République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique

Université Dr.Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences



MÉMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Par :

ABBAD Hadya

BENHADJOUDJA Kaouther

thème

Nombre de broadcast indépendance dans certains graphes

Soutenue publiquement le : 21/06/2022

Devant le jury composé de :

M^{elle} BENDALI BRAHAM Amel	*M.C.B*	Univ Médéa	**Président**
M^{r} SAHRAOUI Abdelkader	*M.A.A*	Univ Médéa	**Examinateur**
M^{r} OULDRABAH Lyes	*M.C.B*	Univ Médéa	**Examinateur**
M^{r} ZEMIR Mohamed	*M.A.A*	Univ Médéa	**Encadreur**

Dédicace



A

Mon père

Tu as été toujours à mes côtés pour me soutenir et m'encourager que ce travail traduit ma gratitude et mon affection.

Ma mère

Quoi que je fasse ou que je dise, je ne saurai point te remercier comme il se doit. Ton affection me couvre, ta bienveillance me guide et ta présence à mes côtés a toujours été ma source de force por affronter les différents obstacles.

Mes trés chers frères

Khaled, Adel et Oussama

Mes belles sœurs *Sihem et Habiba*

A ma grande famille ABBAD

ABBAD Hadya

Dédicace

A Allah, Tout puissant Qui m'a inspiré, Qui m'a guidé dans le bon Chemin. Louanges et remerciements pour votre clémence et Miséricorde.

Je dédie ce précieux travail aux êtres les plus chers à mon cœur et à qui je dois énormément toute ma vie, mon très cher père «Cherif» pour son soutien Pour ces efforcer sacrifiions Ainsi que ma tendre maman «Malika» qui n'a jamais cessé de M'encourager dans les moments les plus difficiles et pour ses Incomparables sacrifices et son concession pour moi. Que dieu les garde pour moi, en souhaitant que dieu leur accorde santé et longueur vie.

À mes chères sœurs «Asmaa» «Nihel» «Hayet» «Hanane»
Mes chères frères «Oussama» «Rabah» «Sidali»
A mes chères nièces
«Rayen» «Siradj» «Nazim» «Yacine» «Abdelhakim»
A toute la famille BENHADJOUDJA

BENHADJOUDJA Kaouther

Résumé

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre n où V est l'ensemble des sommets, et E est l'ensemble des arêtes. Une fonction $f : V(G) \longrightarrow \{0, 1, ..., diam(G)\}$ est un broadcast sur le graphe non trivial connexe G si pour tout sommet $v \in V(G)$, $f(v) \leq e(v)$, où $diam(G)$ représente le diamètre de G et $e(v)$ représente l'excentricité du sommet v.

Le nombre de broadcast indépendance $\beta_b(G)$ est la valeur maximale de $\sum_{v \in V(G)} f(v)$ sur tous les broadcasts f qui satisfont $d(u, v) > max\{f(u), f(v)\}$ pour chaque paire de sommets distinct u, v avec les valeurs positives.

Dans ce mémoire, nous déterminons cet invariant pour la classe des graphes $P_m \boxtimes P_n$ où $\boxtimes$ représente le produit fort de deux chaînes P_m et P_n de longueur m et n respectivement,avec $m \leq n$ et $m = 2, 3$ et 4.

Abstract

Let $G = (V, E)$ be a simple graph of order n, where V is the set of vertices and E is the set of edges. We say that a fonction $f : V(G) \longrightarrow \{0, 1, ..., diam(G)\}$ is a broadcast on a nontrivial connected graph G if for every vertex $v \in V(G)$, $f(v) \leq e(v)$, where $diam(G)$ denotes the diameter of G and $e(v)$ denotes the eccentricity of the vertex v.

The broadcast independence number $\beta_b(G)$ is the maximum value of $\sum_{v \in V(G)} f(v)$ over all broadcasts f that satisfy $d(u, v) > max\{f(u), f(v)\}$ for every pair of distinct vertices u, v with positive values.

In this memory, we determine this invariant for some classes of graphs $P_m \boxtimes P_n$, where $\boxtimes$ denotes the strong product of two paths P_m and P_n of longuer m and n respectively, with $m \leq n$ and $m = 2, 3$ and 4.

Remerciements

On remercie dieu le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.

Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de Mr ZEMIR Mohamed, on le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.

Nous tenons à remercier également tous les membres du jury pour leur évaluation de ce travail.

Enfin, je remercie tous ceux qui, de prés ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Dédicace **ii**

Résumé **iii**

Abstract **iv**

Remerciments **v**

Table des matières **xii**

Table des figures **xii**

Liste des tableau **xii**

Introduction **1**

1 GENERALITES SUR LES GRAPHES **4**

1.1 Définitions et notations 4

1.1.1 Graphe 4

1.1.2 Voisinage, degré d'un sommet 5

1.1.3 Sous-graphe, sous-graphe induit 6

1.1.4 Concept de minimalité, maximalité, minimum et maximum 7

1.1.5 Chaîne et cycle 7

1.1.6 Distance, excentricité, diamètre et rayon 7

1.2 Quelques classes de graphes 8

1.3 Quelques opérations dans les graphes 10
1.3.1 Produit cartésien 10
1.3.2 Produit tensoriel 11
1.3.3 Produit fort 11
1.4 Domination dans les graphes 12
1.4.1 Historique 12
1.4.2 Domination standard 12
1.4.3 Quelques invariants de domination 13

2 BROADCASTS DANS LES GRAPHES 15
2.1 Notions fondamentales sur les broadcasts 15
2.2 Résultats fondamentaux 19
2.3 Bornes inférieures du nombre de broadcast domination 24
2.4 Graphes avec un petit nombre de broadcast domination 26
2.5 Invariants de broadcast 29
2.5.1 Broadcast indépendant 29
2.5.2 Broadcast dominant indépendant 32
2.5.3 Broadcast efficace 33
2.5.4 Broadcast packing 35

3 NOMBRE DE BROADCAST INDEPENDANCE DANS CERTAINES GRAPHES 39
3.1 Nombre de broadcast indépendance dans quelques classes de graphes . . . 40
3.1.1 Nombre de broadcast indépendance dans les chaines et les cycles . 40
3.1.2 Nombre de broadcast indépendance dans les grilles 40
3.1.3 Nombre de broadcast indépendance dans les chenilles 41
3.2 Calcul de β_b pour la classe $P_m \boxtimes P_n$ avec $m \leq n$ 43
3.2.1 Calcul du $\beta_b(P_m \boxtimes P_n)$ pour $m = 2, 3, 4$ 45

Conclusion 51

Table des figures

1.1 Graphe simple 5

1.2 Sous-graphe de G induit par $S = \{a, b, d, e\}$ 6

1.3 Deux graphes isomorphes G et G' 8

1.4 Graphe biparti complet $K_{4,2}$ 9

1.5 Arbre binaire de hauteur 2 10

1.6 $P_4 \square P_5$ 10

1.7 $P_4 \times P_5$ 11

1.8 $P_4 \boxtimes P_5$ 11

1.9 Graphe G avec $\gamma(G) = 2$ et $\Gamma(G) = 4$ 13

2.1 Le sommet w est un f-voisin de x et le sommet x n'est pas f-voisin de w. . 16

2.2 Graphe G avec $\gamma_b(G) = 2$ et $\Gamma_b(G) = 3$. 17

2.3 Deux broadcast dominants sur G 18

2.4 Graphe subdivisé d'un graphe $K_{1,4}$. 20

2.5 Jonction de deux graphes en deux extrémités. 20

2.6 Graphe G_n 27

2.7 Graphe $S(K_{1,n})$, $n \geq 3$ 27

2.8 Graphe G avec $\gamma_b(G) = 3$ et $min\{\gamma(G), rad(G)\} = 4$ 28

2.9 Graphe de Petersen 30

2.10 Broadcasts efficaces sur P_5 34

2.11 Packing maximal qui n'est pas un broadcast packing maximal 35

3.1 Codage de deux chenilles. 41

Liste des tableaux

2.1 Inégalités entre les invariants de broadcast. 38

Introdutcion

La recherche opérationnelle est une discipline récente dont le but est de fournir des méthodes de résolution basées sur des concepts et outils mathématiques.

La théorie des graphes constitue un outil puissant de la recherche opérationnelle pour la modélisation et la résolution de nombreux problèmes concrets de la vie courante. Elle trouve son origine au 18^{ieme} siècle dans l'étude du célèbre problème des ponts de Königsberg " comment parcourir une fois et une seule fois les sept ponts de la ville de Konigsberg". Ce problème, résolu par Euler, représente le premier résultat formel de la théorie des graphes. La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie, physique, la biologie, les sciences sociales, les réseaux de communication, les circuits électriques, etc...

La théorie des graphes, comme son nom l'indique, traite des problèmes assez variés qui ont tous la caractéristique de pouvoir être représentés par un schéma appelé "graphe". Un graphe est constitué d'un ensemble de points (sommets) représentant des individus, des objets etc. . . et de lignes (arêtes) reliant ces points, symbolisant le lien existant entre eux.

Un des domaines les plus florissants de la théorie des graphes est la domination qui a été étudiée intensivement ces trois dernières décennies. Elle a commencé semble-t-il au 16^{ieme} siècle en Inde [14] comme un problème de jeux d'échec. Le principe consiste à couvrir (dominer) l'ensemble des cases d'un échiquier par un nombre minimum de reines,

c'est à dire que chaque place est occupée soit par une reine, soit en un seul mouvement de celle-ci.

Un dominant dans un graphe est un sous ensemble de sommets, où tout sommet du graphe est ou bien dans cet ensemble ou bien adjacent à un sommet de cet ensemble. Le cardinal minimum d'un tel ensemble est appelé le nombre de domination. Plusieurs types de domination sont définis sur la base de la définition précédente en imposant des propriétés supplémentaires sur les ensembles dominants.

Le problème de la broadcast domination est une variante du problème de domination. Ce problème a été introduit en 2001 par D. J. Erwin [10] et consiste à attribuer des entiers positifs (poids) aux sommets du graphe de sorte que tout sommet de poids nul soit broadcast-dominé par un sommet de poids strictement positif, et que la somme des poids de tous les sommets soit minimum. Formellement, cela revient à définir une application f à valeurs entières sur l'ensemble des sommets telle que tout sommet du graphe se trouve au plus à une distance $f(v)$ d'au moins un sommet v avec $f(v) > 0$, et telle que la somme des poids soit minimum. Ce minimum s'appelle nombre de broadcast domination du graphe.

Une des applications de la broadcast domination est la localisation de stations radio FM dans une zône donnée, où les sites à localiser sont les sommets d'un graphe représentant la zône en question. En pratique, les transmetteurs ne sont pas identiques. Une station radio FM se distinque d'un côté par sa fréquence de transmission et d'un autre côté par la puissance apparente rayonnée (ERP). En général, il n'est pas nécessaire que tous les transmetteurs du réseau aient le même ERP. Un transmetteur avec un plus haut ERP peut couvrir une grande zone mais sa construction et son fonctionnement sont plus coûteux. Il est alors utile de minimiser la somme des ERP qui correspond à la minimisation du coût du broadcast.

L'objet principale de ce mémoire est la détermination du nombre de broadcast indépendance dans ceratains graphes.

Aprés une introduction générale, le mémoire s'articule autour de trois chapitres,

Le premier chapitre contient quelques définitions fondamentales et des notations de base dans le domaine de la théorie des graphes qui nous sont utiles dans ce mémoire. On présente aussi un aperçu sur la domination dans les graphes.

Dans le deuxième chapitre, nous énonçons l'essentiel des résultas établis sur les invariants de broadcast.

Notre contribution se situe dans le troisième chapitre qui est consacré à la détermination des valeurs exactes du nombre de broadcast indépendance dans la classe des graphes $P_m \boxtimes P_n$ où $\boxtimes$ représente le produit fort de deux chaînes P_m et P_n de longueur m et n respectivement,avec $m \leq n$ et $m = 2, 3$ et 4.

Le mémoire s'achève par une conclusion sur l'ensemble du travail réalisé et quelques perspectives de recherche.

Chapitre 1

GENERALITES SUR LES GRAPHES

Dans ce chapitre nous introduisons les différentes notations de base de la théorie des graphes, qui nous serviront tout au long de ce mémoire. Nous exposons également un aperçu sur la domination dans les graphes et nous présentons quelques invariants de domination. Les différentes définitions et les principaux résultats employés dans ce chapitre sont inspirés des livres de références [3, 13].

1.1 Définitions et notations

1.1.1 Graphe

Un **graphe non orienté** et **fini** G est un couple (V, E) où V est un ensemble d'éléments fini dénombrable et E est un sous-ensemble de paires de sommets de V, $E \subseteq \{uv, u, v \in V\}$. Un élément $v \in V$ est dit **sommet**, et un élément $e = uv \in E$ est dit **arête**. L'entier $n = |V|$ (resp. $m = |E|$) représente l'**ordre** (resp. **taille**) de G. Si $n = 1$, on dit que G est **trivial**.

Deux sommets u, v dans V sont dit **adjacents** ou **voisins** si l'arête $uv \in E$. Dans ce cas, u et v représentent les extrémités de l'arête e, et e est dite **incidente** aux sommets u et v.

Deux arêtes sont adjacentes si elles ont au moins une extrémité commune. Si l'arête $e = uu \in E$ pour un sommet $u \in V$, alors e est dite **boucle**.

Un graphe G est dit p-**graphe** si le nombre d'arête uv entre deux sommets u et v est inférieur ou égal a p. Un **graphe simple** est un 1-graphe sans boucle.

Dans tout ce qui suit, nous considérons que les graphes simples et finis. La Figure.1.1 montre un graphe simple $G = (V, E)$ avec $V = \{a, b, c, d, e\}$ et $E = \{ab, bc, bd, ad, ae, ed, cd\}$.

