République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Yahia Farès de Médéa
Département des Mathématiques et de l'Informatique

MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

par

KHERRAZ AYA

Solution positive d'un problème elliptique non local hétérogène

Soutenu publiquement le 15/06/2023 devant le jury composé de

Président :	MOKDACHE Nour-eddine	*M.A.A*	Université de Médéa
Examinateur :	RAFA Said	*M.C.A*	Université de Médéa
Encadreur :	MALOUM Khaled	*M.C.A*	Université de Médéa

Année universitaire : 2022-2023

Table des matières

Dédicace **II**

Remeciements **III**

Résumé **IV**

Abstract **V**

Notations **VI**

Introduction générale **1**

1 Préliménaires **3**

1.1 Quelques outils d'analyse fonctionnelle 3

1.2 Espace de Lebegue L^p 5

1.3 Distribution 8

1.4 Espaces de Sobolev 11

1.5 Formule de Green 15

1.6 Théorème du point fixe 16

2 Premier théorème d'existence (Schauder) **18**

3 Deuxième théorème d'existence (Tychonoff) **31**

Conclusion **1**

Dédicace

Je dédie ce mémoire de master principalement à ma famille , en particulier à mes chers parents pour leur aide , soutiens et leur sacrifices, surtout à mon père qui a été toujours là pour moi , celui qui ma encouragé dans toute ma carrière universitaire , c'était vraiment un repère dans ma vie.

A mes chèrs frères Mohamed, Salah, Abdallah, Riyad et ma soeur Maria pour leur amour et leur confiance en moi.

A mes chers amis Silia, Ahlem, Hanaa, Zineb, Imane, Mariam.

A mes chères cousines Chahira et Fatima Zohra et Wahida qui ont été présentes vraiment a mes côtés.

A mes chers grands parents (Mhamed et Rabeh lmachi) et mes chères tantes Aicha et Fatiha Hadda merci pour vos prières je vous aime trop.

Remerciement

Avant tout, je remercie le Dieu de m'avoir aidé à mener mon travail jusqu'à la fin, et à ma famille, pour leur amour et leur soutien constant.

Je tiens à remercier mon encadreur Monsieur **K.MALOUM** d'avoir encadré ce travail et pour les conseils efficaces et encore plus pour tout le temps qu'il m'a consacré durant la préparation de ce travail.

Je voudrais aussi remercier chacun des membres du jury qui me font le grand honneur d'accepter d'évaluer et examiner mon travail.

Mes remerciements les plus sincères sont adressés à mes enseignants de l'Université YAHIA Fares de Médéa. Merci a tous.

Résumé

Dans ce mémoire, on étudiera l'existence de solution du problème elliptique non local hétérogène, nous établissons deux théorèmes d'existence pour ce problème en utilisant respectivement le théorème du point fixe de Schauder et de Tychonoff.

Mots-clés : Problème elliptique non local hétérogène, Condition aux limites de Dirichlet homogène, Théorème du point fixe de Schauder et Tychonoff,Théorème de Lax-Milgram .

Abstract

In this memory, we will study the existence of solution of the heterogeneous non-local elliptic problem, we establish two existence theorems for this problem by using respectively the theorem of the fixed point of Schauder and Tychonoff.

Keywords : Heterogeneous nonlocal elliptic problem, Homogeneous Dirichlet boundary condition, Fixed point theorem of Schauder and Tychonoff, Lax-Milgram theorem.

Notations

Ω	Un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.
$\partial\Omega$	La frontière de Ω.
$\overline{\Omega}$	L'adbérence de l'ensemble Ω.
$H(\Omega)$	Un espace de Hilbert.
$(\cdot,\cdot)$	Le produit scalaire sur l'espace de Hilbert H.
$B(0,R)$	La boule ouverte de centre 0 et de rayon $R>0$ tel que $d(0,x)<R$.
$\overline{B}(0,R)$	La boule fermée de centre 0 et de rayon $R>0$ tel que $d(0,x)\leq R$.
$x_N=(x_1,x_2,...x_N)$	Point générique de $\mathbb{R}^N$.
$dx=dx_1dx_2\cdots dx_N$	La mesure de Lebesgue sur Ω.
$\alpha\in\mathbb{N}^N$	Un multi-indice $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_N)$ de longueur $\|\alpha\|=\alpha_1+\cdots+\alpha_N$.
$\|\alpha\|=\sum_{i=1}^N\alpha_i$	Module de α.
∂_i	La dérivée partielle i-ième, $\partial_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$.
∂^α	La dérivée d'ordre α, $\partial^\alpha=\frac{\partial^{\|\alpha\|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_N^{\alpha_N}}$.
∇u	Le gradient de $u:\Omega\to\mathbb{R}$, $\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$.
$\operatorname{div}u$	La divergence du vecteur $u=(u_1,\ldots,u_N)$, $\operatorname{div}u=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial u_N}{\partial x_N}$.
$p.p$	Presque partout.
$\min(u,0)$	La partie négative de la fonction u.
$\operatorname{supp}(u):=\overline{\{x\in\Omega;u(x)\neq0\}}$	Support d'une fonction u.
$C^k(\Omega)$	L'espace des fonctions k fois continument différentiables sur Ω.
$C^\infty(\Omega)$	L'espace des fonctions infiniment différentiables sur Ω.

Notations

$C_c(\Omega)$	L'espace des fonctions contimues à support compact dans Ω.
$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$	Espaces de fonctions höldériennes.
$\mathscr{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$	L'espace des fonctions infiniment différentiables et à support compact dans Ω.
$\mathscr{D}'(\Omega) = (\mathscr{D}(\Omega))'$	L'espace des distributions.
$\langle .,. \rangle_{\mathscr{D}'(\Omega)\times\mathscr{D}(\Omega)}$	Le crochet de dualité entre l'espace $\mathscr{D}(\Omega)$ et $\mathscr{D}'(\Omega)$.
$L^p(\Omega)$	L'espace de Lebesgue. $L^p(\Omega) = \begin{cases} \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable} ; \int_\Omega \lvert u\rvert^p < +\infty\right\}, & \text{si } 1 \le p < +\infty, \\ \sup\limits_{x\in\Omega} \operatorname{ess}(u) < +\infty, & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$
$\lvert .\rvert_2$	La norme sur l'espace $L^2(\Omega)$.
$H^1(\Omega)$	$\{u \in L^2(\Omega)$ tel que $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$, pour tout $i = 1, ..., N\}$.
$H_0^1(\Omega)$	La fermeture de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.
$\lVert \cdot \rVert$	La norme sur l'espace $H_0^1(\Omega)$.
$H^m(\Omega)$	$\{u \in L^2(\Omega)$ tel que $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$, pour tout, $\alpha \in \mathbb{N}^N$ telle que $\lvert\alpha\rvert \le m\}$.
$p' = \dfrac{P}{P-1}$	L'exposant conjugué de p pour $1 < p \le +\infty$.
$H^{-1}(\Omega)$	Dual topologique de $H_0^1(\Omega)$.
$P^* = \dfrac{Np}{N-p}$	L'exposant critique de Sobolev pour $1 < p < N$.
$\underset{\text{Compacte}}{\hookrightarrow}$	L'injection compacte.
$\rightharpoonup$	Convergence faible.
$\to$	Convergence forte.

Introduction

Le problème elliptique est un type d'équation aux dérivées partielles largement étudié en mathématiques et en physique. Il remonte à plusieurs siècles et a connu des développements significatifs au cours du temps.L'histoire des problèmes elliptiques remonte au 18e siècle, lorsque des mathématiciens tels qu'Euler et Lagrange ont commencé à explorer les équations différentielles elliptiques et à développer des méthodes pour les résoudre. Au 19e siècle, des mathématiciens comme Jacobi et Riemann ont apporté des contributions majeures en développant des techniques analytiques et géométriques avancées pour résoudre ces équations. L'étude de l'existence de solutions positives pour les problèmes elliptiques est une question fondamentale dans la théorie des équations aux dérivées partielles. L'histoire de la recherche sur l'existence de solutions positives remonte à plusieurs décennies et a connu des avancées importantes. Au début du 20e siècle, des mathématiciens tels que Perron et Schauder ont formulé des conditions suffisantes pour l'existence de solutions positives pour certains types d'équations elliptiques. Ces conditions se sont basées sur des principes variatonnels et des méthodes de point fixe. Dans les années 1950, les travaux de Harnack et Moser ont conduit à la découverte du principe du maximum et à des estimations de l'unicité des solutions pour les équations elliptiques. Ces résultats ont jeté les bases pour l'étude des solutions positives et l'existence de solutions dans des domaines bornés. Dans les années 1980, des mathématiciens tels que Brezis et Kato ont développé des techniques variatonnelles pour l'étude de l'existence de solutions positives pour des équations elliptiques non linéaires. Ces approches se sont appuyées sur des inégalités de Sobolev et des propriétés de compacité pour obtenir des résultats d'existence.

Plus récemment, des avancées significatives ont été réalisées dans le cadre des problèmes elliptiques non locaux et non linéaires. Des mathématiciens tels que Cabré et Sire ont étudié les propriétés des solutions positives pour ces équations, en utilisant des techniques de stabilité, de comparaison et de concentration.

L'étude de l'existence de solutions positives pour les problèmes elliptiques est un domaine de recherche actif et en constante évolution. Les mathématiciens continuent de développer de nouvelles approches, des méthodes numériques et des outils analytiques pour explorer cette question.

Ce travail est principalement basé l'article [1] qui traite l'étude de l'existence de solution du problème elliptique non local hétérogène à condition aux limites de Dirichlet homogène, le problème étudier est le suivant :

$$\begin{cases} -M\left(|u|_q^q\right)\operatorname{div}(a(x)\nabla u) = g(x,u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Où Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ de frontière $\partial\Omega$, pour $x \in \Omega$ p.p, $a(x) = \left(a_{ij}(x)\right)_{1\leq i,j\leq N}$ est une matrice $n \times n$ satisfaisante pour deux constantes positives λ, Λ :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n : \quad \lambda|\xi|^2 \leq a(x)\xi \cdot \xi \quad \text{x} \in \Omega \text{ p.p.}$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n : \quad |a(x)\xi| \leq \Lambda|\xi| \quad \text{x} \in \Omega \text{ p.p.}$$

Et $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que, pour une constante $m_0 > 0$, nous avons

$$M(t) \geq m_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

On divise ce mémoire en trois chapitres :
Premier chapitre : Rappel sur les espaces fondamentaux en analyse fonctionnelle, qui contient quelques notions essentielles qui concernent les espaces de Lebesgue, de Sobolev et des distributions, les injections de Sobolev.Ensuite, nous présentons la définition du théorème d'existence de Lax-Milgram ainsi que les deux théorèmes du point fixe de Schauder et de Tychonoff.
Deuxième chapitre : Dans ce chapitre, nous donnons certaines hypothèses sur les fonction $a(x)$ et M et $g(x,u)$ respectivement, nous énonçons et prouvons Premier théorème en trois étapes suivantes :

- **Étap 1 :**En utilisant le théorème de Lax-Milgram, nous prouvons que le problème (P) admet une solution unique.
- **Étap 2 :**En appliquant le théorème du point fixe de Schauder [11] , nous concluons que F admet un point fixe, qui est une solution non triviale au problème (P).
- **Étap 3 :** Nous donnons une exemple sur g.

