) = f(x, u(x)),$$

est bien définie de L^q à valeur dans $L^{q'}$ et continue

et d'après l'injections de Rellich ,

$$i^* : W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

est continue et compacte et soit l'injections

$$i : L^{q'} \hookrightarrow W^{-1,p'}(\Omega),$$

est continue, donc

$$N_f = i \circ N_f \circ i^* : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega),$$

est continue compacte

par suite l'opérateur

$$T = (- \triangle_p)^{-1}(N_f) : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W_0^{1,p}(\Omega),$$

est continue compacte.

Étape2 : Montrons que $S = \left\{u \in W_0^{1,p}(\Omega); \exists \quad \lambda \in [0,1] \quad u = \lambda T u\right\}$ est borné .

On a :

$$\begin{aligned}
\|Tu\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} &= \langle - \triangle_p (Tu), Tu\rangle \\
&= \langle N_f u, Tu\rangle \\
&= \int_\Omega f(x, u(x)) Tu \, dx \\
&\leq \int_\Omega (C|u|^{q-1} + b(x))|Tu| \ dx.
\end{aligned}$$

Soit $u \in S$ on a :

$$\begin{aligned}
\|Tu\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} &\leq C \int_\Omega |u|^{q-1}|Tu| \ dx + \int_\Omega b(x)|Tu| \ dx \\
&\leq C \int_\Omega |Tu|^q \, dx + \|b\|_{L^{q'}} \|Tu\|_{L^q} \\
&\leq C\|Tu\|^q_{L^q} + \|b\|_{L^{q'}} \|Tu\|_{L^q} \\
&\leq CC_\Omega \|Tu\|^q_{W_0^{1,p}(\Omega)} + C_\Omega \|b\|_{L^{q'}} \|Tu\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Comme $p > q$,alors $\|Tu\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} < K$. C'est-à-dire si $u \in S$ alors $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} < K$ donc S est borné, d'après théorème 2.7 , il existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tel que $Tu = u$, donc il existe un solution faible de problème 2.19. ∎

Chapitre 3

Espaces de Lebesgue et Sobolev à exposant variable

3.1 Espaces de Lebesgue à exposant variable

Dans la suite Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$,$n \geq 1$

Définition 3.1 *Soit $P(\Omega)$ l'ensemble des fonctions mesurable, $p(.) : \Omega \longrightarrow [1, \infty)$*

Les élément de $P(\Omega)$ sont appelées les exposants

On note

$$p^- = \inf_{x\in\Omega} essp(x) \quad , p^+ = \sup_{x\in\Omega} essp(x) < +\infty$$

. Soit $p(.) \in P(\Omega)$, on note $p^{'}(.)$ le conjugué de $p(.)$ définie par :

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p^{'}(x)} = 1, \ \ \forall x \in \Omega,$$

si $p(x) = \infty$, en prendre $p^{'}(x) = 1$.

Définition 3.2 *Soit $p(.) \in P(\Omega)$ et f fonction, on définit le modulaire associé à $p(.)$par :*

$$A_{p(.)}(f) = \int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} \, dx.$$

Proposition 3.1 *Soient f, g deux fonctions mesurable*

1) $A_{p(.)}(f) \geq 0$ pour tout f.

2) $A_{p(.)}(f) = 0$ si et seulement si $f = 0 \quad p.p \ \ \Omega$.

3) $A_{p(.)}(f) = A_{p(.)}(-f)$.

4) $A_{p(.)}(f)$ *est convexe .*

5) Si $|f(x)| \geq |g(x)| \quad p.p\ \Omega$ *et si* $A_{p(.)}(f) < \infty$ *alors* $A_{p(.)}(f) \geq A_{p(.)}(g)$.

6) Si $0 < A_{p(.)}(f) < \infty$ *alors la fonction* $\lambda \longmapsto A_{p(.)}(f/\lambda)$ *est continue et décroissant sur* $[1, \infty)$.

Preuve.

i) La preuve de 1),3) et 5) découle à la définition du modulaire.

ii) Preuve de 2) :

(a) $A_{p(.)}(f) = 0 \Rightarrow \int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} = 0 = \||f(x)|^{p(x)}\|_{L^1} = 0 \Rightarrow f = 0.$

(b) $f = 0 \Rightarrow \int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} = 0.$

iii) Preuve de 4) :

(a) Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in [1, \infty)$ tel que $\lambda_1 < \lambda_2$ alors $A_{p(.)}(f/\lambda_1) > A_{p(.)}(f/\lambda_2)$ donc l'application $\lambda \longmapsto A_{p(.)}(f/\lambda)$ est décroissante sur $[1, \infty)$.

(b) Soient $\{\lambda_k\}$ suite décroissante avec $\lambda_k \longrightarrow \lambda$, alors, on a

$$|f(x)/\lambda_k| \longrightarrow |f(x)/\lambda| \quad p.p.\ x \in \Omega,$$

et

$$|f(x)/\lambda_k| \leq |f(x)| \quad \in L^1(\Omega).$$

D'après le Théorème de convergence dominée, on obtient :

$$A_{p(.)}(f/\lambda_k) \longrightarrow A_{p(.)}(f/\lambda),$$

alors la fonction $\lambda \longmapsto A_{p(.)}(f/\lambda)$ est continue et décroissante sur $[1, \infty)$.

■

Définition 3.3 *Soit* $p(.) \in P(\Omega)$*,on définit l'espace de Lebesgue à exposant variable noté* $L^{p(.)}(\Omega)$ *par*

$$L^{p(.)}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \quad mesurable, \quad A_{p(.)}(f) < +\infty \right\},$$

l'espace $L^{p(.)}(\Omega)$ *est un espace vectoriel.*

On définie la fonction

$$\|f\|_{p(.),\Omega} = \|f\|_{L^{p(.)}(\Omega)} = \inf\left\{\lambda > 0 \quad ; \; A_{p(.)}(f/\lambda) \leq 1\right\}.$$

Exemple 3.1 *Soit $p(x)$ définie sur $\Omega = \mathbb{R}$ par :*

$$p(x) = \begin{cases} 2 & si \quad x \leq 0 \\ 4 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

et $u(x) = |x|^{\frac{-1}{3}}$, alors :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)}\, dx &= \int_{-\infty}^{0} |u(x)|^2\, dx + \int_{-\infty}^{0} |u(x)|^4\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} ||x|^{\frac{-1}{3}}|^2\, dx + \int_{-\infty}^{0} ||x|^{\frac{-1}{3}}|^4\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} |x|^{\frac{-2}{3}}\, dx + \int_{-\infty}^{0} |x|^{\frac{-4}{3}}\, dx \\ &= \left[3x^{\frac{1}{3}}\right]_{-\infty}^{0} + \left[3x^{\frac{1}{3}}\right]_{0}^{\infty} \\ &= \infty \end{aligned}$$

alors

$$u(x) \notin L^{p(.)}(\Omega)$$

Et pour : $v(x) = |x|^{\frac{-1}{3}}\chi(-1,0)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |v(x)|^{p(x)}\, dx &= \int_{-1}^{0} ||x|^{\frac{-1}{3}}|^2\, dx \\ &= \left[3x^{\frac{1}{3}}\right]_{-1}^{0} = 3 \end{aligned}$$

donc

$$v(x) = |x|\frac{-1}{3}\chi(-1,0) \in L^{p(.)}(\Omega)$$

Exemple 3.2 *Soit $p(.)$ définie sur $\Omega = \mathbb{R}$ par :*

$$p(x) = \max\{|x|, 1\}, \; et \; u(x) = \frac{1}{2}, \;\; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pour $p(.)$ est une constant, $u(x) \notin L^p(\Omega)$. ET on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u(x)|^{p(x)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{1}{2}|^{p(x)}\, dx \\ &= \int_{|x|<1} |\frac{1}{2}|^{p(x)}\, dx + \int_{|x|>1} |\frac{1}{2}|^{p(x)}\, dx \\ &= \int_{|x|<1} |\frac{1}{2}|\, dx + \int_{|x|>1} |\frac{1}{2}|^{|x|}\, dx \\ &= 1 + \tfrac{1}{\log 2}.\end{aligned}$$

Donc

$$u \in L^{p(.)}(\Omega)$$

Proposition 3.2 *: Si* $0 < \|f\|_{p(.),\Omega} < \infty$ *alors* $A_{p(.)}(f/\|f\|_{p(.),\Omega}) \leq 1$.

