جامعة الدكتور يحي فارس بالمدية

كلية العلوم الاقتصادية و العلوم

التجارية و علوم التسيير

مطبوعة مقدمة من طرف:

الدكتور

جمعة رضوان

محاضرات في

التقنيات الكمية للتسيير

مقدمة لطلبة الماستر تخصص ادارة الأعمال

السنة الدراسية: 2020/2019.

المحتوى	رقم الصفحة
مقدمة عامة	**01**
الباب الأول: بحوث العمليات	02
الفصل الأول البرمجة الخطية	03
أولا: ما هية البرمجة الخطية و صياغتها	04
ثانيا: طرق حل مشاكل البرمجة الخطية Solution of L.P	07
الفصل الثاني: البرنامج المرافق (الثنائية) Duality	19
أولا: البرنامج المرافق المماثل	20
ثانيا: البرنامج المرافق غير المماثل	22
ثالثا: استنتاج الحل الأمثل للبرنامج المرافق من البرنامج الأصلي	25
الفصل الثالث: تحليل الحساسية Sensitivity Analysis	30
أولا: أثر تغير دالة الهدف	31
ثانيا: أثر تغير كمية الموارد	34
ثالثا: أثر اضافة قيد جديد	35
الفصل الرابع: نظريات الشبكات	37
أولا: نظرية الشجرة المثلى	39
ثانيا: نظريات المسارات المثلى	43
ثالثا: نظرية التدفق الأعظمي	49
الباب الثاني: القياس الاقتصادي	55
الفصل الأول: نموذج الانحدار الخطي البسيط	56
أولا: مفهوم القياس الاقتصادي Concept of Econometrics	57
ثانيا: تقدير النموذج الخطي البسيط	59
ثالثا: الفرضيات الرئيسية لبناء الاختبارات الاحصائية	69
رابعا: التنبؤ في النموذج الخطي البسيط	79

المحتوى	رقم الصفحة
الفصل الثاني: نموذج الانحدار الخطي المتعدد	85
أولا: النموذج الخطي المتعدد	86
ثانيا: تقدير النموذج الخطي المتعدد و خصائصه	87
ثالثا: الاختبارات الاحصائية و جودة النموذج	92
الفصل الثالث: مدخل لنماذج المعادلات الآنية	99
أولا: النموذج الهيكلي و النموذج المختصر	100
ثانيا: مشكلة التمييز (التشخيص)	102
ثالثا: طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين للتقدير (TSLS)	103
قائمة الملاحق	110
قائمة المراجع	113

مقدمة عامة:

يستخدم الباحث أو الطالب في دراساته العديد من الأساليب الرياضية أو التقنيات الكمية التي تساعده في معالجة العديد من المشاكل الاقتصادية، التسويقية، و الادارية، هذا في ظل، توفر البيانات و الأدوات و الطرق المناسبة، و يهدف من خلال هذا، ايجاد الحل الأمثل، أو فهم سلوك بعض العلاقات التي يتم التعبير عنها رياضيا. و لعل أهم هذه التقنيات نجد في مقدمتها بحوث العمليات، القياس الاقتصادي (النمذجة الاحصائية)، و نظريات اتخاذ القرار...إلخ.

تعتبر بحوث العمليات من أهم الطرق التقنية المستخدمة في معالجة بعض المشاكل المعقدة لإدارة أنظمة كبيرة من القوى عاملة و المعدات، و المواد الأولية...إلخ، حيث يهدف من خلالها متخذ القرار البحث على أحسن حل ممكن، هذا بهدف الحصول على الحل الأمثل من خلال تدنية التكاليف و الحصول على أقل وقت ممكن لإنجاز المشاريع، و تعظيم الأرباح، و لا يتحقق هذا إلا إذا كان متخذ القرار على دراية بالتقنيات المستخدمة.

كما يعتبر القياس الاقتصادي من أهم الأساليب التي يلجأ إليها الاقتصاديون لفهم سلوك بعض العلاقات و التنبؤ بالقيم المستقبلية، هذا من خلال وضع نموذج يحاكي سلوك هذه العلاقات، لكن هنا يجب على متخذ القرار أن يكون على دراية بالنظريات الاقتصادية و علم الاحصاء و الرياضيات، لأنه يهدف في هذه الحالة إلى نمذجة العلاقات في معادلات رياضية، و التي تستوجب توفر البيانات المتعلقة بالظاهرة المراد دراستها ووضعها في علاقة رياضية، و من ثم التأكد من صحتها.

على هذا الأساس، ارتئينا أن نقسم هذا العمل إلى بابين، حيث نتناول في الباب الأول بحوث العمليات، و التي يتم من خلاله معرفة أهم الطرق المستعملة من طرف الباحثين للحصول على الحل الأمثل. و نتطرق في الباب الثاني إلى القياس الاقتصادي لمعرفة أهم الطرق لنمذجة الظواهر الاقتصادية و تفسيرها.

الباب الأول: بحوث العمليات

الفصل الأول: البرمجة الخطية

أولا: ما هية البرمجة الخطية و صياغتها

سوف نتناول في هذا الفصل إلى ماهية البرمجة الخطية التي تعتبر أساس بحوث العمليات في حل بعض المشاكل، و التي يمكن أن تصادف متخذ القرار يوميا.

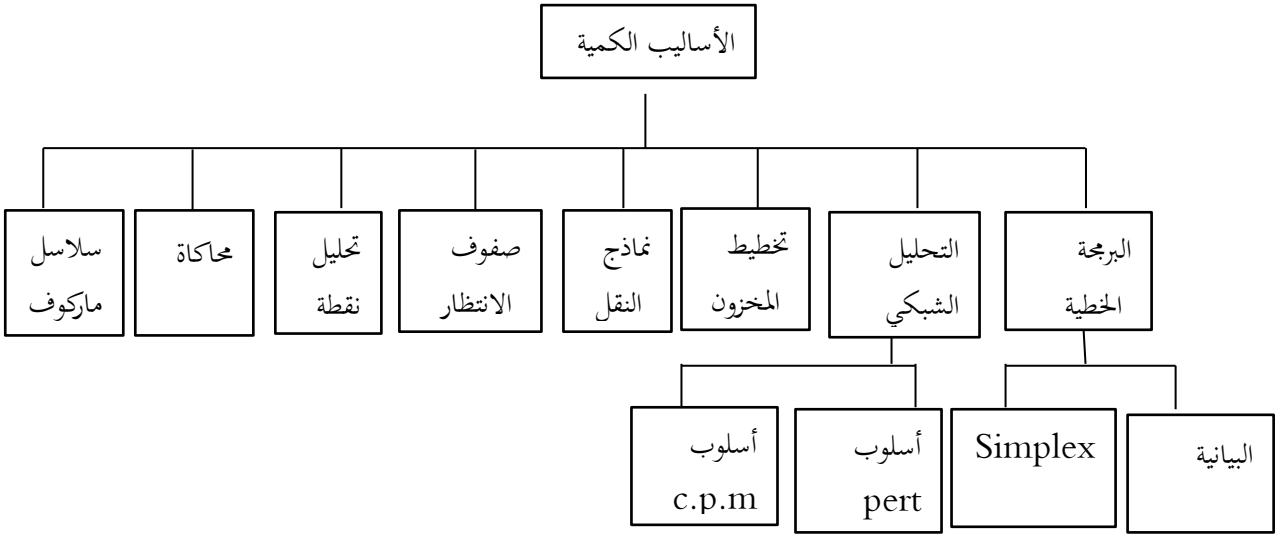
1. تعريف بحوث العمليات:

توجد عدة تعاريف لبحوث العمليات، و لعل أبرزها هي تلك التعاريف التي اعتمدتها جمعية بحوث العمليات البريطانية و جمعية بحوث العمليات الأمريكية.

تعرف جمعية بحوث العمليات البريطانية بحوث العمليات على أنها "استخدام الأساليب العلمية لحل المعضلات المعقدة في ادارة أنظمة كبيرة من القوى العاملة و المعدات، و المواد الأولية، و الأموال في المصانع، و المؤسسات الحكومية، و في القوات المسلحة"[1].

أما جمعية بحوث العمليات الأمريكية فقد اعتمدت التعريف التالي: "ترتبط بحوث العمليات باتخاذ القرارات العلمية حول كيفية تصميم و عمل أنظمة المعدات- القوى العاملة وفقا لشروط تتطلب تخصيصا في الموارد النادرة"[2].

يبين المخطط الآتي أنواع الأساليب الكمية في بحوث العمليات:



2. تعريف البرمجة الخطية:

1- مراد كمال عوض (2017)، **الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الادارية: بحوث العمليات**، الطبعة الأولى، عمان: دار البداية و دار المستقبل، ص14.

2- نفس المرجع، ص.ص 14-15.

البرمجة الخطية هي عبارة عن أسلوب رياضي يستخدم للمساعدة على التخطيط ، و اتخاذ القرارات المتعلقة بالتوزيع الأمثل للموارد المتاحة، و ذلك بهدف زيادة الأرباح ، و تخفيض التكاليف.

أ- وجود هدف واضح و محدد (التعظيم أو التدنية) نمثله بمعادلة رياضية.

ب- وجود محددات أو قيود لا نستطيع تجاوزها ، مثلا عدد الوحدات المنتجة تتحدد بساعات العمل المتاحة.

ج- وجود عدد من البدائل ، مثلا الشركة تود أن تنتج ثلاث منتجات لديها الاختيار بين انتاج منتج واحد، أو مزيج من المنتجات ، من أجل الوصول الى الحل الأمثل.

د- التعبير عن دالة الهدف و القيود بمعادلة رياضية خطية من الدرجة الأولى

3. افتراضات البرمجة الخطية Assumption of L.P:

أ- التأكد Certainty: تعني أن المعطيات الخاصة بدالة الهدف و القيود مؤكدة و ثابتة، و غير قابلة للتغيير.

ب- **التناسبية proportionality**: تعني أن الأنشطة مستقلة عن بعضها البعض، ذلك أن معيار الانجاز هو حاصل جمع العوامل المختلفة ، كذلك الكميات التي يتم استخدامها م الموارد المختلفة يجب أن تتناسب مع احتياجات العوامل المختلفة من كل هذه الموارد.

ج- الاضافية Additively: تعني أن المجموع الكلي للأنشطة يساوي مجموع الأنشطة الفردية ، أي لا يوجد تداخل للأنشطة.

د- القابلية للقسمة أو الكسرية Fractionally: تعني قبول كسور قيم لعوامل القرار، و ليس بالضرورة أن تكون صحيحة.

هـ- اللاسلبية Non-negativity: باعتبار أن كمية الانتاج يجب أن تكون حقيقية و ليست خيالية، أي يجب أن تكون موجبة في حالة انتاج المنتج و صفر في حالة عدم انتاج المنتج، و يكون قيد عدم السلبية على النحو التالي[3]:

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

4. صياغة مشكلة البرمجة الخطية Formulation of L.P problems:

3- أبو القاسم مسعود الشيخ (2014)، **بحوث العمليات**، القاهرة: المجموعة العربية للتدريب و النشر، ص37.

إن أحد أهم الاستخدامات الشائعة للبرمجة الخطية هو تحديد المزيج الانتاجي Product Mixed، و تحدث هذه الحالة عند و جود منتجين أو أكثر تنافس على كميات محدودو من الموارد (القوى العاملة، مكائن ، مواد أولية أموال، مساحات...الخ) فاذا كان الهدف هو تحقيق أعلى ربح ممكن ، فانه يجب أن تحدد الكميات التي سينتجها من كل منتج أو ما يسمى بالمزيج الانتاجي ، و من أجل تحقيق الهدف المنشود لابد من توفر كافة المنتجات اللازمة لمسائل البرمجة الخطية ، ومن ثم صياغتها بالشكل الرياضي المناسب.

مثال شامل: شركة متخصصة في انتاج الهواتف الخلوية ، و تنتج نوعين من الهواتف هما A_1 و A_2، و يتطلب الانتاج المرور بمحطتي التجميع و الانهاء ، حيث يحتاج انتاج وحدة واحدة من النوع الأول A_1 الى 2 ساعة عمل في عملية التجميع و 3 ساعات في عمليات الانهاء، أما النوع الثاني A_2 فيحتاج الى 5 ساعات في عملية التجميع و 3 ساعات في الانهاء، مع العلم أن الوقت المتوفر لعمليات التجميع 180 ساعة، أما الوقت المتوفر لعمليات الانهاء 135 ساعة ، كما أن الشركة تحقق ربح من الوحدة الواحدة للنوع الأول 100 دج و النوع الثاني 200 دج.

المطلوب: ما هو عدد الوحدات الواجب انتاجها من كل نوع لتحقيق أعلى ربح ممكن

الحل: X_1: عدد الوحدات المنتجة من النوع A_1

X_2 عدد الوحدات المنتجة من النوع A_2

Z: الربح الاجمالي المتوقع

الشعبة	**نوع المنتج**		الساعات المتوفرة
	A_1	A_2	(المتاحات)
التجميع	2 سا	5 سا	180
الانهاء	3 سا	3 سا	135
ربح الوحدة الواحدة	100	200	

$$Max\ z = 100X_1 + 200X_2$$ دالة الهدف

$$\begin{cases} 2X_1 + 5X_2 \leq 180 \\ 2X_1 + 5X_2 \leq 135 \end{cases}$$ ← القيود Constrains

$$X_1, X_2 \geq 0$$ ← عدم السلبية

5. الشكل العام لنموذج البرمجة الخطية Standard Form of L.P:

أ) حالة التعظيم:

$$Max\ z = C_1X_1 + C_2X_2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots C_nX_n$$

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots a_{1n}X_n \le b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots a_{2n}X_n \le b_2 \\ \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots a_{mn}X_n \le b_n \\ X_1, X_2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots X_n \ge 0 \end{cases}$$

ب) حالة التدنية:

$$Min\ z = C_1X_1 + C_2X_2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots C_nX_n$$

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots a_{1n}X_n \ge b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots a_{2n}X_n \ge b_2 \\ \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots a_{mn}X_n \ge b_1 \\ X_1, X_2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots X_n \ge 0 \end{cases}$$

ثانيا: طرق حل مشاكل البرمجة الخطية Solution of L.P

توجد عدة طرق يتم بواسطتها حل مشاكل البرمجة الخطية، و يعتمد استخدام هذه الطرق على طبيعة و حجم المشكلة موضوع البحث، و من أهم هذه الطرق: طريقة الرسم، و الطريقة الجبرية.

1. طريقة الرسم The Graphical Method:

هي طريقة سهلة لحل مشاكل البرمجة الخطية و التي لا تزيد متغيراتها عن اثنين، و في هذه الطريقة لابد من مراعاة الخطوات الآتية:

أ. رسم المحاور الممثلة لمتغيرات المشكلة و تسميتها (X_1, X_2).

ب. رسم الخطوط الممثلة للقيود.

ج. رسم عدد من الخطوط الممثلة لزوايا الحل الممكن

د. ايجاد القيم المصاحبة لزوايا الحل الممكن

مثال: ليكن البرنامج الخطي الآتي (المثال السابق)

$$Max\ z = 4X_1+3X_2$$
$$\begin{cases} 2X_1+3X_2 \le 6 \\ 2X_2 \le 5 \\ 2X_1+X_2 \le 4 \\ X_1, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

أولا يجب أن نمثل كل القيود في علاقات خطية في المعلم، و لتمثيل القيد الأول نضع:

$$2X_1+3X_2 \le 6$$
$$2X_1+3X_2 = 6$$

لرسم علاقة خطية نحتاج لنقطتين فقط، حيث نفترض $(X_1 = 0)$ نحصل:

$$3X_2 = 6 \rightarrow X_2 = 2$$

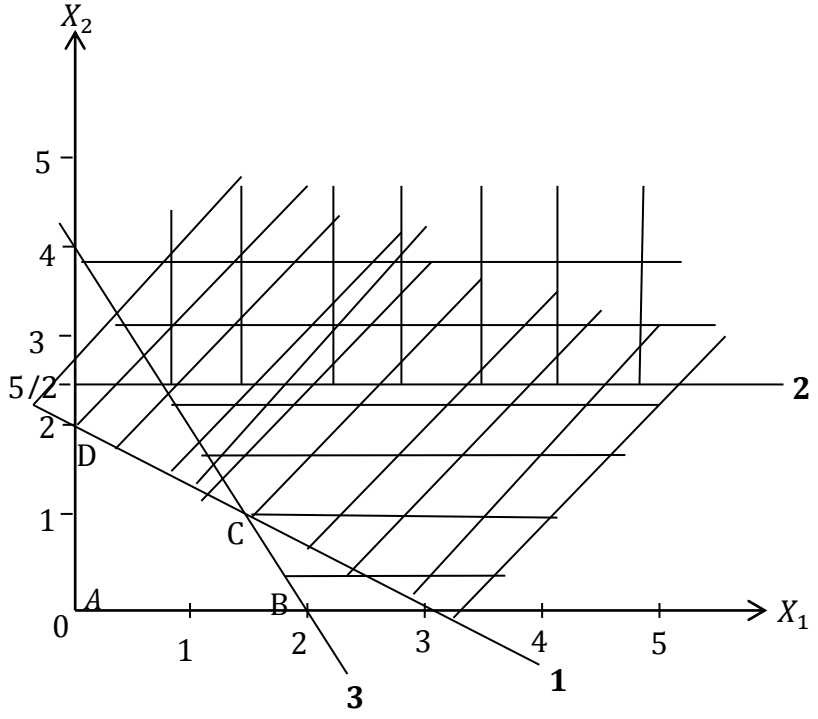
ثم نفترض أن $(X_2 = 0)$ نحصل $2X_1 = 6 \rightarrow X_1 = 3$

هنا نستطيع تمثيل القيد الأول بالنقطتين $(X_1 = 3, X_2 = 2)$.

و يتضمن القيد الثاني متغيرة واحدة فقط إذن: $2X_2 = 5 \rightarrow X_2 = \frac{5}{2}$

نتبع نفس الخطوات المتبعة في القيد الأول لتمثيل القيد الثالث، حيث يكون لدينا: $(X_1 = 2, X_2 = 4)$.

و عند تمثيل هذه القيود كما هو مبين أسفله نقوم بشطب المنطقة التي لا نحتاجها في كل قيد، ففي القيد الأول لا نحتاج للقيم أكبر أو تساوي 6، لكن أقل أو تساوي هي التي تهمنا.



1.1. تحديد منطقة الحل الأمثل:

توجد طريقتين لتحديد الحل الأمثل:

1.1.1. طريقة التعويض في دالة الهدف:

يتم هنا تحديد منطقة الحلول المشتركة و هي النقاط (A, B, C, D) حسب المثال السابق الممثل في الشكل السابق، و نعوض هذه القيم في دالة الهدف و نختار القيمة التي تحقق أقصى قيمة في دالة التعظيم، أما في التدنية فنختار أقل قيمة:

النقطة A: $z = 4(0) + 3(0) = 0$

النقطة B: $z = 4(2) + 3(0) = 8$

النقطة D: $z = 4(0) + 3(2) = 6$

أما النقطة C فهي عبارة عن تقاطع القيدين الأول و الثالث

$$2X_1 + 3X_2 = 6$$
$$2X_1 + X_2 = 4$$

و بحل هاتين المعادلتين نستطيع ايجاد (X_1) و (X_2)، حيث لدينا من القيد الأول:

$$2X_1 + 3X_2 = 6 \rightarrow X_1 = 3 - \frac{3}{2}X_2$$

نعوض هذه الأخيرة في القيد الثالث نحصل:

$$2\left(3 - \frac{3}{2}X_2\right) + X_2 = 4 \rightarrow X_2 = 1$$

و منه:

$$X_1 = 3 - \frac{3}{2}(1) = \frac{3}{2}$$

نعوض هاتين القيمتين في دالة الهدف، يكون لدينا:

$$z = 4\left(\frac{3}{2}\right) + 3(1) = 9$$

الحل الأمثل الذي يحقق لنا أعلى قيمة هي النقطة C، حيث $\left(X_1 = \frac{3}{2}, X_2 = 1\right)$.