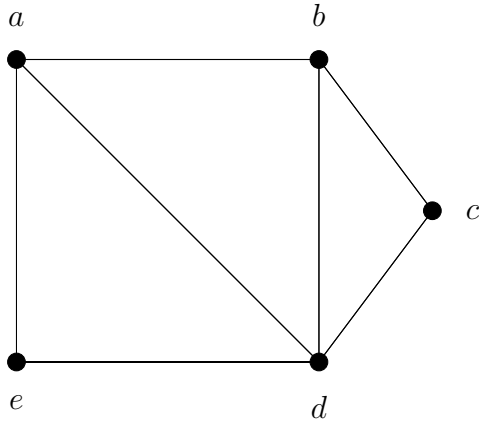


FIGURE 1.1 – Graphe simple

1.1.2 Voisinage, degré d'un sommet

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Le **voisinage ouvert** d'un sommet v de G est l'ensemble $N_G(v) = \{u \in V / uv \in E\}$ et le **voisinage fermé** de v est $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Plus généralement, pour un ensemble $S \subseteq V$ le **voisinage ouvert** de S est $N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G(v)$ et son **voisinage fermé** est $N_G(S) = N_G(S) \cup S$ s'il n'y a aucun risque de confusion, nous écrirons $N(V), N[V], N(S)$ et $N[S]$ au lieu de $N_G(v), N_G[v], N_G(S)$ et $N_G[S]$ respectivement.

Le **degré** d'un sommet $v \in V$ dans un graphe G, noté $d_G(v)$ (ou simplement $d(v)$), est le nombre d'arêtes incidentes à v. Un sommet **isolé** est un sommet de degré nul.

un sommet de degré égal à un sera dit **pendent** (**feuille)** et un sommet adjacent à un sommet pendant est dit **support** . Nous noterons $\delta(G)$ et $\Delta(G)$ respectivement les **degrés minimum** et **maximum** dans G. S'il n'y a pas de risque de confusion, nous écrirons $d(v)$, Δ et δ pour désigner $d_G(v)$, $\Delta(G)$ et $\delta(G)$ respectivement.

Pour le graphe illustré dans la figure Figure.1.1, on a $N(a) = \{b, e, d\}$ et $d(a) = 3$.

1.1.3 Sous-graphe, sous-graphe induit

Soient G et H deux graphes. Si $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$ alors est appelé **sous-graphe** de G et on écrit $H \subseteq G$. Si de plus $H \neq G$, alors H est un **sous-graphe propre** de G et on écrit $H \subset G$.

Pour un ensemble $S \subseteq V(G)$, le sous-graphe de G **induit** par S, note $\langle S \rangle$, est le graphe ayant S pour ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles de E ayant leurs deux extrémités dans S.

Pour le graphe G illustre dans la Figure. 1.1, le sous-graphe induit par $S = \{a, b, d, e\}$ est illustré dans la Figure. 1.2.

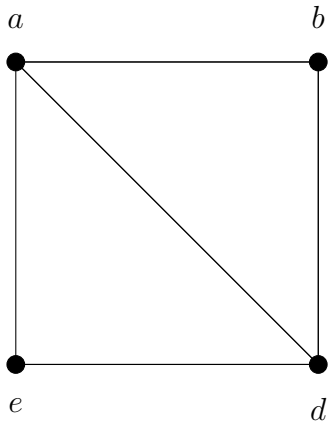


FIGURE 1.2 – Sous-graphe de G induit par $S = \{a, b, d, e\}$

1.1.4 Concept de minimalité, maximalité, minimum et maximum

Un sous ensemble S de V est dit **minimal** par rapport a une propriété $\mathcal{P}$ s'il n'existe pas un sous ensemble $S^{'} \subset S$ tel que le sous graphe induit par $S^{'}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$. Un sous ensemble S de V est dit **maximal** par rapport a une propriété $\mathcal{P}$ s'il n'existe pas un sous ensemble $S^{'}$ tel que $S \subset S^{'}$ et le sous graphe induit par $S^{'}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$. Un sous ensemble S de V est dit **minimum** ou de **taille minimale** par rapport a une propriété $\mathcal{P}$ s'il n'existe pas un sous ensemble $S^{'} \subseteq V$ tel que le sous graphe induit par $S^{'}$ vérifié la propriété $\mathcal{P}$ et $|S^{'}| < |S|$. Un sous ensemble S de V est dit **maximum** ou de **taille maximale** par rapport a une propriété $\mathcal{P}$ s'il n'existe pas un sous ensemble $S^{'} \subseteq V$ tel que le sous graphe induit par $S^{'}$ vérifié la propriété $\mathcal{P}$ et $|S^{'}| > |S|$.

1.1.5 Chaîne et cycle

Une **chaîne** C dans un graphe $G = (V, E)$ est une séquence finie de sommets $v_1, v_2, ..., v_k$ telle que pour tout $1 \leq i \leq k-1$, $e_i = v_i v_{i+1} \in E$. L'entier $k-1$ représente la **longueur** de C (nombre des arêtes) et les sommets v_1 et v_k sont les **extrémités** de la chaîne C.

Une chaîne est dite **élémentaire** (resp. **simple**) si tous ses sommets (resp. arêtes) sont distincts. Une **corde** est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une chaîne. Une chaîne **minimale** induite par n sommets, notée par P_n, est une chaîne élémentaire sans corde.

Un **cycle** C_n est une chaîne simple dont les extrémités sont confondues.

1.1.6 Distance, excentricité, diamètre et rayon

La **distance** entre deux sommets u et v d'un graphe G, notée $d_G(u, v)$, est la longueur de la plus courte chaîne joignant u et v. **L'excentricité** d'un sommet v dans un graphe $G(V, E)$, est $e(v) = max\{d(v, w), w \in V\}$. Le **diamètre** de G noté $diam(G)$, c'est-à-dire : $diam(G) = max\{e(v), v \in V\}$ et le **rayon** de G noté $rad(G)$, c'est-à-dire :

$rad(G) = min\{e(v), v \in V\}$. Un sommet de G ayant une excentricité minimum est appelé **centre**. Pour le graphe G illustré dans la Figure.1.1, $d(a, c) = 2$, $diam(G) = 2$, $rad(G) = 1$ et $e(G) = 2$.

1.2 Quelques classes de graphes

Un graphe simple G est dit **complet** si toute paire de sommets de G est reliée par une arête.

Un graphe G est dit **connexe** si pour toute paire de sommets u et v du graphe G est reliée par une chaîne. Une **composante connexe** d'un graphe est un sous graphe connexe maximal. Un graphe est **non connexe** s'il possède au moins deux composantes connexes.

Deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ sont dits **isomorphes** s'il existe une application bijective φ de V sur V' telle que pour tous sommets $u, v \in V, uv \in E$ si et seulement si $\varphi(u)\varphi(v) \in E'$.

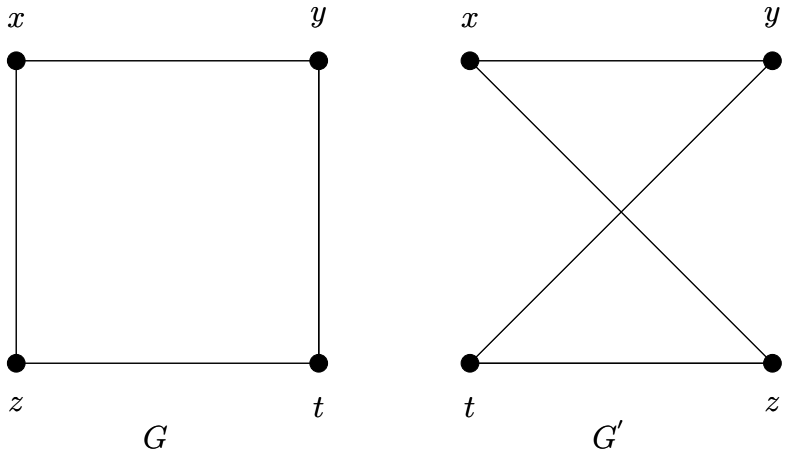


FIGURE 1.3 – Deux graphes isomorphes G et G'

Un graphe est dit **biparti** s'il est possible de partitionner l'ensemble de ses sommets en deux sous-ensembles V_1 et V_2 tels que les sous graphes $\langle V_1 \rangle$ et $\langle V_2 \rangle$ ne contiennent aucune arête. Un graphe est biparti si et seulement si, il ne contient pas de cycle de longueur impaire. Il est dit **biparti complet** et est noté par $K_{p,q}$, si $|V_1| = p$, $|V_1| = q$, et tout sommet de V_1 est relié à tout sommet de V_2 .

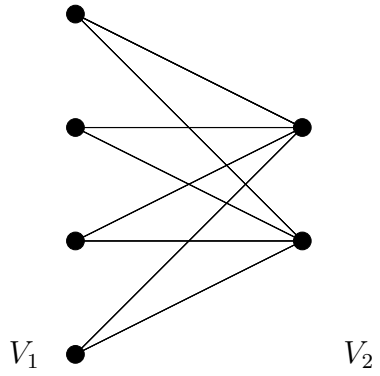


FIGURE 1.4 – Graphe biparti complet $K_{4,2}$

Un graphe est dit **triangulé** si tout cycle de longueur ≥ 4 contient une corde. Le graphe G illustre dans la Figure. 1.1 est un graphe triangulé.

Un **arbre** souvent noté par T, est un graphe connexe sans cycle. Les sommets de T sont appelés sommets **pendants** (ou **feuilles**), et les sommets adjacents aux feuilles sont appelés **supports**. Un arbre enraciné en un sommet r est un arbre pendu par ce sommet.
La profondeur d'un sommet v est la longueur de la chaîne qui va de la racine à ce sommet.
Le niveau p est formé des sommets de profondeur p.
La hauteur d'un arbre est la longueur du plus longue chaîne de la racine à une feuille.
Arbre binaire : Un arbre est dit binaire s'il est constitué d'un unique sommet de degré deux et si tout autre sommet est soit de degré trois, soit de degré un.
Arbre complet : Un arbre est complet si toutes ses feuilles sont sur le même niveau.

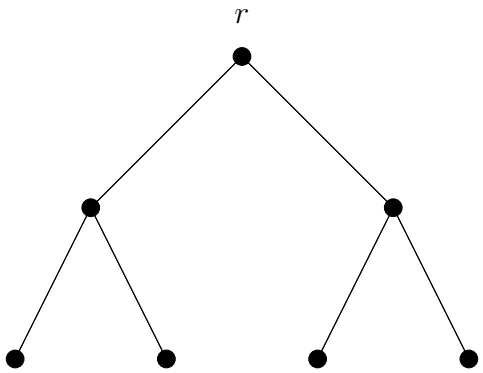


FIGURE 1.5 – Arbre binaire de hauteur 2

1.3 Quelques opérations dans les graphes

1.3.1 Produit cartésien

Le **produit cartésien** de deux graphes G et H, note par $G\square H$, est le graphe dont les sommets sont les paires ordonnées (x, y) où $x \in V(G)$ et $y \in V(H)$. Deux sommets (u, v) et (x, y) sont adjacents si et seulement si $u = x$ et v est adjacent à y dans H, où $v = y$ et u est adjacent a x dans G.

Example 1.3.1 *Le graphe illustré dans la figure.1.6 est le produit cartésien de la chaîne P_4 par la chaîne P_5 .*

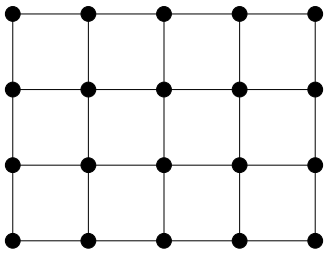


FIGURE 1.6 – $P_4\square P_5$

1.3.2 Produit tensoriel

Le **produit tensoriel** de G et H, note par $G \times H$, est le graphe dont les sommets sont les paires ordonnées (x, y) où $x \in V(G)$ et $y \in V(H)$. Deux sommets distincts (u, v) et (x, y) sont adjacents si et seulement si $u \in N_G(x)$ et $v \in N_H(y)$.

Example 1.3.2 *Le graphe illustre dans la Figure.1.7 est le produit tensoriel de P_4 par P_5.*

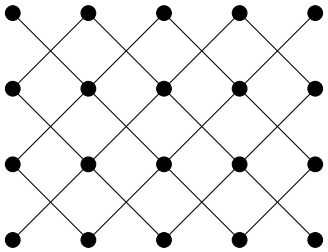


FIGURE 1.7 – $P_4 \times P_5$

1.3.3 Produit fort

Le **produit fort** de G et H, noté par $G \boxtimes H$, est le graphe dont les sommets sont les paires ordonnées (x, y) où $x \in V(G)$ et $y \in V(H)$. L'ensemble des arêtes est l'union de $E(G \square H)$ et de $E(G \times H)$, c'est à dire, $E(G \boxtimes H) = E(G \square H) \cup E(G \times H)$.

Example 1.3.3 *Le graphe illustré dans la Figure.1.8 est le produit fort de P_4 par P_5.*

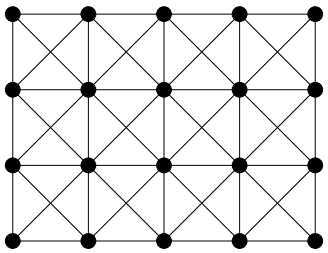


FIGURE 1.8 – $P_4 \boxtimes P_5$

1.4 Domination dans les graphes

1.4.1 Historique

Bien que l'étude mathématique des ensembles dominants a commencé dans les années soixante, le sujet trouve son origine en 1862 dans les jeux d'échecs quand De Jaenisch [8] étudia le problème de la détermination du nombre minimum de reines à placer sur un échiquier $n \times n$ de sorte que chaque case soit occupée par une reine ou peut être occupée en un seul mouvement par l'une d'elles, tout en sachant que les règles du jeu des échecs permet à une reine de se déplacer à travers les cases horizontalement, verticalement ou diagonalement. Pour un échiquier 8×8, cinq est le nombre minimum de reines qui dominent toutes les cases de l'échiquier. Dans ce cas, le problème est appelé « le problème des cinq reines » qui est à l'origine de l'étude mathématique de la domination.

En 1892, Ball [1] a traité la question de De Jaenish en considérant d'autres conditions supplémentaires.

En 1964, les frères Yaglom [21] étudièrent les problèmes posés par De Jaenish et Ball. L'appellation « coeficient de stabilité externe » fut introduisé par Berge [3] pour définir le nombre de domination et en 1962, Ore [17] fut le premier à employer les termes « ensemble dominant » et « nombre de domination » qu'il nota $d(G)$.