Troisième chapitre : Dans ce chapitre, sous certaine hypothèse relatives à $g(x,u)$, nous énonçons et prouvons notre deuxième théorème d'existence et avec les même étapes Que nous avons déjà suivies de preuve du théorème2.1 . Et dans la deuxième étape Nous utilisons le théorème du point fixe de Tychonoff [10] pour montrer que le problème (P) admet une solution non triviale

CHAPITRE 1

Préliménaires

Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions et rappels. nous introduisons quelques définitions, lemmes et quelques théorèmes sur les espaces fonctionnels résultats sur les opérateurs.

1.1 Quelques outils d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Espace de Hilbert

Définition 1.1 *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire (u,v) et qui est complet pour la norme $(u,u)^{1/2}$.*
Dans toute la suite H désigne un espace de Hilbert.

Définition 1.2 *Soient H un espace de Hilbert et A un sous-ensemble de H.*

- *On dit que A est dense dans H si $\overline{A}=H$.*
- *On dit que H est séparable s'il possède une suite de points qui est dense dans H.*

Définition 1.3 (Base hilbertienne) *Soit H un espace de Hilbert séparable. On appelle base hilbertienne de H tout sous-ensemble fini ou dénombrable $\{e_n\}_n$ qui vérifie*

(a). $||e_n||=1$ *et* $\langle e_n,e_m\rangle=0$ *si* $n\neq m$.

(b). *le sous-espace vectoriel engendré par $\{e_n\}_n$ (par combinaisons linéaires finies) est dense dans H.*

Théorème 1.1 *Tout espace de Hilbert séparable admet au moins une base hilbertienne dénombrable.*

Définition 1.4 *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est*

- *de classe C^1 si f est dérivable sur I, et f' est continue sur I*
- *de classe C^k, où $k>1$ est un entier, si toutes les dérivées de f jusqu'à l'ordre k existent sur I, et si $f^{(k)}$ est continu sur I.*
- *de classe C^∞ si f est C^k sur I pour tout $k>1$. Autrement dit, si f est indéfiniment dérivable sur I.*

1.1.2 Espace de fonctions continues

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$. On notera par $C(\Omega)$ l'espace des fonctions continues de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, $(C(\Omega))^m$ est l'ensemble des fonctions continues de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $C_b(\overline{\Omega})$ l'ensemble des fonctions continues et bornées sur Ω, on le munit de la norme $|\cdot|_\infty$.

$$|u|_\infty = \sup_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|.$$

- Pour $k\geq 1$ entier, $C^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions u qui sont k fois dérivables et dont la dérivée d'ordre k est continue sur Ω.
- $C_c^k(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de $C^k(\Omega)$, dont le support est compact et contenu dans Ω.
- Nous définissons aussi $C^k(\overline{\Omega})$ comme étant l'ensemble restrictions des fonctions de $C^k(\Omega)$.

1.1.3 Espaces de fonctions höldériennes

Définition 1.5 (Espaces de fonctions höldériennes $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$) *Supposons Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $0<\alpha\leq 1$. On dit que u est höldérienne d'exposant α (lipschitzienne pour $\alpha=1$) s'il existe une constante C telle que*

$$|u(x)-u(y)|\leq C|x-y|^\alpha \quad \forall\, x,y\in\Omega.$$

Une fonction $u:\Omega\to\mathbb{R}$ est bornée et continue, on écrit

$$\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} = \sup_{x\in\Omega} |u(x)|.$$

On note une semi norme d'ordre α de la fonction $u:\Omega\to\mathbb{R}$ par

$$|u|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} = \sup_{x,y\in\overline{\Omega}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha},$$

De plus La norme d'ordre α est donnée par

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} + |u|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

Définition 1.6 (L'espace de $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$) *L'espace de Hölder $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ est constituée des fonctions de $C^k(\overline{\Omega})$ pour lesquelles la norme*

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

1.1.4 Fonction mesurable

Définition 1.7 (Fonction mesurable) *Soit $(X, \mathscr{A})$ un espace mesurable.On dit que $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable si, pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(\Omega) \in \mathscr{A}$*

Proposition 1.2 *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ on dit que f est mesurable si l'ensemble $\{x \in \Omega,\ f(x) > a\}$ est mesurable.*

Proposition 1.3 *Toute fonction continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est mesurable.*

1.2 Espace de Lebegue L^p

Définition 1.8 (Espace de Lebegue L^p) *On définit l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ par : Pour $1 \leq p < +\infty$*

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mesurable}, \quad \int_\Omega |u(x)|^p \, \mathrm{d}x < +\infty \right\},$$

Muni de la norme

$$|u|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = 1$

$$L^1(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mesurable}, \quad \int_\Omega |u(x)| \, \mathrm{d}x < +\infty \right\},$$

Muni de la norme

$$|u|_1 = \int_\Omega |u(x) \, \mathrm{d}x.$$

Pour $p = 2$

$$L^2(\Omega)=\left\{u:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}\quad mesurable,\quad \int_\Omega |u(x)|^2\,\mathrm{d}x<+\infty\right\},$$

Muni de la norme

$$|u|_2=\left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour $p=+\infty$

$$L^\infty(\Omega)=\left\{u:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}\quad mesurable,\quad \sup_{x\in\Omega} ess|u(x)|<+\infty\right\},$$

Muni de la norme

$$|u|_\infty=\sup_{x\in\Omega} ess|u(x)|.$$

$L^p(\Omega)$ *est un espace de Banach pour* $1\le p\le\infty$ *et de Hilbert Pour* $p=2$ *muni de prouit scalaire*

$$(f,g)=\int_\Omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Proposition 1.4 (Séparabilité, réflexivité et dual de $L^p(\Omega)$)

1. $L^p(\Omega)$ *est séparable pour* $1\le p<+\infty$ *et réflexif pour* $1<p<+\infty$.
2. *Le dual de* $L^p(\Omega)$ *pour* $1\le p<+\infty$ *est isomorphe à* $L^{p'}(\Omega)$ *avec* $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.
3. $L^1(\Omega)$ *est séparable, n'est pas réflexif et son dual est* $L^\infty(\Omega)$.
4. $L^\infty(\Omega)$ *n'est pas séparable, ni réflexif et son dual est contient strictement* $L^1(\Omega)$.

Lemme 1.1 (Inégalité de Young) *Soient* p *et* q *deux réels strictement positifs tels que* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ *. pour tout réel positif* a *et* b *, on a*

$$ab\le\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q.$$

Théorème 1.5 (Inégalité de Hölder) *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$. *Soient* $f\in L^p(\Omega)$ *et* $g\in L^q(\Omega)$ *avec* $1\le p\le\infty$ *et si* q *est l'exposant congugué de* p, *on a :*

$$\int_\Omega |fg|\le |f|_p\,|g|_q.$$

Pour $p=q=2$, *on l'appellen* ***Inégalité de Cauchy-Schwarz*** *:*

$$\int_\Omega |fg|\le |f|_2\,|g|_2.$$

Théorème 1.6 (Inégalité de Minkowki) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$, on a :*

$$|f+g|_p \leq |f|_p + |g|_p$$

La Convergence dans $L^P(\Omega)$

Définition 1.9 (Convergence forte) *Soient $1 \leq p < \infty, f \in L^p(\Omega)$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^P(\Omega)$ on dit que f_n converge fortement vers f dans $L^P(\Omega)$ si :*

$$\lim_{n\to+\infty} |f_n - f|_P = 0.$$

et on écrit $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$.

Définition 1.10 (Convergence faible) *Soient $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\Omega)$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite borné de $L^P(\Omega)$ on dit que f_n converge faiblement vers f dans $L^p(\Omega)$ si :*

$$\forall g \in L^{p'}(\Omega) \quad \langle g, f_n\rangle \to \langle g, f\rangle.$$

et on écrit $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(\Omega)$.

Théorème 1.7 *Soit $1 < p < \infty$. Toute suite bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^p(\Omega)$ admet une sou-suite convergeant faiblement vers u dans $L^p(\Omega)$.*

Démonstration : Voir [4] [page 92].

Lemme 1.2 *Soint $1 < p < \infty$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite borné de $L^p(\Omega)$ convergeant p.p. vers f. Alors $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(\Omega)$ -faible.*

Démonstration : Voir [4] [page 92].

Théorème 1.8 (Convergence dominée de Lebesgue) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Soient $1 \leq p < +\infty$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$. On suppose que*

1. $f_n \to f$ sur Ω
2. *il existe $g \in L^p(\Omega)$ telle que pour tout $n \geq 1$,on a $|f_n| \leq g$ sur Ω p.p.*

Alors $f \in L^p(\Omega)$ et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} |f_n(x) - f(x)|_p = 0.$$

Théorème 1.9 (Réciproque du théorème de convergence dominé) *Soient* $1 \leq p < +\infty$, $f \in L^p(\Omega)$ *et* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions de* $L^p(\Omega)$ *telles que* $\lim_{n\to+\infty} |f_n(x) - f(x)|_p = 0$. *Alors il existe une fonction* $g(x) \in L^p(\Omega)$ *et une sous-suite* $(f_{n_i})_i$ *de suite* $(f)_n$ *telles que :*

1. $f_{n_i} \to f$ *sur* Ω.
2. $|f_{n_i}| \leq g(x)$ $x \in \Omega$ *p.p.*

Théorème 1.10 (de Vitali) *Soit* $(f_n)_n$ *une suite de fonctions de* $L^p(\Omega)$ *convergeant presque partout vers une fonction mesurable* f.

Alors $(f_n)_n$ *tend vers* f *dans* $L^p(\Omega)$ *si et seulement si la suite* $(f_n)_n$ *est équi-intégrabl.*

Fonction de Carathéodory

Définition 1.11 (Fonction de Carathéodory) *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$. *Nous dirons qu'une fonction* $(x,s) \to f(x,s)$, *définie sur* $\Omega \times \mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$, *est mesurable en* x, *continue en* s *si la condition suivante est satisfaite :*

$$\begin{cases} \forall s \in \mathbb{R},\ \text{la fonction } f(\cdot,s) \text{ est mesurable sur } \Omega; \\ \text{en } x \in \Omega \text{ p.p. la fonction } f(x,\cdot) \text{ est continue sur } \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1.1}$$

On dit que f est une fonction de Carathéodory.

Lemme 1.3 *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p,q \leq \infty$ *des réels et* f *une fonction de* $\Omega \times \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant* (1.1). *On suppose qu'il existe* $b \geq 0$ *et* $a \in L^q(\Omega)$ *tels que la condition de croissance* $\forall\, s \in \mathbb{R}$ *et sur* Ω *p.p,* $|f(\cdot,s)| \leq a(\cdot) + b|s|^{p/q}$ *est satisfaite.*
Pour toute fonction u *mesurable de* Ω *dans* $\mathbb{R}$, *on définit un opérateur* B *en posant* $(Bu)(x) := f(x,u(x))$. *Alors* B *est continue de* $L^p(\Omega)$ *dans* $L^q(\Omega)$.