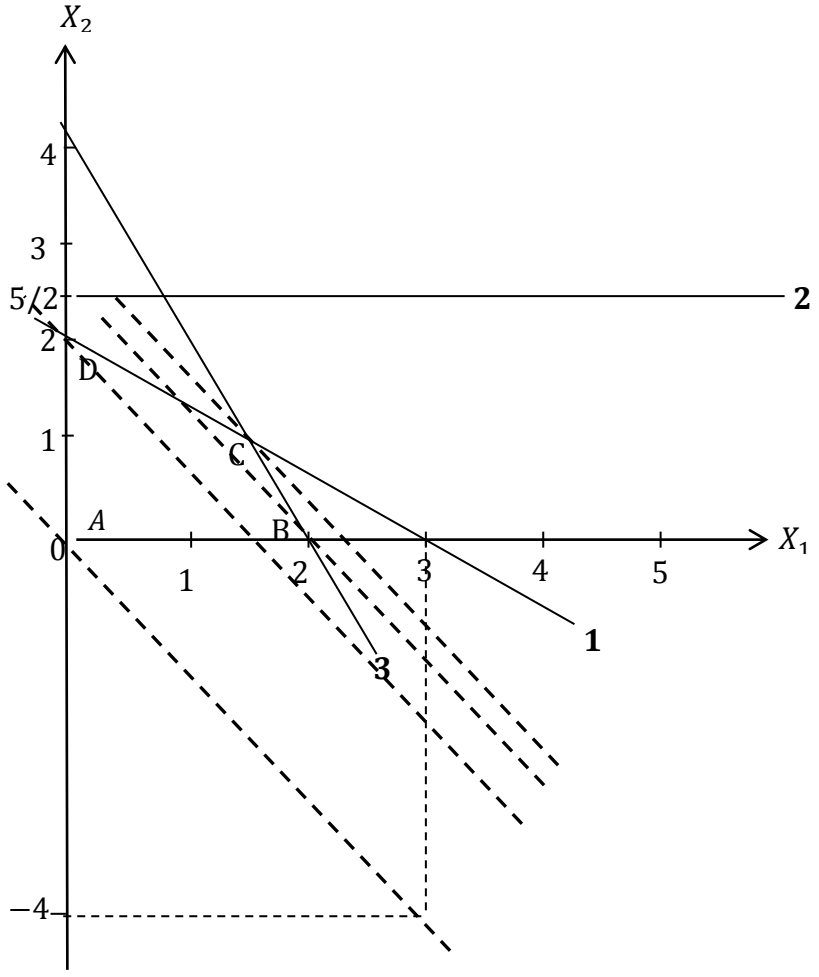
2.1.1. طريقة خطوط الربح المكافئة:

لدينا من دالة الهدف عند المبدأ $(0,0)$ التي تكتب بالشكل:

$$z = 0 \rightarrow 4X_1+3X_2 = 0 \rightarrow +X_2 = -\frac{4}{3}X_1$$

و لرسم دالة الهدف نعطي قيمة للمتغير (X_1) لنحصل على (X_2)، و بالتالي يمكن رسم هذه الدالة بالاعتماد على نقطتين فقط، حيث مثلا إذا أعطينا للمتغير (X_1) القيمة 3 فإن $(X_2 = -4)$. و نمثل دالة الهدف بخط متقطع كما هو مبين لاحقا.

و للوصول إلى الحل الأمثل نقوم برسم خطوط موازية لخط دالة الهدف عند المبدأ حتى نصل إلى النقطة الأخيرة التي تمثل الحل الأمثل لأننا في حالة التعظيم، و نشير إلى أن الخطوط الموازية لخط المبدأ ترسم عند نقاط الحل المشتركة (A, B, C, D).



النقطة الأخيرة هي النقطة (C) و هي تمثل الحل الامثل.

ملاحظة: يمكن أن لا يكون هناك أي حل إذا لم توجد نقاط أو منطقة مشتركة.

2. طريقة السمبلكس Simplex Method

بينا سابقا سهولة استخدام الطريقة البيانية في حل مسائل البرمجة الخطية، في حالة وجود متغيرين فقط، لكن إذا كان عدد المتغيرات يفوق اثنين فانه يستحيل استخدام هذه الطريقة.

المفهوم الجبري لطريقة السمبلكس يتم من خلال تحويل النموذج المعد للمشكلة من متباينات إلى معادلات و ذلك يتم باضافة متغير مكمل (فائض) (Srplus variable) هذا في حالة إذا كانت المشكلة تهدف إلى ايجاد أقصى عائد ممكن، أما في حالة المشاكل التي تهدف إلى تحقيق أقل كلفة ممكنة حيث أن متبايناتها تحتوي على العلامة $(\geq)$ ففي هذه الحالة يتم أولا طرح متغير مكمل (فائض) و بعدها إضافة متغير اصطناعي (Artificial Variable) إلى النموذج[4].

مثال: ليكن البرنامج الخطي الآتي، حيث أن ربح كل وحدة محدد في دالة الهدف، و أن المتاحات المبينة في يمين القيود تكون ممثلة بساعات العمل:

$$Max\ z = 40X_1+30X_2+20X_3$$

$$\begin{cases} 2X_1+5X_2+10X_3 \leq 90 & \text{الترصنيع} \\ 2X_1+5X_2+3X_3 \leq 40 & \text{التركيب} \\ 4X_1+2X_2+2X_3 \leq 60 & \text{التغليف} \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد العدد الأمثل من البضائع الذي يحقق أعلى ربح

خطوات الحل بطريقة السمبلكس :

1- كتابة البرنامج الخطي بشكله القياسي ، أي تحويل كل القيود الى معادلات

$$Max\ z = 40X_1+30X_2+20X_3$$

$$\begin{cases} 2X_1+5X_2+10X_3+S_1 = 90 \\ 2X_1+5X_2+3X_3+S_2 = 40 \\ 4X_1+2X_2+2X_3+S_3 = 60 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \\ S_1, S_2, S_3 \geq 0 \end{cases}$$

4- منعم زمزير الموسوي (2009)، **بحوث العمليات**، الطبعة الأولى، عمان: دار وائل للنشر، ص103.

S_1 , S_2 , S_3 تسمى بالمتغيرات الفائضة Surplus Variable أو متغيرات الفرق ، وهي تمثل مقدار الطاقة غير المستغلة .

S_1 عدد الساعات غير المستغلة في التصنيع، S_2 عدد الساعات غير المستغلة في التركيب، S_3 عدد الساعات غير المستغلة في التغليف.

ملاحظات:

– عدد القيود = عدد المتغيرات الفائضة (متغيرات القاعدة)

– المتغيرات الفائضة تشكل فيما بينها مصفوفة حيادية

في حالة أكبر أو تساوي نضع $(-S_3, -S_2, -S_1)$

2- **الخطوة الثانية** تتمثل في انشاء جدول السمبلكس، حيث نضع $Z - 40X_1 - 30X_2 - 20X_3 = 0$ نلاحظ من جدول السمبلكس أن الجانب الأيمن يمثل الموارد أو المتاحات، و أن الجانب الأيسر يمثل معاملات متغيرات القيود، أما الجانب الأوسط الذي هو عبارة عن مصفوفة الوحدة للمتغيرات الفائضة.

ق	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	الحل	
Z	**-40**	-30	-20	0	0	0	0	
S_1	**2**	5	10	1	0	0	90	$\frac{90}{2} = 45$
S_2	**2**	5	3	0	1	0	40	$\frac{40}{2} = 20$
S_3	**4**	**2**	**2**	**0**	**0**	**1**	60	$\frac{60}{4} = 15$

3- **الخطوة الثالثة** : اختيار المتغير الداخل إلى القاعدة إذا كان الحل غير أمثل، حيث نختار المتغير الذي له معامل في Z بأقل قيمة جبرية، بشرط أن يكون المعامل سالبا (أكبر ربح)، و عندما لا يكون هناك معامل سالب نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل. و في مثالنا هذا فإن المتغير الداخل هو (X_1) كما هو مبين في الجدول السابق

أما خروج أحد المتغيرات الموجودة S_1 , S_2 , S_3 فيتم بتطبيق معيار الامكانية criter d'optimalité، بمعنى بقاء الحل ممكنا، حيث مثلا إذا تم ادخال (X_1) مكان (S_1) فإن الحل الأمثل يكون 1800، لكن $(S_2 = -50)$ و $(S_3 = -30)$ و هذا غير منطقي، فمن غير المعقول أن تكون ساعات العمل أو

الكمية الفائضة بالسالب. و لمعرفة المتغير الذي يغادر نقسم قيم عمود الكميات (المتاحات) على القيم المقابلة لها في العمود المحوري أو عمود الارتكاز و نختار الاقل قيمة، كما هو مبين في الجدول السابق في الجانب الأيمن.

* دخول X_1 بمعنى أن وحدة واحدة من X_1 ترفع الربح ب 40 ون

* دخول وحدة واحدة من X_1 يستدعي خروج 4 وحدات من S_3 و القيمة التي تخرج من القاعدة هي العدد الأقصى من الوحدات للمتغير المعني التي يمكنها الدخول، حيث نقسم العمود الأخير على قيم المتغير الداخل (عمود الارتكاز)، و نختار الأقل قيمة لإبقاء الحل ممكنا و مقبولا، كما هو مبين في الجدول السابق.

للحصول على الجدول الآتي نقسم كل السطر الأخير على (4) و التي تعني أنه إذا تم استغلال كل المتاحات للقيد الثالث فإنه يتم انتاج 15 وحدة من (X_1)، و لمعرفة عدد الوحدات المستعملة من المتاحات للقيد الثاني مثلا لإنتاج (X_1) فإننا نقوم بضرب كل قيم السطر الثالث في (-2) و نضيفها للقيمة المقابلة لها في السطر الثاني، و هذا ما يعني أننا نستخدم 30 ساعة عمل من المورد الثاني لإنتاج المنتوج الأول، و نقوم بنفس العملية فيما يخص السطر الأول. أما فيما يتعلق بدالة الهدف نقوم كذلك بضرب كل قيم السطر الثالث في (40) و نجمعها مع نفس القيمة المقابلة لها في دالة الهدف، حيث ينتج لدينا ربح قدره 600 نتيجة انتاج (X_1) فقط.

القاعدة	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	الحل
Z	0	**-10**	0	0	0	-10	600
S_1	0	**4**	9	1	0	-1	60
S_2	0	**4**	**1**	**0**	**1**	**-1/2**	**10**
X_1	1	**1/2**	1/2	0	0	1/4	15

الحل غير أمثل لأن قيمة X_2 سالبة، لذا نواصل حيث نحصل بنفس المنطق و الخطوات:

القاعدة	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	الحل
Z	0	0	5	0	5/2	35/4	625
S_1	0	7	0	1	-1	0	50
X_2	0	1	1	0	1/4	-1/8	5/2
X_1	1	0	1/4	0	-1/8	5/16	55/4

إذن لا توجد معاملات سالبة، فالحل أمثل هو:

$$X_1 = \frac{55}{4}\ , X_2 = \frac{5}{2}\ , X_3 = 0$$

و بتعويض هذه القيم في دالة الهدف نحصل:

$$Z = 40\left(\frac{55}{4}\right) + 30\left(\frac{5}{2}\right) + 20(0) = \mathbf{625}$$

$S_1 = 50$ أي أن المورد الأول بقي منه 50 ساعة لم تستغل أو لم تستعمل.

و يمكن ايجاد الحل الأمثل بالاعتماد على المتاحات، حيث لدينا في دالة الهدف للجدول الأخير السابق:

$$0(90) + \frac{5}{2}(40) + \frac{35}{4}(60) = \mathbf{625}$$

3. المتغيرات الاصطناعية (الوهمية) Artificial Variables

لاحظنا سابقا أنه يمكننا حل البرنامج الخطي بطريقة السمبلكس بالمتغيرات الفائضة عندما تكون دالة الهدف من النوع MAX Z و القيود من النوع أقل أو تساوي $\leq$ ، لكن في حالة MIN Z و القيود من الشكل أكبر أو تساوي $\geq$ فان المتغيرات الفائضة لا تصلح لبداية الحل ، و بالتالي نحتاج الى ما يسمى بالمتغيرات الاصطناعية.

مثال:

$$Min\ z = 2X_1 + X_2$$
$$\begin{cases} 3X_1 + X_2 = 3 \\ 4X_1 + 3X_2 \geq 6 \\ X_1 + 2X_2 \leq 3 \\ X_1\ , X_2 \geq 0 \end{cases}$$

الشكل القياسي هو كما يلي:

$$Min\ z = 2X_1 + X_2$$
$$\begin{cases} 3X_1 + X_2 = 3 \\ 4X_1 + 3X_2 - S_2 = 6 \\ X_1 + 2X_2 + S_3 = 3 \\ X_1\ , X_2 \geq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن الشكل القياسي لا يعطينا المصفوفة الحيادية الضرورية لبداية الحل ، لذا يجب اضافة المغيرات الاصطناعية و التي لابد أن تخرج من الحل (القاعدة) عند الحل المثل، و اذا بقيت في القاعدة فهذا يدل على ان البرنامج الخطي ليس له حل ممكن.

1.3. الحل بطريقة BIG M

$$Min\, z = 2X_1 + X_2 + MR_1 + MR_2$$
$$\begin{cases} 3X_1 + X_2 + R_1 = 3 \\ 4X_1 + 3X_2 - S_2 + R_2 = 6 \\ X_1 + 2X_2 + S_3 = 3 \\ X_1, X_2 \geq 0 \qquad R_1, R_2 \geq 0 \end{cases}$$
Mعدد كبير جدا

القاعدة	X_1	X_2	S_2	R_1	R_2	S_3	الحل
Z	-2	-1	0	-M	-M	0	0
R_1	3	1	0	1	0	0	3
R_2	4	3	-1	0	1	0	6
S_3	1	2	0	0	0	1	3

ملاحظة: في حالة MAX فإن MR_1, MR_2 تطرح من دالة الهدف، كما نشير إلى أن المتغيرات الاصطناعية تضاف فقط لمساعدتنا على الحل، و من أجل الحصول على مصفوفة الوحدة.

و من أجل أن تصبح معاملات المتغيرات الاصطناعية معدومة في دالة الهدف، نقوم بضرب كل قيم السطرين الأول و الثاني في هذه الحالة في (M) و نجمعهما مع القيم المقابلة لها في دالة الهدف، حيث ينتج لدينا:

القاعدة	X_1	X_2	S_2	R_1	R_2	S_3	الحل
Z	**2+7M**	-1+4M	-M	0	0	0	9M
R_1	**3**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**3**
R_2	**4**	3	-1	0	1	0	6
S_3	**1**	2	0	0	0	1	3

و للوصول إلى الحل الأمثل فلابد أن تكون من جهة المعاملات R_1, R_2 خارج أساس الحل، و من جهة أخرى يجب أن تكون كل معاملات دالة الهدف سالبة لأننا في حالة التدنية. و المتغير الذي يدخل هو المتغير الذي لديه أكبر قيمة موجبة، و في هذه الحالة فإن المتغير الداخل يكون (X_1) مع العلم أن (M) كبير جدا،

أما المتغير الخارج يكون (R_1) نقسم قيم عمود المتاحات على قيم عمود الارتكاز و نختار الأقل قيمة كما فعلنا سابقا. و يدل دخول (X_1) على أن استخدام وحدة واحدة من هذا المنتوج، يسمح بتخفيض التكلفة بمقدار $(7M + 2-)$، و تكون النتيجة كما يلي:

القاعدة	X_1	X_2	S_2	R_1	R_2	S_3	الحل
Z	0	$-\frac{1}{3}+\frac{5}{3}M$	-M	$\frac{2}{3}-7M$	0	0	2+2M
X_1	1	**1/3**	0	1/3	0	0	1
R_2	**0**	**5/3**	**-1**	**-4/3**	**1**	**0**	**2**
S_3	0	**5/3**	0	-1/3	0	1	2

الحل غير أمثل لأن قيم دالة الهدف موجبة بما اننا في حالة التدنية، و المتغير الداخل في هذه الحالة هو (X_2) مكان (R_2).

القاعدة	X_1	X_2	S_2	R_1	R_2	S_3	الحل
Z	0	0	-1/5	2/5	1/5	0	**12/5**
X_1	1	0	1/5	3/5	-1/5	0	3/5
X_2	0	1	-3/5	-4/5	3/5	0	6/5
S_3	0	0	1	1	-1	1	0

الحل الأمثل هو:

$$X_1 = \frac{3}{5}\ , X_2 = \frac{6}{5}$$

و بتعويض في دالة الهدف نحصل:

$$Z = 2\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{6}{5} = \mathbf{\frac{12}{5}}$$

2.3. طريقة المرحلتين Méthode des deux phases:

هذه الطريقة هي نفس طريقة المتغيرات الاصطناعية BIG M ، و للوصول الى الحل لابد من المرور بمرحلتين ، في المرحلة الأولى نستعمل المتغيرات الاصطناعية ، لكن لابد من خروجها من القاعدة عند نهاية المرحلة الأولى، و دالة الهدف يجب أن تكون قيمتها معدومة.

مثال: نفس المثال السابق

$$Min\ z = 2X_1+X_2$$
$$\begin{cases} 3X_1+X_2 = 3 \\ 4X_1+3X_2 \geq 6 \\ X_1+2X_2 \leq 3 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

الشكل القياسي هو كما يلي:

$$Min\ z = 2X_1+X_2$$
$$\begin{cases} 3X_1+X_2 = 3 \\ 4X_1+3X_2 - S_2=6 \\ X_1+2X_2 + S_3 = 3 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

لتكن المتغيرات الاصطناعية R_1 , R_2

$$\begin{cases} 3X_1+X_2 + R_1 = 3 \\ 4X_1+3X_2 - S_2+R_2 = 6 \\ X_1+2X_2 + S_3 = 3 \\ X_1, X_2 \geq 0 \qquad R_1, R_2 \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} R_1 = 3 - 3X_1-X_2 \\ R_2 = 6 - 4X_1-3X_2 + S_2 \\ X_1+2X_2 + S_3 = 3 \\ X_1, X_2 \geq 0 \qquad R_1, R_2 \geq 0 \end{cases}$$

دالة الهدف في المرحلة الأولى هي دالة بدلالة المتغيرات الاصطناعية فقط و هي دالة انتقالية

$$Min\ r = R_1 + R_2$$
$$Min\ r = 3 - 3X_1-X_2 + 6 - 4X_1-3X_2 + S_2$$
$$Min\ r = 9 - 7X_1-4X_2 + S_2$$
$$r + 7X_1+4X_2 - S_2 = 9$$

القاعدة	X_1	X_2	S_2	R_1	R_2	S_3	الحل
Z	**7**	4	-1	0	0	0	9
R_1	**3**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**3**
R_2	**4**	3	-1	0	1	0	6
S_3	**1**	2	0	0	0	1	3

إذا كتنت معاملات دالة الهدف موجبة فإن الحل غير أمثل ، و العكس صحيح لأننا في حالة MIN

القاعدة	X_1	X_2	S_2	R_1	R_2	S_3	الحل
Z	0	**5/3**	-1	-7/3	0	0	2
X_1	1	**1/3**	0	1/3	0	0	1
R_2	**0**	**5/3**	**-1**	**-4/3**	**1**	**0**	**2**
S_3	0	**5/3**	0	-1/3	0	1	2

الحل غير أمثل

القاعدة	X_1	X_2	S_2	R_1	R_2	S_3	الحل
Z	0	0	0	-1	-1	0	0
X_1	1	0	1/5	3/5	-1/5	0	3/5
X_2	0	1	-3/5	-4/5	3/5	0	6/5
S_3	0	0	1	1	-1	1	0

المرحلة الثانية: الشروط محققة للانتقال الى المرحلة الثانية لأنه لا توجد المتغيرات الاصطناعية في القاعدة

من الجدول لدينا:

$$\begin{cases} X_1 + \frac{1}{5}S_2 = \frac{3}{5} \\ X_2 - \frac{3}{5}S_2 = \frac{6}{5} \\ S_2 + S_3 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{3}{5} - 1/5S_2 \\ X_2 = \frac{6}{5} + \frac{3}{5}S_2 \end{cases}$$

نعوض في دالة الهدف الأصلية نجد:

$$Min\ z = 2X_1 + X_2$$

$$z = 2\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{5}S_2\right) + \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{5}S_2\right) = \frac{12}{5} + \frac{1}{5}S_2$$

$$z - \frac{1}{5}S_2 = 12/5$$

الفصل الثاني: البرنامج المرافق
Duality (الثنائية)

يحتوي كل برنامج أصلي (أولي) في البرمجة الخطية على برنامج مقابل و الذي يصطلح على تسميته بالبرنامج الثنائي، و يمكن صياغة البرنامج الثنائي في النقاط الآتية:

- تحويل دالة الهدف من Max إلى Min، و من Min إلى Max.
- معاملات دالة الهدف تصبح مدخلات أو موارد، و الموارد تصبح معاملات دالة الهدف.
- إذا كان القيد أو المتراجحة من نوع $(\leq)$ تصبح من نوع $(\geq)$، و العكس صحيح.
- تغيير رمز المتغير من (X_i) إلى (Y_i).
- أسطر مصفوفة الحل الأمثل للنموذج الأصلي تصبح أعمدة في النموذج الثنائي، و الأعمدة تصبح أسطر.

أولا: البرنامج المرافق المماثل:

يتضمن البرنامج الأصلي في هذه الحالة على متراجحات بصيغها القانونية، حيث تكون كل المتراجحات أقل أو تساوي $(\leq)$إذا كان البرنامج الخطي في حالة التعظيم، و تكون كل المتراجحات من نوع أكبر أو تساوي $(\geq)$ في حالة التدنية.