Preuve. Soient $\{\lambda_k\}$ converge ver $\|f\|_{p(.),\Omega}$ avec $A_{p(.)}(f/\lambda_k) \leq 1$.

1. On a $|f(x)/\lambda_k|^{p(x)} \geq 0$ et $\lambda_k \geq \|f\|_{p(.),\Omega}$,
   alors :
   $$|f(x)/\lambda_k|^{p(x)} \leq |f(x)/\|f\|_{p(.),\Omega}|^{p(x)} < \infty.$$
2. Et on a $|f(x)/\lambda_k|^{p(x)} = \liminf_{k\longrightarrow+\infty} |f(x)/\|f\|_{p(.),\Omega}|^{p(x)}$.

donc d'après lemme de Fateu :

$$A_{p(.)}(f/\|f\|_{p(.),\Omega}) \leq \liminf_{k\longrightarrow+\infty} A_{p(.)}(f/\lambda_k).$$

■

Corollaire 3.3 *Si* $0 < \|f\|_{p(.),\Omega} \leq 1$ *alors* $A_{p(.)}(f) \leq 1$.

Preuve. : On a $0 < \|f\|_{p(.),\Omega} \leq 1$ alors $\dfrac{1}{\|f\|_{p(.),\Omega}} \geq 1$ donc $A_{p(.)}(f/\|f\|_{p(.),\Omega}) \geq A_{p(.)}(f)$ et comme $0 < \|f\|_{p(.),\Omega} < \infty$ alors $A_{p(.)}(f) \leq A_{p(.)}(f/\|f\|_{p(.),\Omega}) \geq 1$. ■

Proposition 3.4 *: L'application* $\|.\|_{p(.),\Omega} : L^{p(.)}(\Omega) \longmapsto [0,\infty)$ *défini une norme sur* $L^{p(.)}(\Omega)$.

Preuve. : On va montrons que $\|.\|_{p(.),\Omega}$ vérifie les propriétés suivantes :

1) $\|f\|_{p(.),\Omega} \geq 0 \quad \forall \quad f \in L^{p(.)}(\Omega)$.

2) $\|f\|_{p(.),\Omega} = 0 \quad \Leftrightarrow f = 0 \quad p.p \quad sur\ \Omega.$

3) $\forall \mu \in \mathbb{R} \quad f \in L^{p(.)}(\Omega), \qquad \|\mu f\|_{p(.),\Omega} = |\mu| \|f\|_{p(.),\Omega}.$

4) $\forall \quad f, g \in L^{p(.)}(\Omega), \qquad \|f+g\|_{p(.),\Omega} \leq \|f\|_{p(.),\Omega} + \|g\|_{p(.),\Omega}.$

1) La preuve de 1) découle à la définition de l'application .

2)$\Rightarrow$) si $f = 0$ alors $A_{p(.)}(f/\lambda) = 0 \leq 1$ pour tout $\lambda > 0$ donc $\|f\|_{p(.),\Omega} = 0$.

$\Leftarrow$) Si $\|f\|_{p(.),\Omega} = 0$ on pose $K(f) = \{\lambda > 0 \quad A_{p(.)}(f/\lambda) \leq 1\}$.

On suppose qui il existe $f \in L^{p(.)}(\Omega)$ tel que $\|f\|_{p(.),\Omega} = 0$ mais $f(x) \neq 0$, comme $f(x) \neq 0$ alors $\int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} dx \geq \varepsilon > 0$,

Soient $\{\lambda_k\}$ suite tel que $\{\lambda_k\} \subset K(f) \cap (0,1)$ donc comme $\inf K(f) = 0$,

alors

$$\lambda_k \longrightarrow 0 \ et \ A_{p(.)}(f/\lambda_k) \leq 1,$$

donc

$$1 \geq A_{p(.)}(f/\lambda_k) = \int\limits_{\Omega} |f(x)/\lambda_k|^{p(x)} dx \geq 1/\lambda_k \int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} dx \geq \frac{\varepsilon}{\lambda_k} \longrightarrow \infty.$$

Contradiction,d'où $f = 0$.

3) Soit $\mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \|\mu f\|_{p(.),\Omega} &= \inf \{\lambda > 0 \quad : A_{p(.)}(\mu f/\lambda) \leq 1\} \\ &= \inf \left\{\lambda > 0 \quad : A_{p(.)}(f/\frac{\lambda}{\mu}) \leq 1\right\} \\ &= \inf \{\mu\beta > 0 \quad : A_{p(.)}(f/\beta) \leq 1\} \\ &= |\mu| \|f\|_{p(.),\Omega}. \end{aligned}$$

4) Soient $f, g \in L^{p(x)}(\Omega)$ et $\lambda_f \geq \|f\|_{p(.),\Omega}$ et $\lambda_g \geq \|g\|_{p(.),\Omega}$, tel que $A_{p(.)}(f/\lambda_f) \leq 1$ et $A_{p(.)}(/\lambda_g) \leq 1$,

d'après la convexité de $A_{p(.)}(.)$ on a :

soit

$$\lambda = \lambda_f + \lambda_g$$

alors :

$$A_{p(.)}\left(\frac{f+g}{\lambda}\right) = A_{p(.)}\left(\frac{\lambda_f f}{\lambda\lambda_f} + \frac{\lambda_g g}{\lambda\lambda_g}\right)$$

$$\leq \frac{\lambda_f}{\lambda} A_{p(.)}\left(\frac{f}{\lambda_f}\right) + \frac{\lambda_g}{\lambda} A_{p(.)}\left(\frac{g}{\lambda_g}\right)$$
$$\leq A_{p(.)}\left(\frac{f}{\lambda_f}\right) + A_{p(.)}\left(\frac{g}{\lambda_g}\right),$$

donc

$$\|f+g\|_{p(.),\Omega} \leq \|f\|_{p(.),\Omega} + \|g\|_{p(.),\Omega}.$$

■

Remarque 3.1 *Si $p(x) = p$ une constante avec $1 \leq p < \infty$, on a :*

$$\begin{aligned}
\|f\|_{p,\Omega} &= \inf\{\lambda > 0 \,; \quad A_p(f/\lambda) \leq 1\} \\
&= \inf\{\lambda > 0 \,; \quad \int_\Omega |\frac{f}{\lambda}|^p \, dx \leq 1\} \\
&= \inf\{\lambda > 0 \,; \quad \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} dx \leq \lambda\} \\
&= \left(\int_\Omega |f|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f\|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Cette norme coincide avec la norme définie sur les espaces de Lebesgue à exposant constant.