1.3 Distribution

L'espace $\mathscr{D}(\Omega)$

Définition 1.12 *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* f *une fonction définie sur* Ω *à valeurs réelles. Le support d'une fonction* $f(x)$, $supp(f)$, *est le plus petit ensemble fermé de valeurs de* $x \in \Omega$ *en dehors duquel la fonction* $f(x)$ *est identiquement nulle. C'est donc la fermeture de l'ensemble des points* $x \in \Omega$ *tels que* $f(x) \neq 0$, *c'est-à-dire*

$$supp(f) = \{\overline{x \in \Omega \quad tel\ que\ f(x) \neq 0}\}.$$

Définition 1.13 *Soit un Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$. Toutes les fonctions définies sur Ω que nous considérons sont à valeurs réelles. On désigne par $\mathscr{D}(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions indéfiniments dérivables sur Ω à support compact dans Ω.*

Remarque 1 *$\mathscr{D}(\Omega)$ n'est pas réduit à la fonction nulle. En effet, soit $a \in \Omega$ et soit $r > 0$ tel que*

$$\overline{B(a,r)} \subset \Omega,$$

avec $B(a,r)$ désigne la boule ouverte de centre a et de rayon r. Alors, la fonction définie par $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) := \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x-a\|^2 - r^2}} & si \ \|x-a\|^2 < r \\ 0 & sinon \end{cases}$$

appartient à $\mathscr{D}(\Omega)$ avec

$$\|x-a\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 \right)^{1/2},$$

$x = (x_1, ..., x_n)$ et $a = (a_1, ..., a_n)$.
Si $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ et si $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ alors on définit $\partial^\alpha \varphi$ par

$$\begin{aligned} \partial^\alpha \varphi &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} \varphi \\ &= \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \varphi. \end{aligned}$$

avec $|\alpha| = \alpha_1 \cdots \alpha_n$.
Notons lerésultat intéressant.

Théorème 1.11 *$\mathscr{D}(\Omega)$ est dans $L^2(\Omega)$.*

Définition 1.14 (Les suites convergentes dans $\mathscr{D}(\Omega)$) *On définit dans $\mathscr{D}(\Omega)$ un pseudo-topologique, c'est-à-dire on définit les suites convergentes dans $\mathscr{D}(\Omega)$. On dira que la suite $(\varphi_m)_m$ converge vers φ dans $\mathscr{D}(\Omega)$ si*

(i) pour tout $m \in N$, le support de $\varphi_m - \varphi$ reste dans un compact fixe K de Ω.

(ii) pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\partial^\alpha \varphi_m$ converge vert $\partial^\alpha \varphi_m$ uniformément.

L'espace $\mathscr{D}'(\Omega)$

On introduit ensuite l'espace $\mathscr{D}'(\Omega)$ des formes linéaires sur $\mathscr{D}(\Omega)$ continues au sens suivant :

Soit $T : \mathscr{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ linéaire. T est continue si pour toute suite $(\varphi_m)_m$ convergente vers φ dans $\mathscr{D}(\Omega)$

$$\lim_{n\to+\infty} \langle T_f, \varphi_m \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

Exemple 1 *Soit $a \in \Omega$ L'application*

$$\begin{aligned} \delta_a : \mathscr{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \varphi &\longrightarrow \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a) \end{aligned}$$

est une distribution appelée masse de Dirac au point $a \in \Omega$.

Définition 1.15 (Les suites convergentes dans $\mathscr{D}'(\Omega)$) *On munit $\mathscr{D}'(\Omega)$ de la pseudo-topologique, c'est-à-dire on définit les suites convergentes dans $\mathscr{D}'(\Omega)$. Soit $(T_m)_m$ une suite de $\mathscr{D}'(\Omega)$. On dira que la suite $(T_m)_m$ converge vers T dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ si pour tour $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$*

$$\lim_{n\to+\infty} \langle T_m, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

Distribution régulière

Théorème 1.12 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in L^2(\Omega)$. Conssidérons l'application T_f par*

$$\begin{aligned} T_f : \mathscr{D}(\Omega)) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longrightarrow \langle T_f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Alors, T_f est une distibution appelée distribution régulière.

Démonstration : Voir [8].

Proposition 1.13 *L'application*

$$\begin{aligned} \psi : L^2(\Omega) &\longrightarrow \mathscr{D}'(\Omega) \\ f &\longrightarrow \psi(f) = T_f \end{aligned}$$

est linéaire injective

Démonstration : Voir [8].

Remarque 2 *Si $f \in L^2(\Omega)$ on identifie f à T_f. Ce qui revient à identifier $L^2(\Omega)$ à $\psi(L^2(\Omega)) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$. On fern systématiquement cette identification dans toutes la suite et on écrit*

$$L^2(\Omega) \subset \mathscr{D}'(\Omega)$$

Dérivation au sens des distributions

Définition 1.16 *sionT $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. L'application*

$$T' : \mathscr{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par : pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$$

définie une distribution sur Ω, applé dérivée de T.

Proposition 1.14 *Toute distribution est indéfiniment dérivable au sens des distributions et on a pour tout $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, nous avons*

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^{\alpha\varphi} \rangle,$$

avec $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

Proposition 1.15 *Soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice. Lapplicaion*

$$\partial^\alpha \ : \mathscr{D}'(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega)$$

est « continue », c'est-à-dire si $(T_m)_m$ est une suite de $\mathscr{D}'(\Omega)$ convergente vers T dans $\mathscr{D}'(\Omega)$, alors $\partial^\alpha T_m$ tend vers $\partial^\alpha T$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Démonstration : Voir [8].

1.4 Espaces de Sobolev

L'espace $H_0^1(\Omega)$

Définition 1.17 (L'espace $H^1(\Omega)$) *Soit $\Omega \in \mathbb{R}$ un ouvert. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est l'espace des fonctions de $L^2(\Omega)$ et des dérivées partielles,sont aussi dans $L^2(\Omega)$*

$$H^1(\Omega)=\left\{u\in L^2(\Omega)\ \ tel\ que\ :\ \forall\, i\in\{1,.....,n\},\ \frac{\partial u}{\partial x_i}\in L^2(\Omega)\right\}$$

Autrement dit, une fonction $u\in L^2(\Omega)$ *est dans* $H^1(\Omega)$ *s'il existe* $v_1,...,v_n\in L^2(\Omega)$ *tels que :*

$$\exists\, v\in L^2(\Omega):\quad \int_\Omega u\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x=-\int_\Omega v_i\,\varphi\,\mathrm{d}x,\quad \forall\in\mathscr{D}(\Omega),\ 1\le i\le N.$$

Et d'après la théorie des distributions, les v_i *sont notées* $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$.

Théorème 1.16 (de densité) *Si* Ω *est un ouvert borné régulier de classe* C^1, *ou bien si* $\Omega=\mathbb{R}^N_+$, *ou encore si* $\Omega=\mathbb{R}^N$, *alors* $C_c^\infty(\overline{\Omega})$ *est dense dans* $H^1(\Omega)$.

Proposition 1.17 *L'espace* $H^1(\Omega)$ *muni du produit scalaire*

$$(u,v)_{H^1}=\int_\Omega (uv+\nabla u\cdot\nabla v)\,\mathrm{d}x,$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^1}=\left(\int_\Omega \left(|u|^2+|\nabla u|^2\right)\mathrm{d}x\right)^{1/2}=\left(|u|_2^2+|\nabla u|_2^2\right)^{1/2}.$$

L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ *est séparable.*

L'espace $H^m(\Omega)$

Définition 1.18 (L'espace $H^m(\Omega)$) *Pour* $m\ge 2$ *un entier, l'espace de Sobolev* $H^m(\Omega)$ *est défini par*

$$H^m(\Omega)=\left\{u\in L^1(\Omega)\ \ tel\ que\ :\ \partial^\alpha u\in L^2(\Omega),\ \forall\alpha\in\mathbb{N}^m,\ |\alpha|\le m\right\},$$

Où

$$\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n\qquad |\alpha|=\sum_{i=1}^n\alpha_i,\qquad \partial^\alpha u=\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha^1}\ldots\partial x_n^{\alpha^n}}.$$

$H^m(\Omega)$ *est un espace de Hilbert et on note la norme associée*

$$\|u\|_{H^m}=\sqrt{(u,u)}.$$

Muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H^m} = \int_\Omega \sum_{\alpha\le m} \partial^\alpha u(x)\partial^\alpha v(x)\,\mathrm{d}x,$$

L'espace $H_0^1(\Omega)$

Définition 1.19 (L'espace $H_0^1(\Omega)$) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. C'est-à-dire*

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathscr{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$$

On note

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) \quad dans\ \Omega \quad et \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad sur\ \partial\Omega \right\}.$$

C'est-à-dire les fonctions de $H_0^1(\Omega)$ sont les limites dans $H^1(\Omega)$ des suites de fonctions de $\mathscr{D}(\Omega)$.
Muni du produi scalaire de $H^1(\Omega), H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert (en tant que sous-espace farmé d'un espace de Hilbert $H^1(\Omega)$). Si Ω est un ouvert borné, alors on a $H_0^1(\Omega) \subsetneq H^1(\Omega)$ et si $\Omega = \mathbb{R}^n$, alors $H_0^1(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$.

Définition 1.20 (Inégalité de Poincaré) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ borné dans au moins une direction de l'espace. Alors il existe une constante $C_\Omega > 0$ ne dépendant que de Ω telle que*

$$\forall\, u \in H_0^1(\Omega) \quad |u|_2 \le C_\Omega\, |\nabla u|_2.$$

Démonstration : Voir [5] .

Corollaire 1.18 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ dans au moins une direction de l'espace. Alors la semi-norme*

$$||u|| = |\nabla u|_2$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalent à la norme usuelle induite par celle de $H^1(\Omega)$.

Démonstration : Voir [9]

Remarque 3 *Sur $H^1(\Omega)$ ou bien sur $H_0^1(\Omega)$ lorsque Ω n'est pas borné, l'inégalité de Poincaré est fausse.*

Proposition 1.19 *Pour le comportement sur le bord $\partial\Omega$, on montre que si Ω est un ouvert borné de classe C^1 et si $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, alors*

$$u = 0 \quad sur\ \partial\Omega \iff u \in H_0^1(\Omega).$$

L'injection compacte

Théorème 1.20 (Rellich) *Soit Ω est un ouvert borné régulier de classe C^1, alors de toute suite bornée de $H^1(\Omega)$ on peut extraire une sous-suite convergente dans $L^2(\Omega)$ (on dit que l'injection canonique de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte).*

Démonstration : Voir [9].

Théorème 1.21 (Rellich-Kondrachov) *On suppose que Ω est borné et de classe C^1. On a :*

1. *si $N<2$ alors* $H^1(\Omega) \underset{Compacte}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega})$.
2. *si $N=2$ alors* $H^1(\Omega) \underset{Compacte}{\hookrightarrow} L^q(\Omega) \quad \forall\, q \in [1,+\infty[$.
3. *si $N>2$ alors* $H^1(\Omega) \underset{Compacte}{\hookrightarrow} L^q(\Omega) \quad \forall\, q \in \left[1, \dfrac{2N}{N-2}\right[$.

Remarque 4 *Si l'on remplace $H^1(\Omega)$ par $H_0^1(\Omega)$, alors non seulement le Théorème 1.18 de Rellich et le Théorème 1.19 Rellich-Kondrachov reste vrai, mais en plus il n'est pas nécessaire de supposer que l'ouvert Ω est régulier.*

Théorème 1.22 *Soit Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^N$. Alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$*

$$H_0^{m+1}(\Omega) \underset{Compacte}{\hookrightarrow} H_0^m(\Omega),$$

En particulier, on a :

$$H_0^1(\Omega) \underset{Compacte}{\hookrightarrow} L^2(\Omega).$$

Définition 1.21 (Convergence forte $H_0^1(\Omega)$) *Soient $p=2$, $f \in H_0^1(\Omega)$ et $(f_n)_n$ une suite borné de $H_0^1(\Omega)$.*
f_n converge fortement vers f dans $H_0^1(\Omega)$ et on écrit $f_n \to f$ si

$$f_n \to f \text{ dans } L^2(\Omega) \quad et \quad \nabla f_n \to \nabla f \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Définition 1.22 (Convergence faible dans $H_0^1(\Omega)$) *Soient $p=2$, $f \in H_0^1(\Omega)$ et $(f_n)_n$ une suite borné de $H_0^1(\Omega)$.*
f_n converge faiblement vers f dans $H_0^1(\Omega)$ et on écrit $f_n \rightharpoonup f$ si

$$f_n \rightharpoonup f \text{ dans } L^2(\Omega) \quad et \quad \nabla f_n \rightharpoonup \nabla f \text{ dans } L^2(\Omega).$$

1.5 Formule de Green

Théorème 1.23 (de trace) *Soit un ouvert borné réguler de classe C^1, ou bien $\Omega = \mathbb{R}^N_+$. On définit l'application trace γ_0*

$$\begin{aligned} H^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega}) &\to L^2(\partial\Omega)\cap C(\overline{\partial\Omega}) \\ &\to \gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega}. \end{aligned}$$

Cette application γ_0 se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, notée encore. En particulier, il existe une constante $C>0$ telle que, pour toute fonction $u \in H^1(\Omega)$, on a

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Démonstration : Voir [9].