إذا كان البرنامج الأصلي كما يلي:

$$Max\ z = C_1X_1 + C_2X_2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots C_nX_n$$
$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots a_{1n}X_n \leq b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots a_{2n}X_n \leq b_2 \\ \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots a_{mn}X_n \leq b_m \\ X_1, X_2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots X_n \geq 0 \end{cases}$$

m: هو عدد القيود في البرنامج الأصلي.

إذا كانت متغيرات البرنامج الثنائي هي:

$$Y_1, Y_2, \dots\dots, Y_m$$

و يمكن أن نكتب البرنامج الخطي الأصلي بالشكل:

n: هي عدد قيود البرنامج الثنائي أو المرافق.

البرنامج الثنائي أو المرافق هو:

$$Min\ w = b_1Y_1 + b_2Y_2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots b_mY_m$$
$$\begin{cases} a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + a_{m1}Y_m \le C_1 \\ a_{12}Y_1 + a_{22}Y_2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots +a_{m2}Y_m \le C_2 \\ \\ a_{m1}Y_1 + a_{m2}Y_2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots +a_{mn}Y_m \le C_n \\ Y_1\ , Y_2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots Y_m \ge 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن عدد متغيرات البرنامج الأصلي تساوي عدد قيود البرنامج المرافق، و أن عدد المتغيرات في البرنامج الثنائي تساوي عدد القيود في البرنامج الأصلي.

هناك مجموعة من العلاقات التي تربط بين الأصلية و الثنائية تتمثل في:[5]

أ. إذا كان يوجد حل أمثل للأصلية فإنه بالضرورة يوجد حل أمثل للثنائية.

ب. من خلال حل (الأصلية، الثنائية) فإن هدف الأصلية يساوي هدف الثنائية.

ج. مسائل Max للأصلية تبدأ قيمة الهدف لها في تزايد من جدول إلى آخر وصولا إلى الحل الأمثل، بينما الثنائية لها قيمة الهدف تبدأ في تناقص من جدول لآخر وصولا إلى الحل الأمثل، و العكس صحيح في حالة $Min\ w$.

مثال 01: أكتب البرنامج الثنائي للبرنامج الأصلي الآتي:

$$Max\ z = 40X_1 + 30X_2 + 20X_3$$
$$\begin{cases} 2X_1 + 5X_2 + 10X_3 \le 90 & \text{التصنيع} \\ 2X_1 + 5X_2 + 3X_3 \le 40 & \text{التركيب} \\ 4X_1 + 2X_2 + 2X_3 \le 60 & \text{التغليف} \\ X_1\ , X_2\ , X_3 \ge 0 \end{cases}$$

البرنامج الثنائي أو المرافق هو:

$$Min\ w = 90Y_1 + 40Y_2 + 60Y_3$$
$$\begin{cases} 2Y_1 + 2Y_2 + 4Y_3 \ge 40 \\ 5Y_1 + 5Y_2 + 2Y_3 \ge 30 \\ 10Y_1 + 3Y_2 + 2Y_3 \ge 20 \\ Y_1\ , Y_2\ , Y_3 \ge 0 \end{cases}$$

5- بوقرة رابح (2008)، **بحوث العمليات**، الاسكندرية : مؤسسة شباب الجامعة، ص.ص 102-103.

مثال 02: أكتب البرنامج الثنائي أو المرافق للبرنامج الأصلي الآتي:

$$Min\ z = 2X_1+3X_2$$
$$\begin{cases} X_1+X_2 \geq 4 & \rightarrow Y_1 \\ 6X_1+2X_2 \geq 8 & \rightarrow Y_2 \\ X_1+5X_2 \geq 4 & \rightarrow Y_3 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

البرنامج المرافق هو:

$$Max\ w = 4Y_1+8Y_2+4Y_3$$
$$\begin{cases} Y_1+6Y_2+Y_3 \leq 2 \\ Y_1+2Y_2+5Y_3 \leq 3 \\ Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0 \end{cases}$$

ثانيا: البرنامج الثنائي غير المماثل:

في حالة إذا كانت كل القيود الفنية في شكل معادلات فإنه يجب أن نحول هذا الشكل الابتدائي للنموذج الخطي إلى الشكل الذي تكون قيوده من الشكل أقل أو تساوي ($\leq$) إذا كان مقياس الأمثلة لدالة الهدف هو (max) أو تحويلها إلى شكل أكبر أو يساوي ($\geq$) في حالة ما إذا كانت دالة الهدف في شكل (min). فإذا كان لدينا قيد فني ما على شكل معادلة، أي: $(a_{ij}X_j = b_i)$، فيلزم أن نحوله إلى شكل مترجحة، مع العلم أن أي معادلة تعادل متباينتين ذات اتجاهين متعاكسين[6].

إذا كانت قيود البرنامج الأصلي لا تأخذ كلها الصيغة القانونية، فإن البرنامج المرافق يأخذ شكل مختلف عن الأشكال السابقة، و هنا نميز بين حالتين.

1.الحالة الأولى:

إذا كان البرنامج الأصلي من الشكل:

$$Max\ z = \sum_i^n C_i X_i$$
$$\begin{cases} a_i X_i = b_j \\ X_i \geq 0 \end{cases}$$

يكون البرنامج المرافق من الشكل:

6- مكيد علي (2015)، **بحوث العمليات و تطبيقاتها الاقتصادية**، الجزء الأول، الجزائر: ديوان المطبوعات الجامعية، ص118.

$$Min\ w = b_j Y_j$$
$$\begin{cases} a_J Y_j \geq C_i \\ Y_j \text{ غير مقيدة الاشارة} \end{cases}$$

يقصد بالمتغيرات غير مقيدة الاشارة بالمتغيرات التي تأخذ قيم موجبة و سالبة (غير محددة). و نشير إلى أن ذلك ينطبق إذا كان البرنامج الأصلي في حالة التعظيم.

مثال 03: أكتب البرنامج المرافق للبرنامج الأصلي الآتي

$$Minz = 90X_1 + 40X_2 + 60X_3$$
$$\begin{cases} 2X_1 + 2X_2 + 4X_3 = 40 & \rightarrow Y_1 \\ 5X_1 + 5X_2 + 2X_3 = 30 & \rightarrow Y_2 \\ 10X_1 + 3X_2 + 2X_3 = 20 & \rightarrow Y_3 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

البرنامج المرافق هو:

$$Max\ w = 40Y_1 + 30Y_2 + 20Y_3$$
$$\begin{cases} 2Y_1 + 5Y_2 + 10Y_3 \leq 90 \\ 2Y_1 + 5Y_2 + 3Y_3 \leq 40 \\ 4Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 \leq 60 \\ Y_1, Y_2, Y_3 \quad \text{غير مقيدة الاشارة} \end{cases}$$

2. الحالة الثانية:

يكون البرنامج الأصلي في هذه الحالة مختلط، حيث يحتوي على متراجحات من الشكل أكبر أو تساوي، و أقل أو تساوي، و تساوي. فإذا كان البرنامج الأصلي من الشكل:

$$Max\ z = \sum_i^n C_i X_i$$
$$\begin{cases} \sum_i^n a_{i1} X_{i1} \geq b_j \\ \sum_i^n a_{i2} X_{i2} \leq b_j \\ \sum_i^n a_{i3} X_{i3} = b_j \\ X_i \geq 0 \end{cases}$$

البرنامج المرافق هو:

$$Min\ w = \sum_{j}^{m} b_j\, Y_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j}^{m} a_{j1}\, Y_{j1} \geq C_i \\ \sum_{j}^{m} a_{j2}\, Y_{j2} \geq C_i \\ \sum_{j}^{m} a_{j3}\, Y_{j3} \geq C_i \\ Y_1 \geq 0\ ,\ Y_2 \leq 0\ ,\ Y_1 \text{ غير مقيد الاشارة} \end{cases}$$

مثال 04: إذا كان البرنامج الأصلي الخطي الآتي:

$$Max\ z = C_1X_1 + C_2X_2 \qquad Max\ z = C_1X_1 + C_2X_2$$

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \leq b_1 \\ a_{21} + a_{12}X_2 = b_2 \\ X_1\ ,X_2 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 \leq b_1 & \to Y_1 \\ a_{21} + a_{12}X_2 \leq b_2 & \to Y_2^+ \\ -a_{21} - a_{12}X_2 \leq -b_2 & \to Y_2^- \end{cases}$$

إذن البرنامج الثنائي في هذه الحالة هو:

$$Min\ w = b_1Y_1 + b_2Y_2^+ - b_2Y_2^-$$

$$\begin{cases} a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2^+ - a_{21}Y_2^- \geq C_1 \\ a_{12}Y_1 + a_{22}Y_2^+ - a_{22}Y_2^- \geq C_1 \end{cases}$$

نفترض أن: $Y_2 = (Y_2^+ - Y_2^-)$، حيث يصبح البرنامج الثنائي:

$$Min\ w = b_1Y_1 + b_2Y_2$$

$$\begin{cases} a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 \geq C_1 \\ a_{12}Y_1 + a_{22}Y_2 \geq C_1 \\ Y_1 \geq 0, Y_2 \text{ غير مقيدة الاشارة} \end{cases}$$

مثال 05: أكتب البرنامج المرافق للبرنامج الأصلي الآتي:

$$Min\ z = X_1 + 2X_2$$

$$\begin{cases} 3X_1 + 4X_2 \leq 20 & \to Y_1 \\ 5X_1 + 6X_2 \geq 30 & \to Y_2 \\ X_1 + X_2 = 10 & \to Y_3 \\ X_1\ ,X_2 \geq 0 \end{cases}$$

البرنامج المرافق هو من الشكل:

$$Max\ w = 20Y_1 + 30Y_2 + 10Y_3$$
$$\begin{cases} 3Y_1 + 5Y_2 + Y_3 \leq 1 \\ 4Y_1 + 6Y_2 + Y_3 \leq 2 \\ Y_1 \leq 0\ ,\ Y_2 \geq 0, Y_3 \text{ غير مقيدة الاشارة} \end{cases}$$

ملاحظة: نشير إلى أنه إذا كان لدينا برنامج خطي مختلط يتضمن متراجحات ($\leq$) و ($\geq$)، فإنه يمكن تحويل البرنامج الأصلي لصيغته القانونية، و من ثم كتابة البرنامج المرافق له.

مثال 06: أكتب البرنامج المرافق للبرنامج الأصلي الآتي:

$$Max\ z = X_1 + 2X_2$$
$$\begin{cases} 3X_1 + 4X_2 \leq 20 \\ 5X_1 + 6X_2 \geq 30 \\ X_1 + X_2 \leq 10 \\ X_1\ ,X_2 \geq 0 \end{cases}$$

هنا يمكن أن نحول القيد الثاني لصيغته القانونية ($\leq$) لأننا في حالة التعظيم، و ينتج لدينا:

$$Max\ z = X_1 + 2X_2$$
$$\begin{cases} 3X_1 + 4X_2 \leq 20 \\ -5X_1 - 6X_2 \leq -30 \\ X_1 + X_2 \leq 10 \\ X_1\ ,X_2 \geq 0 \end{cases}$$

البرنامج المرافق هو من الشكل:

$$Min\ w = 20Y_1 - 30Y_2 + 10Y_3$$
$$\begin{cases} 3Y_1 - 5Y_2 + Y_3 \geq 1 \\ 4Y_1 - 6Y_2 + Y_3 \geq 2 \\ Y_1,\ Y_2,\ Y_3 \geq 0 \end{cases}$$

ثالثا: استنتاج الحل الأمثل للبرنامج المرافق من البرنامج الأصلي:

1. البرنامج المرافق المماثل:

يمكن استنتاج الحل الأمثل للبرنامج المرافق من خلال الحل الأمثل للبرنامج الأصلي، ذلك باتباع الخطوات الآتية:

- قيم (z) للحل الأمثل في البرنامج الأصلي هي نفسها في البرنامج المرافق.
- قيم متغيرات دالة الهدف في جدول السمبلكس للبرنامج الأصلي تصبح قيم الاستخدامات في جدول السمبلكس للبرنامج المرافق.
- قيم متغيرات الاستخدامات في البرنامج الأصلي تصبح متغيرات دالة الهدف في البرنامج المرافق.
- أسطر المصفوفة في الجدول تصبح أعمدة، و الأعمدة تصبح أسطر مع عكس الاشارة.

مثال 07: تنتج المؤسسة ثلاث منتجات (X_1, X_2, X_3) حيث عائد الوحدة في السوق $(40,30,20)$ على التوالي، و تمر هذه المنتجات على ثلاث مراحل و هي التصنيع و التركيب و التغليف التي تكون لدى المؤسسة على الأكثر 90، 40، و 60 ساعة من العمل (موارد) على التوالي، كما أن كل منتوج يحتاج من هذه الموارد كما هو مبين في القيود:

$$Max\ z = 40X_1 + 30X_2 + 20X_3$$

$$\begin{cases} 2X_1 + 5X_2 + 10X_3 \leq 90 & \text{التصنيع} \\ 2X_1 + 5X_2 + 3X_3 \leq 40 & \text{التركيب} \\ 4X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq 60 & \text{التغليف} \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

حيث الحل الأمثل الأولي:

			$\boldsymbol{S_3}$		$\boldsymbol{Y_2}$	$\boldsymbol{Y_3}$	
ق	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	الحل
Z	0	0	5	0	5/2	35/4	625
$\boldsymbol{Y_1} \rightarrow S_1$	0	0	7	1	-1	0	50
$\boldsymbol{S_2} \rightarrow X_2$	0	1	1	0	1/4	-1/8	5/2
$\boldsymbol{S_1} \rightarrow X_1$	1	0	1/4	0	-1/8	5/16	55/4

1. استنتج الحل الأمثل للبرنامج المرافق لهذا البرنامج ثم فسر ذلك اقتصاديا.

الحل:

نكتب الآن البرنامج المرافق مع متغيرات الفرق و المتغيرات الاصطناعية كما يلي:

$$Min\ w = 90Y_1 + 40Y_2 + 60Y_3 + MR_1 + MR_2 + MR_3$$

$$\begin{cases} 2Y_1 + 2Y_2 + 4Y_3 - S_1 + R_1 = 40 \\ 5Y_1 + 5Y_2 + 2Y_3 - S_2 + R_2 = 30 \\ 10Y_1 + 3Y_2 + 2Y_3 - S_3 + R_3 = 20 \\ Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0 \end{cases}$$

يظهر من جدول السمبلكس السابق للحل الأمثل للبرنامج الأصلي أن متغيرات دالة الهدف تصبح استخدامات، حيث أن (Y_2) و (Y_3) تأخذ قيم (S_2) و (S_3) على التوالي، بينما (S_3) تأخذ قيمة (X_3). أما الاستخدامات في البرنامج الأصلي تصبح في دالة الهدف للبرنامج المرافق مع عكس الاشارة لأن النموذج المرافق هو في حالة التدنية، بذلك فإن (S_2) و (S_1) تأخذ قيم (X_2) و (X_1) على التوالي.

أما مصفوفة جدول السمبلكس للبرنامج الأصلي و من أجل أن لا تختلط يجب أولا أن نكتب المتغيرات الثنائية الداخلة في الحل الأمثل و هي Y_2 و Y_3 (أنظر الجدول السابق)، و كذلك المتغيرة الفائضة S_3، حيث تكون اعمدة هذه المتغيرات كم مبينة في الجدول الآتي (بخط غليظ)، ثانيا يجب أن نضمن ترتيب القيم، فمثلا فإن عمود (S_2) في الجدول السابق الذي حل محل (Y_3) سوف يصبح سطرا في البرنامج المرافق، حيث يجب أن نكتب في السطر الثاني و العمود الرابع ($1/8$) لأن (Y_2) تقاطع (S_1) التي أخذت قيمة (X_1)، و هذا بعكس الاشارة. و عليه فإن جدول السمبلكس للبرنامج المرافق هو:

ق	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	S_3	الحل
w	**-50**	**0**	**0**	**-55/4**	**-5/2**	**0**	625
S_3	**-7**	**0**	0	-1/4	-1/2	**1**	**5**
Y_2	1	**1**	**0**	1/8	-1/4	**0**	**5/2**
Y_3	0	**0**	**1**	5/16	1/8	**0**	**35/4**

ملاحظة: نشير إلى أنه يمكن كتابة مصفوفة المتغيرات الاصطناعية و التي هي نفسها مصفوفة متغيرات الفروق لكن عكس الاشارة.

التفسير الاقتصادي:

يبين البرنامج الأصلي أن المؤسسة تهدف إلى تحقيق أكبر ربح ممكن، و تقوم هنا بالبحث عن عدد الوحدات من المنتجات الثلاث التي تحقق لها ذلك، و عليه، فإن المؤسسة تحقق أكبر ربح الذي يساوي (625) عندما تنتج ($55/4$) من المنتوج الأول و (($5/2$) من المنتوج الثاني، و تبين دالة الهدف هنا ربح المنتجات الثلاث، في حين تبين القيود الزمن المتاح لإنتاج كل وحدة من الوحدات الثلاث.

نلاحظ أن أرقام البرنامج الأصلي هي نفسها في البرنامج المرافق، لكن التفسير يختلف تماما، حيث إذا قامت هذه المؤسسة بتأجير طاقتها الانتاجية إلى مؤسسة أخرى، فإن هذه الأخيرة سوف تعمل على تخفيض تكلفة

الاستئجار، على هذا الأساس، تتمثل دالة الهدف للمؤسسة المستأجرة بتخفيض تكلفة الاستئجار، بمعنى أن (Y_i) تمثل تكلفة الاستئجار، أما القيود فهي توضح قيمة استئجار الورشات الثلاث.

2. البرنامج المرافق غير المماثل:

مثال 08: استنتج الحل الأمثل للبرنامج المرافق إذا كان البرنامج الأصلي و الحل كما يلي:

$$Max\ z = X_1+2X_2 \quad \begin{cases} 3X_1+4X_2 \le 20 \\ 5X_1+6X_2 \ge 30 \\ X_1+X_2 \le 10 \\ X_1, X_2 \ge 0 \end{cases} \iff Max\ z = X_1+2X_2 \quad \begin{cases} 3X_1+4X_2 \le 20 \\ -5X_1-6X_2 \le -30 \\ X_1+X_2 \le 10 \\ X_1, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

حيث الحل الأمثل الأولي:

			S_1		Y_1	
ق	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	الحل
Z	1/2	0	1/2	0	0	10
$Y_2 \to S_2$	-1/2	0	3/2	1	0	0
$S_2 \to X_2$	9/12	1	1/4	0	0	5
$Y_3 \to S_3$	1/4	0	-1/4	0	1	5

إذن الحل الأمثل المرافق في هذه الحالة هو:

ق	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	الحل
w	**0**	**0**	**-5**	**0**	**-5**	10
Y_1	**1**	-3/2	1/4	**0**	-1/4	**1/2**
S_1	**0**	1/2	-1/4	**0**	-9/12	**1/2**

مثال 09: استنتج الحل الأمثل للبرنامج المرافق من الحل الأمثل للبرنامج الأصلي الآتي:

$$Min\ z = 4X_1+6X_2 \quad \begin{cases} 2X_1+X_2 \ge 3 \\ X_1+3X_2 = 4 \\ 5X_1+2X_2 \le 10 \\ X_1, X_2 \ge 0 \end{cases}$$

أولا نستطيع كتابة القيد الثاني لهذا البرنامج في شكل قيدين، لأن المساواة يمكن كتابتها ($\geq$) و ($\leq$)، لذا يصبح لدينا أربع قيود بدلا من ثلاث، كما نكتب القيد الثالث بصيغته القانونية في حالة التدنية، كما يلي:

$$Min\ z = 4X_1+6X_2 \quad \begin{cases} 2X_1+X_2 \geq 3 \\ X_1+3X_2 \geq 4 \\ X_1+3X_2 \leq 4 \\ -5X_1-2X_2 \geq -10 \end{cases} \iff Min\ z = 4X_1+6X_2 \quad \begin{cases} 2X_1+X_2 \geq 3 \\ X_1+3X_2 \geq 4 \\ -X_1-3X_2 \geq -4 \\ -5X_1-2X_2 \geq -10 \end{cases}$$

إذن الحل الأمثل لهذا البرنامج هو:

			$\boldsymbol{Y_1}$	$\boldsymbol{Y_2}$			
ق	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	الحل
Z	0	0	-1.2	-1.6	0	0	10
$\boldsymbol{S_1} \rightarrow X_1$	1	0	-0.6	0.2	0	0	1
$\boldsymbol{S_2} \rightarrow X_2$	0	1	0.2	-0.4	0	0	1
$\boldsymbol{Y_3} \rightarrow S_3$	0	0	0	1	1	0	0
$\boldsymbol{Y_4} \rightarrow S_4$	0	0	2.6	-0.2	0	1	3

يمكن كتابة البرنامج المرافق كما يلي:

$$Max\ w = 4Y_1+3Y_2+3-Y_3-10Y_4$$
$$\begin{cases} 2Y_1+Y_2-Y_3-4Y_4 \leq 4 \\ Y_1+3Y_2-3Y_3-2Y_4 \leq 6 \end{cases}$$

إذن الحل الأمثل للبرنامج المرافق الذي يتم استنتاجه من البرنامج الأصلي هو:

ق	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	$\boldsymbol{S_1}$	S_2	الحل
w	**0**	**0**	0	**3**	**1**	**1**	10
$\boldsymbol{Y_1}$	**1**	**0**	0	-2.6	0.6	-0.2	**1.2**
$\boldsymbol{Y_2}$	**0**	**1**	-1	0.2	-0.2	0.4	**1.6**

الفصل الثالث: تحليل الحساسية

Sensitivity Analysis

تعتمد صياغة البرمجة الخطية على فرضية التأكد التام من المعطيات، لكن في الواقع تعمل المؤسسة في بيئة سريعة التغير، بذلك فإن الوصول للحل الأمثل لا يعني نهاية عملية البرمجة الخطية، حيث يمكن حصول تغيرات في الربح أو التكلفة أو الموارد المتاحة...إلخ، فمثلا قد يهمنا أثر تغير الكمية المتاحة من نوع معين على الحل الأمثل الأولي المتحصل عليه مع بقاء العوامل الأخرى ثابتة، و هذا ما يصطلح عليه بتحليل الحساسية أو البرمجة البارامترية.