Proposition 3.5 *Comme $p^+ < \infty$, alors $\forall f$ tel que $0 < \|f\|_{p(.),\Omega} < \infty$, on a*

$$A_{p(.)}(f/\|f\|_{p(.),\Omega}) = 1.$$

Preuve. : Soit $0 < \lambda \leq \|f\|_{p(.),\Omega}$, on a :

$$\begin{aligned}
A_{p(.)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) &= \int_\Omega \left(\frac{|f|}{\lambda}\right)^{p(x)} dx \\
&= \int_\Omega \left(\frac{\|f\|_{p(.),\Omega}}{\lambda}\right)^{p(x)} \left(\frac{|f|}{\|f\|_{p(.),\Omega}}\right)^{p(x)} dx \\
&\leq \int_\Omega \left(\frac{\|f\|_{p(.),\Omega}}{\lambda}\right)^{p^+} dx \; A_{p(.)}(f/\|f\|_{p(.),\Omega}).
\end{aligned}$$

Si $A_{p(.)}(f/\|f\|_{p(.),\Omega}) < 1$, on choisit $\lambda < \|f\|_{p(.),\Omega}$ tel que $A_{p(.)}(f/\lambda) \leq 1$ cette contredit avec la définition de $\|f\|_{p(.),\Omega}$, donc $A_{p(.)}(f/\|f\|_{p(.),\Omega}) = 1$. ■

Corollaire 3.6 *Pour $p^+ < \infty$, si $\|f\|_{p(.),\Omega} \leq 1$, alors :*

$$A_{p(.)}(f) \leq \|f\|_{p(.),\Omega}.$$

Lemme 3.7 *Soit $p(.) \in P(\Omega)$ avec $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, \infty)$, alors $\forall f \in L^{p(.)}(\Omega)$:*

$$\min\left\{\|f\|^{p^-}_{p(.),\Omega}, \|f\|^{p^+}_{p(.),\Omega}\right\} \leq A_{p(.)}(f) \leq \max\left\{\|f\|^{p^-}_{p(.),\Omega}, \|f\|^{p^+}_{p(.),\Omega}\right\}.$$

Preuve. :

On pose $\mu = \|f\|_{p(.),\Omega}$ et on considère la fonction $h(x) = f(x)/\mu$ alors : $h \in L^{p(.)}(\Omega)$ avec $\|h\|_{p(.),\Omega} = 1$, on a d'une part

$$1 = \|h\|_{p(.),\Omega} \leq \begin{cases} \mu^{-p^+} A_{p(.)}(f) & si\ \mu \leq 1, \\ \mu^{-p^-} A_{p(.)}(f) & si\ \ \mu > 1, \end{cases}$$

donc

$$A_{p(.)}(f) \geq \min\left\{\mu^{p^-}, \mu^{p^+}\right\}.$$

D'autre part

$$A_{p(.)}(f) = \int_\Omega |f(x)|^{p(x)} dx = \int_\Omega \mu^{p(x)} |h(x)|^{p(x)}\, dx \leq \begin{cases} \mu^{p^-}, & si\ \mu \leq 1, \\ \mu^{p^+}, & si\ \ \mu > 1, \end{cases}$$

donc

$$A_{p(.)}(f) \geq \max\left\{\mu^{p^-}, \mu^{p^+}\right\}.$$

Si $\|f\|_{p(.),\Omega} = 0$ alors $f = 0$, donc $A_{p(.)}(f) = 0$. ■

Corollaire 3.8 *Soit $p(.) \in P(\Omega)$ avec $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, \infty)$ alors $\forall f \in L^{p(.)}(\Omega)$:*

$$\min\left\{A^{\frac{1}{p^-}}_{p(.)}(f), A^{\frac{1}{p^+}}_{p(.)}(f)\right\} \leq \|f\|_{p(.),\Omega} \leq \max\left\{A^{\frac{1}{p^-}}_{p(.)}(f), A^{\frac{1}{p^+}}_{p(.)}(f)\right\}$$

Si $p^+ = p^-$ alors $A_p(f) = \|f\|^p_{L^p(\Omega)}$

Preuve. : On utilise lemme3.7 , si $\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq 1$, on a

$$\|f\|^{p^+}_{L^p(\Omega)} \leq A_p(f) \leq \|f\|^{p^-}_{L^p(\Omega)},$$

alors

$$A_p(f)^{\frac{1}{p^-}} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \leq A_p(f)^{\frac{1}{p^+}}.$$

Si $\|f\|_{L^p(\Omega)} \geq 1$, on a

$$\|f\|^{p^-}_{L^p(\Omega)} \leq A_p(f) \leq \|f\|^{p^+}_{L^p(\Omega)},$$

alors

$$A_p(f)^{\frac{1}{p^+}} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \leq A_p(f)^{\frac{1}{p^-}}.$$

Donc

$$\min\left\{A^{\frac{1}{p^-}}_{p(.)}(f), A^{\frac{1}{p^+}}_{p(.)}(f)\right\} \leq \|f\|_{p(.),\Omega} \leq \max\left\{A^{\frac{1}{p^-}}_{p(.)}(f), A^{\frac{1}{p^+}}_{p(.)}(f)\right\}.$$

■

Corollaire 3.9 *Soit $p(.) \in P(\Omega)$ avec $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, \infty)$ alors $\forall f \in L^{p(.)}(\Omega)$:*

(i) $\|f\|_{p(.),\Omega} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad A_{p(.)}(f) = 1.$

(ii) $\|f\|_{p(.),\Omega} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad A_{p(.)}(f) < 1.$

(iii) $\|f\|_{p(.),\Omega} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad A_{p(.)}(f) > 1.$

Remarque 3.2

1. $\|f\|_{p(.),\Omega} < A_{p(.)}(f) + 1.$
2. $A_{p(.)}(f) < \|f\|^{p^+}_{p(.),\Omega} + 1$

Lemme 3.10 *Soient $\{f_n\}$ suite de fonction tel que $f_n \in L^{p(.)}(\Omega)$ et $f \in L^{p(.)}(\Omega)$ avec $p(.) \in P(\Omega)$ et $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, \infty)$ alors :*

$$\|f_n - f\|_{p(.),\Omega} \longrightarrow 0 \ \Leftrightarrow \ A_{p(.)}(f_n - f) \longrightarrow 0.$$

Preuve.

Montrons que $\|f_n - f\|_{p(.),\Omega} \longrightarrow 0 \ \Rightarrow \ A_{p(.)}(f_n - f) \longrightarrow 0.$

D'après lemme3.7 , on a

$$\min\left\{\|f_n - f\|^{p^-}_{p(.),\Omega}, \|f_n - f\|^{p^+}_{p(.),\Omega}\right\} \leq A_{p(.)}(f_n - f) \leq \max\left\{\|f_n - f\|^{p^-}_{p(.),\Omega}, \|f_n - f\|^{p^+}_{p(.),\Omega}\right\}.$$

Donc,si $\|f_n - f\|_{p(.),\Omega} \leq 1$, on a

$$\|f_n - f\|^{p^+}_{p(.),\Omega} \leq A_{p(.)}(f_n - f) \leq \|f_n - f\|^{p^-}_{p(.),\Omega},$$

si$\|f_n - f\|_{p(.),\Omega} \geq 1$ on a

$$\|f_n - f\|^{p^-}_{p(.),\Omega} \leq A_{p(.)}(f_n - f) \leq \|f_n - f\|^{p^+}_{p(.),\Omega}.$$

Alors

$$A_{p(.)}(f_n - f) \longrightarrow 0.$$

Montrons que $A_{p(.)}(f_n - f) \longrightarrow 0 \Rightarrow \|f_n - f\|_{p(.),\Omega} \longrightarrow 0.$