Théorème 1.24 (Formule de Green) *Soit Ω un ouvert borné de classe C^1. Si u et v sont des fonctions $H^1(\Omega)$, elles vérifient*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\, v(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u(x)\, v(x)\, n_i\,\mathrm{d}\sigma$$

ou $n = (n_i)_{1\leq i\leq n}$ est la normale unité extérieure à $\partial\Omega$ et $\mathrm{d}\sigma$ est la mesure superfcielle du bord.

Démonstration : Voir [9].

Corollaire 1.25 *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1. L'espace $H^1_0(\Omega)$, coincide avec le sous-espace de $H^1(\Omega)$, constitué des fonctions qui s'annulent sur le bord $\partial\Omega$.*

Théorème de Lax-Milgram

Définition 1.23 (Forme linéaire.) *Soit H un espace de Hilbert et $f : H \to \mathbb{R}$. On dit que f est une forme linéaire sur H si est seulement si :*

$$\forall u, v \in H,\ \forall \alpha, \beta \in :\quad f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v).$$

Définition 1.24 (Forme bilinéaire et continue.) *Soit $a : H \times H \to \mathbb{R}$. On dit que a est*

une forme bilinéaire sur si pour tout $u \in H$ fixé, les applications suivantes :

$$\begin{aligned} a(u,.) &: v \in H \to a(u,v) \in \mathbb{R}, \\ a(.,u) &: v \in H \to a(v,u) \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

sont linéaires.
Rappellons que si a est une forme bilinéaire continue sur H, alors $\exists C > 0$ tel que

$$|a(u,v)| \leq C \|u\|_H \|v\|_H \quad \forall u, v \in H. \tag{1.3}$$

Définition 1.25 (Forme coercive) *. Soit H un espace de Hilbert et a une forme bilinéaire sur H. a est coercive sur H si*

$$\exists \alpha > 0 : \quad a(u,u) > \alpha \|u\|_H^2 \quad \forall u \in H. \tag{1.4}$$

Théorème 1.26 (de Lax-Milgram.) *Soient $(H, \langle .,. \rangle | \cdot |)$ un espace de Hilbert, a une forme bilinéaire continue coercive sur $H \times H$:*

$$\exists \alpha, C > 0 \qquad |a(u,v)| \leq C \|u\|_H \|v\|_H \qquad a(u,u)| > \alpha \|u\|_H^2 \qquad \forall u, v \in H,$$

et ℓ une forme linéaire continue sur H. Il existe un unique $u \in H$ tel que

$$\forall v \in H, \qquad a(u,v) = \ell(v).$$

Si de plus a est symétrique, alors u est l'unique minimum de $J : v \in H \mapsto \frac{1}{2} a(u,v) - \ell(v)$

1.6 Théorème du point fixe

Définition 1.26 *Soient X un espace de Bannch et $T : X \to X$ un opérateur. On appelle point fixe de T tout point $x \in X$ tel que $Tx = x$.*

Définition 1.27 (Ensemble convexe) *Soit X un espace de Banach. On dit qu'une partie K de X est convexe si :*

$$\forall x, y \in C, \ \forall \lambda \in [0,1] \quad \lambda x + (1-\lambda) y \in C.$$

Définition 1.28 (Ensemble fermé) *Un ensemble C est fermé si et seulement si la limite de toute suite convergente d'éléments de C appartient à C.*

Définition 1.29 ***(Opérateur continue)*** *Soient X et Y deux espaces de Banach. Un opérateur $T : X \to Y$ est appelé continu en $x \in X$, si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, qui converge par la norme vers x, $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge par la norme vers $T(x)$. T est dit continu sur un ensemble $A \subset X$ si T est continu en tout point $x \in X$*

Théorème 1.27 (Théorème du point fixe de Schauder) *Soit X un espace de Banach, C un convexe fermé de X et T une application continue de C dans C telle que $T(C)$ est relativement compact, alors T admet un point fixe.*

Démonstration : Voir [11].

Théorème 1.28 (Théorème du point fixe de Tychonoff) *Soit X un espace vectoriel topologique localement convexe séparé et C un sous-ensemble de X non vide, convexe et compact. Soit $T : C \subset X \to C$ une application continue pour laquelle le sous-ensemble est invariant. Alors, T admet un point fixe dans C .*

Démonstration : Voir [11].

CHAPITRE 2

Premier théorème d'existence (Schauder)

Soit Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ de frontière $\partial\Omega$, on cherche une solution au problème de Dirichlet avec conditions aux limites homogènes

$$\begin{cases} -M\left(|u|_q^q\right)\operatorname{div}(a(x)\nabla u) = g(x,u) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On multiplie l'équation $M\left(|u|_q^q\right)\operatorname{div}(a(x)\nabla u) = g(x,u)$ par une fonction test $\xi \in H_0^1(\Omega)$ et on intégré sur Ω ,

$$\int_\Omega -M\left(|u|_q^q\right)\operatorname{div}(a(x)\nabla u)\,\xi\, dx = \int_\Omega g(x,u)\xi\, \mathrm{d}x.$$

Puis on effectue une intégration par parties (formule de Green), On obtient ainsi une formulation variationnelle (ou Formulation faible) de ce problème est

$$(P)\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ M\left(|u|_q^q\right)\int_\Omega a(x)\nabla u\cdot\nabla\xi\, \mathrm{d}x = \int_\Omega g(x,u)\xi\, \mathrm{d}x \\ \forall \xi \in H_0^1(\Omega), \end{cases}$$

tel que :

$$\begin{cases} A(u,\xi) = & \int_\Omega a(x)\nabla u\cdot\nabla\xi\, \mathrm{d}x \\ L_u(\xi) = & \dfrac{1}{M\left(|u|_q^q\right)}\int_\Omega g(x,u)\xi\, \mathrm{d}x \end{cases}$$

Où $1 \leq q \leq 2$, pour $x \in \Omega$ p.p, $a(x) = \left(a_{ij}(x)\right)_{ij}$ est une matrice $n \times n$ satisfaisante pour deux constantes positives λ, Λ :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n : \quad \lambda|\xi|^2 \leq a(x)\xi \cdot \xi \quad \text{x} \in \Omega \text{ p.p.} \tag{2.1}$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n : \quad |a(x)\xi| \leq \Lambda|\xi| \quad \text{x} \in \Omega \text{ p.p.} \tag{2.2}$$

Et $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que, pour constant $m_0 > 0$, nous avons

$$M(t) \geq m_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Sur quelque hypothèses du fonction g, nous prouvons deux théorèmes d'existence pour le problème (P) en utilisant respectivement le théorème du point fixe de Schauder et de Tychonoff. Tout au long du premier théorème, on suppose que $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction satisfaisant $x \mapsto g(x,t)$ est mesurable pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(\cdot,0) \in L^2(\Omega)$, $g(\cdot,0) \neq 0$. dans Ω p.p et

$$\forall t, s \in \mathbb{R},\ x \in \Omega \text{ p.p}, \quad |g(x,t) - g(x,s)| \leq \begin{cases} b(x)|t-s|^p, & 0 < p < 1; \\ C|t-s|, & p = 1, \end{cases} \tag{2.4}$$

où $b \in L^{\frac{2}{1-p}}(\Omega)$ et C est une constante positive telle que $C < \frac{\lambda m_0}{C_\Omega^2}$, avec C_Ω est une constante de Poincaré pour $H_0^1(\Omega)$. Dans le deuxième théorème, $x \mapsto g(x,t)$ est mesurable pour tous $t \in \mathbb{R}$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour un $x \in \Omega$ p.p $g(\cdot,0) \neq 0$ dans Ω p.p et il existe $h \in L^2(\Omega)$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x \in \Omega \text{ p.p}, \quad |g(x,t)| \leq h(x). \tag{2.5}$$

Notons que. Si Ω est de classe C^1, on peut supposer dans les deux théorèmes que $q \in [1, +\infty[$ et $q \in \left[1, \frac{2n}{n-2}\right[$, respectivement, dans les cas $n = 2$ et $n > 2$, depuis l'injection $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compact, en appliquant le théorème du point fixe de Tychonoff.

Théorème 2.1 *Sous les hypothèses* (2.1)−(2.4), *le problème* (P) *admet une solution non triviale. De plus* $g(x,t) \geq 0$ $x \in \Omega$ *p.p*, $\forall t \in]-\infty, 0[$, *toute solution de* (P) *est positve.*

Preuve.

Nous donnerons la preuve de l'existence en trois étapes :

Étape 1 *: Nous définissons l'opérateur :*

$$\begin{aligned} A : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ (u,\xi) &\mapsto A(u,\xi) = \int_\Omega a(x)\nabla u \cdot \nabla \xi \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

- **Bilinéirité de** $A(.,.)$**:** *Soit* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *et* $u, \xi, \zeta \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} A(u, \alpha\xi + \beta\zeta) &= \int_\Omega a(x)\nabla u \cdot \nabla(\alpha\xi + \beta\zeta)\, \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega a(x)\nabla u \cdot (\alpha\nabla\xi + \beta\,\Delta\zeta)\, \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \alpha\, a(x)\nabla u \cdot \nabla\xi + \beta\, a(x)\nabla u \cdot \nabla\zeta \, \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \alpha\, a(x)\nabla u \cdot \nabla\xi \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \beta\, a(x)\nabla u \cdot \nabla\zeta \, \mathrm{d}x \\ &= \alpha \int_\Omega a(x)\nabla u \cdot \nabla\xi \, \mathrm{d}x + \beta \int_\Omega a(x)\nabla u \cdot \nabla\zeta \, \mathrm{d}x \\ &= \alpha\, A(u,\xi) + \beta\, A(u,\zeta). \end{aligned}$$

Donc $A(.,.)$ *est forme bilinéaire.*

- **Continuité de** $A(.,.)$**:** *Siot* $u, \xi \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} |A(u,\xi)| &= \left| \int_\Omega a(x)\nabla u \cdot \nabla\xi \, \mathrm{d}x \right| \\ &\leq \int_\Omega |a(x)\nabla u| \cdot |\nabla\xi| \, \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

On utilise l'inégalité (2.2)*, on obtient*

$$\begin{aligned} |A(u,\xi)| &\leq \int_\Omega |\Lambda\nabla u| \cdot |\nabla\xi| \, \mathrm{d}x \\ &\leq \Lambda \int_\Omega |\nabla u| \cdot |\nabla\xi| \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a :

$$\begin{aligned} |A(u,\xi)| &\leq \Lambda \left[\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla\xi|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2} \right] \\ &\leq \Lambda |\nabla u|_2 |\nabla\xi|_2 \end{aligned}$$

et d'après l'injaction continue, on obtient

$$|A(u,\xi)| \leq \Lambda \|u\| \|\xi\| \qquad \forall u, \xi \in H_0^1(\Omega).$$