تكمن أهمية دراسة البرمجة البارامترية في أنها تمكننا من تحديد آثار تغير معاملات دالة الهدف C_j (هوامش الربح الأحادية، التكاليف الأحادية، ثمن البيع و غيرها)، أو كمية الموارد المستعملة (b_i) أو تكاليف الموارد المستعملة و غيرها، تحديد آثار تغيرها على الوضعية المثلى لنشاط المؤسسة[7].

أولا: أثر تغير في دالة الهدف:

نفرض في هذه الحالة أن ربح أو تكلفة منتوج معين قد تغير بمقدار معين و ليكن (α)، حيث $(\alpha \neq 0)$، فما هو المجال أو ما هي قيمة (α) التي تبقي أساس الحل الأمثل المتحصل عليه بدون تغير؟.

مثال 01: ليكن التمرين السابق و النتائج كما يلي:

$$Max\ z = 40X_1 + 30X_2 + 20X_3$$

$$\begin{cases} 2X_1 + 5X_2 + 10X_3 \leq 90 & \text{التصنيع} \\ 2X_1 + 5X_2 + 3X_3 \leq 40 & \text{التركيب} \\ 4X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq 60 & \text{التغليف} \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

حيث الحل الأمثل الأولي:

القاعدة	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	الحل
Z	0	0	5	0	5/2	35/4	625
S_1	0	0	7	1	-1	0	50
X_2	0	1	1/2	0	1/4	-1/8	5/2
X_1	1	0	1/4	0	-1/8	5/16	55/4

7- مكيد علي (2015)، مرجع سابق، ص149.

نفترض الآن أن ربح المنتوج الأول (X_1) الذي يكون في أساس الحل قد تغير بمقدار (α)، مع بقاء العوامل الأخرى ثابتة، بذلك تصبح دالة الهدف الجديدة:

يتم هنا ادخال دالة الهدف في الجدول الأمثل بنفس الطريقة التي استعملناها سابقا، و حتى لا يتغير أساس الحل الأمثل يجب أن لا يكون هناك عنصر سالب في دالة الهدف.

نعلم أنه من أجل خروج المتغيرة يجب أن نضرب سطر المتغيرة (X_1) في نفس القيمة زائدا قيم دالة الهدف، و ذلك كما يبينه الجدول الآتي:

$$Max\ z = (40+\alpha)X_1 + 30X_2 + 20X_3$$

ق	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	الحل
Z^*	0	0	$\frac{1}{4}(\alpha)+5$	0	$\frac{-1}{8}(\alpha)+\frac{5}{2}$	$\frac{5}{16}(\alpha)+\frac{35}{4}$	$625+\frac{55}{4}\alpha$
S_1	0	0	7	1	-1	0	50
X_2	0	1	1/2	0	1/4	-1/8	5/2
X_1	1	0	1/4	0	-1/8	5/16	55/4

دالة الهدف أو الحل الأمثل نحصل عليه كما يلي:

$$Z^* = 625 + \frac{55}{4}\alpha$$

و حتى لا يتغير أساس الحل الأمثل يجب أن لا يكون هناك عنصر سالب في دالة الهدف، حيث:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}\alpha + 5 \geq 0 \\ \frac{-1}{8}\alpha + \frac{5}{2} \geq 0 \\ \frac{5}{16}\alpha + \frac{35}{4} \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha \geq -20 \\ \alpha \leq 20 \\ \alpha \geq -28 \end{cases}$$

إذن حتى لا يتغير أساس الحل الأمثل يجب أن يكون مقدار تغير ربح المنتوج (X_1) ضمن المجال:

$$-20 \leq \alpha \leq 20 \ \rightarrow \ \alpha \epsilon [-20\ :\ 20]$$

و تعني النتيجة $(\alpha \geq -20)$ أن ربح المنتوج الأول (X_1) يجب أن لا ينخفض بأقل من 20 وحدة نقدية، ذلك حتى يبقى أساس الحل بدون تغير، و نشير إلى أنه لم يتم اختيار $(\alpha \geq -28)$ لأن ذلك يؤدي إلى تحقيق قيم سالبة في دالة الهدف بما أننا في حالة التعظيم. و تعني النتيجة $(\alpha \leq 20)$ أن ربح المنتوج (X_1)

يجب أن يقل مقدار الارتفاع فيه عن 20 وحدة نقدية، على هذا الأساس فإن ربح النتوج الأول هو محصور ضمن المجال:

$$[40-20 \ : \ 40+20] \rightarrow [20 \ : \ 60]$$

نقول في الأخير أن أي قيمة في ربح المنتوج الأول خارجة عن هذا المجال $[60 \ : \ 20]$ تؤدي إلى تغير في أساس الحل كله و ليس في النتيجة النهائية (اعادة الحل من البداية)، بذلك فإنه إذا تغير ربح المنتوج الأول من 40 إلى 50 فإن الربح الاجمالي يصبح:

$$Z^* = 625 + \frac{55}{4}\alpha = 625 + \frac{55}{4}(10) = 762.5$$

و نفس الشيء إذا افترضنا بأن ربح المتغير (X_2) الذي يكون في أساس الحل قد تغير، مع افتراض بقاء العوامل ثابتة، فإن الحدود الأدنى و الأقصى في تغير ربح المنتوج الثاني حتى يبقى أساس الحل بدون تغير يجب أن:

$$-10 \leq \alpha \leq 70 \ \rightarrow \ \alpha\epsilon[-10 \ : \ 70]$$

بذلك فإن الحدود الأدنى و القصوى لربح المنتوج الثاني حتى لا يتغير أساس الحل يجب أن تكون ضمن المجال:

$$[30-10 \ : \ 30+70] \rightarrow [20 \ : \ 100]$$

مثال 02: بالاعتماد على التمرين السابق، لنفرض الآن أن سعر المنتوج الثالث (X_3) الذي يكون خارج الأساس قد تغير بمقدار (α) مع بقاء كل العوامل الأخرى ثابتة، فما هو مقدار التغير الذي يبقي أساس الحل الأمثل المتحصل عليه سابقا بدون تغير.

إن تغير ربح المنتوج الثالث بمقدار (α) يعبر عنه رياضيا بتغير معامل (X_3) من 20 إلى$(20+\alpha)$، حيث تصبح دالة الهدف:

$$MAX\ Z^* = 40X_1 + 30X_2 + (20+\alpha)X_3$$

يصبح جدول الحل الأمثل كالآتي الذي تكون فيه (X_3) متغيرة خارج الحل الأمثل أو خارج الأساس، و (S_3, S_2) خارج الأساس و التي دخلت مكانها (X_2, X_1):

القاعدة	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	الحل
Z	0	0	5	0	5/2	35/4	625
S_1	0	0	7	1	-1	0	50
X_2	0	1	1/2	0	1/4	-1/8	5/2
X_1	1	0	1/4	0	-1/8	5/16	55/4

نعلم أن (X_3) هي خارج الحل أو الأساس، و حتى لا يتغير أساس الحل الأمثل في هذه الحالة يجب أن يتوفر الشرط الآتي

$$\alpha \leq 5$$

تعني هذه النتيجة أنه حتى لا يتغير أساس الحل، فإن مقدار الزيادة في ربح المنتوج الثالث يجب أن لا تزيد عن 5 وحدات نقدية، و العكس صحيح في حالة التدنية.

إذن حتى لا يتغير أساس الحل الأمثل في هذه الحالة يجب أن يكون تغير ربح المنتوج الثالث ضمن المجال:

$$]0 : 25[$$

ثانيا: أثر التغير في كمية الموارد:

نفرض في هذه الحالة أن كمية الموارد الخاصة بمورد معين قد تغيرت بمقدار (b_i) مع بقاء العوامل الأخرى ثابتة، فما هو مجال التغير الذي يبقي أساس الحل الأمثل بدون تغير. و نشير إلى أن الطرف الأيمن من الجدول (S_1, S_2, S_3) تمثل الموارد المتاحة، لذا سوف نعتمد عليها ، و للحصول مثلا على الكمية المستخدمة من المنتوج (X_2)، فإننا نقوم بضرب السطر الخاص بها في كمية الموارد كما يلي:

$$90(0) + 40\left(\frac{1}{4}\right) + ،60\left(\frac{-1}{8}\right) = \frac{5}{2}$$

مثال 03: نفس المثال السابق مع افتراض أن كمية مورد القيد الثاني قد تغيرت إلى (b_2):

$$2X_1+5X_2+3X_3 \leq ،b_2$$

ق	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	الحل
Z	0	0	5	0	5/2	35/4	$525 + \frac{5}{2}b_2$
S_1	0	0	7	1	-1	0	$90 - b_2$
X_2	0	1	1/2	0	1/4	-1/8	$\frac{-15}{2} + \frac{1}{4}b_2$
X_1	1	0	1/4	0	-1/8	5/16	$\frac{75}{4} - \frac{1}{8}b_2$

و نحصل على عناصر العمود الأخير للجدول السابق كما يلي:

السطر الأول: $90(1) + (-1)b_2 + 60(0) = 90 - b_2$

السطر الثاني: $90(0) + \frac{1}{4}b_2 + 60\left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{-15}{2} + \frac{1}{4}b_2$

السطر الثالث: $90(0) + (-\frac{1}{8})b_2 + 60\left(\frac{5}{16}\right) = \frac{75}{4} - \frac{1}{8}b_2$

سطر دالة الهدف: $90(0) + \frac{5}{2}b_2 + 60\left(\frac{35}{4}\right) = 525 + \frac{5}{2}b_2$

و حتي يبقى أساس الحل الأمثل بدون تغير لابد أن تكون كل عناصر العمود الأخير موجبة ما عدا الحل الأمثل:

$$\frac{75}{4} - \frac{1}{8}b_2 \geq 0 \quad \text{و} \quad \frac{-15}{2} + \frac{1}{4}b_2 \geq 0 \quad \text{و} \quad 90 - b_2 \geq 0$$

و هذا يعني أن:

$$30 \leq b_2 \leq 90 \;\rightarrow\; b_2 \epsilon [30 : 90]$$

و إذا افترضنا أن كمية مورد القيد الثالث قد تغيرت إلى (b_3) مع بقاء كل العوامل ثابتة، فإن مجال التغير لهذا النوع الذي يبقي أساس الحل الأمثل بدون تغير يجب أن (بنفس الطريقة السابقة):

$$16 \leq b_3 \leq 80 \;\rightarrow\; b_2 \epsilon [16 : 80]$$

و إذا افترضنا أن كمية مورد القيد الأول الذي هو خارج أساس الحل قد تغيرت إلى (b_1) مع بقاء كل العوامل ثابتة، فإن مجال التغير لهذا النوع الذي يبقي أساس الحل الأمثل بدون تغير يجب أن (بنفس الطريقة السابقة):

$$40 \leq b_1 \leq +\infty \;\rightarrow\; b_2 \epsilon [40 : +\infty[$$

ثالثا: أثر اضافة قيد جديد:

انسجاما مع ما يفرزه الواقع المتغير الذي تعمل فيه منظمات الأعمال، تجد المنظمة نفسها أمام حالة معينة تتطلب منها إضافة قيد جديد يعبر عن التغير الحاصل، و هذا يحتاج إلى اعادة صياغة نموذج البرمجة الخطية الخاص بأحد المشاكل التي تبحث لها المنظمة عن حل. و بالتأكيد فإن إضافة قيد جديد لمشكلة البرمجة الخطية سيؤثر على مزيج الحل الأساسي، و على قيمة دالة الهدف[8].

نفترض أنه يوجد قيد جديد (مدخلات) لم يأخذ بعين الاعتبار في بداية البحث عن الحل الأمثل، ذلك بسبب اعتقادنا بأن هذا النوع من المدخلات موجود بكميات معتبرة و لا يمكن أن يؤثر على النتيجة النهائية، لكن تبين لنا بعد ذلك أنه يمكن أن يؤثر هذا القيد على النتيجة، على هذا الأساس، ما هي الكمية اللازمة من هذا النوع من المدخلات حتى يبقى الحل الأمثل المحصل عليه بدون تغير؟.

8- جهاد صياح بني هاني، نازم محمود ملكاوي و فالح عبد القادر الحوري (2013)، **تطبيقات بحوث العمليات في إدارة الأعمال**، الطبعة الأولى، عمان: دار الحامد للنشر و التوزيع، ص 198.

مثال 04: بالاعتماد على التمرين السابق دائما، نفترض أنه لا بد من اضافة قيد خاص بنوع معين من المدخلات، حيث:

$$X_1 + 3X_2 + X_3 \leq b_4$$

ما هي الكمية الدنيا من هذا النوع من المدخلات التي يجب توفرها حتى يبقى الحل الأمثل بدون تغير؟.

إن اضافة قيد جديد يستلزم اضافة سطر جديد، نضيفه عادة في الأخير و ليكن (S_4):

القاعدة	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	الحل
Z	0	0	5	0	5/2	35/4	625
S_1	0	0	7	1	-1	0	50
X_2	0	1	1/2	0	1/4	-1/8	5/2
X_1	1	0	1/4	0	-1/8	5/16	55/4
S_4	0	0	a_{41}	0	a_{42}	a_{43}	b_4

هنا يجب أن نحسب العناصر $(a_{41}, a_{42}, a_{43}, b_4)$، لكن ما يهمنا نحن هو العنصر (b_4)، و نحسب هذه العناصر بالاعتماد على معاملات القيد الجديد الذي نضرب معاملاته في أعمدة الجدول السابق:

$$X_1 + 3X_2 + X_3$$

$$a_1 = \left(\frac{1}{4}\right)(-1) + \left(\frac{1}{2}\right)(-3) + 7 = \frac{25}{4}$$

$$a_2 = \left(-\frac{1}{8}\right)(-1) + \left(\frac{1}{4}\right)(-3) + 0 = \frac{-1}{8}$$

$$a_3 = \left(\frac{5}{16}\right)(-1) + \left(-\frac{1}{8}\right)(-3) + 0 = \frac{1}{16}$$

$$S_4 = b_4 + \left[\frac{55}{4}(-1) + \frac{5}{2}(-3) + 0\right] = b_4 - \frac{85}{4}$$

و حتى يبقى الجدول أعلاه أمثلا يجب أن يكون:

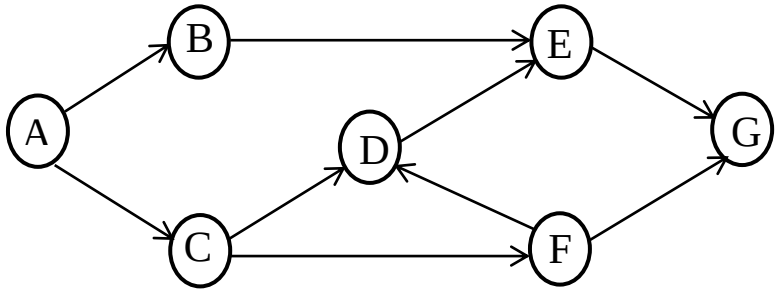
$$S_4 \geq 0 \rightarrow b_4 - \frac{85}{4} \geq 0 \rightarrow \ b_4 \geq \frac{85}{4}$$

يعني هذا أنه يجب أن تتوفر على الأقل $\frac{85}{4}$ من موارد النوع الرابع من المدخلات.

الفصل الرابع: نظريات الشبكات

تستعمل نظريات الشبكات في العديد من المجالات المتعلقة بمجال التسيير الأمثل للموارد، مثل أشغال الطرقات و شبكات الهاتف و الغاز و الكهرباء ....الخ، اضافة الى انجاز المشاريع، بذلك فهي تعتبر من أهم النظريات في حل الكثير من المسائل التطبيقية و الواقعية.

الشبكة هي هيكل يحتوي على مجموعة من العناصر (X) تسمى بالرؤوس و مجموعة أخرى من العناصر (U) تسمى بالأقواس، و يرمز للشبكة بالرمز $U(X)$. تمثل الرؤوس على الرسم بنقاط و الأسهم بأقواس[9]. أي أن الشبكة هي عبارة عن مجموعة من الخطوط المتصلة بنقاط او دوائر تسمى القمم، و يعبر كل خط عن اختيار معين كما يبينه الشكل التالي:



و تستخدم نظرية الشبكات بعض المصطلحات التي تدل على التعريف أو الاتجاه ...الخ:

1. **القمم**: هي النقاط التي تنطلق منها أو تصل اليها الخطوط الموجهة(الأقواس) أو غير الموجهة (الأحرف)، فمن الشكل السابق فأن القمم هي (A,B,C,D,E,F,G) .
2. **الأقواس (ARCS)**: القوس هو خط موجه أو سهم يتصل بين قمتين أو بين قمة الانطلاق و قمة الوصول، و من الشكل السابق فإن الأقواس هي:

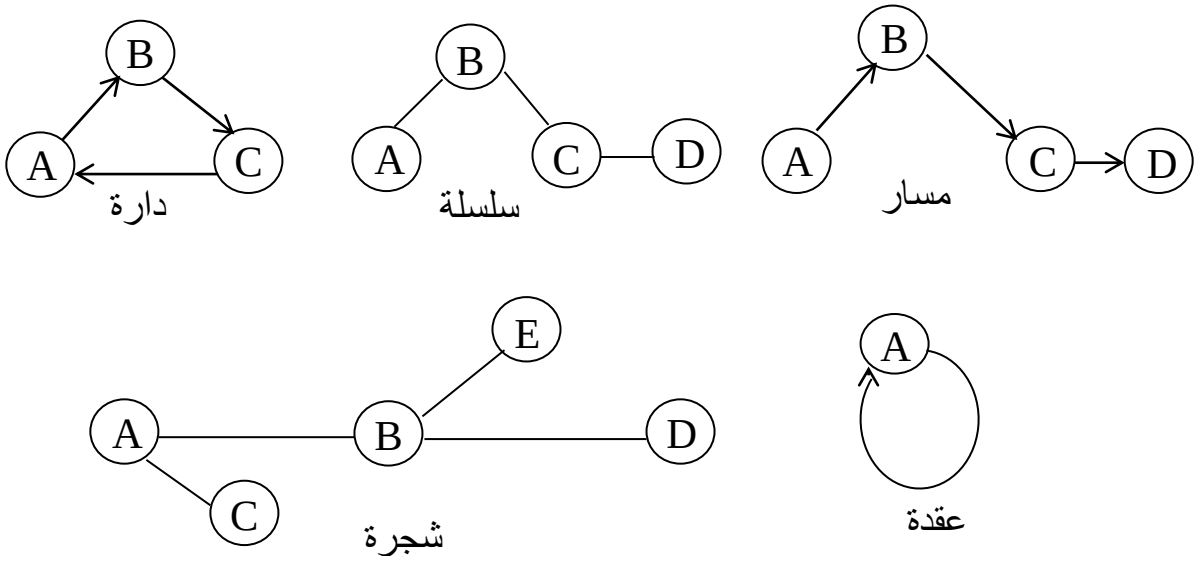
$$U: \{ (A,B), (A,C), (B,E), (C,D), (C,F), (D,E), (F,D), (E,G), (F,G) \}$$

3. **الحرف (ARETE)**: هو خط غير موجه بين قمتين و هو يكافئ قوسين متعاكسين حيث نستعمل الأحرف مثلا في الربط بين قرية و قرية بالخطوط الكهربائية.
4. **المسار (Chemin)**: هو مجموعة متتابعة من الأقواس يكون فيها كل قوسين مرتبط بالقوس السابق و ذلك باستثناء القوس الأخير من الشبكة (كما يوضحه الشكل اللاحق).

9- مكيد علي (2016)، **بحوث العمليات و تطبيقاتها الاقتصادية**، الجزء الثاني، الجزائر: ديوان المطبوعات الجامعية، ص143.