D'après corollaire3.8, on a

$$\min\left\{A_{p(.)}^{\frac{1}{p^-}}(f_n - f), A_{p(.)}^{\frac{1}{p^+}}(f_n - f)\right\} \leq \|f_n - f\|_{p(.),\Omega} \leq \max\left\{A_{p(.)}^{\frac{1}{p^-}}(f_n - f), A_{p(.)}^{\frac{1}{p^+}}(f_n - f)\right\}.$$

Donc,si $A_{p(.)}(f_n - f) \leq 1$, on a

$$A_{p(.)}^{\frac{1}{p^-}}(f_n - f) \leq \|f_n - f\|_{p(.),\Omega} \leq A_{p(.)}^{\frac{1}{p^+}}(f_n - f),$$

si$A_{p(.)}(f_n - f) \geq 1$ on a

$$A_{p(.)}^{\frac{1}{p^+}}(f_n - f) \leq \|f_n - f\|_{p(.),\Omega} \leq A_{p(.)}^{\frac{1}{p^-}}(f_n - f).$$

Alors

$$\|f_n - f\|_{p(.),\Omega} \longrightarrow 0.$$

■

Lemme 3.11 *Soient $p(.), q(.) \in P(\Omega)$ tel que $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, \infty)$ et $q(x) \in [q^-, q^+] \subset (1, \infty)$,Si $p(x) \geq q(x)$ p.p $x \in \Omega$ alors*

$$L^{p(.)}(\Omega) \subset L^{q(.)}(\Omega).$$

Preuve.

On utilise l'inégalité de Young et *lemme*$3, 10$.

Soit $f \in L^{p(.)}(\Omega)$, on a $A_{p(.)}(f) < +\infty$, alors ,

$$\begin{aligned} A_{q(.)}(f) &\leq \int_\Omega \frac{q(x)}{p(x)}|f(x)|^{p(x)} + \frac{p(x) - q(x)}{p(x)}\, dx \\ &\leq \int_\Omega 1 + |f(x)|^{p(x)} dx = |\Omega| A_{p(.)}(f), \end{aligned}$$

donc $A_{q(.)}(f) < \infty$, alors $f \in L^{q(.)}(\Omega)$. ■

Lemme 3.12 ***(Inégalité de Hölder)*** *Soit $p(.) \in P(\Omega)$ avec $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, +\infty)$, pour tout $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ et $g \in L^{p'(x)}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p(.)} + \frac{1}{p'(.)} = 1$.*

Alors :

$$\int_\Omega |fg|\, dx \leq (\frac{1}{p^-} + \frac{1}{(p')^-})\|f\|_{p(.),\Omega}\|g\|_{p'(.),\Omega} \leq 2\|f\|_{p(.),\Omega}\|g\|_{p'(.),\Omega}.$$

Preuve. On pose $\|f\|_{p(.),\Omega} = \lambda$ et $\|g\|_{p'(.),\Omega} = \mu$ avec $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$,
d'après inégalité de Young pour $p.p.\ x \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)| &= \lambda\mu\Big|\frac{f(x)}{\lambda}\Big|\,\Big|\frac{g(x)}{\mu}\Big| \\ &\leq \lambda\mu\left(\frac{1}{p(x)}\Big|\frac{f(x)}{\lambda}\Big|^{p(x)} + \frac{1}{p'(x)}\Big|\frac{g(x)}{\mu}\Big|^{p'(x)}\right) \\ &\leq \lambda\mu\left(\frac{1}{p^-}\Big|\frac{f(x)}{\lambda}\Big|^{p(x)} + \frac{1}{(p')^-}\Big|\frac{g(x)}{\mu}\Big|^{p'(x)}\right),\end{aligned}$$

et

$$A_{p(.)}(f/\lambda) = 1 \quad A_{p'(.)}(g/\mu) = 1,$$

donc

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x)||g(x)|\,dx &\leq \lambda\mu\left(\frac{1}{p^-}A_{p(.)}\left(\frac{f(x)}{\lambda}\right) + \frac{1}{(p')^-}A_{p(.)}\left(\frac{g(x)}{\mu}\right)\right) \\ &= \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{(p')^-}\right)\|f\|_{p(.),\Omega}\|g\|_{p'(.),\Omega}\end{aligned}$$

On pose $\lambda\mu = 0$ alors $\displaystyle\int_\Omega |f(x)||g(x)|\,dx = 0$. ∎

Lemme 3.13 *Soient Ω un ouvert bornée tel que $\partial\Omega$ est lipschitzienne, $p(.) \in P(\Omega)$ avec $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1,\infty)$ et $q \geq 1$ si $\quad q \leq p(x) \quad p.p\ x \in \Omega$ alors :*

$$\|f\|_{q,\Omega} \leq C\|f\|_{p(.),\Omega},$$

avec $\quad C = (1 + |\Omega|)^{\frac{1}{q}}$.

Preuve. Soit $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ avec $\|f\|_{p(.),\Omega} = \lambda < \infty$, on prendre $g(x) = f(x)/\lambda$ donc on a $g \in L^{p(x)}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ avec $\|g\|_{p(.),\Omega} = A_{p(.)}(g) = 1$, alors

$$\frac{1}{\lambda}\|f\|_{q,\Omega} = \|g\|_{q,\Omega} \leq A_q^q(g).$$

On utilise inégalité de Yong :

$$\begin{aligned}A_q(g) &= \int_\Omega \Big|\frac{f(x)}{\lambda}\Big|^q\,dx \\ &\leq \int_\Omega \left(\frac{p(x)_q}{p(x)} + \frac{q}{p(x)}\Big|\frac{f(x)}{\lambda}\Big|^{p(x)}\right)\,dx\end{aligned}$$

$$\leq |\Omega| + A_{p(.)}(g) = 1 + |\Omega|,$$

donc

$$\|f\|_{q,\Omega} \leq (1+|\Omega|)^{\frac{1}{q}} \lambda = (1+|\Omega|)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{p(.),\Omega}.$$

■

Lemme 3.14 *Soient $p(.), q(.) \in P(\Omega)$tel que $[q^-, q^+] \subset (1, +\infty)$ avec $p(x) \geq q(x)$,alors l'injection $L^{p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$ est continue, et on a :*

$$\|f\|_{q(.),\Omega} \leq C\|f\|_{p(.),\Omega},$$

avec $C = \left(|\Omega|, p^{\overset{+}{-}}, q^{\overset{+}{-}}\right)$.

Preuve. On a $L^{p(x)}(\Omega) \subset L^{q(x)}(\Omega)$,Soit $f \in L^{p(x)}(\Omega)$ avec $\|f\|_{p(.),\Omega} = \lambda > 0$.

On considère :

$$\Omega_2 = \{x \in \Omega \quad ; p(x) = q(x)\} \quad , \Omega_1 = \Omega \setminus \Omega_2.$$

Soit la fonction $h = f/\lambda$, on a

$$A_{p(.)}(h) = 1,$$

et

$$\begin{aligned}
A_{q(.)}(h) &= \int_{\Omega_1} |h|^{q(x)}\, dx + \int_{\Omega_2} |h|^{q(x)}\, dx \\
&= \int_{\Omega_1} \left(|h|^{p(x)}\right)^{\frac{q(x)}{p(x)}}\, dx + \int_{\Omega_2} |h|^{p(x)}\, dx \\
&\leq 2\|1\|_{\frac{p(.)}{p(.)-q(.)},\Omega_1} \||h|^{q(x)}\|_{\frac{p(.)}{q(.)},\Omega_1} + \int_{\Omega_2} |h|^{p(x)}\, dx \\
&\leq 2\max\left\{|\Omega|^{1-\frac{q^+}{p^-}}, |\Omega|^{1-\frac{q^-}{p^+}}\right\} \max\left\{A^{\frac{q^-}{p^+}}_{\frac{p(.)}{q(.)}}(|h|^{q(x)}), A^{\frac{q^+}{p^-}}_{\frac{p(.)}{q(.)}}(|h|^{q(x)})\right\} + A_{p(.)}(h) \\
&= 2\max\left\{|\Omega|^{1-\frac{q^+}{p^-}}, |\Omega|^{1-\frac{q^-}{p^+}}\right\} \max\left\{A^{\frac{q^-}{p^+}}_{p(.)}(h), A^{\frac{q^+}{p^-}}_{p(.)}(h)\right\} + A_{p(.)}(h) \\
&= 2\max\left\{|\Omega|^{1-\frac{q^+}{p^-}}, |\Omega|^{1-\frac{q^-}{p^+}}\right\} + 1.
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{\lambda}\|f\|_{q(.),\Omega} = \|h\|_{p(.),\Omega} \leq \max\left\{A^{\frac{1}{q^+}}_{q(.)}(h), A^{\frac{1}{q^-}}_{q(.)}(h)\right\}.$$