L'étude moderne de la domination a débuté après l'apparition de l'article de Cockayne et Hedetniemi [6] en 1977. Les auteurs de [6] ont été les premiers à utiliser la notation $\gamma(G)$ pour désigner le nombre de domination.

1.4.2 Domination standard

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$ est un **dominant** de G si tout sommet de $V - S$ est adjacent à au moins un sommet de S, c'est-à-dire si $N[S] = V$. Le **nombre de domination** $\gamma(G)$ et le **nombre de domination supérieur** $\Gamma(G)$ de G sont respectivement le cardinal minimum et maximum d'un ensemble dominant

minimal sur G. Un ensemble dominant minimal de G de cardinal minimum est appelé γ-**ensemble**, et un ensemble dominant minimal de G de cardinal maximum est appelé Γ-**ensemble**.

Example 1.4.1 *Le nombre de domination et le nombre de domination supérieur du graphe illustré dans Figure.1.9 valent respectivement* $\gamma(G) = 2$ *et* $\Gamma(G) = 4$. *L'ensemble* $S = \{u, v\}$ *est un* γ*-ensemble et l'ensemble* $S' = \{w, x, y, z\}$ *est un* Γ*-ensemble.*

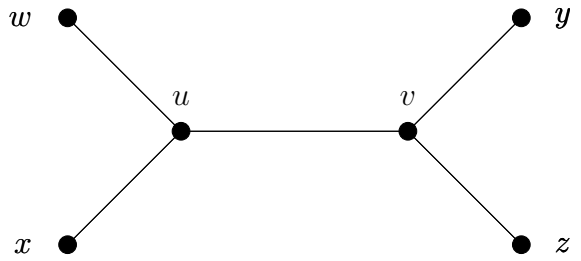


FIGURE 1.9 – Graphe G avec $\gamma(G) = 2$ et $\Gamma(G) = 4$

Dans la littérature, il existe d'autres définitions équivalentes aux ensembles dominants dans un graphe :

• Un ensemble $S \subseteq V$ est un ensemble dominant de G si pour tout sommet v de V, $\mid N[v] \cap S \mid \geqslant 1$.

•Un ensemble $S \subseteq V$ est un ensemble dominant de G si pour tout sommet v de $V - S$, $N[v] \bigcap S \neq \phi$.

• Un ensemble $S \subseteq V$ est un ensemble dominant de G si $N[S] = V$.

1.4.3 Quelques invariants de domination

On dénombre actuellement près d'une centaine de types de domination et références dans le domaine. Pour un aperçu détaillé, le lecteur peut consulter les deux livres remarquables de Haynes, Hedetniemi et Slater ([12], [13]).

Indépendance :

Un ensemble S de sommets est dit **stable** (ou indépendant) si les sommets de S sont non adjacents deux à deux. Le **nombre de domination stable** $i(G)$ et le **nombre de stabilité** $\beta_0(G)$ sont respectivement le cardinal minimum et maximum d'un stable maximal dans G.

Comme tout stable maximal est un ensemble dominant minimal [2], on a :

$$\gamma(G) \leqslant i(G) \leqslant \beta_0(G) \leqslant \Gamma(G)$$

Packing :

Un ensemble S est un **packing** si pour tout sommet $v \in V$, $|N[v]| \bigcap S \mid \leqslant 1$. Le **nombre de packing** $P(G)$ et le **nombre de packing inférieur** $p(G)$ sont respectivement le cardinal maximum et minimum d'un packing maximal dans G. Comme tout dominant minimal est un packing maximal de G [5], nous avons la chaîne d'inégalités suivante :

$$p(G) \leqslant P(G) \leqslant \gamma(G) \leqslant i(G) \leqslant \beta_0(G) \leqslant \Gamma(G)$$

Efficacité :

Un ensemble dominant S est dit **efficace** si pour tout sommet $v \in V$, $|N[v]| \bigcap S \mid = 1$, c'est-à-dire que tout sommet est dominé par un unique sommet de S. Notons qu'un ensemble dominant efficace n'existe pas toujours puisque le cycle C_5 ne possède pas d'ensemble dominant efficace. Par ailleurs, si un graphe G possède un ensemble dominant efficace S, alors tout ensemble dominant efficace de G a le cardinal de S qui est forcément $\gamma(G)$.

Chapitre 2

BROADCASTS DANS LES GRAPHES

Après l'introduction générale des notions de fonction broadcast et de nombre de broadcast domination, nous introduisons quelques invariants des broadcasts et les relations qui les relient.

2.1 Notions fondamentales sur les broadcasts

Soit $G = (V, E)$ un graphe non trivial connexe.

Définition 2.1.1 *Une fonction $f : V \longrightarrow \{0, \ldots, diam(G)\}$ telle que $f(v) \leqslant e(v)$ pour tout sommet v de G est appelée un* ***broadcast*** *sur G. Un sommet v pour lequel $f(v) > 0$ est un sommet f-**dominant** ou* ***sommet broadcast****, et l'ensemble f-**dominant** est $V_f^+(G) = \{v \in V : f(v) > 0\}$. S'il n'y a pas risque de confusion, on note simplement V_f^+ au lieu de $V_f^+(G)$.*

Définition 2.1.2 *Un broadcast dominant sur G est un broadcast f dans lequel chaque sommet est f-dominé par un certain sommet dans V_f^+.*

Remarque 2.1.3 *S'il existe un sommet v avec $f(v) \geq diam(G)$, alors f est un broadcast dominant. Ainsi, il n'est pas nécessaire de considérer des broadcasts dominants avec des sommets de coût supérieur au $diam(G)$.*

Remarque 2.1.4 *Un sommet f-dominant v f-domine chaque sommet u avec $d(u,v) \leq f(v)$, et les sommets dans $V - V^+$ ne f-dominent aucun sommet de G. Si $u \in V^+, v \in V$ et $d(u,v) \leq f(u)$, on dit que le sommet v peut atteindre un broadcast à partir de u . L'ensemble des sommets que $v \in V$ peut atteindre est défini par*
$H(v) = \{u \in V^+ : d(u,v) \leq f(u)\}$.

Définition 2.1.5 *Pour un broadcast f,un sommet u qui est f-dominé par un sommet v est un f-voisin de v. Le f-**voisinage** de v, noté par $N_f[v]$ est l'ensemble des f-voisins de v. Si $S \subseteq V^+$, alors $N_f[S] = \cup_{v \in S} N_f(v)$ est le f-voisinage de S. Le f-voisinage de f est $N_f[V_f^+]$.*

Remarque 2.1.6 *u est un voisin de v si et seulement si v est un voisin de u mais, il est possible que u soit un v-voisin de v sans que v le soit pour u.*

Example 2.1.7 *Le graphe illustré dans la figure Figure.2.1 avec $f(w) = f(y) = 0$ et $f(x) = 1$ montre que w est un f-voisin de x, mais que le sommet x n'est pas f-voisin de w.*

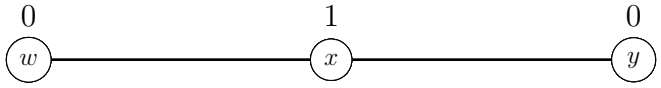


FIGURE 2.1 – Le sommet w est un f-voisin de x et le sommet x n'est pas f-voisin de w.

Définition 2.1.8 *Un sommet u est un f-**voisin privé** de v si u est f-dominé seulement par v. Pour un sommet $v \in V_f^+$, le f-**voisinage privé** $pn_f[v]$ est l'ensemble des f-voisins privés de v. Si $v \in pn_f[v]$, alors on dit que v est son f-**voisin privé propre**. Pour $S \subseteq V_f^+$, on définit l'ensemble des f-voisins privés de S par $PN_f[S] = N_f[S] - N_f[V_f^+ - S]$.*

Définition 2.1.9 *Un broadcast f d'un certain type (domination ou autre) est dit minimal (resp. maximal) s'il n'existe pas un broadcast $g \neq f$ tel que pour tout sommet $u \in V, g(u) \leq f(u)$ (resp. $g(u) \geq f(u)$).*

Définition 2.1.10 *Soit f un broadcast sur un graphe G et $\sigma(f) = \sum_{v \in V} f(v)$. Le **nombre de broadcast domination** $\gamma_b(G)$ est la valeur minimum de $\sigma(f)$ sur tous les broadcasts dominants de G. Un broadcast dominant f sur G pour lequel $\sigma(f) = \gamma_b(G)$ est dit broadcast dominant minimum sur G. Le **nombre de broadcast domination supérieur** $\Gamma_b(G)$ est égal au coût maximum d'un broadcast dominant minimal sur G.*

Example 2.1.11 *Le nombre de broadcast domination et le nombre de broadcast domination supérieur du graphe illustré dans la figure Figure.2.2 valent respectivement 2 et 3.*

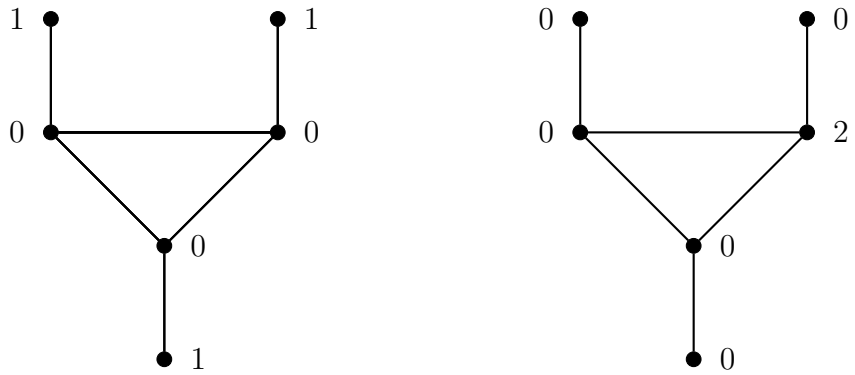


FIGURE 2.2 – Graphe G avec $\gamma_b(G) = 2$ et $\Gamma_b(G) = 3$.

Example 2.1.12 *Pour illustrer ces concepts, considérons le graphe $G = (V, E)$ illustré par la figure Figure.2.3. Les figures Figure.2.3 (b) et Figure.2.3 (c) illustrent deux broadcasts dominants f et g, où l'ensemble f-dominant est $V_f^+ = \{s, v, y\}$ et l'ensemble g-dominant est $V_g^+ = \{t, z\}$. Le sommet s f-domine s, t, u, w, x et son f-voisinage est $N_f[s] = \{s, t, u, w, x\}$, mais s ne g-domine aucun sommet. On a $|H_f(u)| = 3$, $|H_f(x)| = 2$, $|H_f(z)| = 2$ et $|H_f(r)| = 1$ pour tout sommet $r \in \{s, t, v, w, y\}$. On a $\sigma(f) = 4$ et $\sigma(g) = 3$. En fait il n'est pas difficile de voir que $\gamma_b(G) = 3$ et g est un γ_b-broadcast.*

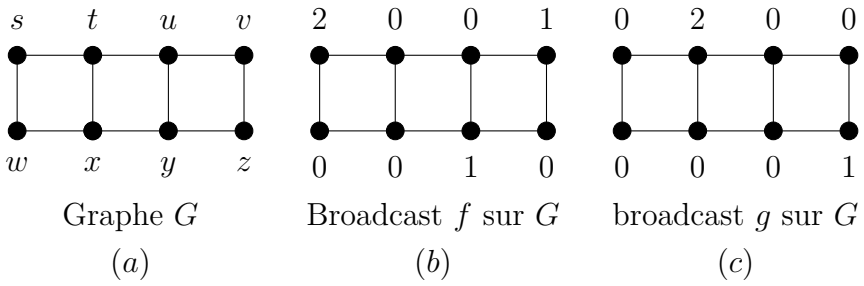


FIGURE 2.3 – Deux broadcast dominants sur G

Une caractérisation de la minimalité d'un broadcast dominant peut être formulée en termes des f-voisins privés des sommets f-dominants.

Théorème 2.1.13 *[10]*

Soit f un broadcast dominant sur un graphe G. Alors, f est minimal si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. *Chaque sommet v vérifiant $f(v) \geq 2$ a un f-voisinage privé qui est à distance $f(v)$ de v.*
2. *Chaque sommet v vérifiant $f(v) = 1$ a un f-voisinage privé dans $N[v]$.*

Soit $G = (E, V)$ un graphe et $f_s : V \to \{0, 1\}$ la fonction caractéristique d'un ensemble $S \subseteq V$.

Remarque 2.1.14 .

1. *La fonction caractéristique f_s d'un ensemble dominant minimal S dans un graphe G est un broadcast dominant minimal et donc $\gamma_b(G) \leq \gamma(G)$.*
2. *Soit $u \in V$, et soit $f_u : V \to \{0, \cdots, diam(G)\}$ la fonction définie par $f_u(u) = e(u)$ et $f_u(v) = 0$, si $v \neq u$. Le broadcast f_u est un dominant minimal, puisque chaque sommet est f-dominé par u. Si u est un sommet dans le centre de G c'est à dire $e(u) = rad(G)$, alors on dira que le broadcast f_u est un broadcast **radial**, et si $e(u) = diam(G)$, alors on dira que f_u est un broadcast **diamétral**.*

Proposition 2.1.15 *[10]*

Si f est un broadcast dominant minimal sur un graphe G et $|V_f^+| \geq 2$, alors pour chaque sommet v, $f(v) < e(v)$.

De la Remarque 2.1.14, on a le résultat suivant :

Observation 1 *[9]*

Pour tout graphe G

$$\gamma_b(G) \leq min\{\gamma(G), rad(G)\} \leq max\{\Gamma(G), diam(G)\} \leq \Gamma_b(G).$$

2.2 Résultats fondamentaux

Pour tout graphe G et tout entier fixé k avec $1 \leq k \leq rad(G)$, le nombre de k-distance domination, noté $\gamma_k(G)$, est la plus petite cardinalité d'un ensemble de sommets S de G tel que tout sommet de G est à distance inférieure ou égale à k d'au moins un sommet de S.