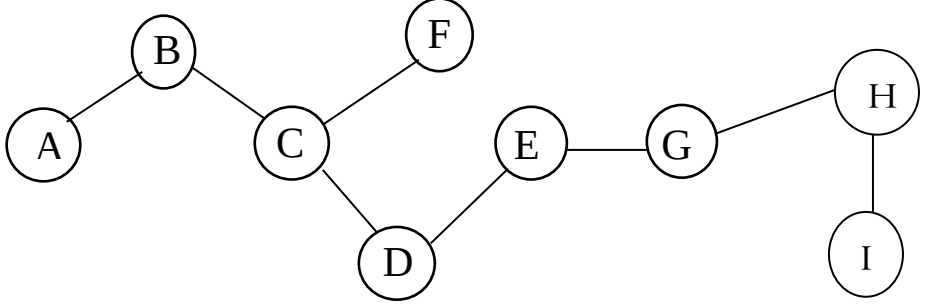
5. **السلسلة:** هي مجموعة متتابعة من الأحرف يكون فيها الطرف النهائي لكل حرف هو الطرف الابتدائي للحرف الموالي.
6. **الدارة(Circuit)**: هي مسار مغلق على نفسه، حيث يكون فيه الطرف النهائي للقوس الأخير متصل بالطرف الإبتدائي.
7. **العقد(Bouche)**: هي سهم طرفه الابتدائي هو نفسه طرفه النهائي.
8. **الشجرة:** هي شبكة مترابطة بدون حلقة (بدون دارة).

و يمكن أن نبين هذه المصطلحات في الأشكال الآتية:



أولا: نظرية الشجرة المثلى.

الشجرة هي عبارة عن شبكة غير موجهة و مترابطة، و لا تحتوي على أي حلقة(دارة)، أي أنها مجموعة من الأحرف المترابطة فيما بينها عبر مجموعة من القمم دون أن تشكل حلقة مع بعضها البعض، كما يبينه الشكل التالي:



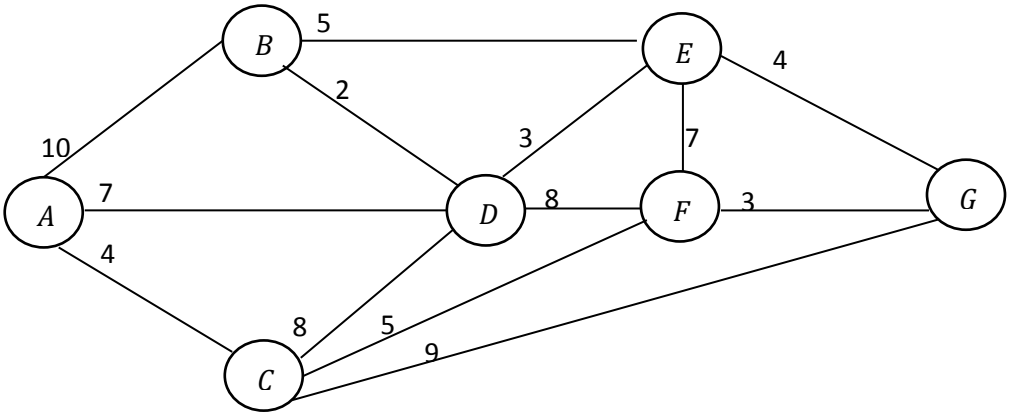
و تستعمل الشجرة المثلى عند ربط عدد من الاماكن بشبكة الكهرباء أو المياه أو الغاز ...الخ، أو تستعمل بهدف التحليل و انجاز المشاريع بأقل التكاليف أو التي تحقق أعلى ربح.

تتعلق المشكلة الرئيسية في الجدولة في البحث عن المسار الأمثل يكون فيه الشكل بدون دارة[10].

1. حالة التدنية:

يهدف التوضيح نفترض المثال التالي:

مثال 01: تريد المؤسسة الوطنية ربط قرى ريفية بشبكة المياه، و قد بينت الدراسات الأولية امكانية الربط بين هذه القرى و تكاليف الربط بآلاف الدنانير كما هو موضح في الشكل التالي:



(A,B,C,D,E,F,G) تمثل القمم التي تعبر عن القرى، و الخطوط الممكنة تمثل الأحرف، و نلاحظ أنه لا توجد أحرف(ربط) بين بعض القمم (القرى) و هذا بسبب وجود موانع طبيعية كالجبال و الغابات...الخ، أو وجود موانع اخرى، و تكلفة انجاز قنوات المياه بين كل قرية تظهر بجانب الحرف بآلاف الدنانير.

و المطلوب منا هو اقتراح الشبكة الممكنة الت يتسمح بتزويد كل القرى بالمياه و بأقل تكلفة.

يمكن أن نكتب الشبكة التي تبين الخطوط الواصلة بين كل قمة و قمة اخرى بالجدول الآتي، و الذي هو عبارة عن مصفوفة متناظرة كما يلي:

القمم	A	B	C	D	E	F	G
A	-	10	4	7	-	-	-
B	10	-	-	2	5	-	-
C	4	-	-	8	-	5	9
D	7	2	8	-	3	8	-
E	-	5	-	3	-	7	4
F	-	-	5	8	7	-	3
G	-	-	9	-	4	3	-

[10] - Jean-François Phelizon (1998), **Méthode et modèles de la recherche opérationnelle**, Paris :Ed ECONOMICA, P105.

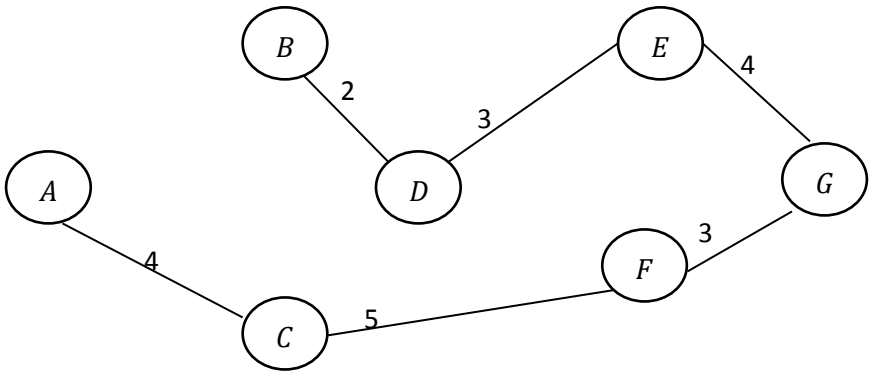
و في كل هذه المسائل نقوم بالبحث عن الشجرة المثلى، حيث تعتمد على طريقة كريسكال (Kruskal) التي تتبع الخطوات الآتية:

- نرتب الأحرف من الأقل قيمة إلى الاكبر، ثم نأخذ الأحرف الأقل قيمة و نرسمها مع أخذ الحرف الذي يشكل لنا حلقة (دارة).
- نستمر في العملية حتى نحصل على شجرة عدد أحرفها $(n-1)$.
- نحسب التكلفة الأقل أو المسافة الأقل ..الخ بجمع الاحرف التي شكلت لنا شجرة.

و لحل المثال(1) نستعين بالجدول الآتي لترتيب الاحرف من الأقل إلى الأعلى كما يلي:

الترتيب	الأحرف	الحمولة
1	BD	2
2	DE	3
3	FG	3
4	AC	4
5	EG	4
6	BE	5
7	CF	5
8	AD	7
9	EF	7
10	CD	8
11	DF	8
12	CG	9
13	AB	10

نختار أقل حمولة و هي $(BD=2)$ ثم الحرف $(DE=3)$ و نرسمهما، و نستمر هكذا مع اهمال كل حرف يمكن أن يشكل حلقة، فمثلا عند رسم $(EG=4)$ فإنه لا يمكن رسم الحرف $(BE=5)$ لأنه يشكل حلقة بذلك تنتقل الى رسم $(CF=5)$.



نلاحظ أن عدد أحرف الشجرة يساوي $(n-1=7-1=6)$ و بتكلفة قيمتها تساوي مجموع حمولات الأحرف:

$$Z = 4 + 5 + 3 + 4 + 3 + 2 = 21$$

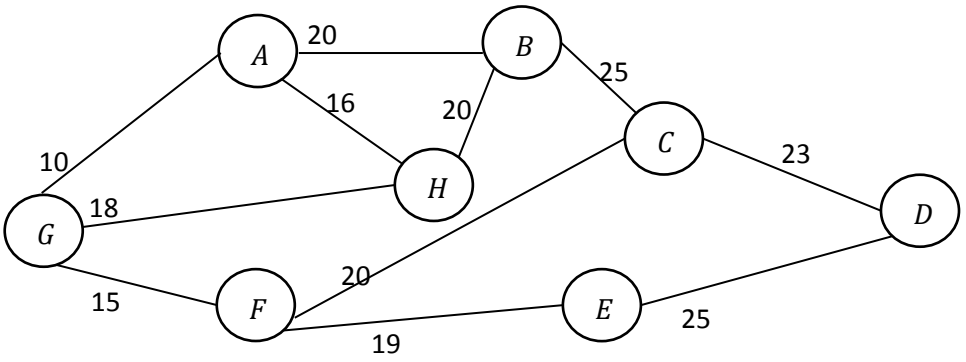
و بذلك فإن أقل تكلفة التي تسمح بربط جميع القرى بقنوات المياه هي 21 ألف دج.

2. حالة التعظيم:

إذا كانت الاشكالية المطروحة هي البحث عن أعلى عائد أو ربح بين مجموعة من المناطق، يمكن الاستعانة بنفس المبدأ الذي اعتمدنا عليه في طريقة كريسكال، لكن بشكل معاكس باتباع الخطوات الآتية:

- نرتب الأحرف من الأعلى إلى الأقل، ثم نأخذ القيمة الأكبر و نرسمها مع الحرص على عدم أخذ الحرف الذي يشكل حلقة.
- تستمر في العملية حتى نحصل على شجرة عدد أحرفها $(n-1)$.

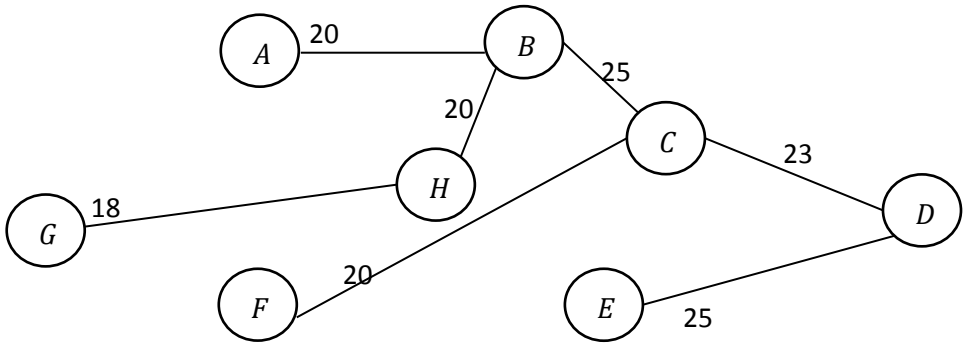
مثال 02: تريد المؤسسة الوطنية للكهرباء و الغاز ربط مجموعة من الأحياء الجديدة بالكهرباء، و قد بينت الدراسات الأولية امكانية ربط كل الاحياء مع الأرباح كما يبينه الشكل الآتي(الأرباح بآلاف الدنانير شهريا):



المطلوب منا ايجاد الشبكة التي تمكن الشركة من ربط كل الأحياء بالكهرباء و بأعلى ربح ممكن.

أولا نقوم بترتيب الأحرف من الأعلى قيمة الى الأقل كما يبينه الجدول الآتي:

الترتيب	الحرف	الحمولة
1	BC	25
2	ED	25
3	CD	23
4	AB	20
5	BH	20
6	CF	20
7	EF	19
8	GH	18
9	AH	16
10	GF	15
11	AG	10



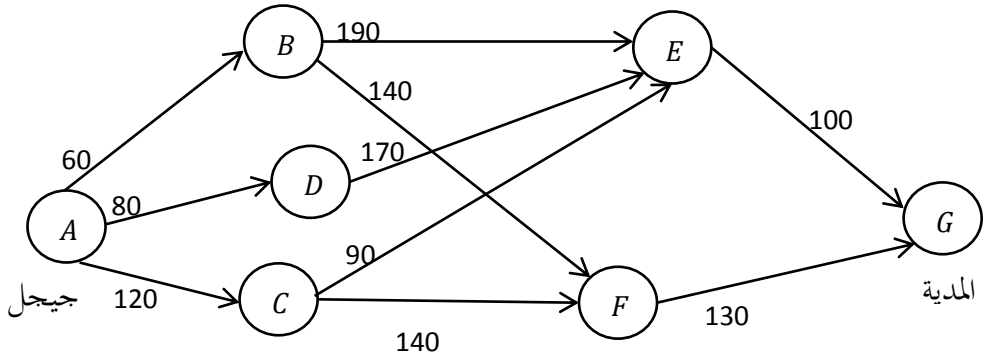
اذن الحل الذي يمكن الشركة من ربط كل الأحياء بالكهرباء و بأعلى ربح ممكن هو 151 ألف دينار شهريا.

$$Z = 20 + 25 + 23 + 25 + 20 + 20 + 18 = 151$$

ثانيا: نظرية المسارات المثلى.

يهدف متخذ القرار في الشركة أو المؤسسة الى أيجاد أو البحث عن المسار الأمثل الذي بين نقطتين محددتين من بين مجموعات كبيرة من المسارات ضمن شبكة موجهة، و ذلك دون اشتراط المرور بجميع القمم.

مثال 03: تريد شركة النقل اللوجستيكي نقل مولدات كهربائية من الحجم الكبير من ميناء جيجل إلى ولاية المدية، و قد اقترح مسؤولو الشركة عدد من المسالك التي يمكن اتخاذها من ميناء جيجل (A) الى المدية (G) كما تبينه الشبكة الآتية للمسالك الرئيسية و المدن الممكن المرور بها، و كذلك المسافات بين المدن بالكيلومتر.



أوجد ايجاد أقصر مسار أو طريق يمكن المرور به، مع تحديد المدن التي يجب المرور عبرها للوصول الى (G).

نلاحظ أن مثل هذه المسائل تختلف عن نظرية الشجرة المثلى، حيث أن هذه الأخيرة تشترط دخول جميع القمم في الحل الأمثل و أن الوصول بين كل قمة و أخرى عبارة عن حرف، أي يمكن أن يأخذ في الاتجاهين، بينما نظرية المسارات المثلى فهي لا تشترط المرور بجميع القمم، بل تهدف إلى إيجاد أقصر طريق يربط بين

القمة الابتدائية و القمة النهائية للشبكة، كما أن الربط بين القمم يتم عن طريق أسهم (قوس)، أي أنه يأخذ اتجاه واحد.

بالعودة إلى المثال(03) نستطيع كتابة مصفوفة السعة للشبكة و التي لا تكون متناظرة كما يلي:

القمم	A	B	C	D	E	F	G
A	-	60	120	80	-	-	-
B	-	-	-	-	190	140	-
C	-	-	-	-	90	140	-
D	-	-	-	-	170	-	-
E	-	-	-	-	-	-	100
F	-	-	-	-	-	-	130
G	-	-	-	-	-	-	-

1. حل مسائل المسارات المثلى:

لحل مثل هذه المسائل نستعمل طريقة فورد، و ذلك باتباع الخطوات الآتية:

- نعيد تسمية قمم الشبكة، حيث نسمي قمة الانطلاق (a_0) و القمة الموالية (a_1) حتى نصل إلى القيمة النهائية (a_{n-1})، مع العلم أن العدد الكلي للقمم هو (n).
- نضع $(\lambda_0 = 0)$ فوق القمة (a_0) ، و نضع $(\lambda_i = \infty)$ بجانب القمم (a_i).
- نفرض أن $C(a_i a_j)$ هي حمولة القوس $(a_i a_j)$

مرحلة الذهاب:

- تكون كل قمة(a_j): $\lambda_j - \lambda_i > C(a_i a_j)$

ثم نقوم بتعويض λ_j بالقيمة $\lambda_j = \lambda_0 + (a_i a_j)$.

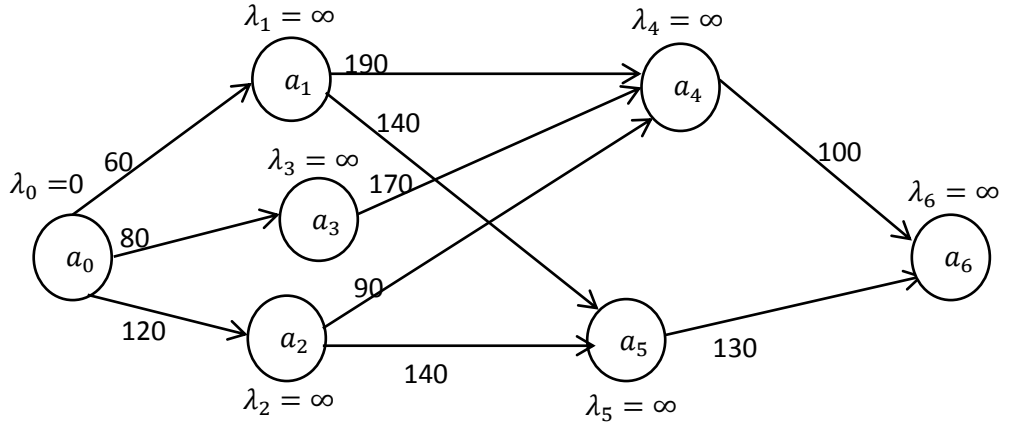
تستمر في العملية حتى يستحيل تغيير أي من λ_j.

مرحلة الإياب:

- نبدأ من قمة الوصول (a_{n-1}) و نطرح a_p من القمة (λ_{n-1})و نأخذ القوس الذي تكون فيه $\lambda_{n-1} - \lambda_p = C(a_i a_j)$ و يكون هذا القوس من ضمن الأقواس التي تشكل لنا أقصر مسار، و الذي تقوم برسمه على الشبكة بخط غليظ لنميزه عن غيره من الأقواس.

ثم ننتقل الى القمة (a_{n-2}) و نتبع نفس الخطوات السابقة حتى ننتهي من فحص جميع الأقواس، و في النهاية يتحدد لنا المسار المطلوب، حيث تستخرج الخطوط الغليظة التي تشكل المسار بين القمة الابتدائية و النهائية.

للتوضيح نستعين بالمثال (03)، حيث نعيد أولا تسمية قمم الشبكة، حيث نضع(a_0) مكان (A)و (a_1) مكان (B) إلى غاية (a_6) مكان (G) كما هو موضح في الشكل أدناه:



- تقوم الآن بفحص الأقواس التي تنطلق من القمة (a_0) هي: $(a_0a_1), (a_0a_2), (a_0a_3)$، حيث نجد عند القمة (a_1):

$$\lambda_1 - \lambda_0 = \infty - 0 > C(a_0a_1) = 60 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_0 + 60 = 60$$

أي نقوم باستبدال $\lambda_1 = \infty$ بالقيمة 60.

عند القمة(a_2) نجد: $\lambda_2 - \lambda_0 = \infty - 0 > C(a_0a_2) = 80 \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_0 + 80 = 80$

عند القمة (a_3) نجد: $\lambda_3 = 120$.

- الأقواس التي تنطلق من القمة(a_1) هي $(a_1a_4), (a_1a_5)$

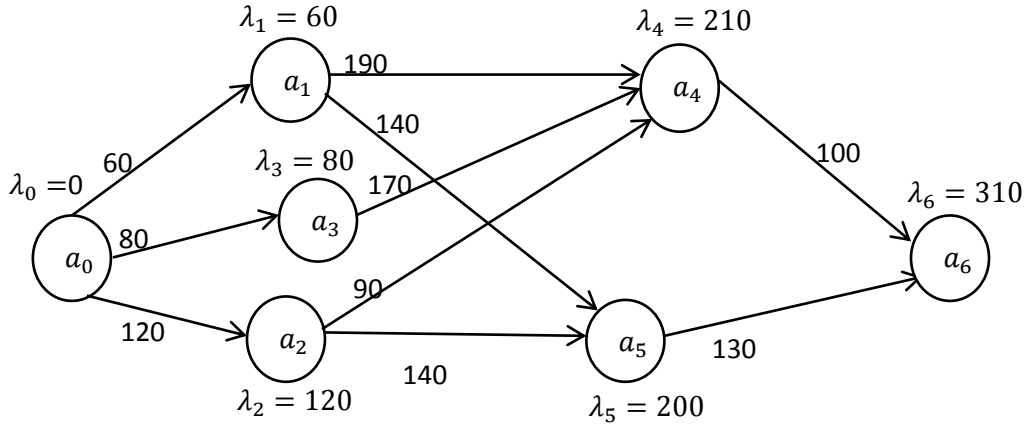
$$\lambda_4 - \lambda_1 = \infty - 60 > C(a_1a_4) = 190 \Rightarrow \lambda_4 = 60 + 190 = 250$$

$$\lambda_5 - \lambda_1 = \infty - 60 \Rightarrow \lambda_5 = 200$$

عند القمة(a_4) لا نأخذ $\lambda_4 = 250$ لأننا في حالة التدنية، و بما أن القمة (a_4) لديها ثلاث مسارات فإننا نختار المسار الذي يحقق لها أقل تكلفة أو طريق و بذلك نختار:

$$\lambda_4 - \lambda_3 = \infty - 120 > C(a_3, a_4) = 90 \Rightarrow \lambda_4 = 120 + 90 = 210$$

و نكمل بنفس الطريقة حتى نحصل على:



بالتالي فإن أقصر مسار بين (a_0) و (a_6) هو 310، غير أن الإشكالية تتعلق بالمسار، و هنا يمكن معرفة الأقواس التي يجب اتباعها بكل بساطة للوصول إلى القمة النهائية بمسافة تقدر ب 310 كلم، لكن لا يمكن ذلك في الشبكات المعقدة، لذا يجب اتمام المرحلة الثانية (الإياب)لتحديدي المسار الصحيح كما يلي:

الأقواس التي تصل إلى (a_6) هي $(a_4a_6), (a_5a_6)$ حيث نحسب:

$$\lambda_6 - \lambda_4 = 310 - 210 = 100$$

$$\lambda_6 - \lambda_4 = C(a_4a_6)$$

اذن هي تساوي طول القوس، بذلك فإن القوس (a_4a_6) ينتمي إلى المسار الأقصر (U) و نكتب $(a_4, a_6) \in U$ و الذي يجب أن نميزه بخط غليظ.