■

Proposition 3.15 *Soit* $p(.) \in P(\Omega)$

- $L^{p(.)}(\Omega)$ *est séparable si* $p^+ < \infty$
- $L^{p(.)}(\Omega)$ *est réflexif et unifomément convexe si* $1 < p^- \leq p^+ < \infty$

Lemme 3.16 *Les deux condition sont équivalentes ,*

1. $p \in L^\infty(\Omega)$.
2. *Pour tout fonction linéaire continue* G *sur* $L^{p(x)}(\Omega)$ *il existe une unique fonction* $g \in L^{p(.)'}(\Omega)$ *tel que*

$$G(f) = \int_\Omega f(x)g(x)\,dx, \qquad f \in L^{p(x)}(\Omega).$$

Corollaire 3.17 $L^{p'(.)}(\Omega)$ *est le duale de* $L^{p(.)}(\Omega)$ *si est seulement si* $p \in L^\infty(\Omega)$.

Lemme 3.18 *Si* $p(.) \in P(\Omega)$ *avec* $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, \infty)$ *alors les espaces* $L^{p(.)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$,$C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *et* C_0^∞ *sont danse dans* $L^{p(.)}(\Omega)$.

3.2 Espace de Sobolev à exposant variable

Définition 3.4 *Soit* $p(.) \in P(\Omega)$ *.On définie l'espace de Sobolev à exposant variable* $W^{1,p(x)}(\Omega)$ *par*

$$W^{1,p(.)}(\Omega) = \left\{u \in L^{p(.)}(\Omega) \quad : |\nabla u| \in L^{p(.)}(\Omega)\right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p(.)}(\Omega)} = \|u\|_{p(.),\Omega} + \|\nabla u\|_{p(.),\Omega}$$

Proposition 3.19 *Soit* $p(.) \in P(\Omega)$

- *L'espace* $W^{1,p(.)}(\Omega)$ *est un espace de Banach*
- *L'espace* $W^{1,p(.)}(\Omega)$ *est séparable si* $p^+ < \infty$
- $W^{1,p(.)}(\Omega)$ *est réflexif et unifomément convexe si* $1 < p^- \leq p^+ < \infty$

Définition 3.5 *Soient* Ω *un ouvert bornée tel que* $\partial\Omega$ *est lipschitzienne,*$p(.) \in P(\Omega)$ *avec* $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, \infty)$. *On définit l'espace*

$$W_0^{1,p(.)}(\Omega) = \left\{u \in W^{1,p(.)}(\Omega), u_{|\partial\Omega} = 0\right\}.$$

Définition 3.6 *Soit $p(.) \in P(\Omega)$ on définie l'ensemble*

$$C_{log} := \left\{ p \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \quad : \forall x, y \in \Omega \quad |x-y| < \frac{1}{2} \quad |p(x)-p(y)| \leq w(|x-y|) \right\}$$

avec w fonction continue et $\limsup_{t \longrightarrow 0^+} w(t) \ln \frac{1}{t} = C < +\infty$

Lemme 3.20 ***(Poincaré)*** *Soient Ω un ouvert bornée tel que $\partial\Omega$ est lipschitzienne $p(.) \in P(\Omega)$ avec $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, \infty)$, si $p(x) \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$. Alors il existe $C > 0$ dépende seulement de Ω tel que*

$$\|u\|_{p(.),\Omega} \leq C \|\nabla u\|_{p(.),\Omega} \quad \forall u \in W_0^{1,p(.)}(\Omega).$$

Par conséquence l'application $u \longmapsto \|\nabla u\|_{L^{p(.)}(\Omega)}$ est une norme équivalente à la norme usuelle.

Remarque 3.3 *$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ n'est pas dense en générale dans $W_0^{1,p(.)}(\Omega)$ mais si Ω un ouvert bornée tel que $\partial\Omega$ est lipschitzienne et $p(.) \in C_{log}(\Omega)$ alors $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ et dense dans $W_0^{1,p(.)}(\Omega)$.*

Lemme 3.21 *SoientΩ un ouvert bornée tel que $\partial\Omega$ est lipschitzienne, $p(.) \in P(\Omega)$ avec $p(x) \in [p^-, p^+] \subset (1, \infty)$ si $p, q \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ et $\forall x \in \bar{\Omega}$ $q(x) < p^*(x)$. Alors pour tout $u \in W_0^{1,p(.)}(\Omega)$:*

$$\|u\|_{q(.),\Omega} \leq C \|\nabla u\|_{p(.),\Omega}.$$

Où C est une constante dépende de $p^\pm$ et Ω ,

avec

$$p^*(x) = \begin{cases} \dfrac{Np(x)}{N - p(x)} & si\ p(x) < N \\ +\infty & si\ \ N = p(x) \end{cases}$$

L'injiction $W_0^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$ est continue et compacte.

Chapitre 4

Existence de solutions pour p (x) -Laplacien Dirichlet problème

Dans ce chapitre on va étude le problème p(x)-Laplacien définit par :

$$\begin{cases} -\triangle_{p(x)}\, u \;=\; f(x,u), & x \in \Omega \\ \quad u = 0 & ,x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

avec : $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert bornée , $1 < p(x)$ et $p \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$.

Donc dans la suite on va montre l'existence de la solution faible de problème (4.1) dans l'espace de Sobolev à exposant variable $W_0^{1,p(.)}(\Omega)$, et pour démontrer l'existence d'un solution ,on utilise souvent les techniques variationnelle et des argument de minimisation des fonctionnelles convexe ,ou on utilise la méthode de point fixe .

On dit que $u \in W_0^{1,p(.)}(\Omega)$ est une solution faible de problème (4.1) si

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v \; dx = \int_\Omega f(x,u)v \; dx \quad \forall v \in W_0^{1,p(.)}(\Omega).$$

4.1 Méthode variationnelle

Proposition 4.1 *Soient $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction Carathédory, $p_1, p_2 \in \mathcal{C}_+(\bar{\Omega})$.On suppose que il existe une fonction $a \in L^{p_2(x)}(\Omega)$ tel que $a(x) \geq 0$ et une constant $b \geq 0$ vérifié les condition suivant :*

$$|f(x,s)| \leq a(x) + b|s|^{\frac{p_1(x)}{p_2(x)}} \qquad \forall x \in \Omega, s \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Alors l'opérateur de Nemytsky définie par

$$N_f : L^{p1(x)}(\Omega) \longrightarrow L^{p2(x)}(\Omega),$$

$$u(x) \longmapsto f(x, u(x)),$$

est continue et bornée.