Proposition 2.2.1 *[11]*

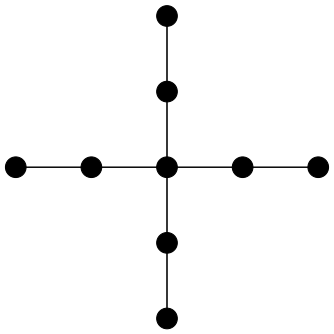
Pour tout grapheG,

$$\gamma_b(G) \leq min\{k\gamma_k : 1 \leq k \leq rad(G)\}.$$

En appliquant la Proposition 2.2.1 produit une meilleure borne pour $\gamma_b(G)$ que celle de l'observation 1 car $k = 1$ (resp. $k = rad(G)$), on obtient $\gamma_b(G) \leq \gamma(G)$ (resp. $\gamma_b(G) \leq rad(G)$)

Pour tout entier positif $t \geq 3$, on appelle étoile et on note par $K_{1,t}$ l'arbre a t sommets pendants relies a l'unique sommet de degré t. On appelle graphe subdivise d'un graphe G le graphe $S(G)$ obtenu en insérant un sommet sur chaque arête de G. Soit $T = S(K_{1,t})$ le graphe subdivise de l'étoile $K_{1,t}$ pour tout entier $t \geq 2$. Puisque aucun sommet ne domine T, alors $\gamma_b(T) \geq 2$, et puisque un broadcast radial domine T, alors $\gamma_b(T) \leq rad(T) = 2$.

Ainsi, on peut atteindre l'inégalité : $\gamma_b(G) \leq min\{\gamma(G), rad(G)\}$. Par ailleurs, il est prouve dans [11], que la différence entre $min\{\gamma(G), rad(G)\}$ et $\gamma_b(G)$ et entre $\Gamma_b(G)$ et $max\{\Gamma(G), diam(G)\}$ peut être très grande. Pour un entier positif k, soit H_k le graphe obtenu en joignant un sommet pendant de $S(K_{1,2+k})$ a un sommet pendant de la chaine P_{2k} voir Figure.2.5.



$S(K_{1,4})$

FIGURE 2.4 – Graphe subdivisé d'un graphe $K_{1,4}$.

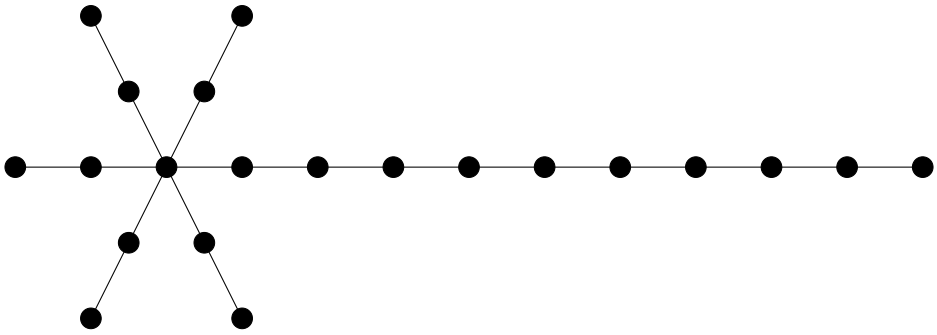


FIGURE 2.5 – Jonction de deux graphes en deux extrémités.

Alors $\Gamma(H_k) = 2k + 3$ et $diam(H_k) = 2k + 4$, donc

$max\{\Gamma(H_k), diam(H_k)\} = 2k + 4$. Soit v l'extrémité de P_{2k} qui est extrémité de H_k. Soit le broadcast $f : V(H_k) \to \{0, 1, 2k + 2\}$ défini par $f(v) = 2k + 2$, $f(x) = 1$ pour tout extrémité x de H_k distincte de v et $f(x) = 0$ pour tout autre sommet x de H_k. Alors la fonction f est un broadcast dominant minimal sur H_k de coût $3k + 3$ et $\Gamma_b(H_k) \geq 3k + 3$, et on a le résultat suivant :

Observation 2 *[9]*

Pour tout entier positif k,

$$\Gamma_b(H_k) - max\{\Gamma(H_k), diam(H_k)\} \geq k - 1.$$

Par ailleurs, la différence entre $mint\gamma_t(G) : 1 \leq trad(G)$ et $\gamma_b(G)$ peut être trés grande comme le prouve le Théorème ci dessous :

Théorème 2.2.2 *[11]*

Pour tout entier positif k,

$$min\{t\gamma_t(H_k) : 1 \leq t \leq rad(H_k)\} - \gamma_b H_k \geq \frac{2k}{15} - 1.$$

Les graphes G vérifiant $\gamma_b(G) = rad(G)$ sont fondamentaux pour l'étude des γ_b-broadcasts. Les trois propositions suivantes, dont deux sont des caractérisations de ces graphes, le montrent :

Proposition 2.2.3 *[11]*

Soit f un γ_b-broadcast sur un graphe G. Alors $V_f^+ = v$ si et seulement si $f(v) = e(v) = rad(G)$.

Le sous-graphe induit par le f-voisinage de tout sommet f-broadcast est d'une part radial et d'autre part vaut la valeur de ce sommet.

Proposition 2.2.4 *[11]*

Soit G un graphe et f un γ_b-broadcast sur G. Si $v \in V_f^+$, alors

$$f(v) = \gamma_b(\langle N_f[v]\rangle) = rad(\langle N_f[v]\rangle).$$

Une des caractérisations des graphes radiaux est définie dans la Proposition ci- dessous.

Proposition 2.2.5 *[11]*

Soit G un graphe. Alors $\gamma_b(G) = rad(G)$ si et seulement si

$$min\{k\gamma_k(G) : 1 \leq k \leq rad(G)\} = rad(G).$$

En général, il n'y a aucune relation entre le nombre de broadcast domination d'un graphe et le nombre de broadcast domination de ses sous-graphes, même si le sous-graphe est induit. En effet, considérons un graphe G d'ordre $n \geq 4$ et de degré maximum au plus $n-2$. Puisque aucun sommet de G n'est adjacent à tous les sommets du graphe G, alors $\gamma_b(G) \geq 2$. Soit H le graphe obtenu en joignant un nouveau sommet à tous les sommets de G, alors $\gamma_b(H) = 1$. Donc dans ce cas, $G \subseteq H$, bien que $\gamma_b(G) > \gamma_b(H)$.

cependant, il y a une relation entre le nombre de broadcast domination d'un graphe et le nombre de broadcast domination d'une subdivision de ce graphe.

Théorème 2.2.6 *[11]*

Si H est le graphe subdivisé d'un graphe G, alors

$$\gamma_b(G) \leq \gamma_b(H).$$

Soit G un graphe. Pour tout entier $k \geq 0$, on appelle graphe k-subdivisé du graphe G le graphe obtenu à partir de G en insérant k sommets sur chaque arête de G. Pour tous entiers $k \geq 0$ et $t \geq 3$, on note par $S_{k,t}$ le graphe k-subdivisé du graphe t-étoile $K_{1,t}$. Le centre de $S_{k,t}$ est l'unique sommet c de $S_{k,t}$ d'excentricité $e(c) = rad(S_{k,t}) = k+1$.

En 2001, D. Erwin [10] montra que le graphe k-subdivisé du graphe étoile $K_{1,t}$ est γ_b-radial pour $k \geq 0$ et $t \geq 5$ puis proposa la conjecture qui affirme que le résultat reste vrai pour $t \in \{3, 4\}$.

En 2009, R. Sahbi [19] a répondu à la conjecture de D.Erwin [10] :

Théorème 2.2.7 *[10]Pour tous entiers $k \geq 0$ et $t \geq 3$,*

$$\gamma_b(S_{k,t}) = rad(S_{k,t}) = k+1.$$

Pour tous entiers $k \geq 1$ et $t \geq 2$, on appelle arbre t-aire complet de profondeur k le graphe $A_{k,t}$ défini comme suit :

(i) $A_{1,t}$ est le graphe biparti complet $K_{1,t}$.
(ii) Pour $k \geq 2$, $A_{k,t}$ est obtenu à partir de t copies disjointes de $A_{k-1,t}$ et d'un sommet relié par une arête à l'unique sommet de degré t de chacune des t copies de $A_{k-1,t}$.

R. Sahbi[19] a prouvé la γ_b-radialité de tous les arbres t-aires complets :

Théorème 2.2.8 *[19]*

Pour tous entiers $k \geq 1$ et $t \geq 2$ on a

$$\gamma_b(S_{k,3}) = rad(A_{k,t}) = k.$$

Soit G un graphe γ_b-radial et soit H un sous graphe de G tel que $rad(H) = rad(G)$. Si H est γ_b-radial, on dit que H est un sous graphe γ_b-radial.

R. Sahbi [19] a déterminé le sous graphe de $S_{k,3}$, $\gamma_b(S_{k,3})$-radial et minimal (au sens de la suppression d'arêtes).

Théorème 2.2.9 *[19]*

Soit $k \geq 3$ un entier et f le sous-graphe de $S_{k,3}$ à 3 sommet pendants v_1, v_2, v_3 tels que $d(c, v_1) = k + 1$, $d(c, v_2) = k$ et $d(c, v_3) = k - 1$. Alors est $\gamma_b(S_{k,3})$-radial.

Soit P une chaîne diamétrale d'un arbre T, c'est à dire P est de longueur maximale. Un ensemble M des arêtes de P est un ensemble P-**partition** si les extrémités de chaque arête dans M sont de degré 2 dans T.

Théorème 2.2.10 *[15, 16]*

Un arbre T est radial si et seulement si T n'admet pas d'ensemble partition non vide.

Un γ_b-broadcast f est un γ_b-broadcast **très efficace** si et seulement si f est un γ_b broadcast avec un nombre minimum de sommets broadcast. On déduit directement un résultat du Théorème 2.2.10 :

Corollaire 2.2.11 *[15, 16]*

1. *Soit f un γ_b-broadcast très efficace d'un arbre T à s sommets broadcasts. Alors,*

$$\gamma_b(T) = rad(T) - \lfloor \frac{s}{2} \rfloor.$$

2. *Pour un arbre T, si M est un ensemble partition de cardinal maximum m, alors,*

$$\gamma_b(T) = rad(T) - rad(T) - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor.$$

Un arbre est dit **chenille** si le graphe obtenue en supprimant toutes les feuilles est une chaîne. Seager [20] a caractérisé les chenilles avec $\gamma_b = \gamma$. Cockayne, Herke et Mynhardt [7] ont caractérisé la classe $\mathcal{T}$ d'arbres T vérifiant $\gamma_b(T) = \gamma(T)$.

Théorème 2.2.12 *[7]*

Un arbre $T \in \mathcal{T}$ si et seulement si T a un ensemble-partition maximum M tel que chaque composante T_i de $T - M$ est dans $\mathcal{T}$.

2.3 Bornes inférieures du nombre de broadcast domination

D.Erwin démontra que la même borne inférieure que celle du nombre de domination reste valable pour le nombre de broadcast domination.

Théorème 2.3.1 *[11]*

Si G est un graphe non trivial, alors

$$\gamma_b(G) \geq \lceil \frac{diam(G+1)}{3} \rceil.$$

De l'observation 1 et du Théorème 2.3.1, on déduit directement le résultat suivant :

Théorème 2.3.2 *[11]*

Pour tout entier $n \geq 2$,

$$\gamma_b(P_n) = \gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil.$$

Une borne inférieure en terme de rayon est prouvée par Bresar et Spacapan pour le nombre de broadcast domination.

Théorème 2.3.3 *[5]*

Si G est un graphe, alors

$$\gamma_b(G) \geq \lceil \frac{2rad(G)}{3} \rceil$$

Pour tout graphe connexe G d'ordre n, $\lceil \frac{n}{3} \rceil$ est une borne supérieure de son nombre de broadcast domination.

Théorème 2.3.4 *[16]*

Pour tout graphe G d'ordre n,

$$\gamma_b(G) \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil$$

Il existe d'autres bornes qui dépendent du rayon. Pour un $gamma_b$-broadcast f, notons par $M = max\{f(x) : x \in V_f^+\}$

Lemme 2.3.5 *[10]*

Soit G un graphe et f un γ_b-broadcast sur G. Alors

$$rad(G) \leq 2\gamma_b + —V_f^+| - M - 1.$$

Du Lemme 2.3.5, nous obtenons immédiatement le résultat suivant :

Théorème 2.3.6 *[10]*

Soit G un graphe et f un γ_b-broadcast sur G. Alors

$$\gamma_b(G) \geq \lceil \frac{rad(G) + M + 1 - |V_f^+|}{2} \rceil$$

2.4 Graphes avec un petit nombre de broadcast domination

Pour un graphe non trivial connexe G, on peut aisément démontrer la caractérisation connue suivante : $\gamma(G) = 1$ si et seulement si $rad(G) = 1$. Les graphes avec un nombre de broadcast domination égal à 1 admettent une caractérisation identique :

Proposition 2.4.1 *[11]*

Soit G un graphe. Alors $\gamma_b(G) = 1$, si et seulement si $rad(G) = 1$.

Les graphes avec un nombre de broadcast domination égal à 2 se caractérisent aussi en fonction du rayon :

Théorème 2.4.2 *[11]*

Soit G un graphe. Alors $\gamma_b(G) = 2$ si et seulement si $min\{rad(G), \gamma(G)\} = 2$.

Notons qu'il existe :

(i) Une infinité de graphes G avec $\gamma_b(G) = 2 = \gamma(G) < rad$ Il suffit de considérer les graphes G_n obtenus en insérant 2 sommets sur chaque arête du multigraphe à 2 sommets reliés par n arêtes, $n \geq 1$, pour lesquels on a $\gamma_b(G_n) = \gamma(g_n) = 2$ et $rad(G_n) = 3$.