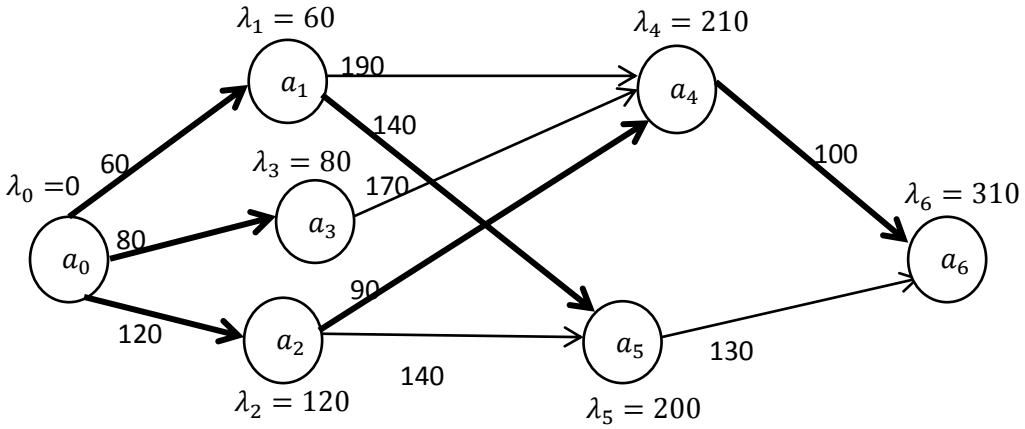
و نجد من (a_5): $\lambda_6 - \lambda_5 = 310 - 200 = 90$

$$\lambda_6 - \lambda_5 \neq C(a_4a_6)$$

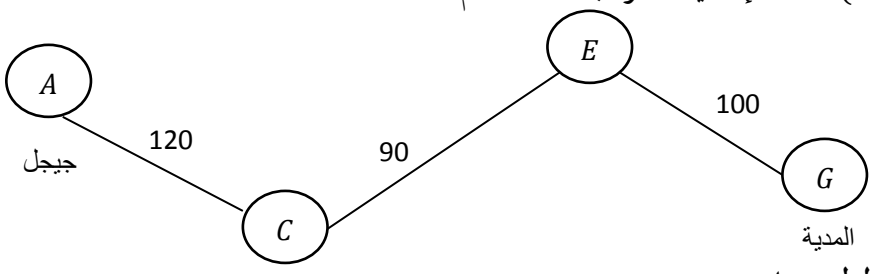
القوس (a_5a_6) لا ينتمي إلى المسار الأقصر.

بنفس الطريقة نحسب عند (a_1): $\lambda_4 - \lambda_1 = 210 - 60 = 150$

القوس (a_1a_4) لا ينتمي إلى المسار الأقصر، و نواصل نفس العملية حتى نحصل على الشبكة الآتية:



و للحصول على أقصر مسار يجب المرور من جيجل (A) إلى النقطة أو المدينة (C) ثم إلى المدينة (E) و في الأخير إلى المدية (G) بمسافة إجمالية تقدر ب 310 كلم.



2. البحث عن أطول مسار:

للبحث عن أطول مسار ضمن شبكة موجهة نعتمد على نفس المبدأ لفورد كما تطرقنا إليها في حالة التدنية، لكن بشكل معاكس بإتباع الخطوات التالية:

- نعيد تسمية قمم الشبكة كما فعلنا سابقا، ثم نضع $\lambda_0 = 0$ بجانب (a_0) و $\lambda_i = 0$ بجانب القمم الأخرى.
- نفرض أن $C(a_i a_j)$ هي حمولة القوس $(a_i a_j)$.

مرحلة الذهاب: في كل قمة (a_j) يكون لدينا:

$$\lambda_j - \lambda_i < C(a_i a_j)$$

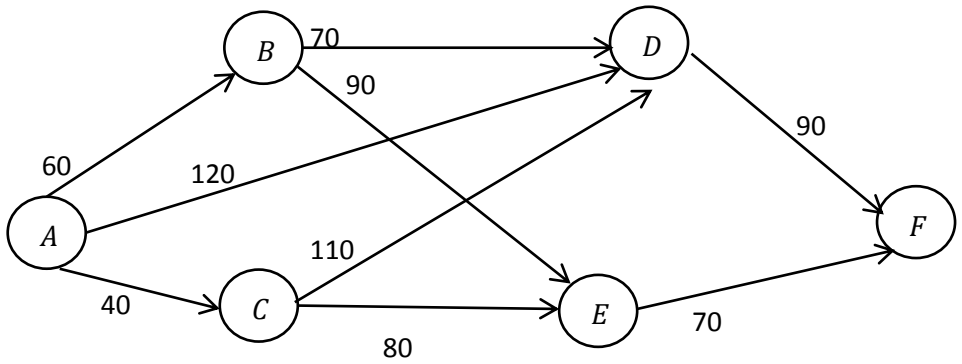
نعوض (a_j) بالقيمة $\lambda_i + C(a_i a_j)$، ثم نستمر في العملية حتى يستحيل تغيير أي من (λ_j).

مرحلة الإياب : نبدأ من قمة الوصول (a_{n-1})و نطرح القيمة (λ_p) الموجودة في الأطراف الإبتدائية للأقواس التي تصل إلى (a_{n-1}) من (λ_{n-1})، و نأخذ القوس الذي تكون فيه:

$$\lambda_{n-1} - \lambda_p = C(a_i, a_j) .$$

و يكون هذا القوس ضمن الأقواس التي تشكل لنا أطول مسار، و الذي تقوم برسمه بخط غليظ، ثم ننتقل إلى القمة (a_{n-1}) و تقوم بنفس الخطوات حتى تنتهي من فحص جميع الأقواس.

مثال 04: أوجد أطول مسار الذي يربط بين النقطة (A) و النقطة (F) للشبكة الآتية (نفرض أن المسار الذي يحقق أعلى عائد) للسائقين:



الحل:

- الأقواس التي تنطلق من القمة (a_0) هي (a_0, a_1) ، (a_0, a_2) و (a_0, a_3).

عند القمة (a_1)نجد

$$\lambda_1 - \lambda_0 = 0 - 0 < C(a_0 a_1) = 60 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_0 + 60 = 60$$

و نجد عند القمة(a_2):

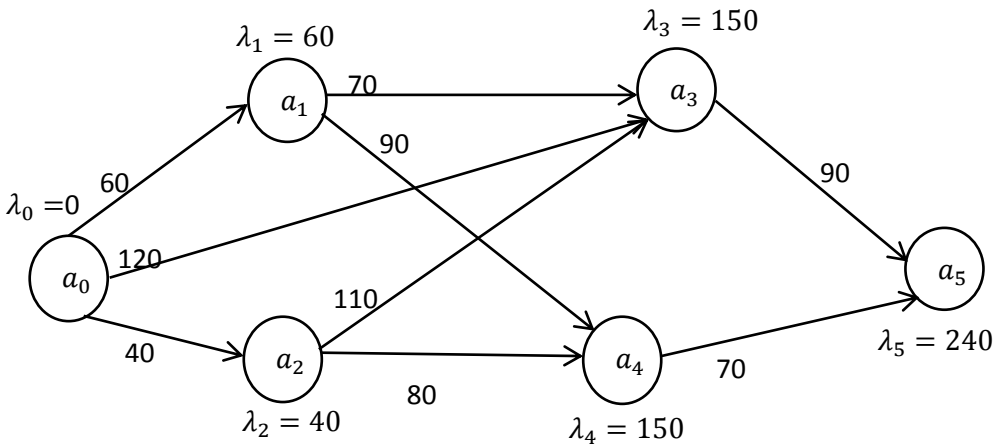
$$\lambda_2 - \lambda_0 = 0 - 0 < C(a_0 a_2) = 40 \Rightarrow \lambda_2 = 40$$

- الأقواس التي تنطلق من القمة (a_2) هي $(a_2 a_3)$ و $(a_2 a_4)$:

و نجد عند القمة(a_3):

$$\lambda_3 - \lambda_2 = 0 - 60 < C(a_2 a_3) = 70 \Rightarrow \lambda_3 = 60 + 70 = 130$$

عند القمة (a_3) لا نأخذ $(\lambda_3) = 13$ و إنما نأخذ $(\lambda_3) = 150$ (لأننا في حالة التعظيم) هذا لأن (a_3) لديها ثلاثة مسارات و بالتالي نختار المسار الأطول و هو (a_2, a_3)، و نكمل بنفس المنوال، حيث نحصل على التالي:



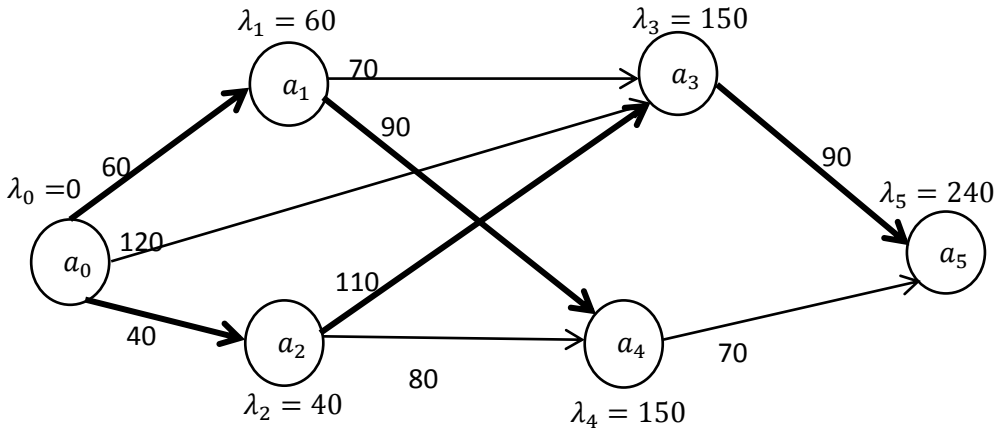
مرحلة الإياب: نقوم بفحص الأقواس التي تصل إلى القمة و هي $(a_3 a_5)$ و$(a_4 a_5)$.

عند القمة (a_3) نجد: $\lambda_5 - \lambda_3 = 240 - 150 = 90 = (a_3, a_5)$

إذن القوس (a_3, a_5) ينتمي إلى المسار الأطول و الذي نميزه بخط غليظ.

عند القمة (a_4) نجد: $\lambda_5 - \lambda_4 = 240 - 150 = 90 \neq 70 = (a_4 a_5)$

القوس $(a_4 a_5)$ لا ينتمي إلى المسار الأطول و نكمل العملية بنفس المنوال حتى نحصل على:



أطول مسار في هذه الحالة هو الذي ينطلق من (A)إلى (C) ثم إلى(D) ، و في الأخير إلى (F) بربح يقدر 240.

ثالثا: نظرية التدفق الاعظمي

يقصد بنظرية التدفق الأعظمي ارسال أكبر قدر ممكن من الكميات من مجموعة من المنابع إلى مجموعة من المصبات ، ذلك تحت قيد محدودية طاقة نقل الأقواس في الشبكة، و تستخدم نظرية التدفق الأعظمي خاصة في شبكات النقل الطويلة .

و يمكن أن تكون المادة المنقولة بضائع يتم نقلها عبر الشاحنات أو البواخر...الخ و التي تكون طاقة نقلها محدودة وأن مناطق نقلها (المصب) تكون بدورها محدودة، كما يمكن أن تكون المادة المنقولة سوائل مثل الغاز، النفط، الماء...الخ و التي يتم نقلها عبر الأنابيب أو القنوات حيث تكون كل من طاقة تصريفها و استقبالها محدودة أيضا، على هذا الأساس فإن الأنابيب تمثل الأقواس لنقل المادة السائلة.

لإيجاد التدفق الأعظمي بين هذه المنابع و هذه المصبات يتم استخدام طريقة فورد–فلكرسون اتي تهدف إلى البحث عن تمرير أكبر كمية ممكنة من المادة المراد نقلها عبر الأقواس المحدودة الطاقة إلى نقطة الخروج (S)، دون الأخذ بعين الإعتبار التكاليف التي لا تظهر في الشبكة.

مثال(04): لدى شركة سونطراك ثلاث خزانات رئيسية للغاز الطبيعي هي (a) و(b)،(c) لتموين أربع دول عبر الأنابيب هي (d, e, f, g)، حيث يستطيع الخزان (a) ضخ 18 مليون م^3 شهريا، و الخزان (b) يستطيع ضخ 10 مليون م^3 و الخزان (c) يستطيع ضخ 8 مليون م^3. بينما تقدر احتياجات البلد d ب10مليون م^3 شهريا و البلد e احتياجاته 6 مليون م^3، البلد f احتياجاته 7 مليون م^3، و البلد g احتياجاته 10مليون م^3 كما توجد عدة قنوات تصل الخزانات بالبلدان المستوردة، حيث طاقة تصريف كل منها محددة و هي موضحة كما يلي:

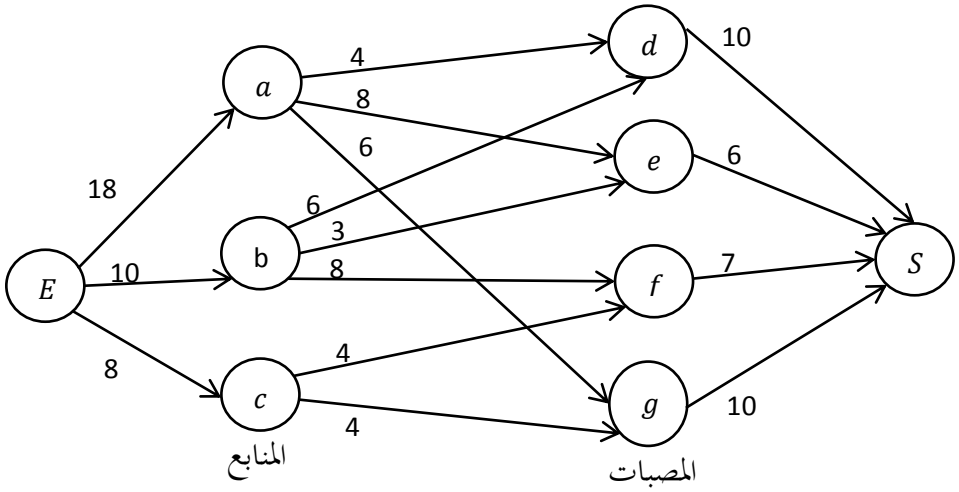
المصبات / المنابع	d	e	f	g
a	4	8	-	6
b	6	3	8	-
c	-	-	4	4

تتمثل الإشكالية هنا في البحث عن أفضل تموين ممكن لمختلف الدول عبر شبكة النقل المتاحة، أي إيجاد أعظم تدفق ممكن من الخزانات الثلاث إلى الدول الأربع في ظل وجود قيد طاقة التصريف للأنابيب.

لإيجاد الحل الأمثل نستخدم طريقة Ford-Fulkerson و التي تستوجب المرور على مرحلتين أو خطوتين[11]:

1. رسم شبكة باتباع الخطوات الآتية:

- تحديد نقطة و التي نسميها مدخل الشبكة و نرمز لها بالرمز E .
- تحديد قمم المنابع (i) ثم نوصل بين قمة المدخل و قمم المنابع بأقواس، حيث أن طاقة حمولتها تساوي طاقة تصريف كل منبع.
- نحدد المصبات (إلى اليمين) و نوصلها بالمنابع عن طريق أقواس حيث تحدد طاقة تصريف كل قوس(طاقة كل أنبوب).
- نحدد نقطة أخرى خارج الشبكة إلى اليمين من المصبات و نسميها مخرج الشبكة S، حيث نقوم بربطها مع المنابع بالأقواس، و التي تمثل حمولتها طاقة الاستقبال، و هذا كما توضحه الشبكة الخاصة بالمثال (04):



11- راجع في ذلك:

محمد راتول (2006)، **بحوث العمليات**، الطبعة الثانية، الجزائر: ديوان المطبوعات الجامعية، ص ص 274-285.

1. البحث عن الحل الأمثل:

- نبدأ من الأقواس التي تخرج من قمة المدخل و تقوم بإرسال تدفق ما، مع مراعاة أن تكون الكميات الداخلة تساوي الكميات الخارجة و دون تجاوز نقل كل قوس.
- نقوم بتحسين التدفق حتى يكون كل مسار من المدخل E حتى المخرج S، حيث يكون لدينا على الأقل قوس مشبع، و الذي يشير إلى القوس الذي ينقل كمية تساوي تماما طاقة نقله القصوى.
- ننطلق من القمة E و نقوم بتوسيمها بالإشارة $(+)$، ثم تقوم بالبحث عن القوس غير المشبع الذي ينطلق من i إلى j، فإذا كان القوس غير مشبع نضع بجوار القمة j العلامة$(+)$. أما إذا كان القوس غير مشبع فإننا يجب أن نتأكد من وجود قوس غير معدوم ينطلق من القمة j إلى القمة k، حيث إذا كان القوس غير معدوم نضع بجوار القمة j العلامة $(-)$، و نعيد الكرة من جديد، حيث نقوم بتوسيم القمة في كل مرة بالرمز $(+)$ أو $(-)$.
- إذا استحالت الإجابة و لم نقم بتوسيم المخرج (S) فإن التدفق يكون أعظميا، لكن إذا قمنا بتوسيم المخرج فإن التدفق يكون غير أعظمي، و هنا ينبغي علينا تحسين الحل.

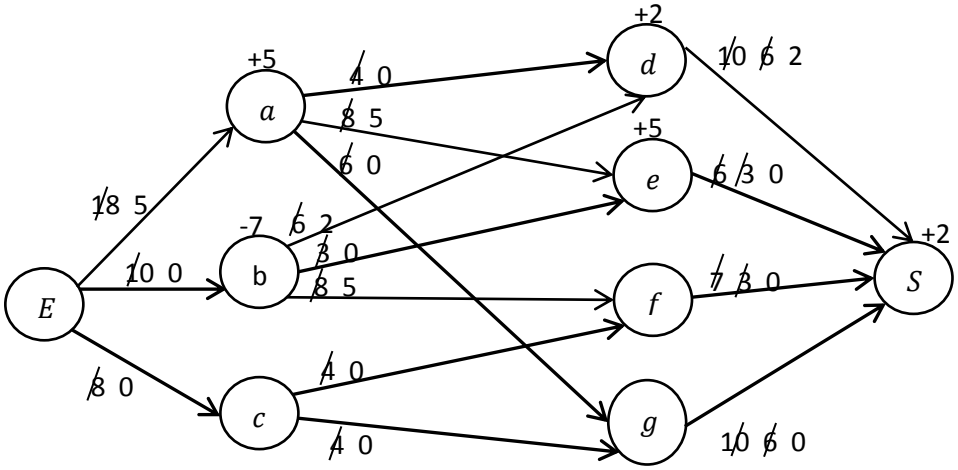
بالعودة إلى مثالنا فإننا نبدأ من القمة (E) التي يتم بموجبها إرسال أي كمية مع مراعاة قدرات الأقواس التي تخرج من القمة الموالية (شرط ضروري)، حيث إذا ارسلنا من القوس (Ec) الكمية 8 فإنه يمكننا تصريفها كلية عبر الأقواس (cf) و (cg) و المقدرة لكليهما ب 8، و بدورها فإن الكمية التي تمر عبر القوسين (cf) و (cg) يمكن أن تمر كلها إلى القمة (S) عبر القوسين(fS) و (gS)، على هذا الأساس يكون القوسين (cf) و (cg) مشبعين و الذي نؤشره بخط غليظ، لكن القوسين (fS) و(gS) يبقيان قادرين على الإستقبال لأن الكميتين التي تم تمريرهما غير كافيتين $(3 = 4 - 7)$ و$(6 = 4 - 10)$ على التوالي، و ذلك كما هو موضح في الشكل الآتي.