On considère la fonction $J(u) = \int\limits_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)}\, dx$, avec $J \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ où $X = W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, et définie

$$A = J' \ : \ X \longrightarrow X^*,$$
$$\langle Au, v\rangle = \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v\, dx \qquad \forall\, v, u \in X.$$

Théorème 4.1 *L'opérateur $A : X \longrightarrow X^*$ est : bornée , hémicontinue, strictement monotone , coerciv et continue.*

Preuve. Montons que A est bornée :
pour $v \in X$, On a $\langle Au, v\rangle = \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v\, dx$.
Soit $\rho > 0$, pour $u \in B_X(0, \rho)$ on a :

$$\begin{aligned} \|Au\|_{X^*} &= \sup_{v\in X, \|v\|_X \leq 1} |\langle Au, v\rangle| \\ &= \sup_{v\in X, \|v\|_X \leq 1} |\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v|. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} |\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v\, dx| &\leq \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-1}|\nabla v|\, dx \\ &\leq 2\|\nabla u^{p(x)-1}\|_{p'(.),\Omega}\|\nabla v\|_{p(.),\Omega} \\ &\leq 2\|\nabla u^{p(x)-1}\|_{p'(.),\Omega} \\ &\leq 2\max\left\{A_{p'(.)}^{\frac{1}{p'^-}}(\nabla u^{p(x)-1}), A_{p'(.)}^{\frac{1}{p'^+}}(\nabla u^{p(x)-1})\right\} \\ &= 2\max\left\{A_{p(.)}^{\frac{1}{p'^-}}(\nabla u), A_{p(.)}^{\frac{1}{p'^+}}(\nabla u)\right\} \\ &= 2A_{p(.)}^{\gamma}(\nabla u) \\ &\leq 2\max\left\{\|f\|_{p(.),\Omega}^{\gamma p^-}, \|f\|_{p(.),\Omega}^{\gamma p^+}\right\} \\ &= \rho_1. \end{aligned}$$

Où $\gamma = \begin{cases} \frac{1}{p'^-} & si \quad A_{p(.)}(\nabla u) \leq 1, \\ \frac{1}{p'^+} & si \quad A_{p(.)}(\nabla u) > 1, \end{cases}$

donc :

$$\|Au\|_{X^*} \leq \rho_1.$$

Alors

$$A(B_X(0,\rho)) \subset B_{X^*}(0,\rho_1).$$

Montons que A hémicontinue :

Soient $u \in W_0^{1,p(.)}(\Omega)$,$v \in W_0^{1,p(.)}(\Omega)$ et $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$ tel que $\lambda_n \longrightarrow 0$, montrons que $A(u + \lambda_n v) \rightharpoonup Au$ dans $W_0^{1,p(.)}(\Omega)$.

Soit $w \in W_0^{1,p(.)}(\Omega)$ on a :

$$\langle A(u+\lambda_n v), w\rangle = \int\limits_{\Omega} |\nabla(u+\lambda_n v)|^{p(x)-2}\nabla(u+\lambda_n v)\nabla w,$$

par la continuité,on a

$$|\nabla(u+\lambda_n v)|^{p(x)-2}\nabla(u+\lambda_n v) \longrightarrow |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \;\; p.px \in \Omega.$$

Comme $\{\lambda_n\}$ convergente donc elle est bornée dans $\mathbb{R}$, $\exists c > 0$ $|\lambda_n| \leq c$.

Par conséquence

$$(|\nabla u| + \lambda_n|\nabla v|)^{p(x)-1} \leq 2^{p(x)-2}(|\nabla u|^{p(x)-1} + c|\nabla v|^{p(x)-1}) \in {}^{p'(x)}(\Omega).$$

Et utilisant la convergence dominé, on a

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\langle A(u+\lambda_n v), w\rangle = \langle Au, w\rangle,$$

d'où la hémicontinueité de A .

Montons que A est coercitive :

Soit $u \in W_0^{1,p(.)}(\Omega)$ on a $\quad \langle Au, u\rangle = \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)}\, dx,$

donc

$$\frac{\langle Au,u\rangle}{\|u\|_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)}} = \frac{\int\limits_\Omega |\nabla u|^{p(x)}}{\|u\|_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)}}$$

$$\geq C\,\frac{\int\limits_\Omega |\nabla u|^{p(x)}}{\|\nabla u\|_{L^{p(.)}(\Omega)}}$$

$$\geq C\,\frac{\min\left\{\|\nabla u\|^{p^-}_{L^{p(.)}(\Omega)},\|\nabla u\|^{p^+}_{L^{p(.)}(\Omega)}\right\}}{\|\nabla u\|^{p^-}_{L^{p(.)}(\Omega)}}.$$

Comme $C>0$, alors

$$\lim_{\|u\|_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)}\longrightarrow\infty}\frac{\langle Au,u\rangle}{\|u\|_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)}}=+\infty.$$

Montrons que A est strictement monotone, en utilise Lemme2.3 ,on a
$\forall u,v\in W_0^{1,p(x)}(\Omega), u\neq v$. Alors on a

$$\langle Au-Av,u-v\rangle=\int\limits_\Omega\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u-|\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v\right)\nabla(u-v)>0,$$

donc A est strictement monotone.
Comme A est bornée et monotone et hémicontinue alors A est continue. ∎

Théorème 4.2 *Si $f(x,u)=f(x)\in(W_0^{1,p(x)}(\Omega))'$, alors le problème (4.1) admet un unique solution faible dan $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.*

Preuve. :

Si $f(x,u)=f(x)$,et d'après la théorème4.1 on a : A est bornée, hémicontinue, strictement monotone ,coercitive. Alors d'après la théorème2.1 il existe un unique $u\in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ solution faible de problème (4.1). ∎

Théorème 4.3 *i) L'opérateur A de type (S_+) ie : si $u_n\rightharpoonup u$ dans X et $\limsup\limits_{n\longrightarrow\infty}\langle Au_n-Au,u_n-u\rangle\leq 0$ alors $u_n\longrightarrow u$ dans X .*

ii) L'opérateur $A:X\longrightarrow X^*$ est homéomorphisme.

Preuve. :

i) montrons que A de type (S_+) :

Si $u_n \rightharpoonup u$ et $\limsup_{n\to\infty}\langle Au_n - Au, u_n - u\rangle \leq 0$.

On a comme A est strictement monotone et $\limsup_{n\to\infty}\langle Au_n - Au, u_n - u\rangle \leq 0$ alors $\lim_{n\to\infty}\langle Au_n - Au, u_n - u\rangle = 0$.

Et on a ∇u_n converge vers ∇u dans $L^{p(.)}(\Omega)$ en effet :

D'une part :

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty}\langle Au_n - Au, u_n - u\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n(\nabla u_n - \nabla u)dx - \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u(\nabla u_n - \nabla u)dx\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega (|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u)dx = \lim_{n\to\infty} H_n(u) \\ &= \lim_{n\to\infty} H_n(u). \end{aligned}$$

D'autre part :

On not $\Omega_1 = \{x \in \Omega\,; 2 \leq p(x)\}$ et $\Omega_2 = \{x \in \Omega\,; 1 < p(x) < 2\}$.