Donc $A(.,.)$ *est continue.*

- **Coercivité de** $A(.,.)$**:** *Soit* $u \in H_0^1(\Omega)$

$$A(u,u) = \int_\Omega a(x)\nabla u \cdot \nabla u \, \mathrm{d}x,$$

On utilise (2.1)*, on obtient*

$$\begin{aligned} A(u,u) &\geq \int_\Omega \lambda |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x \\ &\geq \lambda \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x \\ &\geq \lambda |\nabla u|_2^2 \end{aligned}$$

et d'après l'injaction continue, on a

$$A(u,u) \geq \lambda \|u\|^2.$$

Donc $A(.,.)$ *est coersive.*
Alors A *est une forme bilinéaire continue et coercive sur* $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.
Pour $v \in L^2(\Omega)$*, on considère l'application :*

$$\begin{aligned} L_v : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\longmapsto \frac{1}{M(|v|_q^q)} \int_\Omega g(x,v)\xi \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

- **Linéirité de** L_v **:** *Soit* $\xi, \zeta \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} < L_v, \alpha\xi + \beta\zeta > &= \frac{1}{M(|v|_q^q)} \int_\Omega g(x,v)(\alpha\xi + \beta\zeta) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{M(|v|_q^q)} \int_\Omega g(x,v)\alpha\xi + g(x,v)\beta\zeta \, \mathrm{d}x \\ &= \alpha \frac{1}{M(|v|_q^q)} \int_\Omega g(x,v)\xi \, \mathrm{d}x + \beta \frac{1}{M(|v|_q^q)} \int_\Omega g(x,v)\zeta \, \mathrm{d}x \\ &= \alpha < L_v, \xi > + \beta < L_v, \zeta > . \end{aligned}$$

Donc L_v *est linéaire sur* $H_0^1(\Omega)$.

• **Continuité de** L_v **:** *De plus, l'utilisation de* (2.3)−(2.4), *donne*

$$\forall \xi \in H_0^1(\Omega): \quad |<L_v,\xi>| = \left|\frac{1}{M(|v|_q^q)}\int_\Omega g(x,v)\,\xi\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\leq \frac{1}{m_0}\int_\Omega |g(x,v)||\xi|\,\mathrm{d}x$$
$$\leq \frac{1}{m_0}\int_\Omega |b(x)|v|^p + g(x,0)||\xi|\,\mathrm{d}x$$
$$\leq \frac{1}{m_0}\int_\Omega (b(x)|v|^p + |g(x,0)|)|\xi|\,\mathrm{d}x$$

et d'après les inégalités de Cauchy-Schwarz et Minkowski on a :

$$\leq \frac{1}{m_0}\left(\int_\Omega |b(x)|v|^p + |g(x,0)||^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\xi|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \frac{1}{m_0}(|b|v|^p|_2 + |g(\cdot,0)|_2)|\xi|_2$$

d'après l'inégalité de Poincaré , il existe $C_\Omega > 0$ *telle que :*

$$\leq \frac{C_\Omega}{m_0}(|b|v|^p|_2 + |g(\cdot,0)|_2)|\nabla\xi|_2$$
$$\leq \frac{C_\Omega}{m_0}(|b|v|^p|_2 + |g(\cdot,0)|_2)\|\xi\|, \quad 0<p<1,$$

et si $p=1$, *il existe* $C < \dfrac{\lambda m_0}{C_\Omega}$ *on a*

$$\forall \xi \in H_0^1(\Omega): \qquad |<L_v,\xi>| \leq \frac{C_\Omega}{m_0}(C|v|_2 + |g(\cdot,0)|_2)\|\xi\|.$$

D'où L_v *est continue sur* $H_0^1(\Omega)$.

Nous concluons d'après théorème de Lax-Milgram que pour chaque $v \in L^2(\Omega)$, *il existe une unique* $u \in H_0^1(\Omega)$ *solution de formule variationnelle*

$$A(u,\xi) = <L_v,\xi> \quad \forall \xi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.6}$$

Étape 2 *: On considére l'application F Défini par :*

$$F : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega),$$
$$v \mapsto u.$$

Lemme 2.1 *Il existe $R>0$ tel que :*

(i) $\exists R>0 : F(\overline{B}(0,R)) \subset \overline{B}(0,R)$,

(ii) $F : \overline{B}(0,R) \to \overline{B}(0,R)$ *est continue,*

(iii) $F(\overline{B}(0,R))$ *est relativement compacte dans* $L^2(\Omega)$.

Preuve.

(i) nous Choisissons u comme fonction de test dans (2.6), on obtient

$$\int_\Omega a(x)\nabla u \cdot \nabla u \, \mathrm{d}x = \frac{1}{M\left(|v|_q^q\right)} \int_\Omega g(x,v)u \, \mathrm{d}x.$$

En utilisant (2.1), (2.3)$-$(2.4), alors

$$\lambda \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x \le \frac{1}{m_0} \int_\Omega g(x,v)\, u \, \mathrm{d}x$$
$$\lambda |\nabla u|_2^2 \, \mathrm{d}x \le \frac{1}{m_0} \int_\Omega (b(x)|v|^p + |g(x,0)|)\, u \, \mathrm{d}x$$

et d'après inégalité Poincaré, on a

$$\frac{\lambda}{C_\Omega^2}|u|_2^2 \le \frac{1}{m_0}\left\{ \int_\Omega b(x)|v|^p|u| \, \mathrm{d}x + \int_\Omega |g(x,0)||u| \, \mathrm{d}x \right\}$$

et d'après les inégalités de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda}{C_\Omega^2}|u|_2^2 &\le \frac{1}{m_0}\Big\{\int_\Omega \Big(|b(x)|v|^p|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega |u|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2} \\
&\qquad +\Big(\int_\Omega |g(x,0)|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega |u|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\Big\} \\
&\le \frac{1}{m_0}\Big\{\Big(\int_\Omega |b(x)|^2|v|^{2p}\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}|u|_2+|g(.,0)|_2|u|_2\Big\} \\
&\le \frac{1}{m_0}\Big\{\Big(\int_\Omega |b(x)|^2|v|^{2p}\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}+|g(.,0)|_2\Big\}|u|_2 \\
&\le \frac{1}{m_0}\Big\{\Big(\Big(\int_\Omega |b(x)|^4\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega |v|^{4p}\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\Big)^{1/2}+|g(.,0)|_2\Big\}|u|_2 \\
&\le \frac{1}{m_0}\Big\{\big(|b|^2_{\frac{2}{1-p}}|v|_2^{2p}\big)^{1/2}+|g(\cdot,0)|_2\Big\}|u|_2, \qquad \forall\, b\in L^{\frac{1}{1-p}}(\Omega) \\
&\le \frac{1}{m_0}\Big\{|b|_{\frac{2}{1-p}}|v|_2^{p}+|g(\cdot,0)|_2\Big\}|u|_2
\end{aligned}$$

$$|u|_2^2 \le \frac{C_\Omega^2}{\lambda m_0}\Big\{|b|_{\frac{2}{1-p}}|v|_2^{p}+|g(\cdot,0)|_2\Big\}|u|_2, \quad 0<p<1.$$

Et d'aprés l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned}
|u|_2^2 &\le \frac{1}{2}\Big(\frac{C_\Omega^2}{\lambda m_0}\Big\{|b|_{\frac{2}{1-p}}|v|_2^{p}+|g(\cdot,0)|_2\Big\}\Big)^2+\frac{|u|_2^2}{2} \\
\frac{|u|_2^2}{2} &\le \frac{1}{2}\Big(\frac{C_\Omega^2}{\lambda m_0}\Big\{|b|_{\frac{2}{1-p}}|v|_2^{p}+|g(\cdot,0)|_2\Big\}\Big)^2,
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$|u|_2 \le \frac{C_\Omega^2}{\lambda m_0}\Big\{|b|_{\frac{2}{1-p}}|v|_2^{p}+|g(\cdot,0)|_2\Big\}, \quad 0<p<1. \tag{2.7}$$

De plus , si $p=1$ on arrive à

$$|u|_2 \le \frac{C_\Omega^2}{\lambda m_0}\big\{C|v|_2+|g(\cdot,0)|_2\big\}. \tag{2.8}$$

En prenant en compte $C<\frac{\lambda m_0}{C_\Omega^2}$, on déduit de (2.7)–(2.8) que pour tous $p\in]0,1]$, il existe une constante $R>0$ telle que $F(\overline{B}(0,R))\subset\overline{B}(0,R)$.

(ii) Soit $\big(v_j\big)_j$ une suite dans $L^2(\Omega)$ qui converge vers v dans $L^2(\Omega)$ et posons $u_j=F\big(v_j\big)$, $u=F(v)$. Ensuite nous avons

$$\left|v_j\right|_q^q \to |v|_q^q \quad \text{fortement dans } \mathbb{R}, \quad 1 \le q \le 2. \tag{2.9}$$

En écrivant (2.6) pour u_j et u

$$\int_\Omega a(x)\nabla u \cdot \nabla \xi \, \mathrm{d}x = \frac{1}{M(|v|_q^q)} \int_\Omega g(x,v)\xi \, \mathrm{d}x \qquad \forall u, \xi \in H_0^1(\Omega), \tag{2.10}$$

$$\int_\Omega a(x)\nabla u_j \cdot \nabla \xi \, \mathrm{d}x = \frac{1}{M(|v_j|_q^q)} \int_\Omega g(x,v_j)\xi \, \mathrm{d}x \qquad \forall u_j, \xi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.11}$$

On fait la différence entre (2.10) et (2.11), on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega a(x)\nabla u_j \cdot \nabla \xi \, \mathrm{d}x - \int_\Omega a(x)\nabla u \cdot \nabla \xi \, \mathrm{d}x \\
&\quad = \frac{1}{M(|v_j|_q^q)} \int_\Omega g(x,v_j)\xi \, \mathrm{d}x - \frac{1}{M(|v|_q^q)} \int_\Omega g(x,v)\xi \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega a(x)\nabla(u_j - u)\cdot \nabla \xi \, \mathrm{d}x \\
&\quad = \int_\Omega \Big\{ \frac{1}{M(|v_j|_q^q)} g(x,v_j) - \frac{1}{M(|v|_q^q)} g(x,v) \Big\} \xi \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

En écrivant $\xi = u_j - u$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega a(x)\nabla(u_j - u)\cdot \nabla(u_j - u) \, \mathrm{d}x &= \int_\Omega \Big\{ \frac{1}{M(|v_j|_q^q)} g(x,v_j) - \frac{1}{M(|v|_q^q)} g(x,v) \\
&\quad + \frac{1}{M(|v_j|_q^q)} g(x,v) - \frac{1}{M(|v_j|_q^q)} g(x,v) \Big\} (u_j - u) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \Big\{ \frac{1}{M(|v_j|_q^q)} (g(x,v_j) - g(x,v)) \\
&\quad + \Big(\frac{1}{M(|v_j|_q^q)} - \frac{1}{M(|v|_q^q)} \Big) g(x,v) \Big\} (u_j - u) \, \mathrm{d}x. \\
&= \int_\Omega \frac{1}{M(|v_j|_q^q)} (g(x,v_j) - g(x,v))(u_j - u) \, \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_\Omega \Big\{ \frac{1}{M(|v_j|_q^q)} - \frac{1}{M(|v|_q^q)} \Big\} g(x,v)(u_j - u) \, \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

$$\int_\Omega a(x)\nabla(u_j-u)\cdot\nabla(u_j-u)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{M(|v_j|_q^q)}\int_\Omega (g(x,v_j)-g(x,v_j))(u_j-u)\,\mathrm{d}x$$
$$+\Big\{\frac{1}{M(|v_j|_q^q)}-\frac{1}{M(|v|_q^q)}\Big\}\int_\Omega g(x,v)(u_j-u)\,\mathrm{d}x. \tag{2.12}$$