نعود إلى القمة (E) و نقوم بتمرير 10 مليون م^3 شهريا عبر القوس (Eb)، و بما أن طاقة تصريفه أقل من الكمية التي يتم تصريفها عبر القنوات (bd) و(be)و (bg)، و بذلك فإن القوس (Eb) مشبع و أن الكمية التي تصل إلى القمة (b) هي 10 و التي يتم تصريفها كما يلي:

نمرر 3 مليون م^3 عبر القوس (be) لأن طاقة تصريفه 3 بذلك فهو يشبع، و يمكن تمرير هذه الكمية عبر القوس (eS) لكنه غير مشبع $(3 = 3 - 6)$،و نقوم هنا بشطب 6 و تعويضها بالكمية 3، و هنا يبقى

لدينا 7 مليون م^3 في القمة (b)، و بما أن طاقة القوس (bf) هي 8، لكن ما يحتاجه القوس (fs) هو 3 لكي يشبع فإننا نقوم بتمرير 3 م م^3 عبر القوس (bf) و التي تمر كذلك نفس الكمية عبر (Eb) و بذلك فإن القوس (fS) يشبع، و على هذا الأساس فإن الكمية المتبقية عند القمة (b) هي $(10 - 3 - 3 = 4)$ و التي يتم تمريرها عبر القوس (bd) و التي تمر بدورها إلى القمة (S)، لكن طاقة القوس (bd) $(6 - 4 = 2)$ تبقى غير مستغلة، و يبقى كذلك القوس (dS) غير مشبع.

نرجع مرة أخرى إلى القمة (E) أين نلاحظ أن الأقواس التي تنطلق من (a) كميتها $(4 + 8 + 6 = 18)$ و هي تساوي القيمة التي يتم ايصالها من (Ea)، لكن لو تم تمرير كل هذه الكمية فإنه لا بد من اشباع كل الأقواس (ad) و (ae) و (ag)، و لو تم ذلك فإن القوس (eS) لا يتحمل لأن الطاقة المتبقية له هي 3م م^3، أما بقية الأقواس فلا نطرح أي إشكالية، بذلك فإن الكمية التي يجب إيصالها من القمة (E) إلى القمة (a) هي $(4 + 3 + 6 = 13)$ و التي يتم تصريفها عبر (ad) بكمية 4م م^3 (يشبع) و عبر (ae) بكمية 3م م^3 (لا يشبع) و عبر (ag) ب 6م م^3، لكن القوس (dS) لا يشبع.



هنا يجب أن تكون الكميات الداخلة تساوي الكميات الخارجة، و للتأكد فإن الكمية التي تدخل القمة (a) هي 13 و الكمية التي تخرج عبر الأقواس (ad)و (ae) و (ag) هي $(4 + 3 + 6 = 13)$، و هو نفس الحال بالنسبة للقمة (b) و القمة (c) التي تخرج منهما 10 و 8 على التوالي، و كذلك هو الحال للقمم الأخرى.

إن التدفق الذي حصلنا عليه حتى الآن الذي يظهر في الشبكة ما هو إلا حلا أوليا يمكن التعبير عنه في الجدول الآتي:

المصب / المنبع	d	e	f	g	الكمية المصرفة
a	4	3	-	6	13
b	4	3	3	-	10
c	-	-	4	4	8
الكمية المستقبلة	8	6	7	10	31

إذن ما تم تصريفه هو 31م م^3 و الذي تم استقباله من طرف المصبات.

و نفسر هذا على أنه يتم ارسال كمية 13 م م^3 من الخزان (a) عبر الأنبوب (ad) يتدفق 4م م^3 و الأنبوب (ae) بتدفق 3 م م^3 و الأنبوب (ag) بتدفق 6 م م^3. و يتم إرسال 8 م م^3 من الخزان (c) عبر الأنبوب (bd) بتدفق 4 م م^3 و الأنبوب (be) بتدفق 3 م م^3 و الأنبوب (bf) بتدفق 3م م^3 شهريا . و يتم إرسال 8 م م^3 عبر الأنبوب (cf) بتدفق 4 م م^3 و الأنبوب و (cg) بتدفق 4 م م^3.

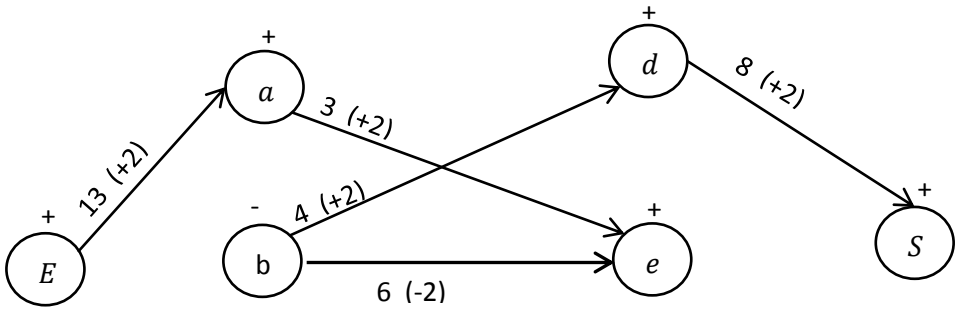
أما ما يتم استقباله فهو 31 م م^3 شهريا من الغاز، حيث تستقبل الدولة (d) 8م م^3 موزعة عبر الأنبوبين (ad) بطاقة 4 م م^3 و(bd) بحمولة 4 م م^3، و تستقبل الدولة e ما مقداره 6 م م^3 عبر الانبوبين (ae) و (be)بطاقة 3 م م^3 لكل منهما، كما تستقبل الدولة f ما قيمته 7 م م^3 عبر الأنبوبين (bf) بطاقة 3 م م^3 و (cf)بطاقة 4 م م^3، و في الأخير تستقبل الدولة g ما مقداره 10 م م^3 عبر الأنبوبين (ag) بطاقة 6 م م^3 و(cg) بطاقة 4 م م^3.

2. اختبار الحل و تحسينه:

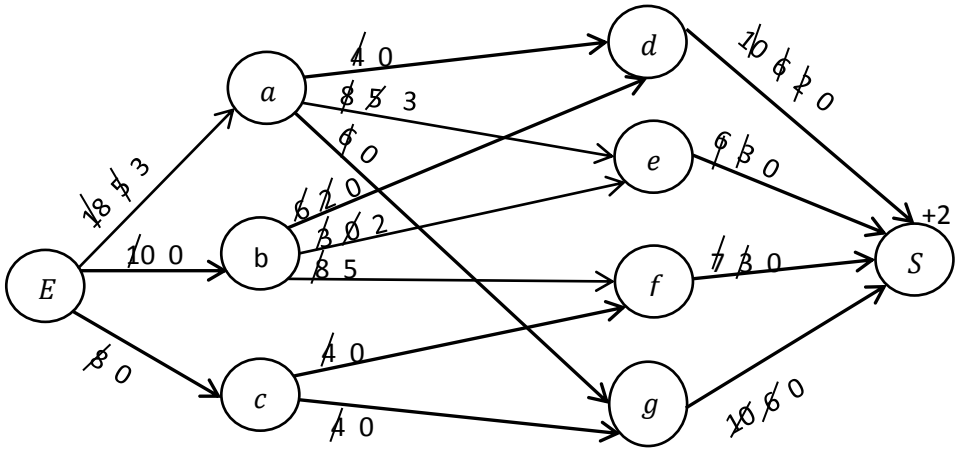
بعد الحصول على الحل الأساسي الأول يتم اختباره إذا كان أمثلا أم لا، و ذلك باتباع الخطوات التالية:

- نقوم بتوسيم القمة (E) بالإشارة $(+)$ و نبحث ما إذا كان هناك قوس غير مشبع ينطلق من القمة (E)، و بما أن لدينا في مثالنا هذا القوس $(E\text{a})$ غير مشبع فإننا نضع بجوار القمة(a) العلامة $(+E)$ و من بعد ذلك نبحث إذا كان هناك قوس واحد غير مشبع ينطلق من القمة (a)، فإذا كان لدينا قوس غير مشبع ينطلق من القمة (a) نضع العلامة ينطلق من القمة (a+)، ثم نعود إلى القمة (E) و نبحث من جديد ما إذا كان هناك قوس غير مشبع ينطلق من القمة (E)، و نعيد نفس الخطوات عند كل قمة.

و بما أننا وصلنا إلى توسيم القمة (S) فإن التدفق غي أمثلي، و لازال قابلا للتحسن، و ذلك كما يلي:



هذا الشكل الأخير هو عبارة عن سلسلة تبين لنا مسار تحسين الحا، و لتحسين الحل نقوم بالزيادة في الأقواس (Ea) و (ae) و (bd) و (dS)،و الإنقاص في القوس (be) لأن ذلك يسمح بتحقيق قاعدة "كورشوف" في كل قمة (الكميات الداخلة تساوي الكميات الخارجة)، و نلاحظ أنه من أجل الحل النهائي نقوم بتقليص كمية من (be) بمقدار (2) و نضيفها إلى (bd) و التي تذهب إلى (dS) و اللذان يصبحان مشبعان، و لتعويض (eS) نقوم بإضافة 2 م م^3 من(Ea) و التي تقوم بتموين الأنبوب (ae) و التي تعوض النقصان في(eS). و تصبح الشبكة الجديدة كما يلي:



و هنا نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل كما يوضحه الجدول الآتي:

المصب / المنبع	d	e	f	g	الكمية المصرفة
a	4	5	-	6	15
b	6	1	3	-	10
c	-	-	4	4	8
الكمية المستقبلة	10	6	7	10	33

الباب الثاني: القياس الاقتصادي

الفصل الأول:

نموذج الانحدار الخطي البسيط

يعتبر القياس الاقتصادي من أهم التقنيات المستخدمة في التسيير، و ذلك عن طريق ما يصطلح عليه بالنمذجة الاقتصادية، حيث يحاول متخذ القرار دراسة سلوك بعض المتغيرات بالاعتماد على العلاقات الرياضية، و هذا لا يتوفر إلا إذا كانت له دراية بالنظرية الاقتصادية و توفر المعطيات. و سوف نقوم في هذا الفصل التطرق لمفهوم القياس الاقتصادي، و نموذج الانحدار الخطي البسيط.

أولا: مفهوم القياس الاقتصادي Concept of Econometrics:

يعرف Lange القياس الاقتصادي على أنه العلم الذي يستعمل طرقا كمية ثابتة لتحديد سلوك الوحدات الاقتصادية بالاعتماد على الطرق الاحصائية[12].

و يعرفه maddala علم القياس الاقتصادي على أنه علم يهتم بتطبيق الطرق الاحصائية و الرياضية في تحليل مختلف الظواهر الاقتصادية، و ذلك بهدف التأكد من النظريات الاقتصادية التي يتم قبولها أو رفضها[13].

يظهر من هذه التعاريف أنه يمكن تعريف القياس الاقتصادي على أنه العلم الذي يهتم بشرح العلاقة بين الظواهر الاقتصادية التي تكون ممثلة في علاقات رياضية (نموذج اقتصادي)، و يتم بناء هذا النموذج اعتمادا على نظريات اقتصادية (أو المنطق الاقتصادي) و طرق احصائية.

و قد دلت هذه التعاريف على أن للقياس الاقتصادي علاقة وطيدة بين ثلاثة علوم مختلفة نوجزها فيما يلي[14]:

- **علاقة القياس الاقتصادي بعلم الاقتصاد:** تشير النظرية الاقتصادية إلى وجود علاقة بين المتغيرات الاقتصادية تحتاج إلى عملية قياس لمعرفة درجة العلاقة بينها بهدف اختيار النماذج القياسية المثلى.
- **علاقة القياس الاقتصادي بالرياضيات:** توفر العلوم الرياضية النماذج المناسبة للوصول إلى النموذج الأمثل لتمثيل العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية.
- **علاقة القياس الاقتصادي بالإحصاء:** توفر العلوم الاحصائية التقنيات و الأدوات الاحصائية لقياس العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية، بالإضافة إلى جمع البيانات الاقتصادية و تبويبها و عرضها في صورة جداول و منحنيات.

1. مفهوم النموذج الاقتصادي:

12 - Osker Lange (1978) , 4th Ed, ***Introduction to Econometrics***, Pergamon Press Oxford, p13.
13 - G.S.Maddala (1988), ***introduction to econometrics***, USA: Mac Miillan Publishing Company, P04.
14- حسام علي داود و خالد محمد السواعي (2013)، ***الاقتصاد القياسي بين النظرية و التطبيق***، الأردن: دار المسيرة،ص ص 14-18.

يقصد بالنموذج الاقتصادي في اطار القياس الاقتصادي على أنه عبارة عن مخطط مبسط لشرح الواقع و التأثيرات عليه، و ذلك بالاستعانة بالأدوات الرياضية و الاحصائية، على هذا الأساس، يمكن أن نقوم ببناء نموذج ممثلا بالعلاقات الرياضية لظاهرة اقتصادية معينة، بهدف كشف العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية.

1.1. مراحل بناء النموذج:

يمر بناء نموذج اقتصادي على عدة مراحل و التي يجب احترامها حتى نحصل على نموذج جيد يفسر الواقع.

أ. الاعتماد على نظرية اقتصادية: أول شيء يجب الاعتماد على نظرية معينة لتفسير سلوك الوحدات الاقتصادية، فمثلا إذا أردنا معرفة محددات الاستهلاك نعتمد على النظرية الكنزية التي تعتبر أن الدخل المتاح هو المحدد الرئيسي للاستهلاك، و كذلك الاستثمار الخاص يتأثر بمعدل الفائدة حسب كينز.

ب. وضع النظرية في علاقات رياضية: فمثلا يمكن وضع العلاقة بين الاستهلاك و الدخل المتاح كما يلي:

$$C = f(y_d) \qquad / \quad f' > 0$$

$$C = a_0 + a_1 y_d \qquad a_0 > 0 \text{ و } \quad 0 \leq a_1 \leq 1$$

تبين دالة الاستهلاك الكنزية أنه إذا ارتفع الدخل المتاح بوحدة واحدة يرتفع الاستهلاك بمقدار (a_1) (الميل الحدي للاستهلاك)، و هذا الأخير محصور بين الصفر و الواحد (القانون السيكولوجي لكينز)، أما المعامل (a_0) فهو يمثل الحد الثابت الذي يدل على أنه إذا كان الدخل المتاح معدوما فإن الاستهلاك يساوي (a_0)، بمعنى إذا كان الدخل معدوما للفرد فإنه يلجأ للاقتراض أو التصرف في مختلف الأصول...إلخ.

ج. اختيار البيانات و قياس العلاقة بين المتغيرات: هنا يجب اختيار السلاسل التي يجب استخدامها لتفسير الظاهرة الاقتصادية، ففي مثالنا هذا يجب الحصول على الاستهلاك الذي يقابله الدخل المتاح في كل فترة، لكن اختيار المعطيات لا يكون عشوائيا و إنما على عدة اعتبارات و هي:

- هل يجب أن تكون السلاسل شهرية أو فصلية أو نصف سنوية أو سنوية ...إلخ.
- هل يجب استعمال القيم الخامة أو تعديل التغيرات الفصلية.
- ما هو معدل الفائدة مثلا الذي يجب الاعتماد عليه في تفسير الاستثمار (معدل الفائدة اليومي، معدل الفائدة المحدد من طرف البنك المركزي....إلخ).

د. اختيار البيانات و قياس العلاقات: نقوم في هذه المرحلة باختيار البيانات الاحصائية و تمثيلها في علاقة رياضية لتحديد سلوك الوحدات الاقتصادية، و ذلك عن طريق تقدير المعلمات باستخدام طرق رياضية معينة.

نشير إلى أنه يجب أن نميز بين الكثير من البيانات و ذلك حسب النموذج المدروس:

- **السلاسل الزمنية (Time series data):** و هي عبارة عن مشاهدات المتغيرات الكلية أو الجزئية و التي تتغير مع الزم بشكل منتظم (شهر، سنة، فصل، سنة...إلخ)، و يرمز لاها بالرمز (t)، حيث (t=1,2....n)، فمثلا دراسة الاستهلاك (C_t) بدلالة الدخل المتاح (y_t) أين تكون البيانات الاحصائية مثلا شهرية.
- **البيانات المقطعية (Gross-Sectional data):** تتمثل في المشاهدات خلال فترة معينة لعدد من الأفراد سواء كانوا أشخاصا أو دولا أو قطع أراضي...إلخ، و يرمز لها بالرمز (i)، فمثلا إذا أردنا معرفة العلاقة بين الاستهلاك و الدخل المتاح خلال فترة زمنية محدد لعشرون دولة، فإنه المشاهدات تكون لكل دولة $(i = 1,2, \dots ,20)$.
- **بيانات بانل (Panel data):** في هذه الحالة يتم دمج الأبعاد الفردية و الزمنية معا، و هذا ما يسمح بمتابعة تغيرات المتغيرات للأفراد (دول، أشخاص...إلخ) مع الزمن، و يرمز لها بالرمز (it).

هـ. التأخير الزمني: في نماذج السلاسل الزمنية لا يجب أن تتأثر المتغيرات مع بعضها البعض في نفس الفترة، حيث يمكن أن تتأثر المتغيرة التابعة (الداخلية) بالمتغير المفسرة (المستقلة) للفترة السابقة، فمثلا يمكن أن يتأثر الناتج للسنة الحالية بالاستثمار للسنة السابقة، و بذلك نكتب $Y_t = f(I_{t-1})$.

و. التحقق من نتائج النموذج: في المرحلة الأخيرة نتأكد من النتائج الآتية

- القيام بالاختبارات الاحصائية للتأكد من استقرار المعلمات و معامل التحديد...إلخ.
- التحقق من أن العلاقات تتوافق مع الواقع أو النظرية الاقتصادية.
- التأكد من دقة المعلمات.

ثانيا: تقدير النموذج الخطي البسيط

1. عرض النموذج و تحديد بعض المفاهيم:

مثال توضيحي:

لنفرض دالة الاستهلاك الكنزية ذات الخصائص المعروفة في الاقتصاد الكلي، التي يعتبر فيها الدخل المتاح المحدد الرئيسي للاستهلاك، ذلك كما يلي:

$$C = a_0 + a_1 y_d$$

C: الاستهلاك، y_d: الدخل المتاح، a_0: الاستهلاك المستقل، a_1: الميل الحدي للاستهلاك.

نسمي متغيرة الاستهلاك بالمتغيرة المفسَرة (المتغيرة المستقلة)، في حين تسمى متغيرة الدخل المتاح بالمتغيرة المفسَرة (المتغيرة التابعة).

لكن النموذج في ظل السلاسل الزمنية فإن قيم المتغيرات تمثل قيم المشاهدات لفترة زمنية منتظمة، مثلا نكتب النموذج لمعطيات الاستهلاك و الدخل المتاح خلال 25 شهرا كما يلي:

$$C_t = a_0 + a_1 y_t \quad / \quad t = 1,2, \dots \dots ,25$$

C_t: استهلاك الفترة (t)، y_t: الدخل المتاح للفترة (t).

أما في نماذج البيانات المقطعية فإن المتغيرات تمثل مجموعة من الأفراد لفترة محددة أو معينة ، فمثلا الاستهلاك و الدخل المتاح تكون عينة المشاهدة لعشرة (10) دول في سنة أو شهر أو سداسي معين، و نكتب:

$$C_i = a_0 + a_1 y_i \quad / \quad i = 1,2, \dots \dots ,10$$

C_i: استهلاك الدولة لفترة معينة (i) (سنة معينة أو شهر معين...إلخ)، y_i: الدخل المتاح للدولة (i) (سنة معينة أو شهر معين...إلخ)، أي أن الفترة محددة.

2. الحد العشوائي للأخطاء (ε):

عند اختيار المتغيرات المفَسِرَة للمتغير التابع فإنه من الممكن جدا أن نهمل بعض المتغيرات المفَسِرة بسبب عدم توفر معطيات، أو عدم قدرتنا على دمجها، أو لها تأثير ضعيف، و بالعودة لمثالنا السابق الذي اعتبرنا فيه أن الدخ المتاح هو المحدد الوحيد للاستهلاك، فإنه يمكن أن تكون هناك متغيرات أخرى مُفَسِرة مثل معدل الفائدة، الذوق...إلخ و التي تم اهمالها، ففي هذه الحالة يستوجب علينا أن نضيف ما يعرف بالحد العشوائي للأخطاء (ε_t) الذي يعوض النقص في هذه المتغيرات غير الواضحة في النموذج، و عليه نكتب النموذج من نوع السلاسل الزمنية:

$$C_t = a_0 + a_1 y_t + \varepsilon_t$$

و نكتب في النموذج من نوع البيانات المقطعية:

$$C_i = a_0 + a_1 y_i + \varepsilon_i$$

2. تقدير المعلمات و خصائصها

1.2. الفرضيات:

يعبر نموذج الانحدار الخطي البسيط عن وجود علاقة خطية بين متغيرين أحدهما تابع (y_t) و الثاني متغير مستقل (مفَسِر X_t)، و يأخذ الشكل الجبري الآتي:

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + \varepsilon_t \qquad / \qquad t = 1,2 \ldots\ldots, n$$

y_t: المتغيرة التابعة أو المتغيرة الداخلية، x_t: المتغيرة المفَسِر أو الخارجية، a_0 و a_1 معلمات النموذج، ε_t: الحد العشوائي للأخطاء و هي غير معروفة في هذه الحالة، n: حجم العينة.