Donc

(a) Pour $2 \leq p(x)$, d'après Lemme2.3 on a :

$$\begin{aligned} 2^{2-p^+}\int_{\Omega_1} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)}\,dx &\leq \int_{\Omega_1}\left(|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right)(\nabla u_n - \nabla u)\,dx \\ &\leq \int_{\Omega}\left(|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right)(\nabla u_n - \nabla u)\,dx \\ &= H_n(u). \end{aligned}$$

(b) Pour $1 < p(x) < 2$, d'après Lemme2.3 on a :

$$\int_{\Omega_2} |\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)}\,dx \leq \int_\Omega \frac{|\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)}}{(|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}}}\,(|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}}\,dx$$

$$\leq 2\|\frac{|\nabla u_n - \nabla u|^{p(x)}}{(|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}}}\|_{\frac{2}{p(.)},\Omega}\|\,(|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}}\,\|_{\frac{2}{2-p(.)},\Omega}$$

$$\leq 2\max\left\{\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u_n-\nabla u|^2}{(|\nabla u_n|+|\nabla u|)^{2-p(x)}}\right)^{\frac{p^-}{2}},\left(\int_\Omega \frac{|\nabla u_n-\nabla u|^2}{(|\nabla u_n|+|\nabla u|)^{2-p(x)}}\right)^{\frac{p^+}{2}}\right\}\times$$
$$\max\left\{\left(\int_\Omega (|\nabla u_n|+|\nabla u|)^{p(x)}\ dx\right)^{\frac{2-p^-}{2}},\left(\int_\Omega (|\nabla u_n|+|\nabla u|)^{p(x)}\ dx\right)^{\frac{2-p^+}{2}}\right\}$$
$$\leq 2C\max\left\{(p^--1)^{-\frac{p^-}{2}}(H_n(u))^{\frac{p^-}{2}},\{(p^--1)^{-\frac{p^+}{2}}(H_n(u))^{\frac{p^+}{2}}\right\}.$$

On a comme $n\longrightarrow\infty$, $H_n(u)\longrightarrow 0$, donc de (a) et (b) on a

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\int_\Omega |\nabla u_n-\nabla u|^{p(x)}\ dx=0.$$

Alors on a

$$A_p(.)\,(\nabla u_n-\nabla u)\longrightarrow 0,$$

donc d'après lemme3.10 on a

$$\|\nabla u_n-\nabla u\|_{L^{p(.)}(\Omega)}\longrightarrow 0.$$

Donc

$$\|u_n-u\|_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)}\longrightarrow 0.$$

Alors A de type S_+ .

ii) montrons que A est hemeomorphisme

on a A est bijictive donc il existe $A^{-1}:X^*\longrightarrow X$.

montrons que A^{-1} est continue .

Si $f_n,f\in X^*$ tel que $f_n\longrightarrow f$, soient $u_n=A^{-1}(f_n)$, $u=A^{-1}(f)$ alors $Au_n=f_n$, $Au=f$,

donc $\{u_n\}$ est borné dans X , et comme X réflixiv alors il existe $u_n\rightharpoonup u$, comme $f_n\longrightarrow f$ alors

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\langle Au_n-Au,u_n-u\rangle=\lim_{n\longrightarrow\infty}\langle f_n,u_n-u\rangle=0,$$

et comme A de type (S_+), alors $u_n\to u$ donc A^{-1} est continue .

■

Soit $\varphi(u) = \int\limits_{\Omega} \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)} - \int\limits_{\Omega} F(x,u)\,dx$ où $u \in X$ et $F(x,t) = \int\limits_{0}^{t} f(x,s)\,ds$.
On a $\varphi \in \mathcal{C}^1(X,\mathbb{R})$ alors le point critique de φ est une solution faible de problème (4.1).
Soit $g(u) = \int\limits_{\Omega} F(x,u)\,dx$, alors $g' : X \longrightarrow X^*$ vérifie $u_n \rightharpoonup u$ implique $g'(u_n) \longrightarrow g'(u)$, donc g est continue .

Théorème 4.4 *Si f vérifier les condition suivent*

$$|f(x,u)| \leq C1 + C2|u|^{\beta-1} \quad avec \quad 1 \leq \beta < p^-, \tag{4.3}$$

alors le problème (4.1) *admet un solution faible dans* $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$.

Preuve.

D'après (4.3) on prendre $|F(x,u)| < C(1+|u|^{\beta}$,

et

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &= \int\limits_{\Omega} \frac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}\,dx - \int\limits_{\Omega} F(x,u)\,dx \\
&\geq \frac{1}{p^+}\|u\|^{p^-}_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)} - C\int\limits_{\Omega}|u|^{\beta}\,dx - C3 \\
&\geq \frac{1}{p^+}\|u\|^{p^-}_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)} - C\|u\|^{\beta}_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)} - C3 \longrightarrow \infty \quad si\|u\| \longrightarrow \infty,
\end{aligned}$$

alors φ est sci faible et ceorcitive donc φ admet un minimum u et u solution de (4.1) ∎

4.2 Méthode de point fixe

Théorème 4.5 *Soient Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^N$, et $p,q \in \mathcal{C}_+(\bar{\Omega})$, satisfaisant $q(x) < p(x)$ pour tout $x \in \bar{\Omega}$, On suppose que $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction caratheodory que satisfait la condition de croissance*

$$|f(x,s)| \leq C1|s|^{\frac{q(x)}{q'(x)}} + a(x) \quad p.p\ \Omega, \forall s \in \mathbb{R} \tag{4.4}$$

Où $C1 = cst > 0$, $\frac{1}{q(x)} + \frac{1}{q'(x)} = 1\ \forall x \in \bar{\Omega}$ et $a \in L^{q'}(x), a(x) \geq 0\ p.p\ \Omega$.
Alors le problème de Dirichlet (P) , possède une solution faible dans $W_0^{1,p(.)}(\Omega)$.

Preuve. :La preuve procédé dans deux étapes

Étape1 :

1. D'après la théorème4.3 on a :

$$-\triangle_{p(x)}: W_0^{1,p(.)}(\Omega) \longrightarrow (W_0^{1,p(.)}(\Omega))^*,$$

est bijective donc il existe

$$(-\triangle_{p(x)})^{-1} : (W_0^{1,p(.)}(\Omega))^* \longrightarrow W_0^{1,p(.)}(\Omega),$$

est continue .

2. D'après la condition de $f(x,u)$ l'opérateur de Némutskij engendre par f :$(N_f u)(x) = f(x,u(x))$ est bien définie de $L^{q(.)}$ à valeur dans $L^{q'(.)}$, et continue et les injections

$$i : W^{1,p(.)}(\Omega) \hookrightarrow L^q,$$

est compact,

et

$$i^* : L^{q'} \hookrightarrow (W_0^{1,p(.)}(\Omega))^*,$$

est continue, alors

$$i^* N_f i : W_0^{1,p(.)}(\Omega) \longrightarrow (W_0^{1,p(.)}(\Omega))^*,$$

est continue compact,

de 1. et 2. on a

$$T = (-\triangle_{p(.)})^{-1}(i^* N_f i) : W_0^{1,p(.)}(\Omega) \longrightarrow W_0^{1,p(.)}(\Omega),$$

est continue compact.