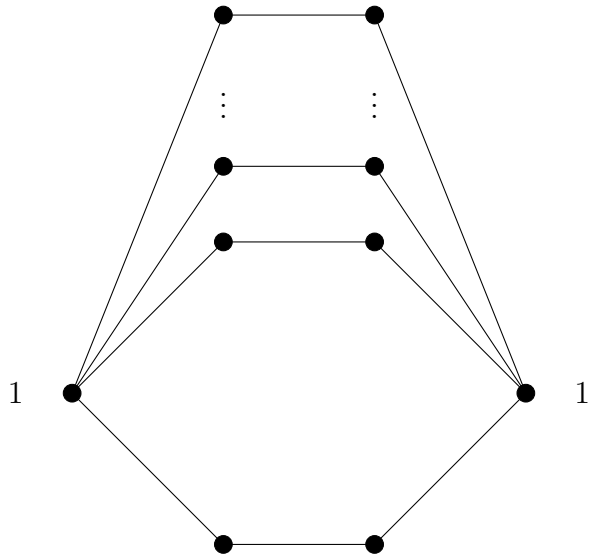


FIGURE 2.6 – Graphe G_n

(ii) Une infinité de graphes G avec $\gamma_b(G) = 2 = rad(G) < \gamma(G)$. Il suffit de considérer les graphes $S_(K_{1,n})$, $n \geq 3$, pour lesquels on a $\gamma_b(S(K_{1,n}) = rad(S(K_{1,n})) = 2$ et $\gamma(S(K_{1,n})) = n$.

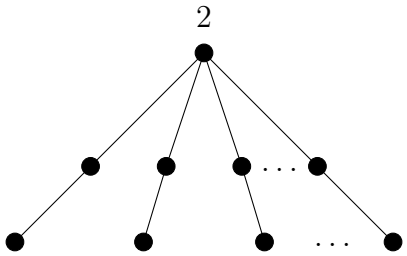


FIGURE 2.7 – Graphe $S(K_{1,n})$, $n \geq 3$

(iii) Une infinité de graphes G avec $\gamma_b(G) = 2 = \gamma(G) < rad(G)$ Il suffit de considérer les graphes multipartis complets $K_{n_1,n_2,\cdots,n_t}, t \geq 2$ et $n_i \in \mathcal{N}$, $n_i \geq 2$ pour tout i, $1 \leq i \leq t$, pour lesquels on a $\gamma_b(K_{n_1,n_2,\ldots,n_t}) = \gamma(K_{n_1,n_2,\ldots,n_t}) = 2$ et $(K_{n_1,n_2,\ldots,n_t}) = 1$

De (ii), on peut affirmer qu'un graphe avec $\gamma_b(G) = 2$ peut avoir un nombre de domination aussi grand que l'on voudrait, et de (i) une question légitime se pose : Que peut-on dire de la grandeur du rayon d'un graphe G lorsque $\gamma_b(G) = 2$? Une réponse est

donnée par la Proposition 2.4.3

Proposition 2.4.3 *[11]*

Si G est un graphe avec $\gamma_b(G) = 2$, alors

1. *$rad(G) = 2$, ou,*
2. *$rad(G) = 3$ et $\gamma(G) = 2$.*

Une autre conséquence du Théorème 2.4.2 est la suivante :

Proposition 2.4.4 *[11]*

Si G est un graphe et $min\{rad(G), \gamma(G)\} = 3$, alors $\gamma_b(G) = 3$.

En regroupant les différents résultats précédemment cités, on obtient :

Proposition 2.4.5 *[10]*

Soit G un graphe. Si $min\{rad(G), \gamma(G)\} = k$, où $1 \leq k \leq 3$, alors $\gamma_b(G) = k$.

Erwin [10], montra que le résultat de la Proposition 2.4.5 n'est pas vérifié lorsque $min\{rad(G), \gamma(G)\} = 4$. Il considéra le graphe G obtenu en joignant une extrémité de $S(K_{1,4})$ à une extrémité de P_3.
Le graphe vérifie $\gamma_b(G) = 3$ et $min\{\gamma(G), rad(G)\} = 4$.

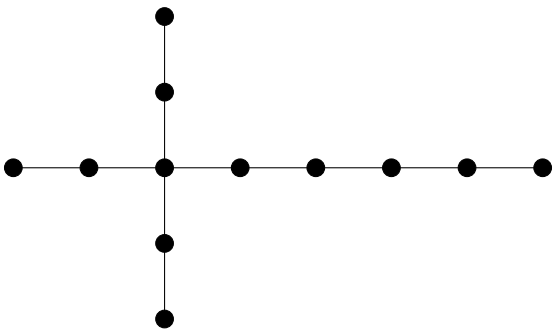


FIGURE 2.8 – Graphe G avec $\gamma_b(G) = 3$ et $min\{\gamma(G), rad(G)\} = 4$

2.5 Invariants de broadcast

Dans [9], Dunbar et al. définirent et étudièrent d'autres paramètres liés aux broadcasts appelés broadcasting invariants. Nous citerons dans cette partie l'essentiel des résultats à ces invariants.

2.5.1 Broadcast indépendant

Un broadcast f est dit **indépendant** si tout sommet f-dominant n'est dominé que par lui même. En d'autres termes, si pour tout sommet $v \in V^+, N_f[v] \cap V^+ = v$, ou encore $|H(v)| = 1$.

Le coût maximum d'un broadcast indépendant de G est appelé **nombre de broadcast indépendance** et est noté $\beta_b(G)$. Le **nombre de broadcast indépendance inférieur**, noté $i_b(G)$, est égal au coût minimum d'un broadcast indépendant maximal de G.

Comme les deux fonctions broadcast radiale et broadcast diamétrale sont des broadcast indépendants maximaux, on déduit les inégalités suivantes [9] :

$$i_b(G) \leq rad(G) \leq diam(G) \leq \beta_b(G),$$

pour tout graphe G.

Soit M un sous-ensemble de sommets de G tel que pour toute paire de sommets u et v de M , $d(u, v) = diam(G)$, et soit $\mu(G)$ la cardinalité maximum d'un tel sous-ensemble de G.

La proposition qui suit améliore la borne inférieure $diam(G)$ pour $\beta_b(G)$.

Proposition 2.5.1 *[9]*

Pour tout graphe G,

$$\beta_b(G) \geq \mu(G)(diam(G) - 1) \geq 2(diam(G) - 1)$$

et cette borne est atteinte.

Notons que la fonction caractéristique f_s d'un ensemble indépendant maximal S dans un graphe G est un broadcast indépendant, et donc $i(G) \leq \beta_0(G) \leq \beta_b(G)$, mais f_s n'est pas nécessairement un broadcast indépendant maximal. En effet, considérons la chaîne P_4 : (v_1, v_2, v_3, v_4). Si on affecte aux sommets les poids $f(v_1) = f(v_4) = 1$ et $f(v_2) = f(v_3) = 0$, alors f est la fonction caractéristique d'un ensemble indépendant maximal. f est aussi un broadcast indépendant et un broadcast dominant minimal. Mais cette fonction n'est pas un broadcast indépendant maximal, puisque la fonction g définie par $g(v_1) = g(v_4) = 2$ et $g(v_2) = g(v_3) = 0$ vérifie pour tout sommet u, $g(u) \geq f(u)$.

Dans ce qui suit, lorsque deux paramètres θ et η sont incomparables, nous écrirons brièvement $\theta \diamond \eta$.

Notons que ni $\gamma(G)$ ni $i(G)$ n'est comparable à $i_b(G)$. En effet, Dunbar et al. montrèrent que pour la chaîne P_6, on a $\gamma(P_6) = i(P_6) = 2 < 3 = i_b(P_6)$, alors que pour le graphe $S(K_{1,t})$, on a $\gamma(S(K_{1,t})) = i(S(K_{1,t})) = t > 2 = i_b(S(K_{1,t}))$. Aussi, ni $p(G)$ ni $P(G)$ n'est comparable à ib. Par exemple, le graphe de Petersen PG a $p(PG) = P(PG) = 1 < 2 = \gamma_b(PG) = i_b(PG)$; par ailleurs si G un graphe obtenu par l'union de trois copies disjointes de P_5 en ajoutant trois arêtes pour former un triangle sur leurs centres, alors $\gamma_b(G) = i_b(G) = 3 < 5 = p(G) = P(G)$.

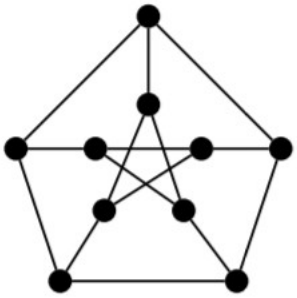


FIGURE 2.9 – Graphe de Petersen

Nous pouvons regrouper toutes ces remarques :

Observation 3 *[9]*

Pour tout graphe G,

(i) $\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \beta_b(G)$,

(ii) $\{\gamma(G), i(G)\} \diamond i_b(G)$,

(iii) $\{p(G), P(G)\} \diamond \{\gamma_b(G), i_b(G)\}$.

Dans [9], les auteurs étudièrent l'extension de la chaîne d'inégalités

$$\gamma(G) \leq i(G) \leq \beta_0(G) \leq \Gamma(G),$$

énoncée au Chapitre deux, à savoir si

$$\gamma_b(G) \leq ib(G) \leq \beta_b(G) \leq \Gamma_b(G)$$

est satisfaite. L'inégalité du milieu provient des définitions de i_b et β_b. l'inégalité de droite n'est pas vraie en générale puisque $\beta_b(P_4) = 4 > \Gamma_b(P_4) = 3$ et $\beta_b(PG) = 4 < 5 = \Gamma_b(PG)$ où P_4 est la chaîne d'ordre 4 et PG est le graphe de Petersen (voir Figure.2.9).

Concernant l'inégalité gauche elle se déduit du Théorème :

Théorème 2.5.2 *[11]*

Soit f un broadcast indépendant sur un graphe G. Si $V^+ = \{v\}$ alors f est maximal si et seulement si $f(v) = e(v)$. Par ailleurs, si $|V^+| \geq 2$, alors f est maximal si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(i) *f est un broadcast dominant et*

(ii) *pour tout $v \in v^+$, $f(v) = min\{d(v,u) : u \in V^+ - \{v\}\} - 1$.*

Par ailleurs, β_b et Γ sont incomparables puisque $\Gamma(PG) = 5 > 4 = \beta_b(PG) et \beta_b(P_4) = 4 > 2 = \Gamma(P_4)$. Tous ces résultats se résument dans le Corollaire qui suit :

Corollaire 2.5.3 *[9]*

Pour tout graphe G,

(i) $\gamma_b(G) \leq i_b(G)$,

(ii) $\beta_b(G) \diamond \Gamma_b(G)$,

(iii) $\beta_b(G) \diamond \Gamma(G)$.

D'autres relations existent entre les nombres de broadcast d'indépendances i_b et β_b avec le nombre d'indépendance β_0. J.Dunbar et al. ont énoncé une chaîne d'inégalités entre β_0 et les nombres de broadcast indépendance :

Proposition 2.5.4 *[9]*

Pour tout graphe G,

$$i_b(G) \leq rad(G) \leq \beta_0(G) \leq \beta_b(G).$$

Comme $\gamma_b(G) \leq i_b(G)$, de la Proposition 2.5.4, on déduit :

Corollaire 2.5.5 *[9]*

Pour tout graphe G, si $\gamma_b(G) = rad(G)$, alors $i_b(G) = rad(G)$.

Suite à tous ces résultats, nous obtenons le schéma de comparaison suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \gamma(G) & \leq & i(G) & \leq & \beta_0(G) & \leq & \Gamma(G) \\ \vee \shortmid & & \diamond & & \shortmid \wedge & & \shortmid \wedge \\ \gamma_b(G) & \leq & i_b(G) & \leq & \beta_b(G) & \diamond & \gamma_b(G) \end{array}$$

2.5.2 Broadcast dominant indépendant

Un broadcast f est dit **dominant indépendant** s'il est en même temps dominant et indépendant.

Le coût maximum (resp. minimum) d'un broadcast dominant indépendant minimal de G est appelé le **nombre de broadcast indépendant de domination supérieur** (resp. **nombre de broadcast indépendant de domination**), et est noté $\Gamma_{ib}(G)$ (resp. $\gamma_{ib}(G)$). Puisque la fonction caractéristique de tout ensemble indépendant maximal est un broadcast dominant indépendant minimal,$\gamma_{ib}(G) \leq i(G)$ et $\Gamma_{ib}(G) \geq \beta_0(G)$.

Notons que si f est un broadcast dominant indépendant minimal, alors pour tout broadcast $g \neq f$ qui vérifie $g \leq f$, g est indépendant mais n'est pas forcément un broadcast dominant.

Théorème 2.5.6 *[10]*

Si f est un broadcast dominant non indépendant de G, alors il existe un broadcast g qui est dominant indépendant, avec $g(V) \leq f(V)$, et $V_g^+ \subset V_f^+$.

Le Théorème 2.5.6 permet d'affirmer que tout graphe G a un γ_b-broadcast qui est indépendant, c'est à dire $\gamma_b(G) = \gamma_{ib}(G)$, et vérifié la chaîne d'inégalités :

$$\gamma_{ib}(G) \leq i_b(G) \leq rad(G) \leq diam(G) \leq \Gamma_{ib}(G).$$

Concernant une borne supérieure pour le nombre de broadcast indépendant de domination supérieur, on a :

Proposition 2.5.7 *[10]*

Pour tout graphe G,

$$\beta_0(G) \leq \Gamma_{ib}(G) \leq min\{\Gamma_b(G), \beta_b(G)\}.$$

Les paramètres $\Gamma_{ib}(G)$ et $\Gamma(G)$ sont incomparables. En effet, Dunbar et al. montrèrent que, pour le graphe de Petersen PG et la chaîne P_{10}, on a $\Gamma_{ib}(PG) = 4 < 5 = \Gamma(PG)$ et $\Gamma(P10) = 5 < 9 = diam(P_{10}) \leq \Gamma_{ib}(P_{10})$.

2.5.3 Broadcast efficace

Un broadcast f est dit efficace si chaque sommet est f-dominé par un unique sommet broadcast, c'est à dire, pour tout sommet $v \in V, |H(v)| = 1$. Le coût maximum d'un broadcast efficace est appelé le **nombre de broadcast efficace supérieur** et est noté $\Gamma_{eb}(G)$. Le **nombre de broadcast efficace** $\gamma_{eb}(G)$ est égal au coût minimum d'un broadcast efficace. Par exemple, la figure Figure. 2.10 illustre 5 broadcasts efficaces distincts sur la chaîne P_5, où $\gamma_{eb}(P5) = 2$ et $\Gamma_{eb}(P5) = 4$.