En utilisant (2.1), (2.3)−(2.4), on obtient

$$\lambda\int_\Omega|\nabla(u_j-u)|^2\,\mathrm{d}x\le\frac{1}{m_0}\int_\Omega\Big\{(b(x)|v_j|^p)+|g(x,0)-(|b(x)|v|^p+|g(x,0)|)\Big\}|u_j-u|\,\mathrm{d}x$$
$$+\Big|\frac{1}{M(|v_j|_q^q)}-\frac{1}{M(|v|_q^q)}\Big|\int_\Omega(b(x)|v|^p+|g(x,0)|)|u_j-u|\,\mathrm{d}x$$
$$\lambda|\nabla(u_j-u)|_2^2\le\frac{1}{m_0}\int_\Omega b(x)|v_j-v|^p|u_j-u|\,\mathrm{d}x$$

et d'aprés l'inégalité de Poincaré par (2.12), pour tous $p\in[0,1]$, on a

$$+\Big|\frac{1}{M(|v_j|_q^q)}-\frac{1}{M(|v|_q^q)}\Big|\int_\Omega(b(x)|v|^p+|g(x,0)|)|u_j-u|\,\mathrm{d}x$$
$$\frac{\lambda}{C_\Omega^2}|u_j-u|_2^2\le\frac{1}{m_0}\int_\Omega b(x)|v_j-v|^p|u_j-u|\,\mathrm{d}x$$
$$+\Big|\frac{1}{M(|v_j|_q^q)}-\frac{1}{M(|v|_q^q)}\Big|\int_\Omega(b(x)|v|^p+|g(x,0)|)|u_j-u|\,\mathrm{d}x$$
$$|u_j-u|_2^2\le\frac{C_\Omega^2}{\lambda}\Big\{\frac{1}{m_0}\int_\Omega b(x)|v_j-v|^p|u_j-u|\,\mathrm{d}x$$
$$+\Big|\frac{1}{M(|v_j|_q^q)}-\frac{1}{M(|v|_q^q)}\Big|\int_\Omega(b(x)|v|^p+|g(x,0)|)|u_j-u|\,\mathrm{d}x\Big\}$$

En utilisant les inégalités deCauchy-Schwarz et Minkowski

$$|u_j-u|_2^2\le\frac{C_\Omega^2}{\lambda}\Big\{\frac{1}{m_0}\Big(\int_\Omega|b(x)|v_j-v|^p|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega|u_j-u|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}$$
$$+\Big|\frac{1}{M(|v_j|_q^q)}-\frac{1}{M(|v|_q^q)}\Big|\Big(\int_\Omega|b(x)|v|^p+|g(x,0)||^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega|u_j-u|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\Big\}$$

$$\le\frac{C_\Omega^2}{\lambda}\Big\{\frac{1}{m_0}|b(x)|v_j-v|^p|_2|u_j-u|_2$$
$$+\Big|\frac{1}{M(|v_j|_q^q)}-\frac{1}{M(|v|_q^q)}\Big||b(x)|v|^p+|g(x,0)||_2|u_j-u|_2\Big\}$$
$$\le\frac{C_\Omega^2}{\lambda}\Big\{\frac{|b|_{\frac{2}{1-p}}}{m_0}|v_j-v|_2^p+\Big|\frac{1}{M(|v_j|_q^q)}-\frac{1}{M(|v|_q^q)}\Big|\Big(|b|v|^p|_2+|g(.,0)|_2\Big)\Big\}|u_j-u|_2$$

d'aprés l'inégalité de Young, on obtient

$$|u_j-u|_2^2 \le \frac{1}{2}\Bigg(\frac{C_\Omega^2}{\lambda}\Big\{\frac{|b|_{\frac{2}{1-p}}}{m_0}|v_j-v|_2^p + \Big|\frac{1}{M(|v_j|_q^q)}-\frac{1}{M(|v|_q^q)}\Big|\big(|b||v|^p|_2+|g(.,0)|_2\big)\Big\}\Bigg)^2+\frac{1}{2}|u_j-u|_2^2$$

$$\frac{1}{2}|u_j-u|_2^2 \le \frac{1}{2}\Bigg(\frac{C_\Omega^2}{\lambda}\Big\{\frac{|b|_{\frac{2}{1-p}}}{m_0}|v_j-v|_2^p+\Big|\frac{1}{M(|v_j|_q^q)}-\frac{1}{M(|v|_q^q)}\Big|\big(|b||v|^p|_2+|g(.,0)|_2\big)\Big\}\Bigg)^2$$

de sorte que

$$\begin{aligned}|u_j-u|_2 \le & \frac{C_\Omega^2}{\lambda}\Big\{\frac{|b|_{\frac{2}{1-p}}}{m_0}|v_j-v|_2^p \\ & +\Big|\frac{1}{M(|v_j|_q^q)}-\frac{1}{M(|v|_q^q)}\Big|\big(|b|v|^p|_2+|g(\cdot,0)|_2\big)\Big\}, \quad 0<p<1.\end{aligned} \tag{2.13}$$

D'autre part, si $p=1$, on trouve

$$|u_j-u|_2 \le \frac{C_\Omega^2}{\lambda}\Big\{\frac{C}{m_0}|v_j-v|_2+\Big|\frac{1}{M(|v_j|_q^q)}-\frac{1}{M(|v|_q^q)}\Big|\big(C|v|_2+|g(\cdot,0)|_2\big)\Big\}. \tag{2.14}$$

Soit j tend vers $+\infty$ dans (2.13)−(2.14) et en utilisant la convergence forte de $\big(v_j\big)_j$ vers v dans $L^2(\Omega)$, et (2.9) et la continuité de la fonction M, on trouve

$$u_j \to u \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega)$$

et la continuité de F est atteint.

(iii) Soit $v \in \overline{B}(0,R)$. puis, $u=F(v)$ est solution unique de (2.6). Nous choisissons $\xi = u$ dans (2.6) et en utilisant (2.1), (2.3)−(2.4), les inégalités de Hölder et Poincaré

$$\lambda\int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{m_0}\int_\Omega g(x,v)u\,\mathrm{d}x$$

$$\lambda|\nabla u|_2^2\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{m_0}\int_\Omega (b(x)|v|^p+|g(x,0)|)u\,\mathrm{d}x$$

et en utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et Poincaré

$$\begin{aligned}
\lambda|\nabla u|_2^2 &\le \frac{1}{m_0}\Big\{\int_\Omega b(x)|v|^p|u|\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |g(x,0)||u|\,\mathrm{d}x\Big\}\\
&\le \frac{1}{m_0}\Big\{\int_\Omega \Big(|b(x)|v|^p|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega |u|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\\
&\qquad + \Big(\int_\Omega |g(x,0)|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega |u|^2\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\Big\}\\
&\le \frac{1}{m_0}\Big\{\Big(\int_\Omega |b(x)|^2|v|^{2p}\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}|u|_2 + |g(.,0)|_2|u|_2\Big\}\\
&\le \frac{1}{m_0}\Big\{\Big(\int_\Omega |b(x)|^2|v|^{2p}\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2} + |g(.,0)|_2\Big\}|u|_2\\
&\le \frac{C_\Omega}{m_0}\Big\{\Big(\int_\Omega |b(x)|^2|v|^{2p}\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2} + |g(.,0)|_2\Big\}|\nabla u|_2\\
&\le \frac{C_\Omega}{m_0}\Big\{\Big(\Big(\int_\Omega |b(x)|^4\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega |v|^{4p}\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\Big)^{1/2} + |g(.,0)|_2\Big\}|\nabla u|_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\nabla u|_2^2 &\le \frac{C_\Omega}{\lambda m_0}\Big\{\big(|b|^2_{\frac{2}{1-p}}|v|_2^{2p}\big)^{1/2} + |g(\cdot,0)|_2\Big\}|\nabla u|_2\\
&\le \frac{C_\Omega}{\lambda m_0}\Big\{|b|_{\frac{2}{1-p}}|v|_2^{p} + |g(\cdot,0)|_2\Big\}|\nabla u|_2 \qquad \forall\, b\in L^{\frac{1}{1-p}}(\Omega),
\end{aligned}$$

Et en utilisant l'négalité de Young, on obtient

$$|\nabla u|_2^2 \le \frac{1}{2}\Big(\frac{C_\Omega}{\lambda m_0}\Big\{|b|_{\frac{2}{1-p}}|v|_2^{p} + |g(\cdot,0)|_2\Big\}\Big)^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|_2^2$$

et d'après l'injaction continue, on a

$$\begin{aligned}
\|u\|^2 &\le \frac{1}{2}\Big(\frac{C_\Omega}{\lambda m_0}\Big\{|b|_{\frac{2}{1-p}}|v|_2^{p} + |g(\cdot,0)|_2\Big\}\Big)^2 + \frac{1}{2}\|u\|^2\\
\frac{1}{2}\|u\|^2 &\le \frac{C_\Omega^2}{2\lambda^2 m_0^2}\Big\{|b|_{\frac{2}{1-p}}|v|_2^{p} + |g(\cdot,0)|_2\Big\}^2\\
\|u\| &\le \frac{C_\Omega}{\lambda m_0}\Big\{|b|_{\frac{2}{1-p}}|v|_2^{p} + |g(\cdot,0)|_2\Big\},
\end{aligned}$$

et le fait que $|v|_2 \le R$

$$\|u\| \le \frac{C_\Omega}{\lambda m_0}\Big\{|b|_{\frac{2}{1-p}}R^{p} + |g(\cdot,0)|_2\Big\} := R_p, \quad 0<p<1,$$

Et si $p=1$,

$$\begin{aligned}\|u\| &\leq \frac{C_\Omega}{\lambda m_0}\Big\{|v|_2+|g(\cdot,0)|_2\Big\}\\ &\leq \frac{C_\Omega}{\lambda m_0}\Big\{R+|g(\cdot,0)|_2\Big\}:=R_1.\end{aligned}$$

Alors, pour tout $p\in]0,1]$, il existe $R_p>0$ telle que $\|u\|\leq R_p$, et alors, $F(\overline{B}(0,R))\subset \overline{B}\big(0,R_p\big)\subset H_0^1(\Omega)$. et d'apés l'injection compacte $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$, l'ensemble $F(\overline{B}(0,R))$ est relativement compact dans $L^2(\Omega)$.