Étape2 :

montrons que $S = \left\{ x \in W_0^{1,p(.)}(\Omega) \quad ; \quad \exists \quad \lambda \in [0,1] \quad u = \lambda T u \right\}$ est borné ,

si $u \in S$ on a,

$$u = \lambda(-\triangle_{p(.)})^{-1}(i^* N_f i)u, \tag{4.5}$$

et donc :

$$\left\langle -\triangle_{p(.)} \frac{u}{\lambda}, \frac{u}{\lambda} \right\rangle = \frac{1}{\lambda}\langle i^* N_f i u, u\rangle, \tag{4.6}$$

depuis

$$\langle -\triangle_{p(.)} \tfrac{u}{\lambda}, \tfrac{u}{\lambda}\rangle = \int_\Omega |\nabla\left(\frac{u}{\lambda}\right)|^{p(x)} dx \geq \frac{1}{\lambda^{p^-}} \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} dx = \frac{1}{\lambda^{p^-}} A_{p(.)}(|\nabla u|).$$

Il résulte de 4.6 que

$$\begin{aligned} A_{p(.)}(|\nabla u|) &\leq \lambda^{p-1}\langle i^* N_f \circ iu, u\rangle \\ &\leq \langle i^* N_f iu, u\rangle \\ &\leq \|i^*\|\|N_f iu\|_{q'(.)}\|u\|_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Afin d'estimer $\|N_f iu\|_{q'(.)}$, d'abord nous montrons que

$$\|N_f v\|_{q'(.)} < c_1\|v\|_{q(.)}^{q^+} + \left(2c_1 + \|a\|_{q'(.)}\right) \quad \forall v \in L^{q(.)}(\Omega). \tag{4.8}$$

En effet,depuis

$$|N_f v| = |f(x,u)| \leq c_1|v(x)|^{\frac{q(x)}{q'(x)}} + a(x).$$

On en déduit

$$\|N_f v\|_{q'(.)} = \|c_1|v(x)|^{\frac{q(x)}{q'(x)}} + a(x)\|_{q'(.)} \leq c_1\|v^{\frac{q(x)}{q'(x)}}(x)\|_{q'(.)} + \|a(x)\|_{q'(.)}. \tag{4.9}$$

On a

$$\|v^{\frac{q(x)}{q'(x)}}(x)\|_{q'(.)} < \|v(x)\|_{q(.)}^{q^+-1} + 2. \tag{4.10}$$

En effet, on a

i) montrons que si

$$\|v\|_{q(.)} \geq 1 \Longrightarrow \||v|^{\frac{q(.)}{q'(.)}}\|_{q'(.)} \leq \|v\|_{q(.)}^{q^+-1}. \tag{4.11}$$

On a

$$\|v\|_{q(.)} \geq 1 \Longrightarrow A_{q'(.)}\left(\frac{|v(.)|^{\frac{q(.)}{q'}}}{\|v\|_{q(.)}^{q^+-1}}\right) \leq 1. \tag{4.12}$$

Cette inégalité est justifiée comme suite,de puis

$$\|v\|_{q(.)} \geq 1, \quad et \quad \left(q^+ - 1\right)q'(x) - q(c) = q'\left(q^+ - q(x)\right) \geq 0.$$

Nous en déduisons que

$$\frac{|v(x)|^{q(x)}}{\|v(x)\|_{q(.)}^{(q^+-1)q'(x)}} = \frac{|v(x)|^{q(x)}}{\|v(x)\|_{q(.)}^{q(x)}}\frac{1}{\|v(x)\|_{q(.)}^{(q^+-1)q'(x)-q(x)}} \leq \frac{|v(x)|^{q(x)}}{\|v(x)\|_{q(.)}^{q(x)}}, \tag{4.13}$$

de (4.12), (4.13) et proposition3.5 on obtient

$$A_{q'(.)}\left(\frac{|v(.)|^{\frac{q(.)}{q'}}}{\|v\|_{q(.)}^{q^+-1}}\right) \leq A_{q(.)}\left(\frac{v(.)}{\|v\|_{q(.)}}\right) = 1.$$

ii) montrons que si

$$\|v\|_{q(.)} \leq 1 \Longrightarrow \||v|^{\frac{q(.)}{q'(.)}}\|_{q'(.)} \leq 2. \tag{4.14}$$

De remarque3.2 et corollaire3.9 on a

$$\||v|^{\frac{q(.)}{q'(.)}}\|_{q'(.)} < A_{q'(.)}\left(|v|^{\frac{q(.)}{q'(.)}}\right) + 1 = A_{q'(.)}(v) + 1 < 1 + 1 = 2.$$

De (i) et (ii) on a (4.2) est vérifie, et de (4.2) et (4.9) on a (4.8) est vérifie.
Alors en prendre $v = iu,\ u \in W_0^{1,p(.)}(\Omega)$ dans (4.8) on obtient

$$\|N_f(iu)\|_{q'(.)} < c_1\|i\|^{q^+-1}\|u\|_{1,p(.)}^{q^+-1} + \left(2c_1 + \|a\|_{q'(.)}\right). \tag{4.15}$$

Donc si $u \in S$, d'après (4.15), on a

$$A_{p(.)}\left(|\nabla u|\right) < \left(K_1\|u\|_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)}^{q^+-1} + K_2\right)\|u\|_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)} \tag{4.16}$$

avec $K_1 = c_1\|i\|^{q^+}$, $K_2 = (2c_1 + \|a\|_{q'})\|i\|_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)}$.
Soit $\{u_n\} \in S$ tel que $\|u_n\|_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)} \longrightarrow +\infty$, si $n \longrightarrow \infty$ alors pour tout n avec

$$\|u_n\|_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)} = \|\nabla u_n\|_{p(.)} > 1,$$

on obtient daprès corollaire3.8

$$A_{p(.)}\left(|\nabla u_n|\right) \geq \||\nabla u_n|\|_{p(.)}^{p^-} = \|u_n\|_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)}^{p^-}. \tag{4.17}$$

Et,de (4.17) et (4.16), on a

$$\|u_n\|_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)}^{p^--1} < K_1\|u_n\|_{W_0^{1,p(.)}(\Omega)}^{q^-} + K_2.$$

Et comme $q^+ < p^-$, alors u_n est bornée,donc contradiction . D'après theorem 2.7 il existe $u \in W_0^{1,p(.)}(\Omega)$ vérifie, donc il existe un solution faible de problème 4.1. ∎

Conclusion

Je me suis intéressée dans ce mémoire de Master ; á résoudre un probléme de type elliptique approprié pour le p-laplacien et $p(x)$-laplacien avec second membre est suffisamment régulier, dans l'espase de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $W^{1,p(.)}(\Omega)$ respectivement, dont l'espace $L^{p(.)}(\Omega)$ et l'espace de Sobolev $W_0^{1,p(.)}(\Omega)$ jouent un rôle trés important. De plus ; l'existence des solutions dans le cadre semi-linéaire nécessite l'utilisation de méthode de point fixe . Ce travail m'a ouvert un champ sur l'étude :

- Quelques méthodes de résolution.
- La différence entre le cadre avec second membre régulier et le cadre avec second membre régulier et semi-linéaire.
- Comparison entre les espace de Sobolev classique et à exposant variable.

Plusieurs chercheurs s'intéressent á ce type de problémes. Nous espérons á l'avenir pouvoir continuer á travailler dans ce domaine.

Bibliographie

[1] S. Antontsev, and S. Shmarev, Evolution PDEs with Nonstandard Growth Conditions Existence, Uniqueness, Localization, Blow-up, Volume 4,Series editor,Michel Chipot, Zürich, Switzerland, 2015.

[2] Y. ATIK, Introduction aux Problèmes aux Limites Non-Linéaires, polycopie de cours 1999–2000.

[3] H.Brezis : Analyse Fonctionnelle : Théorie et Applications. Masson, Paris (1992).

[4] G. DINCA, A fixed point method for the $p(.)$-Laplacian, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 757–762.

[5] G. DINCA et P. JEBELEAN, Une méhode de point fixe pour le p-laplacien, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 324, Série I, p. 165-168, 1997.

[6] X.L. Fan, Q.-H. Zhang, Existence of solutions for p(x)-Laplacian Dirichlet problem, Nonlinear Analysis 52 (2003) 1843 – 1852.

[7] Le Dret, Notes de cours M2—Équations aux dérivées partielles elliptiques, 2010.

[8] J.-M. Morel, ,B. Teissier,Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents, 2017.

[9] J.L. Lions, Quelques méthodes de resolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Gauthier-Villars, Paris (1969).