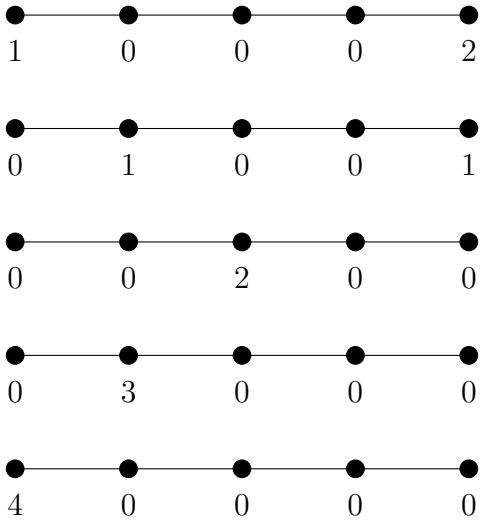


FIGURE 2.10 – Broadcasts efficaces sur P_5

Théorème 2.5.8 *[9]*

Tout graphe G possède un γ_b-broadcast qui est efficace.

Corollaire 2.5.9 *[9]*

Tout graphe G a un γ_b-broadcast pour lequel la distance entre n'importe quelle paire de sommets broadcasts u et v est supérieure à $f(u) + f(v)$.

Puisque tout broadcast dominant efficace est indépendant et dominant minimal, tout graphe G vérifie :

$$\Gamma_{eb}(G) \leq min\{\beta_b(G), \Gamma_b(G), \gamma_{eb}(G)\}.$$

Par définition de $\gamma_{eb}, \Gamma_b \leq \gamma_{eb}(G)$, et par le Théorème 2.5.8, $\Gamma_b(G) = \gamma_{eb}$. Par ailleurs tout broadcast diamétral est un broadcast dominant efficace. Ainsi, tout graphe vérifié la chaîne d'inégalités :

Corollaire 2.5.10 *[9]*

Pour tout graphe G,

$$\gamma(G) = \gamma_{ib}(G) = \gamma_{eb}(G) \leq i_b(G) \leq rad(G) \leq diam(G) \leq \Gamma_{eb}(G) \leq \Gamma_{ib}(G).$$

Notons que ni $p(G)$ ni $P(G)$ est comparable avec $\Gamma_{eb}(G)$. En effet, pour le graphe de Petersen PG, $p(PG) = P(PG) = 1 < 2 = \Gamma_{eb}(PG)$; alors que pour l'arbre binaire complet T de hauteur six qui a 63 sommets, on a $\Gamma_{eb}(T) = 10 < 13 = p(T)$. Par ailleurs, $\gamma(PG) = 3 < 2 = \Gamma_{eb}(PG)$; et pour $n \geq 3$, $\Gamma_{eb}(Pn) = n - 1 > \Gamma(P_n)$. Ainsi tout graphe G satisfait :

Corollaire 2.5.11 *[9]*

Pour tout graphe G,

$$\Gamma_{eb}(G) \diamond \{p(G), P(G), \gamma(G), i(G), \beta_0(G), \Gamma(G)\}.$$

2.5.4 Broadcast packing

Un broadcast f est un **broadcast packing** si chaque sommet est f-dominé par au plus un sommet broadcast,c'est à dire, pour tout sommet $v \in V$, $|H(v)| \leq 1$. Le coût maximum d'un broadcast packing de G est appelé **nombre de broadcast packing** et est noté par $Pb(G)$. Le **nombre de broadcast packing inférieur**,noté par $p_b(G)$, est égal au coût minimum d'un broadcast packing maximal.

La fonction caractéristique f_s d'un packing maximal n'est pas forcément un broadcast packing maximal. Ceci peut être vu en considérant la chaîne P_5. Soit c le centre de P_5. Le packing $S = c$ de FIG.2.11(a) est maximal, mais f_s n'est pas un broadcast packing maximal, puisque la valeur $f_s(c) = 1$ peut être augmentée à $f_s(c) = 2$ qui représente le broadcast packing maximal (voir Figure.2.11(b)).

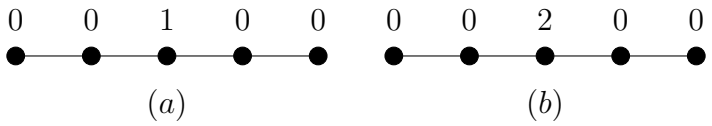


FIGURE 2.11 – Packing maximal qui n'est pas un broadcast packing maximal

Remarque 2.5.12 *Les invariants $p(G)$ et $pb(G)$ sont incomparables. En effet, pour la chaîne P_5, on a, $p(P_5) = 1 < 2 = pb(P_5)$, alors que pour le graphe de Petersen PG, on a, $pb(PG) = 2 > 1 = p(PG)$. Par ailleurs, tout broadcast radial ou diamétral est un broadcast packing et un broadcast indépendant.*

La Remarque 2.5.12 se résume dans ce qui suit :

Observation 4 *[9]*

Pour tout graphe G,

(i) $pb(G) \diamond P(G)$,

(ii) $pb(G) \diamond p(G) \leq P(G) \leq Pb(G)$, *et*

(iii) $pb(G) \leq rad(G) \leq diam(G) \leq Pb(G) \leq \beta_b(G)$.

Notons qu'on peut avoir un broadcast packing maximal qui n'est pas un broadcast dominant. Par exemple, considérons les valeurs $1, 0, 0, 1, 0, 0$ dans la chaîne P_6.

On sait que la chaîne d'inégalité suivante est valide pour tout graphe G :

$$p(G) \leq P(G) \leq \gamma(G) :$$

Dunbar et al. se posérent naturellement la question de la conservation de cette chaîne entre les broadcasting invariants correspondants. Ils apportérent une réponse complète à cette question par ce qui suit :

Proposition 2.5.13 *[9]*

Chaque broadcast efficace est

(i) un broadcast packing maximal ;

(ii) un broadcast dominant minimal ;

(iii) un broadcast dominant indépendant minimal.

Le corollaire suivant est immédiat du Corollaire 2.5.10 et de la Proposition 2.5.13 :

Corollaire 2.5.14 *[9]*

Pour tout graphe G,

$$pb(G) \leq \gamma_{eb}(G) = \gamma_{ib}(G) = \gamma_b(G) \leq i_b(G) \leq \Gamma_{eb}(G) \leq min\{P_b(G), \Gamma_b(G), \Gamma_{ib}(G)\}.$$

Observation 5 *[9]*

Pour tout graphe G,

$$Pb(G) \diamond \{\gamma(G), i(G), \beta_0(G), \Gamma(G), \Gamma_{ib}(G), \Gamma_b(G).$$

Nous donnons un tableau TAB.2.1 qui résume les relations entre tous les invariants de domination et de broadcast vues aux Chapitres un et deux.

	p	P	γ	i	β_0	Γ	γ_b	i_b	β_b	Γ_b	Γ_{ib}	Γ_{eb}	p_b	P_b
p	$=$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\diamond$	$\diamond$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\diamond$	$\diamond$	$\leq$
P	$\geq$	$=$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\diamond$	$\diamond$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\diamond$	$\diamond$	$\leq$
γ	$\geq$	$\geq$	$=$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\geq$	$\diamond$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\diamond$	$\geq$	$\diamond$
i	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$=$	$\leq$	$\leq$	$\geq$	$\diamond$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\diamond$	$\geq$	$\diamond$
β_0	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$=$	$\leq$	$\geq$	$\geq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\diamond$	$\geq$	$\diamond$
Γ	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$=$	$\geq$	$\geq$	$\diamond$	$\leq$	$\diamond$	$\diamond$	$\geq$	$\diamond$
γ_b	$\diamond$	$\diamond$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$=$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\geq$	$\leq$
i_b	$\diamond$	$\diamond$	$\diamond$	$\diamond$	$\leq$	$\leq$	$\geq$	$=$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\geq$	$\leq$
β_b	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\diamond$	$\geq$	$\geq$	$=$	$\diamond$	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\geq$
Γ_b	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\diamond$	$=$	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\diamond$
Γ_{ib}	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\diamond$	$\geq$	$\geq$	$\leq$	$\leq$	$=$	$\geq$	$\geq$	$\diamond$
Γ_{eb}	$\diamond$	$\diamond$	$\diamond$	$\diamond$	$\diamond$	$\diamond$	$\geq$	$\geq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$=$	$\geq$	$\leq$
p_b	$\diamond$	$\diamond$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$\leq$	$=$	$\leq$
P_b	$\geq$	$\geq$	$\diamond$	$\diamond$	$\diamond$	$\diamond$	$\geq$	$\geq$	$\leq$	$\diamond$	$\diamond$	$\geq$	$\geq$	$=$

TABLE 2.1 – Inégalités entre les invariants de broadcast.

Chapitre 3

NOMBRE DE BROADCAST INDEPENDANCE DANS CERTAINES GRAPHES

Dans ce chapitre, nous citons quelques résultats connus sur le nombre de broadcast indépendance dans quelques classes des graphes. Ensuite, nous donnons la valeur exacte de $\beta_b(P_m \boxtimes P_n)$, où $P_m \boxtimes P_n$ est un produit fort de deux chaines P_m et P_n de longueur m et n respectivement, $m \leq n$ ($m = 2, 3$ et 4).

Soit $P_m \boxtimes P_n$ le produit fort de deux chaînes P_m et P_n de longueur m et n respectivement, $m \leq n$. Notons les sommets de la $P_m \boxtimes P_n$ par $v_{i,j}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m$. Deux sommets $v_{i,j}$ et $v_{k,l}$ sont relies par une arête si et seulement si $1 \leq |i-k|+|j-l| \leq 2$ nous ferons référence aux lignes et colonnes consécutives du graphe $P_m \boxtimes P_n$ par $R^{i_1,i_2} = R^{i_1} \cup \ldots \cup R^{i_2}$, $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq m$ et $C^{j_1,j_2} = C^{j_1} \cup \ldots \cup C^{j_2}$, $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq n$. Désignons par H^{j_1,j_2} le sous graphe de $P_m \boxtimes P_n$ induit par les sommets de C^{j_1,j_2} . Dans la suite de ce chapitre, on supposera sans perte de généralité que $1 \leq m \leq n$.

On dit que deux sommets $u \in V(G)$ et $v \in V(G)$ sont **antipodaux** si et seulement si $d(u, v) = diam(G)$.

3.1 Nombre de broadcast indépendance dans quelques classes de graphes

3.1.1 Nombre de broadcast indépendance dans les chaines et les cycles

Erwin [10] a déterminé le nombre de broadcast indépendance dans les chaines .

Théorème 3.1.1 *[10]*

Si P_n est une chaîne, $n \geq 3$, alors $\beta_b(P_n) = 2(diam(P_n) - 1) = 2(n-2)$.

Et le nombre de broadcast indépendance dans les cycles a été déterminé par Tounani et Sadok [18].

Théorème 3.1.2 *[18]*

Si C_n est un cycle, $n \geq 3$, alors

$$\beta_b(C_n) = \begin{cases} 1 & si\ n = 3 \\ 2 & si\ n = 4 \\ 2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1) & si\ n \geq 5 \end{cases}$$

3.1.2 Nombre de broadcast indépendance dans les grilles

Définition 3.1.3 *Une grille $G_{m,n}$ est le produit cartésien de deux chaines P_m et P_n, noté $G_{m,n} = P_m \square P_n$ où $2 \leq m \leq n$.*

Zemir [22], a déterminé la valeur exacte de broadcast pour la grille $G_{m,n}$.

Théorème 3.1.4 *[22].*

Soit une grille $G_{m,n}$ pour tout nombre entier m et n,

$$\beta_b(G_{m,n}) = \begin{cases} 2(n-1) & si\ m = 2\ et\ n \geq 2 \\ 2n & si\ m = 3\ et\ n \geq 3 \\ 2(n+1) & si\ m = 4\ et\ n \geq 4 \\ \lceil \frac{mn}{2} \rceil & si\ 5 \leq m \leq n, (m,n) \neq (5,5), (5,6) \end{cases}$$

3.1.3 Nombre de broadcast indépendance dans les chenilles

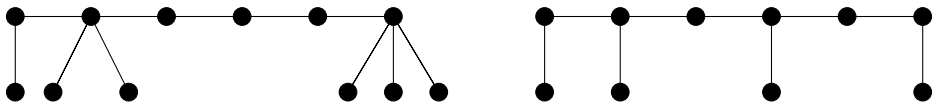
Définition 3.1.5 *Une chenille, noté Ch, est un arbre tel que, si on supprime tous ses sommets pendants, on obtient une chaîne $P_n = \{v_1, \ldots, v_n\}$. P_n est appelée épine dorsale et ses sommets sont appelés épines. Les épines qui ne sont pas supports sont appelées troncs.*

Le graphe d'une chenille est constitué de sommets supports, de sommets troncs formant la chaîne P_n, ainsi que, les sommets pendants, appelés aussi feuilles.
Si S est l'ensemble des sommets supports, pour $v \in S$, on note par :

- l_v : l'ensemble des sommets pendants adjacents au sommet support v de Ch.
- $S_{fa} = \{v \in S \ |l_v| = 1\}$: L'ensemble des supports faibles de Ch.
- $S^2_{fo} = \{v \in S \ |l_v| = 2\}$: L'ensemble des supports forts ayant exactement deux sommets pendants de Ch.
- $S^3_{fo} = \{v \in S \ |l_v| \geq 3\}$: L'ensemble des supports forts ayant au moins trois sommets pendants de Ch.
- $S_{fo} = S^2_{fo} \cup S^3_{fo}$: L'ensemble des supports forts de Ch.

Le code d'une chenille Ch est $C[Ch] = [k_1, k_2, \ldots, k_n]$ où k_i est le nombre de sommets pendants adjacents au sommet support v_i, $k_1 \neq 0$ et $k_n \neq 0$.

Example 3.1.6 *Les graphes illustrés dans la figure FIG 3.1 et leurs codages respectifs, le premier a trois sommets troncs et le second a deux sommets troncs .*



$(a) C[Ch] = [1, 2, 0, 0, 0, 3]$ $(b) C[Ch] = [1, 1, 0, 1, 0, 1]$

FIGURE 3.1 – Codage de deux chenilles.