Étape 3 *: En appliquant le théorème de point fixe de Schauder, nous concluons que F admet un point fixe, qui est une solution non triviale au problème (P) puisque $g(x,0)\neq 0$ dans Ω p.p.*

Maintenant, nous allons prouver que, si pour tout $t\in]-\infty,0[$ et $x\in\Omega$ p.p, $g(x,t)\geq 0$, toute solution u de (P) satisfait $u\geq 0$ dans Ω p.p. Nous choisissons $\xi=\min(u,0)$ comme fonction de test dans (P), nous trouvons

$$M\Big(|\min(u,0)|_q^q\Big)\int_\Omega a(x)\nabla u\cdot\nabla\min(u,0)\,\mathrm{d}x=\int_\Omega g(x,u)\min(u,0)\;\mathrm{d}x.$$

qui peut s'écrire comme

$$\begin{aligned}M\Big(|\min(u,0)|_q^q\Big)\int_\Omega a(x)\nabla\min(u,0)\cdot\nabla\min(u,0)\,\mathrm{d}x&=\int_{\{u<0\}}g(x,u)u\,\mathrm{d}x\\ \lambda m_0\int_\Omega|\nabla\min(u,0)|^2\,\mathrm{d}x&\leq\int_{\{u<0\}}g(x,u)u\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Cela mène à

$$\lambda m_0\|\min(u,0)\|\leq\int_{\{u<0\}}g(x,u)u\,\mathrm{d}x\leq 0$$

ce qui donne que $\min(u,0)=0$ dans Ω p.p. par conséquent, $u\geq 0$ dans Ω. ■
Maintenant, nous avons un exemple de théorème 1.

Exemple 2 *.On considère $\Omega=]0,1[^2$, $p\in]0,1[$. et $g(x,t)=|\ln(x_1x_2)|^{1-p}\mid t+1|^p$ pour tous $x=(x_1,x_2)\in\Omega$ et $t\in\mathbb{R}$. On remarque que la fonction g satisfait (2.4). En effet, depuis $r\to r^p$ est 1-Hölderian et non décroissant sur $[0,+\infty[$, et $||\alpha|-|\beta||\leq|\alpha-\beta|$ pour tous $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, on obtient*

$$\begin{aligned}\forall t,s\in\mathbb{R},\forall x\in\Omega,\quad |g(x,t)-g(x,s)|&=|\ln(x_1x_2)|^{1-p}\Big||t+1|^p-|s+1|^p\Big|\\ &\leq|\ln(x_1x_2)|^{1-p}\Big||t+1|-|s+1|\Big|^p\\ &\leq|\ln(x_1x_2)|^{1-p}|t-s|^p:=b(x)|t-s|^p.\end{aligned}$$

Depuis $b \in L^{\frac{2}{1-p}}(\Omega)$, $g(x,t) \geq 0$ *dans* Ω *p.p.* $\forall t \in \mathbb{R}$ *et* $g(x,0) \neq 0$ *dans* Ω *p.p. déduit d'après le théorème 2.1 que le problème*

$$-M(|u|_q^q)\operatorname{div}(a(x)\nabla u) = |\ln(x_1 x_2)|^{1-p}|u+1|^p \quad \text{dans } \Omega,$$
$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

admet une solution faible non triviale positive $u \in H_0^1(\Omega)$.

CHAPITRE 3

Deuxième théorème d'existence (Tychonoff)

Dans ce chapitre, nous énonçons et prouvons notre deuxième théorème d'existence et on donne un exemple . On utilisant le théorème du point fixe de Tychonoffe [10] pour montre que le problème (p) admet une solution non trivial

Théorème 3.1 *Supposons que* (2.1)−(2.3) *et* (2.5) *ont lieu, alors le problème* (P) *admet une solution non triviale.*

Preuve. Comme dans la preuve du théorème 1, nous considérons

$$A : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$(u,\xi) \mapsto A(u,\xi) = \int_\Omega a(x)\nabla u \cdot \nabla \xi \, \mathrm{d}x.$$

On a déjà montré dans le théorème 2.1 que A est une forme bilinéaire continue coercive.

Et pour $v \in L^2(\Omega)$, on considère l'application :

$$L_v : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$\xi \mapsto \frac{1}{M(|v|_q^q)} \int_\Omega g(x,v)\xi \, \mathrm{d}x.$$

• **Linéarité de** L_v **:** Soit $\xi, \zeta \in H_0^1(\Omega)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$< L_v, \alpha\,\xi + \beta\,\zeta > = \frac{1}{M(|v|_q^q)} \int_\Omega g(x,v)(\alpha\,\xi + \beta\,\zeta)\, \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{M(|v|_q^q)} \int_\Omega g(x,v)\alpha\,\xi + g(x,v)\beta\,\zeta \, \mathrm{d}x$$

$$= \alpha \frac{1}{M(|v|_q^q)} \int_\Omega g(x,v)\xi \, \mathrm{d}x + \beta \frac{1}{M(|v|_q^q)} \int_\Omega g(x,v)\zeta \, \mathrm{d}x$$
$$= \alpha < L_v, \xi > + \beta < L_v, \zeta > .$$

Donc L_v est linéaire sur $H_0^1(\Omega)$.

• **Continuité de L_v :** en utilisant (2.3)−(2.5), on obtient

$$\forall \xi \in H_0^1(\Omega): \quad |< L_v, \xi >| = \left| \frac{1}{M(|v|_q^q)} \int_\Omega g(x,v)\xi \, \mathrm{d}x \right|$$
$$\leq \frac{1}{M(|v|_q^q)} \int_\Omega |g(x,v)||\xi| \, \mathrm{d}x$$
$$\leq \frac{1}{m_0} \int_\Omega |g(x,v)|)|\xi| \, \mathrm{d}x$$
$$\leq \frac{1}{m_0} \int_\Omega |h(x)||\xi| \, \mathrm{d}x,$$

et d'après l'égalité de Cauchy-Schwarz on a :

$$< L_v, \xi > | \leq \frac{1}{m_0} \left(\int_\Omega |h(x)|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\xi|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \frac{1}{m_0} |h(x)|_2 |\xi|_2$$

d'après l'inégalité de Poincaré, il existe $C_\Omega > 0$ tel que :

$$\forall \xi \in H_0^1(\Omega): \qquad |< L_v, \xi >| \leq \frac{C_\Omega}{m_0} |h(x)|_2 |\nabla \xi|_2.$$

et d'après l'injaction continue, on a

$$\forall \xi \in H_0^1(\Omega): \qquad |< L_v, \xi >| \leq \frac{C_\Omega}{m_0} |h(x)|_2 \|\xi\|.$$

D'où L_v est continue sur $H_0^1(\Omega)$.

Ainsi, d'apés le théorème de Lax-Milgram, on en déduit que pour chaque $v \in H_0^1(\Omega)$, le problème variationnel

$$u \in H_0^1(\Omega), \quad A(u,\xi) =< L_v, \xi > \quad \forall \xi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.1}$$

admet une solution unique.

Maintenant, nous pouvons définir l'applicatiom suivant :

$$G : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$$
$$v \mapsto u.$$

nous choisissons $\xi = u$ comme fonction test dans (3.1), et en utilisant (2.2)−(2.3) et (2.5), on arrive à

$$\lambda \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{m_0} \int_\Omega g(x,v)\, u \, \mathrm{d}x$$
$$\lambda |\nabla u|_2^2 \leq \frac{1}{m_0} \int_\Omega h(x)\, u \, \mathrm{d}x$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\lambda |\nabla u|_2^2 &\leq \frac{1}{m_0} \left(\int_\Omega |h(x)|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2} \left(\int_\Omega |u|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{m_0} |h(x)|_2 \, |u|_2\end{aligned}$$

d'aprés les inégalités de Poincaré et Young, on a

$$\begin{aligned}|\nabla u|_2^2 &\leq \frac{1}{\lambda m_0} |h(x)|_2 |u|_2 \\ &\leq \frac{C_\Omega}{\lambda m_0} |h(x)|_2 |\nabla u|_2 \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda m_0} |h(x)|_2 \right)^2 + \frac{|\nabla u|_2^2}{2}\end{aligned}$$

et d'après l'injaction continue, on a

$$\begin{aligned}\|u\|^2 &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{C_\Omega}{\lambda m_0} |h(x)| \right)^2 + \frac{\|u\|^2}{2} \\ \frac{\|u\|^2}{2} &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{C_\Omega}{\lambda m_0} |h(x)|_2 \right)^2 \\ \|u\| &\leq \frac{C_\Omega}{\lambda m_0} |h(x)|_2.\end{aligned}$$

On arrive à

$$\|u\| \leq R,$$

où R est une constante positive indépendante de v et u. Ainsi, l'application G envoie la boule fermée $\overline{B}(0,R)$ dans $H_0^1(\Omega)$ de centre 0 et de rayon R dans elle-même.

Maintenant, on prouve que $G : \overline{B}(0,R) \to \overline{B}(0,R)$ est faiblement continue. Soit $(v_i)_{i \in I}$

une suite généralisée dans $C = \overline{B}(0,R)$ converge faible vers v dans C pour la topologie faible $H_0^1(\Omega)$. Posons $u_i = F(v_i)$ et $u = F(v)$, et montrons que $(u_i)_{i\in I}$ converge faiblement vers u dans C. Comme C est compact par rapport à la topologie faible, donc il suffit de montrer que $(u_i)_{i\in I}$ a une limite unique pour cette topologie. Soit $\overline{u}$ un point limite faible pour $(u_i)_{i\in I}$ dans C. Utilisation de l'injection compacte suivante $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, on peut construire deux suites $(v_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tel que

$$v_{i_k} \to v \quad \text{pour} \quad \Omega \text{ p.p}, \tag{3.2}$$

$$\left|v_{i_k}\right|_q^q \to |v|_q^q \quad \text{fortement dans } \mathbb{R}, \quad 1 \le q \le 2, \tag{3.3}$$

$$u_{i_k} \rightharpoonup \bar{u} \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega). \tag{3.4}$$

En prenant 3.1 pour les deux u_{i_k} et u

$$\int_\Omega a(x)\nabla u\cdot\nabla\xi\,\mathrm{d}x = \frac{1}{M(|v|_q^q)}\int_\Omega g(x,v)\xi\,\mathrm{d}x \qquad \forall u,\xi\in H_0^1(\Omega), \tag{3.5}$$

$$\int_\Omega a(x)\nabla u_{i_k}\cdot\nabla\xi\,\mathrm{d}x = \frac{1}{M(|v_{i_k}|_q^q)}\int_\Omega g(x,v_{i_k})\xi\,\mathrm{d}x \qquad \forall u_{i_k},\xi\in H_0^1(\Omega). \tag{3.6}$$

On fait la défference entre (3.5) et (3.6) l'un de l'autre, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega a(x)\nabla u_{i_k}\cdot\nabla\xi\,\mathrm{d}x - \int_\Omega a(x)\nabla u\cdot\nabla\xi\,\mathrm{d}x \\
&\quad= \frac{1}{M(|v_{i_k}|_q^q)}\int_\Omega g(x,v_{i_k})\xi\,\mathrm{d}x - \frac{1}{M(|v|_q^q)}\int_\Omega g(x,v)\xi\,\mathrm{d}x \\
&\int_\Omega a(x)\nabla(u_{i_k}-u)\cdot\nabla\xi\,\mathrm{d}x \\
&\quad= \int_\Omega \Big\{\frac{1}{M(|v_j|_q^q)}g(x,v_{i_k}) - \frac{1}{M(|v|_q^q)}g(x,v)\Big\}\xi\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