Les chenilles pleines :

Définition 3.1.7 *Une chenille ChP de code $C[ChP] = [k_1, k_2, \ldots, k_n]$, est dite pleine si $k_i \geq 1$ $\forall i$;$1 \leq i \leq n$.*

Théorème 3.1.8 *[22]*

Soit ChP une chenille pleine avec $n \geq 2$, alors :

$$\beta_b(ChP) = 2|S_{fa}| + \sum_{v_i \in S_{fo}} |l_{v_i}|.$$

Les chenilles alternées :

Définition 3.1.9 *Une chenille de code $C[ChA] = [k_1, k_2, \ldots, k_n]$, est dite chenille alternée si et seulement si $k_i = 0$ pour $i \equiv 1[2]$.*

Définition 3.1.10 *Une fonction broadcast f est antipodale dans une chenille Ch, si $|V_f^+| = 2$ et $f(u_1) = f(u_n) = n$ où u_1 est un sommet pendant adjacent à v_1 et u_n est un sommet pendant adjacent à v_1.*

Théorème 3.1.11 *[18]*

Si f est un fonction broadcast indépendante maximum non antipodale, d'une chenille alternée, alors : $\forall v \in V(ChA), f(v) \leq 3$.

- Soit la fonction broadcast indépendante maximum f^* définit par :

$$f^*(u) = \begin{cases} 0 & \text{pour tout sommet } u \text{ support ou tronc d'une } C.C \text{ faible} \\ 1 & \text{pour tout sommet } u \text{ feuille de supports de } S^3_{fo} \text{ ou de } S^2_{fo} \text{ d'une } C.C \\ & \text{forte ou tronc d'une } C.C \text{ forte} \\ 3 & \text{pour tout sommet } u \text{ feuille de supports de } S_{fa} \text{ ou une feuille} \\ & \text{exacetement de support } S^2_{fo} \text{ d'une } C.C \text{ faible} \\ 0 & \text{pour tout sommet feuille restante de support de } S^2_{fo} \text{ d'une } C.C \text{ faible} \end{cases}$$

Théorème 3.1.12 *[18]*

Soit ChA une chenille alternée, si la fonction broadcast indépendante maximum est différente d'une fonction broadcast antipodale, alors :

$$\beta_b(ChA) = \sigma(f^*)$$

3.2 Calcul de β_b pour la classe $P_m \boxtimes P_n$ avec $m \leq n$

Pour tout graphe $G = (V, E)$, la chaîne d'inéqualités $i_b(G) \leq rad(G) \leq diam(G) \leq \beta_b(G)$ est vérifiée [9]. De Théorème 2.5.2, cette ordre peut être étendu en ajoutant une relation entre $\gamma_b(G)$ et $i_b(G)$, à savoir $\gamma_b(G) \leq i_b(G)$.

Nous rappelons deux résultats énoncés au Chapitre 2.

Théorème 2.5.2[11]

Soit f un broadcast indépendant sur un graphe G. Si $V^+ = \{v\}$ alors f est maximal si et seulement si $f(v) = e(v)$. Par ailleurs, si $|V^+| \geq 2$, alors f est maximal si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(i) f est un broadcast dominant et ;

(ii) pour tout $v \in V^+$, $f(v) = min\{d(v, u) : u \in V^+ - \{v\}\} - 1$.

Soit M un sous-ensemble de sommets de G tel que pour toute paire de sommets u et v de M, $d(u, v) = diam(G)$, et soit $\mu(G)$ la cardinalité maximum d'un tel sous-ensemble de G.

Proposition 2.5.1[9]

Pour tout graphe G,

$$\beta_b(G) \geq \mu(G)(diam(G) - 1) \geq 2(diam(G) - 1)$$

et cette borne est atteinte .

Lemme 3.2.1 *soit f un broadcast indépendant sur G, si $diam(G) \geqslant 2$ et $|V^+| \leq 2$, alors*

$$f(V(G)) \leq 2(diam(G) - 1)$$

.

Preuve :

soit f un broadcast indépendant sur G. Si $|V^+| = 1$, c'est à dire V^+ contient un unique sommet broadcast x_1, alors $f(V(G)) = f(x_1) \leq e(x_1) \leq diam(G) \leq 2(diam(G) - 1)$, Maintenant si $|V^+| = 2$ et $V^+ = \{x_1, x_2\}$, alors $f(x_1)$et $f(x_2) \leq d(x_1, x_2)-1$, et $f(V(G)) = f(x_1) + f(x_2) \leq 2(d(x_1, x_2) - 1) \leq 2(diam(G) - 1)$.

Soit le graphe du produit fort de deux chaînes P_m et P_n, avec $2 \leq m \leq n$, dont l'ensemble des sommets est noté par $V_{m,n}$.
On note par $R(x)$(resp.$C(x)$ la ligne(resp. la colonne) où le sommet x appartient .
Pour un broadcast indépendant f, soit $V^+ = \{x_1, \ldots, x_t\}$ où pour chaque i, $1 \leq i \leq t-1$, $C(x_i) \leq C(x_{i+1})$.

Soit $R^i_+ = \{v \in R^i : f(v) > 0\}$, $C^j_+ = \{v \in C^j : f(v) > 0\}$, $R^{i_1,i_2}_+ = R^{i_1}_+ \bigcup \ldots \bigcup R^{i_2}_+$, $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq m$ et $C^{j_1,j_2}_+ = C^{j_1}_+ \bigcup \ldots \bigcup C^{j_2}_+$, $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq n$.
Pour la détermination du $\beta_b(P_m \boxtimes P_n)$, nous utiliserons souvent la proposition suivante.

Proposition 3.2.2 *Soit f un broadcast indépendant sur $P_m \boxtimes P_n$, $n \geq m + 1$. Pour chaque entier k, $m \leq k \leq n - 1$,*

$$f(V_{m,n}) \leq \begin{cases} \beta_b(P_m \boxtimes P_k) + \sum_{v \in C^{k+1,n}_+} f(v) & si\ |C^{1,k}_+| \geq 2 \\ \min\{d(x_1, u) : u \in C^{k+1,n}_+\} - 1 + \sum_{v \in C^{k+1,n}_+} f(v) & si\ |C^{1,k}_+| = 1. \end{cases}$$

Preuve :

Si $|C^{1,k}_+| \geq 2$, alors $f/_{H^{1,k}}$ est un broadcast indépendant sur $H^{1,k}$. En effet, pour chaque sommet $v \in V(H^{1,k}), f(v) \leq min\{d(v, u) : u \in C^{1,n}_+ - \{v\}\} - 1 \leq min\{d(v, u) : u \in C^{1,k}_+ - \{v\}\} - 1 \leq e(v)$ dans $H^{1,k}$ et si aucun sommet broadcast f-domine tout autre sommet broadcast dans $P_m \boxtimes P_n$ alors la même propriété est préservée dans $H^{1,k}$.
Puisque $H^{1,k}$ est isomorphe à $P_m \boxtimes P_n$, nous concluons que,

$$f(V_{m,n}) = f/_{H^{1,k}}(V(H^{1,k})) + \sum_{v \in C^{k+1,n}_+} f(v) \leq \beta_b(P_m \boxtimes P_k) + \sum_{v \in C^{k+1,n}_+} f(v).$$

Si $|C_+^{1,k}| = 1$, alors $C_+^{1,k}$ est réduit à un sommet unique x_1 . D'où,

$$f(V_{m,n}) = f(x_1) + \sum_{v \in C_+^{k+1,n}} f(v) \leq min\{d(x_1, u) : u \in C_+^{k+1,n}\} - 1 + \sum_{v \in C_+^{k+1,n}} f(v).$$

3.2.1 Calcul du $\beta_b(P_m \boxtimes P_n)$ pour $m = 2, 3, 4$

Il est facile de voir que le diamètre de $P_m \boxtimes P_n$ est $diam(P_m \boxtimes P_n) = n - 1$. La borne dans la Proposition 2.5.1 n'est pas atteinte que pour les chaînes. Nous prouverons que $P_m \boxtimes P_n$ à m lignes où $m \leq 4$ satisfaient aussi cette propriété.

Proposition 3.2.3 *Si f est un β_b-broadcast de $P_m \boxtimes P_n$ et $|V^+| \geq 2$, alors $C(x_1) = 1$ et $C(x_t) = n$.*

Preuve :

Supposons, le contraire, que $C(x_1) > 1$ ou $C(x_t) < n$. Premièrement, si $C(x_1) = k > 1$ et $x_1 = v_{i,k}$ pour un certain i, alors nous pouvons définir un nouvel broadcast indépendant g sur $P_m \boxtimes P_n$ avec $g(v_{i,1}) = f(x_1) + k - 1, g(v_{i,j}) = 0$, et pour tous les autres sommets v, nous posons $g(v) = f(v)$. Le broadcast g est indépendant sur $P_m \boxtimes P_n$ et a un coût $g(V_{m,n}) = f(V_{m,n}) + k - 1 > f(V_{m,n}) = \beta_b(P_m \boxtimes P_n)$, ce qui contredit l'optimalité de f. Par conséquent x_1 se trouve dans la première colonne et, de la même façon, x_t se trouve dans la dernière colonne de $P_m \boxtimes P_n$.

Remarque 3.2.4 *Pour déterminer une borne supérieure de $\beta_b(P_m \boxtimes P_n)$, nous pouvons dorénavant , grâce à la Proposition 3.2.3, supposer dans les preuves que pour chaque broadcast indépendant maximum f avec l'ensemble des sommets broadcasts $V^+ = \{x_1, \ldots, x_t\}$, nous avons $1 = C(x_1) \leq \ldots \leq C(x_t) = n$. Par ailleurs, le Lemme 3.2.1 combiné avec la Proposition 2.5.1 nous permet de dire que si $|V^+| = 1$, alors $\beta_b(G) \leq diam(G) \leq 2$, et si $|V^+| = 2$, alors $\beta_b(G) = 2(diam(G) - 1)$ où x_1 et x_2 sont antipodaux. Aussi, nous supposons $|V^+| \geq 3$, chaque fois que $diam(P_m \boxtimes P_n) > 2$.*

Théorème 3.2.5 *Pour tout entier $n \geq 3$, $\beta_b(P_2 \boxtimes P_n) = 2(n - 2)$.*

Preuve :

Il est facile de voir que $\beta(P_2 \boxtimes P_2) = 1$. et $\beta(P_2 \boxtimes P_3) = 2$, Nous supossons, alors, que $n \geq 4$. Soit f un broadcast indépendant avec au moins trois sommets broadcasts. Les sommets x_1 et x_t de V^+, qui se trouvent aux coins de $P_2 \boxtimes P_n$, f-dominent $2f(x_1) + 2$ et $2f(x_t) + 2$ sommets, mais tous autres sommets broadcasts f-dominent $4f(v) + 2$. Par la définition d'une fonction de broadcast indépendant, chaque sommet de $P_2 \boxtimes P_n$ est f-dominé au plus deux fois, à l'exception des sommets broadcasts qui sont f-dominés exactement une fois. Il s'en suit, $2f(x_1) + 2 + 4(f(V_{2,n}) - f(x_1) - f(x_t)) + 2f(x_t) + 2 + 2(t-2) \leq 2(2n-t)+t \leq 3(2n-t)+t$. D'où, $4f(V_{2,n}) \leq 3(2n-t)+2(f(x_1)+f(x_t)-4-2t+4)$. Puisque $t = |V^+| \geq 3$, la valeur de $f(x_1) + f(x_t)$ ne dépasse pas $n - 2$. Donc, $4f(V_{2,n}) \leq (8n - 2)$, c'est à dire, $f(V_{2,n}) < 2(n - 2)$. Par la Proposition 2.5.1, $\beta(P_2 \boxtimes P_n) \geq 2(n - 2)$. Ainsi nous déduisons qu'un broadcast indépendant sur $P_2 \boxtimes P_n, n \geq 3$, est maximum si et seulement si $|V^+| = 2$ et les sommets d'un β_b-broadcast sont antipodaux.

Dans les démonstrations qui suivent, nous utilisons principalement des preuves par induction. Pour alléger la rédaction, chaque fois nous utilisons une inégalité qui résulte de l'hypothèse d'induction ou de la Proposition 3.2.3, nous ne spécifierons pas les raisons qui ont mené à cette inégalité.

Théorème 3.2.6 *Pour chaque entier $n \geq 4, \beta_b(P_3 \boxtimes P_n) = 2(n - 2)$.*

Preuve :

De la Proposition 2.5.1, il suffit de prouver l'inégalité $\beta_b(P_3 \boxtimes P_n) \leq 2\ (diam(G) - 1) = 2(n - 2)$. Nous procédons par induction sur n. Il est facile de voir que pour $n = 3$ et $n = 4$ que $\beta_b(P_3 \boxtimes P_3) = 4$ et $\beta_b(P_3 \boxtimes P_4) = 4$.

Supposons que le résultat est vrai pour toutes $\beta_b(P_3 \boxtimes P_k)$, $4 \leq k < n$. Soit f un broadcast indépendant sur $P_3 \boxtimes P_k$ avec $|V^+| \geq 3$ et soit $\ell = f(x_t)$. Puisque $|V^+| \geq 3$, nous avons nécessairement $0 < \ell < n - 1$. Plus loin, si $\ell = n - 2$, alors les seuls sommets qui ne peuvent pas entendre x_t sont au nombre de deux et ont forcément un poids égal à 1. D'où, $f(V_{3,n}) = 2 + f(v_{3,n}) = n < 2(n - 2)$.

Supposons maintenant que $\ell \leq n-3$. Nous considérons trois cas :

Cas 1. $x_t = v_{3,n}$ et $x_{t-1} \notin C^n$.

Si $\ell = 1$, alors

$$f(V_{3,n}) \leq \beta_b(P_3 \boxtimes P_{n-1}) + f(x_t) = 2(n-3) + 1 = 2n-5,$$

et si $1 \leq \ell \leq n-3$, alors

$$f(V_{3,n}) \leq \beta_b(P_3 \boxtimes P_{n-\ell-1}) + f(x_t) = 2n - \ell - 6 \leq 2n-7.$$

Cas 2. $x_t = v_{3,n}$ et $x_{t-1} \in C^n$.

Parce que les deux sommets x_{t-1} et x_t appartiennent à la même colonne, nous devons avoir $x_{t-1} = v_{1,n}, f(x_{t-1}) = f(x_t) = 1$. Pour la $P_3 \boxtimes P_4$, c'est simple de voir que $f(V_{3,4}) \leq 4$. Soit maintenant $n \geq 5$.

Si $|C_+^{1,n-2}| \geq 2$, alors

$$f(V_{3,n}) \leq \beta_b(P_3 \boxtimes P_{n-2}) + f(x_t) + f(x_{t-1}) = 2n-6 < 2n-4.$$

et si $|C_+^{1,n-2}| = 1$, alors

$$f(V_{3,n}) \leq n-2 + f(x_t) + f(x_{t-1}) \leq n-2+2 = n < 2n-4.$$

Cas 3. $x_t = v_{2,n}$.

Si $\ell = n-3$, alors la somme des valeurs des sommets $v_{1,1}, v_{1,2}, v_{2,1}, v_{2,2}, v_{3,1}, v_{3,2}$ qui ne peuvent pas entendre le sommet broadcast $v_{2,n}$ est au plus 2, donc

$$f(V_{3,n}) \leq 2 + \ell = n-1.$$

Si $1 \leq \ell \leq n-4$, alors $v_{2,n}$ f-domine $|C^{n-\ell,n}|$. Puisque $|C_+^{1,n-\ell-1}| \geq 2$, nous déduisons,

$$f(V_{3,n}) \leq \beta_b(P_3 \boxtimes P_{n-\ell-1}) + f(x_t) = 2n - \ell - 6 \leq 2n-7.$$

Donc dans tous les cas nous avons prouvé que $f(V_{3,n}) < 2(n-2)$. Il suit que $\beta_b(P_3 \boxtimes P_n) < 2(n-2)$.

Proposition 3.2.7 *Les sommets d'un β_b-broadcast de $P_3 \boxtimes P_n$ sont antipodaux.*

Preuve :

D'après la Remarque 3.2.4, le résultat est vrai pour chaque β_b-broadcast de $P_3 \boxtimes P_n$ ($n \geq 4$) tel que $|V^+| = 2$, et par le Théorème 3.2.6, nous savons aussi que le coût de chaque broadcast indépendant est au plus $2(n-2)$. Donc nous devons seulement vérifier qu'avec plus de deux sommets broadcast, aucun broadcast indépendant n'a un coût qui atteint la borne $2(n-2)$. De la preuve du Théorème 3.2.6, on a trouvé que $f(V_{3,n}) < 2(n-2)$ pour tout entier $n \geq 4$. D'où il n'existe pas de broadcast indépendant avec trois sommets broadcasts et de coût égal à $2(n-2)$. Par conséquent, $|V^+| = 2$ et les sommets broadcasts sont nécessairement antipodaux.

Théorème 3.2.8 *Pour tout entier $n \geq 8, \beta_b(P_4 \boxtimes P_n) = 2(n-2)$.*

Preuve :

De la Proposition 2.5.1 [$\beta_b(G) \geq \mu(G)(diam(G)-1) \geq 2(diam(G)-1)$], il suffit de prouver que $\beta_b(P_4 \boxtimes P_n) \leq 2(diam(P_4 \boxtimes P_n) - 1) = 2(n-2)$. Nous utilisons encore induction sur n. Il est facile de vérifier que, $\beta_b(P_4 \boxtimes P_n) = 4\lceil \frac{n}{3} \rceil$ si $4 \leq n \leq 8$. Supposons que le résultat est vrai pour toutes les graphes $P_4 \boxtimes P_k, 9 \leq k < n$ et soit f un broadcast indépendant sur $P_4 \boxtimes P_k$ avec $|V^+| \geq 3$. Soit $\ell = f(x_t)$. Il est clair que $\ell \leq n-2$ puisque $|V^+| \geq 3$. Nous distinguons trois cas.

Cas 1. $3 \leq \ell \leq n-2$.

Le sommet broadcast x_t f-domine $C^{n-\ell,n}$ et $|C_+^{1,n-\ell-1}| \geq 2$. donc

$$f(V_{4,n}) \leq \sum_{v \in C_+^{1,n-\ell-1}} f(v) + f(x_t) \leq \beta_b(P_4 \boxtimes P_{n-\ell-1}) + f(x_t) \leq 2(n-\ell-3) + \ell \leq$$
$$2n - 9 < 2n - 4$$

Nous observons quelque soit la position $x_t \in C^n$ le résultat est vérifier.

Cas 2. $\ell = 2$.

Sans perte de généralité, nous pouvons examiner trois possibilités pour la position de x_t

(i) $x_t = v_{3,n}$ et (ii) $x_t = v_{4,n}$ et $C(x_{t-1}) < n$, et (iii) $x_t = v_{4,n}$et $C(x_{t-1}) = n$.

$(i)x_t = v_{3,n}$. Ce cas implique que le sommet broadcast x_t f-domine $C^{n-2,n}$ et $|C_+^{1,n-3}| \geq 2$,donc

$$f(V_{4,n}) \leq \sum_{v \in C_+^{1,n-1}} f(v) + f(x_t) \leq \beta_b(P_4 \boxtimes P_{n-3}) + f(x_t) \leq 2(n-5) + 2 = 2n - 8.$$

(ii) $x_t = v_{4,n}$ et $C(x_{t-1}) < n$. Puisque il existe un seul sommet broadcast $v_{4,n}$ dans la colonne C^n et $|C_+^{1,n-1}| \geq 2$, donc

$$\begin{aligned} f(V_{4,n}) &\leq \sum_{v \in C_+^{1,n-1}} f(v) + f(x_t) \leq \beta_b(P_4 \boxtimes P_{n-1}) + f(x_t) \\ &\leq 2(n-3) + 2 = 2n - 4 \end{aligned}$$

(iii) $x_t = v_{4,n}$ et $C(x_{t-1}) = n$. Le fait que $C_+^n = \{v_{1,n}, v_{4,n}\}$, nous obtenons $f(v_{1,n-1}) = 0$ et $f(v_{1,n}) + f(v_{1,n-2}) \leq 2$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} f(V_{4,n}) &= \sum_{v \in C_+^{1,n-3}} f(v) + f(v_{1,n}) + f(v_{1,n-2}) + f(v_{4,n}) \\ &\leq \beta_b(P_4 \boxtimes P_{n-3}) + 4 \leq 2(n-5) + 4 = 2n - 6 \end{aligned}$$

si $|C_+^{1,n-3}| \geq 2$, *et*

$$\begin{aligned} f(V_{4,n}) &= f(x_t) + (f(v_{1,n}) + f(v_{1,n-2}) + f(v_{4,n}) \\ &\leq (n-4) + 4 = n, \end{aligned}$$

sinon.

Cas 3. $\ell = 1$.

La somme des valeurs des sommets appartenant à C^n varie entre 1 et 3. Commençons avec le cas où la somme est au plus égale à 2. Nous avons

$$f(V_{4,n}) \leq \sum_{v \in C_+^{1,n-2}} f(v) + \sum_{v \in C_+^n} f(v) \leq \beta_b(P_4 \boxtimes P_{n-2}) + 2$$
$$\leq 2(n-4) + 2 = 2n - 6 < 2n - 4$$

si $|C_+^{1,n-2} \geq 2$, et

$$f(V_{4,n}) \leq f(_{x_1}) + \sum_{v \in C_+^n} f(v) \leq (n-2) + 2 = n < 2n - 4,$$

sinon.

Maintenant $\sum_{v \in C_+^n} f(v) \geq 3$, alors $f(v_{1,n}) = 2$, et nous revenons au cas $2(iii)$, pour conclure. D'où, dans les deux cas, nous avons prouvé que $f(V_{4,n}) \leq 2(n-2)$.

Par conséquent, $\beta_b(P_4 \boxtimes P_n) \leq 2(n-2)$.

Proposition 3.2.9 *Les sommets broadcasts d'un β_b-broadcast de $\beta_b(P_4 \boxtimes P_n)$, $n \geq 9$ sont antipodaux.*

Preuve :

D'après la Remarque 3.2.5 le résultat est vrai pour chaque β_b-broadcast $P_4 \boxtimes P_n$, $n \geq 9$ tel que $|V^+| = 2$, et par le théorème précédent nous savons que le coût de chaque broadcast indépendant est au plus $2(n-2)$. Donc, nous devons seulement vérifie qu'avec plus de deux sommets broadcasts, aucun broadcast indépendant n'a un coût qui atteint la borne $2(n-2)$. Soit f un broadcast indépendant sur $P_4 \boxtimes P_n$, $n \geq 9$ tel que $|V^+| \geq 3$. De la preuve de théorème précédent il suffit de voir que $f(v_{4,n}) = 2$ et $C(x_{t-1}) < n$, on a $f(V_{4,n}) < 2(n-2)$ prise.

Si $f(v_{1,n-1}) = 0$, alors

$$f(V_{4,n}) \leq \beta_b(P_4 \boxtimes P_{n-2}) + 2 = 2(n-4) + 2 = 2n - 6$$

. Si $1 \leq f(v_{1,n-1}) \leq 2$, alors

$$f(V_{4,n}) \leq \beta_b(P_4 \boxtimes P_{n-3}) + 2 = 2(n-5) + 2 + 2 = 2n - 6,$$

si $|C_+^{1,n-3}| \geq 2$, et

$$f(V_{4,n}) \leq (n-3) + 2 = n - 1$$

, sinon.

Ainsi, $f(V_{4,n}) < 2(n-2)$ pour tout entier $n \geq 9$.

Comme $\beta_b(P_4 \boxtimes P_n) = 2(n-2)$, $(n \geq 9)$, nous pouvons dire que β_b-broadcast a exactement deux sommets broadcasts qui sont nécessairement antipodaux.

Conclusion

Ce travail, dédie au problème de la recherche de la valeur exacte du nombre broadcast indépendance β_b dans les graphes, nous a permis de prendre conscience de la multitude de difficultés rencontrés dans le domaine et nous a permis d'enrichir nos connaissances dans la théorie des graphes.

Le travail qui a été réalisé dans ce mémoire concerne l'étude de broadcast indépendance β_b du produit fort $P_m \boxtimes P_n$ de deux chaînes. Nous avons montré que $\beta_b(P_m \boxtimes P_n) = 2(n-2)$ pour $m = \{2, 3, 4\}$.

En conclusion, il serait intéressant de traiter les questions suivantes qui peuvent être considérées comme une suite de notre travail :

1. Détermination de β_b pour la classe $P_m \boxtimes P_n$ pour $5 \leq m \leq n$.
2. Détermination de β_b pour le graphe produit fort de deux cycles, et d'un cycle par une chaîne.
3. Détermination de β_b pour le graphe tensoriel de deux chaînes.
4. Détermination de β_b pour les trois produits (cartésien, tensoriel et fort) de deux graphes quelconques, respectivement.
5. Détermination soit des valeurs exactes soit des bornes pour β_b au d'autres classes de graphes.

Bibliographie

[1] W.W. Ball Rouse, *Mathematical recreation and problems of past and present times*, MacMillan, London, 1892.

[2] C. Berge, *Theory of Graphs and its Applications*, Collection Universitaire de Mathématiques, vol. 2, Dunod, Paris, 1958.

[3] C. Berge, *Graphes et Hypergraphes*, Paris Dunod, 1970.

[4] K. S. Booth and J. H. Johnson, *Dominating sets in chordal graphs*, SIAM J. Comput. pp, 11 :191-199, 1982.

[5] B. Bresar and S. Spacapan, *Broadcast domination of products of graphs*, University of Maribor, Slovenia. March 12, 2006.

[6] E.J. Cockayne and S.T. Hedetniemi, *Towards a theory of domination*, Networks, 7 :247- 261, 1977.

[7] E.J. Cockayne, S. Herke, C.M. Mynhardt, *Broadcasts and domination in trees*, Department of Mathematics and Statistics, University of Victoria, Discrete Mathematics (2009).

[8] C.F. De Jaenisch, *Trait des applications de l'analyse mathematique au jeu des Echecs* , Petrograd, 1862.

[9] J. E. Dunbar, D. J. Erwin, T. W. Haynes, S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, *Broadcasts in graphs*, Discrete Applied Mathematics, 154 :59-75, 2006.

[10] D. J. Erwin, *Cost Domination in Graphs*, Ph.D. Dissertation, Western Michigan University, 2001.

[11] D. J. Erwin, *Dominating broadcast in graphs*, Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications, 42 :89-105, 2004.

[12] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, P.J. Slater (Eds.), *Domination in Graphs* : Advanced Topics, Marcel Dekker, NewYork, 1998.

[13] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi and P.J. Slater, *Fundamentals of domination in graphs*, Marcel Dekker, New York, 1998.

[14] S.T. Hedetniemi and R.C. Laskar, *Introduction*. Discrete Mathematics 86 :3-9, 1990.

[15] S. Herke, *Dominating broadcasts in graphs*, Master's dissertation, University of Victoria, 2009.

[16] S. Herke, C.M. Mynhardt, *Radial trees*, Discrete Math. 309 :5950-5962, 2009.

[17] O. Ore, *Theory of graphs*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 38 (Amer. Math. Soc., Providence, RI), 1962.

[18] H.Sadok et F.Tounani, *Nombre de broadcast independance dans les graphes*, Mémoire de Master, Université Blida 1,2014.

[19] R. Sahbi, *Nombre de broadcast domination dans les arbres*. Mémoire de magister, USTHB. 2009.

[20] S.M. Seager, *Dominating broadcasts of caterpillars*, Ars Combin. 88 :307-319, 2008.

[21] A.M. Yaglom and A.M. Yaglom, *Challenging mathematical problems with elementary solution*, *In volume* 1, *Combinatorial analyse and probability theory*, San Fransisco, 1964, Holden-Day.

[22] M.Zemir, *Nombre de broadcast independance dans les grilles*, Mémoire de Magister, Université Blida 1,2013.