Pour $\xi = u_{i_k} - u$ on a

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega a(x)\nabla(u_{i_k}-u)\cdot\nabla(u_{i_k}-u)\,\mathrm{d}x \\
&\quad= \int_\Omega \Big\{\frac{1}{M(|v_j|_q^q)}g(x,v_{i_k}) - \frac{1}{M(|v|_q^q)}g(x,v)\Big\}(u_{i_k}-u)\,\mathrm{d}x \\
&\quad= \int_\Omega \Big\{\frac{1}{M(|v_{i_k}|_q^q)}g(x,v_{i_k}) - \frac{1}{M(|v|_q^q)}g(x,v) \\
&\qquad+ \frac{1}{M(|v_{i_k}|_q^q)}g(x,v) - \frac{1}{M(|v_{i_k}|_q^q)}g(x,v)\Big\}(u_{i_k}-u)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega \Big\{ \frac{1}{M(|v_{i_k}|_q^q)} (g(x,v_{i_k}) - g(x,v)) \\
&\quad + \Big(\frac{1}{M(|v_{i_k}|_q^q)} - \frac{1}{M(|v|_q^q)} \Big) g(x,v) \Big\} (u_{i_k} - u)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \frac{1}{M(|v_{i_k}|_q^q)} (g(x,v_{i_k}) - g(x,v))(u_{i_k} - u)\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_\Omega \Big\{ \frac{1}{M(|v_{i_k}|_q^q)} - \frac{1}{M(|v|_q^q)} \Big\} g(x,v)(u_{i_k} - u)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega a(x) \nabla(u_{i_k} - u) \cdot \nabla(u_{i_k} - u)\,\mathrm{d}x \\
&\quad = \frac{1}{M(|v_{i_k}|_q^q)} \int_\Omega (g(x,v_{i_k}) - g(x,v))(u_{i_k} - u)\,\mathrm{d}x \\
&\qquad + \Big\{ \frac{1}{M(|v_{i_k}|_q^q)} - \frac{1}{M(|v|_q^q)} \Big\} \int_\Omega g(x,v)(u_{i_k} - u)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

En utilisant (2.1), (2.3) et (2.5), on obtient à partir de (3.7), pour une constante positive K indépendant de i_k.

$$
\begin{aligned}
\lambda \int_\Omega |\nabla(u_{i_k} - u)|^2\,\mathrm{d}x &\le \frac{1}{m_0} \int_\Omega (g(x,v_{i_k}) - g(x,v)) |u_{i_k} - u|\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \Big| \frac{1}{M(|v_{i_k}|_q^q)} - \frac{1}{M(|v|_q^q)} \Big| \int_\Omega g(x,v) |u_{i_k} - u|\,\mathrm{d}x \\
\lambda |\nabla(u_{i_k} - u)|_2^2 &\le \frac{1}{m_0} \int_\Omega (g(x,v_{i_k}) - g(x,v)) |u_{i_k} - u|\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \Big| \frac{1}{M(|v_{i_k}|_q^q)} - \frac{1}{M(|v|_q^q)} \Big| \int_\Omega g(x,v) |u_{i_k} - u|\,\mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{m_0} \int_\Omega (g(x,v_{i_k}) - g(x,v)) |u_{i_k} - u|\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \Big| \frac{1}{M(|v_{i_k}|_q^q)} - \frac{1}{M(|v|_q^q)} \Big| \int_\Omega |g(x,v)| |u_{i_k} - u|\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

et en utilisant l'inégalités de Cauchy-Schwarz

$$
\begin{aligned}
\lambda |\nabla(u_{i_k} - u)|_2^2 &\le \frac{1}{m_0} \Big(\int_\Omega (g(x,v_{i_k}) - g(x,v))\,\mathrm{d}x \Big)^{1/2} \Big(\int_\Omega |u_{i_k} - u|^2\,\mathrm{d}x \Big)^{1/2} \\
&\quad + \Big| \frac{1}{M(|v_{i_k}|_q^q)} - \frac{1}{M(|v|_q^q)} \Big| \Big(\int_\Omega |g(x,v)|\,\mathrm{d}x \Big)^{1/2} \Big(\int_\Omega |u_{i_k} - u|\,\mathrm{d}x \Big)^{1/2}
\end{aligned}
$$

$$\leq \Big\{ \frac{1}{m_0} |g(x, v_{i_k}) - g(x, v)|_2 + \Big| \frac{1}{M(|v_{i_k}|_q^q)} - \frac{1}{M(|v|_q^q)} \Big| |g(x, v)|_2 \Big\} |u_{i_k} - u|_2,$$

En utilisant les inégalités de Young et Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned} |\nabla(u_{i_k} - u)|_2^2 &\leq \frac{C_\Omega}{\lambda} \Big\{ \frac{1}{m_0} |g(x, v_{i_k}) - g(x, v)|_2 \\ &\quad + \Big| \frac{1}{M(|v_{i_k}|_q^q)} - \frac{1}{M(|v|_q^q)} \Big| |g(x, v)|_2 \Big\} |\nabla(u_{i_k} - u)|_2 \\ &\leq \frac{1}{2} \Big(\frac{C_\Omega}{\lambda} \Big\{ \frac{1}{m_0} |g(x, v_{i_k}) - g(x, v)|_2 \\ &\quad + \Big| \frac{1}{M(|v_{i_k}|_q^q)} - \frac{1}{M(|v|_q^q)} \Big| |g(x, v)|_2 \Big\} \Big)^2 + \frac{1}{2} |\nabla(u_{i_k} - u)|_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\nabla(u_{i_k} - u)|_2^2 \leq \frac{1}{2} \Big(&\frac{C_\Omega}{\lambda} \Big\{ \frac{1}{m_0} |g(x, v_{i_k}) - g(x, v)|_2 \\ &+ \Big| \frac{1}{M(|v_{i_k}|_q^q)} - \frac{1}{M(|v|_q^q)} \Big| |g(x, v)|_2 \Big\} \Big)^2 \end{aligned}$$

et d'après l'injaction continue, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u_{i_k} - u\|^2 \leq &\frac{C_\Omega^2}{2\lambda^2} \Big\{ \frac{1}{m_0} |g(x, v_{i_k}) - g(x, v)|_2 \\ &+ \Big| \frac{1}{M(|v_{i_k}|_q^q)} - \frac{1}{M(|v|_q^q)} \Big| |h(x)|_2) \Big\}^2 \end{aligned}$$

$$\|u_{i_k} - u\| \leq K \Big\{ |g(x, v_{i_k}) - g(x, v)|_2 + \frac{1}{M(|v_{i_k}|_q^q)} - \frac{1}{M(|v|_q^q)} \Big\}. \tag{3.8}$$

Par (2.5), (3.2) et le fait que $; g(x, \cdot)$ est continue ou $x \in \Omega$ p.p, on obtient en appliquant le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{k \to +\infty} \big| g\left(x, v_{i_k}\right) - g(x, v) \big|_2 = 0. \tag{3.9}$$

Passons maintenant à la limite en (3.8), comme $k \to +\infty$, et en utilisant (3.3), la continuité de M et (3.9), on a

$$u_{i_k} \to u \quad \text{fortement dans } H_0^1(\Omega).$$

Prendre en compte (3.4), on obtient $u = \overline{u}$, et donc u est la limite unique faible de

$(u_i)_{i\in I}$ dans C. puis,

$$u_i = G(v_i) \rightharpoonup u = G(v) \quad \text{faiblement dans } C.$$

Donc, la continuité faible de G est atteint.
Ainsi, par le théorème du point fixe de Tychonoff, on conclut que G admet un point fixe. Par conséquent, depuis $g(\cdot,0)\neq 0$ en Ω, le problème (P) admet une solution faible non triviale.

Exemple 3 *soit* $\Omega=]0,1[^2$ *et soit* $\theta:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *être une fonction telle que* $x\mapsto\theta(x,t)$ *est mesurable pour tout* $t\in\mathbb{R}$, $t\mapsto\theta(x,t)$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *pour un* $x\in\Omega$ *p.p. et* $\theta(\cdot,0)\neq 0$ *en* Ω *p.p. Nous définissons*

$$g(x,t)=-\ln(x_1x_2)\frac{|\theta(x,t)|}{1+|\theta(x,t)|} \quad x=(x_1,x_2)\in\Omega \text{ p.p, } \forall t\in\mathbb{R}.$$

On voit cette fonction g *satisfait* (2.5) *avec* $h(x)=-\ln(x_1x_2)\in L^2(\Omega)$. *Depuis* $g(x,t)\geq 0$ *pour* $x\in\Omega$ *p.p, et pour tout* $t\in\mathbb{R}$, *on déduit le théorème* 2 *que le problème*

$$-M(|u|_q^q)\operatorname{div}(a(x)\nabla u)=g(x,u) \quad \text{dans}\,\Omega,$$
$$u=0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

admet une solution uniaue non triviale $u\in H_0^1(\Omega)$ *avec* $u\geq 0$ $x\in\Omega$ *p.p.*

■

Remarque 5 *Si* $g(\cdot,0)=0$ *dans* Ω *p.p, la solution triviale peut être solution unique du problème* (P) *dans les deux théorèmes. En effet, considérons* $M\equiv 1$ *et*

$$\forall t\in\mathbb{R}, \quad g_1(t)=-t, \quad g_2(t)=-\frac{t}{1+t^2}.$$

On voit ça $g_1\in C^{0,1}(\mathbb{R})\subset C^{0,\alpha}(\mathbb{R})\,(0<\alpha<1), g_2$ est borné et $g_1(0)=g_2(0)=0$. soit u et v des solutions à

$$-\Delta u=g_1(u) \quad \text{dans}\,\Omega, \quad u=0 \quad \text{sur } \partial\Omega \tag{3.10}$$

et

$$-\Delta v=g_2(v) \quad \text{dans}\,\Omega, \quad v=0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \tag{3.11}$$

Respectivement et la multiplication de (3.10) par u et (3.11) par v, et en intégrant

sur Ω, Nous avons

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x,$$
$$\int_\Omega |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega \frac{v^2}{1+v^2} \, \mathrm{d}x,$$

qui conduit à $\int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{u^2}{1+u^2} \, \mathrm{d}x = 0$, et alors, $u = v = 0$ en Ω.
Par conséquent, la solution triviale est la seule solution de (3.10) et (3.11).

Conclusion

Dans ce mémoire, lorsque la fonction Carathéodory g satisfait (2.4) ou (2.5) et la fonction M satisfait (2.3), on établit deux théorèmes d'existence d'une solution pour la classe de problème elliptique non local (P) à coefficient hétérogène $a(x)$ en utilisant respectivement les théorèmes du point fixe de Schauder et de Tychonoff.Enifin,nous avons donné un exemple pour chaque théorème.

Bibliographie

[1] M. Bousselsal, E. Zaouche : *Existence of Solution for Nonlocal Heterogeneous Elliptic Problems*. Ecole Normale Supérieure ,University of El Oued, Algeria,April 20, 2020.https ://doi.org/10.1007/s00009-020-01564-w.

[2] J. Pierre, A. Roux : *Équations aux dérivées partielles cours et exercices corrigés*, Paris, 2015

[3] H. Brézis : *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson, Paris, 1983.

[4] O. Kavian : *Introduction a la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Springer-Verlag,Berlin Heidelberg,

[5] A. Munnier : *Espaces de sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles*, Nancy Université, France, 2007-2008.

[6] H. Le Dret : *Équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires*,Université Pierre et Marie Curie, Paris, 2012

[7] G. Allaire, F. Alougs : *Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles*, Ecole polytechnique, 2015-2016.

[8] A. Jeribi : *Résolution de divers problèmes elliptiques par des méthodes d'éléments finis cours et exercices*

[9] G. Allaire :*Analyse numérique et optimisation*. l'École Polytechnique 2005, ISBN : 2-7302-1255-8

[10] Smart, D.R. :*Fixed Point Theorems*. Cambridge University Press, London (1974)p

[11] H. K.Pathak : *an introduction to nonlinear analysis and fixed point theory*. springer, 2018

[12] A. Lesfari : *Équations différentielles ordinaires et équations aux dérivées partielles cours et exercices*