و يعتمد هذا النموذج على مجموعة من الفرضيات و هي[15]:

H_1. النموذج خطي، حيث يكون المتغير التابع (y_t) مفسَرا بالمتغير المستقل (x_t).

H_2. قيم (x_t) تكون مشاهداتها غير مرتبطة بالأخطاء العشوائية $\big((x_t, \varepsilon_t) = 0\big)$.

H_3. التوقع الرياضي للأخطاء يكون معدوما: $E(\varepsilon_t) = 0$، و يعني هذا أن متوسط الأخطاء في النموذج تكون معدومة.

H_4. تباين الأخطاء ثابت: $var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \delta_\varepsilon^2$، و يعني هذا أن الأخطاء لن تتوسع عندما تتغير الفترة (تبقى نفسها مع تغير الزمن).

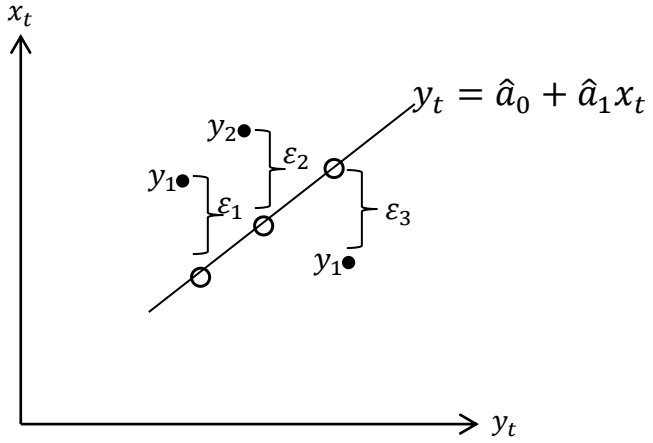
H_5. الأخطاء غير مرتبطة فيما بينها $E(\varepsilon_t, \varepsilon_{t\prime}) = 0$ حيث $(t \neq t')$، هذا ما يعني أن خطأ الفترة (t) ليس له تأثير على الأخطاء اللاحقة.

2.2. صياغة التقدير:

إذا قمنا بتمثيل قيم المشاهدات الحقيقية و المقدرة لدالة الاستهلاك مثلا، فإننا نلاحظ من الشكل (01) أن النقاط البيضاء التي تقع على الخط تمثل القيم المقدرة، بينما تمثل النقاط السوداء القيم الحقيقية، و الفرق بين هذه النقاط يمثل أخطاء التقدير. و للحصول على خط الانحدار يجب تقدير المعلمتين (a_0) و (a_1) التي تسمح بتقليص المسافة بين القيم الحقيقية و المقدرة، و هذا باستخدام ما يعرف بطريقة المربعات الصغرى العادية (OLS) (Ordinary Least Squares method) ، و التي تسمح بالحصول على أقل مجموع مربع أخطاء التقدير

15 - Pour plus de détails voir :
- Sami Khedhiri (2007), ***cours d'économétrie-méthodes et application***, Paris : Lavoisier, , P19.

الشكل (01): خط الانحدار و القيم الحقيقية و المقدرة للمتغير التابع



إذن من أجل الحصول على أقل مربع الأخطاء نكتب

$$Min \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2 = Min \sum_{t=1}^{n} (y_t - a_0 - a_1 x_t)^2 = S$$

للحصول على أقل أخطاء نشتق بالنسبة إلى (a_0) و (a_1) كما يلي:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial \hat{a}_0} = -2 \sum_{t=2}^{n} (y_t - a_0 - a_1 x_t) = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial \hat{a}_1} = -2 \sum_{t=2}^{n} x_t (y_t - a_0 - a_1 x_t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^{n} y_t - n\hat{a}_0 - \hat{a}_1 \sum_{t=1}^{n} x_t = 0 \\ \sum_{t=1}^{n} x_t y_t - \hat{a}_0 \sum_{t=1}^{n} x_t - \hat{a}_1 \sum_{t=1}^{n} x_t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n\hat{a}_0 = \sum_{t=1}^{n} y_t - \hat{a}_1 \sum_{t=1}^{n} x_t \\ \hat{a}_1 \sum_{t=1}^{n} x_t = \sum_{t=1}^{n} x_t y_t - \hat{a}_0 \sum_{t=1}^{n} x_t \end{cases}$$

$$\hat{a}_0 = \bar{y} - \hat{a}_1\bar{x} \dots\dots\dots\dots (1)$$

$$\hat{a}_1 \sum x_t^2 = \sum x_t y_t - a_0 \sum x_t \dots\dots\dots (2)$$

بتعويض العلاقة (1) في العلاقة (2) نحصل:

$$\hat{a}_1 \sum x_t^2 = \sum x_t y_t - (\bar{y} - \hat{a}_1\bar{x}) \sum x_t$$

$$\hat{a}_1 \sum x_t^2 - \hat{a}_1\bar{x} \sum x_t = \sum x_t y_t - \bar{y} \sum x_t$$

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{n}(x_t - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{t=1}^{n} x_t y_t - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2 - n\bar{x}^2} \dots\dots (3)$$

تبين العلاقتين (1) و (3) معلمات النموذج المقدر للانحدار البسيط.

تمثل المعلمة ($\hat{a}_1$) الميل الحدي للاستهلاك، و هي أيضا تمثل أثر المتغير المفَسَرة (x_t) على المتغيرة التابعة (y_t). و بصفة عامة تدل المعلمة ($\hat{a}_1$) اقتصاديا أنه إذا تغيرت المتغيرة المفَسِرة بوحدة واحدة تتغير المتغيرة التابعة بمقدار ($\hat{a}_1$).

نشير إلى أنه في بعض الحالات الخاصة أن النموذج لا يتضمن الحد الثابت ($\hat{a}_0$)، بمعنى يكون معدوما، فمثلا في دالة الانتاج إذا اعتبرنا أن العمل هو المتغير المفسِر الوحيد، فإنه لا يمكن أن نتخيل وجود انتاج إذا كان حجم العمل معدوما، بذلك نكتب:

$$y_t = \hat{a}_1 x_t \qquad / \qquad \hat{a}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n} x_t y_t}{\sum_{t=1}^{n} x_t^2}$$

التمرين (01): لنفرض البيانات الاحصائية الخاصة بالاستهلاك (y_t) و الدخل المتاح (x_t)

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_t	1520	1630	1780	1750	1925	1930	2100	2120	2180	2205	2285	2320
x_t	2000	2200	2350	2500	2680	2700	2900	3000	3000	3150	3300	3350

قدر معلمات النموذج.

الحل: نقوم بالحسابات الآتية التي تساعدنا على تقدير المعلمات

t	y_t	x_t	$y_t - \bar{y}$	$x_t - \bar{x}$	$(x_t - \bar{x})^2$	$(x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})$
1	1520	2000	-458,75	-760,83	578867,36	349032,292
2	1630	2200	-348,75	-560,83	314534,03	195590,625
3	1780	2350	-198,75	-410,83	168784,03	81653,125
4	1750	2500	-228,75	-260,83	68034,028	59665,625
5	1925	2680	-53,75	-80,83	6534,0278	4344,791
6	1930	2700	-48,75	-60,83	3700,69	2965,625
7	2100	2900	121,25	139,167	19367,36	16873,95833
8	2120	3000	141,25	239,167	57200,69	33782,292
9	2180	3000	201,25	239,167	57200,69	48132,292
10	2205	3150	226,25	389,167	151450,69	88048,96
11	2285	3300	306,25	539,167	290700,69	165119,79
12	2320	3350	341,25	589,167	347117,36	201053,125
المجموع	23736	33130	0	0	2063491,667	1246262,5
المتوسط	1978,75	2760,83	0	0		

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{n}(x_t - \bar{x})^2} = \frac{1246262.5}{2063491.667} = 0.604$$

$$\hat{a}_0 = \bar{y} - \hat{a}_1\bar{x} = 1978.75 - 0.604(2760.83) = 311.32$$

إذن نكتب دالة الاستهلاك المقدرة بدلالة الدخل المتاح كما يلي:

$$y_t = \hat{y}_t + e_t = 311.32 + 0.604x_t + e_t$$

تبين العلاقة المقدرة أنه إذا تغير الدخل المتاح (x_t) بوحدة واحدة يتغير الاستهلاك (y_t) بمقدار 0.604 (60.4% من الدخل المتاح يوجه للاستهلاك و الباقي للادخار) و هو يمثل الميل الحدي للاستهلاك، أما المعلمة 311.32 تمثل الاستهلاك الثابت و المستقل عن الدخل المتاح.

و يمثل (e_t) و خطأ التقدير (بواقي التقدير)، لذا، يوجد فرق بين هذا الأخير و الخطأ العشوائي (ε_t)، فبواقي التقدير قيمها معروفة تستخدم في النموذج المقدر انطلاقا من استخدام بيانات احصائية، و هي تساوي الفرق بين القيم الحقيقية و القيم المقدر، أما الخطأ العشوائي فقيمه غير معروفة و يستعمل في من طرف الاقتصاديين في النماذج غير المقدرة.

تساوي بواقي التقدير الفرق بين القيم الحقيقية و القيم المقدرة بالعلاقة:

$$y_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_t + e_t$$
$$e_t = y_t - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_t$$

للتوضيح نستخدم نفس التمرين (1) السابق

$$e_1 = 1520 - 311.32 - 0.604(2000) = 0.68$$

ونواصل العملية إلى غاية العينة الأخيرة:

t	القيم الحقيقية y_t	*القيم المقدرة* $311.32 + 0.604x_t$	البواقي e_t
1	1520	1519.32	0.68
2	1630	1640.03	-10.03
3	1780	1730.72	49.28
4	1750	1821.32	-71.32
5	1925	1930.04	-5.04
6	1930	1942.12	-12.12
7	2100	2062.92	37.08
8	2120	2123.32	-3.32
9	2180	2123.32	56.68
10	2205	2213.92	-8.92
11	2285	2304.52	-19.52
12	2320	2334.72	-14.72
المجموع			00

مجموع البواقي يجب أن يكون معدوما $(\sum_{t=1}^{n} e_t = 0)$، بذلك فإن التوقع الرياضي لبواقي التقدير تكون معدومة $(E(e_t) = \bar{e} = 0)$، و هي أحد أهم الفرضيات التي نعتمد عليها.

3. خصائص مقدرات طريقة المربعات الصغرى:

أ. خاصية عدم التحيز Unbiased Estimator:

تعني المقدرات الخطية غير المتحيزة (Best Linear Unbiased Estimators) (BLUE) أن القيم المتوقعة لكل من $(\hat{a}_0, \hat{a}_1)$ تكون مساوية للقيم الحقيقية (a_0, a_1) لها في المجتمع، و يشير المعنى الاحصائي على أن الفرق بين القيمة المتوقعة و القيمة الحقيقية لهذه المعاملات تساوي الصفر.

لتوضيح ذلك ليكن لدينا:

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + \varepsilon_t \dots\dots (4)$$

$$\bar{y} = a_0 + a_1 \bar{x} + \bar{\varepsilon} \dots\dots (5)$$

بطرح العلاقة (4) من (5) نحصل:

$$y_t - \bar{y} = a_1(x_t - \bar{x}) + \varepsilon_t - \bar{\varepsilon} \dots\dots (6)$$

بتعويض العلاقة (6) في العلاقة (3) السابقة نجد:

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{n}(x_t - \bar{x})^2}$$

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum(x_t - \bar{x})\left[a_1(x_t - \bar{x}) + (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})\right]}{\sum(x_t - \bar{x})^2}$$

$$\hat{a}_1 = \frac{a_1 \sum((x_t - \bar{x}))^2 + \sum(x_t - \bar{x})(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})}{\sum(x_t - \bar{x})^2}$$

$$\hat{a}_1 = a_1 + \frac{\sum(x_t - \bar{x})\,\varepsilon_t - \sum(x_t - \bar{x})\bar{\varepsilon}}{\sum(x_t - \bar{x})^2} \dots\dots (7) \qquad / \quad \bar{\varepsilon} = 0$$

$$\hat{a}_1 = a_1 + \frac{\sum(x_t - \bar{x})\,\varepsilon_t}{\sum(x_t - \bar{x})^2} \dots\dots (8)$$

يساوي التوقع الرياضي:

$$E(\hat{a}_1) = E(a_1) + \frac{\sum(x_t - \bar{x})\,E(\varepsilon_t)}{\sum(x_t - \bar{x})^2} \qquad / \qquad E(e_t) = 0$$

$$E(\hat{a}_1) = E(a_1) \dots\dots (9)$$

$$E(\hat{a}_1) = a_1$$

نبرهن كذلك على أن $E(\hat{a}_0) = E(a_0)$ بنفس الطريقة، حيث لدينا من العلاقة المقدرة:

$$\bar{y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 \bar{x} \dots\dots (10)$$

بطرح العلاقة (10) من العلاقة (5) نحصل:

$$(\hat{a}_0 - a_0) + (\hat{a}_1 - a_1)\bar{x} - \bar{\varepsilon}$$

$$E(\hat{a}_0) = E(a_0) + \bar{x}E(\hat{a}_1 - a_1)\bar{x} - E(\bar{\varepsilon})$$

$$E(\hat{a}_0) = E(a_0) \dots\dots\dots\dots (11)$$

$$E(\hat{a}_0) = a_0$$

تدل العلاقتين (9) و (11) أن المعلمات المقدرة بطريقة المربعات الصغرى العادية هي معلمات غير متحيزة.

ب. خاصية أقل تباين Minimum Variance:

نعتبر التقديرات جيدة و أفضل من غيرها (Best Estimators) إذا كان تباينها صغيرا، و تتميز طريقة المربعات الصغرى بهذه الصفة خاصة كلما كان حجم العينة كبيرة.

$$\lim_{n\to\infty} Var(\hat{a}) = 0$$

و للتوضيح لدينا التباين يساوي:

$$Var(\hat{a}_1) = E(\hat{a}_1 - a_1)^2$$

نكتب العلاقة (8) السابقة كما يلي:

$$\hat{a}_1 - a_1 = \frac{\sum(x_t - \bar{x})\,\varepsilon_t}{\sum(x_t - \bar{x})^2}$$

$$Var(\hat{a}_1) = E\left[\left[\frac{\sum(x_t - \bar{x})\,\varepsilon_t}{\sum(x_t - \bar{x})^2}\right]^2\right]$$

نضع $w_t = \frac{(x_t - \bar{x})}{\sum(x_t - \bar{x})^2}$، و نكتب:

$$Var(\hat{a}_1) = E\left[\left[\sum w_t \varepsilon_t\right]^2\right]$$

في ظل افتراض أن الأخطاء غير مرتبطة ($H_5 : E(\varepsilon_t, \varepsilon_{t'}) = 0$) و التي تعني أن أخطا الفترة (t) ليس لها تأثير على اخطاء الفترة(t')، نكتب:

$$Var(\hat{a}_1) = E\left[(\sum w_t \varepsilon_t + \sum_{t\neq t'} w_{t'}\varepsilon_{t'} - \sum_{t\neq t'} w_{t'}\varepsilon_{t'})(\sum w_t \varepsilon_t)\right]$$

$$Var(\hat{a}_1) = E\left[\sum w_t^2 \varepsilon_t^2 + \sum_{t\neq t'} w_{t'} w_t \varepsilon_{t'}\varepsilon_t - \sum_{t\neq t'} w_{t'} w_t \varepsilon_{t'}\varepsilon_t\right]$$

$$Var(\hat{a}_1) = \sum w_t^2\, E({\varepsilon_t}^2) + 2\sum w_t w_{t'}\, E(\varepsilon_t \varepsilon_{t'})$$

$$Var(\hat{a}_1) = \sum w_t^2\, E({\varepsilon_t}^2) \qquad / \qquad E(\varepsilon_t, \varepsilon_{t'}) = 0$$

و في ظل افتراض أن تباين الأخطاء ثابت ($E(\varepsilon_t^2) = \delta_\varepsilon^2 \ : H_4$)

$$Var(\hat{a}_1) = \delta_\varepsilon^2 \sum w_t^2 = \delta_\varepsilon^2 \frac{\sum(x_t - \bar{x})(x_t - \bar{x})}{\sum(x_t - \bar{x})^2 \sum(x_t - \bar{x})^2}$$

$$Var(\hat{a}_1) = \frac{\delta_\varepsilon^2}{\sum(x_t - \bar{x})^2} \dots\dots\dots\dots (12)$$

نلاحظ من العلاقة (12) أنه كلما كان حجم العينة كبيرا تكون القيمة $\sum(x_t - \bar{x})^2$ كبيرة جدا و أن تباين الأخطاء (δ_ε^2) ثابت، فإن التباين يؤول إلى الصفر.

$$\lim_{n\to\infty}\left(Var(\hat{a}_1)\right) = \frac{\delta_\varepsilon^2}{\sum(x_t - \bar{x})^2} = 0$$

نستنتج من هذه العلاقة أنه كلما كان حجم العينة كبيرا كلما كان التقدير جيد و أفضل.

نبرهن بنفس الطريقة على $Var(\hat{a}_1)$، حيث كان لدينا من العلاقة السابقة:

$$(\hat{a}_0 - a_0) = (\hat{a}_1 - a_1)\bar{x} - \bar{\varepsilon}$$

$$(\hat{a}_0 - a_0) = \bar{\varepsilon} - (\hat{a}_1 - a_1)\bar{x}$$

بتعويض العلاقة (8) السابقة في هذه الأخيرة نحصل:

$$(\hat{a}_0 - a_0) = \bar{\varepsilon} - \frac{\sum(x_t - \bar{x})\,\varepsilon_t}{\sum(x_t - \bar{x})^2}\bar{x}$$

$$(\hat{a}_0 - a_0) = \bar{\varepsilon} - \bar{x}\sum w_t\,\varepsilon_t$$

و منه فإن التباين يساوي:

$$Var(\hat{a}_0) = E(\hat{a}_0 - a_0)^2 = E\left[(\bar{\varepsilon} - \bar{x}\sum w_t\,\varepsilon_t)^2\right]$$

$$Var(\hat{a}_0) = E\left[\sum\left[(\frac{1}{n} - \bar{x}w_t)\varepsilon_t\right]^2\right] \qquad / \quad \bar{\varepsilon} = \frac{1}{n}\sum \varepsilon_t$$

و في ظل أن الأخطاء مستقلة (غير مرتبطة) ينتج لدينا:

$$Var(\hat{a}_0) = E\left[\sum(\frac{1}{n} - \bar{x}w_t)^2\varepsilon_t^2 + 2(\frac{1}{n} - \bar{x}w_t)(\frac{1}{n} - \bar{x}w_{t'})(\varepsilon_t\varepsilon_{t'})\right]$$

$$Var(\hat{a}_0) = \sum (\frac{1}{n}\bar{x}w_t)^2 E(\varepsilon_t^2)$$

$$Var(\hat{a}_0) = \delta_\varepsilon^2 \sum \left[\frac{1}{n^2} - \frac{2}{n}\bar{x}w_t + \bar{x}^2 w_t^2\right]$$

$$Var(\hat{a}_0) = \delta_\varepsilon^2 \left[\sum \frac{1}{n^2} - \frac{2\bar{x}\sum w_t + n\bar{x}^2 \sum w_t^2}{n}\right]$$

$$Var(\hat{a}_0) = \delta_\varepsilon^2 \left[\frac{1}{n} - \frac{\frac{2\bar{x}\sum(x_t - \bar{x}) + n\bar{x}^2}{\sum(x_t - \bar{x})^2}}{n}\right] \quad / \quad \sum \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

$$Var(\hat{a}_0) = \delta_\varepsilon^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\frac{-2\bar{x}\sum x_t + 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2}{\sum(x_t - \bar{x})^2}}{n}\right]$$

$$Var(\hat{a}_0) = \delta_\varepsilon^2 \left[\frac{1}{n} - \frac{\bar{x}^2}{\sum(x_t - \bar{x})^2}\right] \dots\dots\dots\dots (13)$$

نلاحظ أيضا من العلاقة (13) أن تباين المعلمة المقدرة $(\hat{a}_0)$ يؤول إلى الصفر كلما كان حجم العينة كبيرا.

ج. خاصية الاتساق (Consistent):

يقصد بخاصية الاتساق أنه إذا كان المقدر $(\hat{a})$ غير متحيز و له أقل تباين، و هاذين الشرطين متوفرين، و التباين المشترك $Cov(\hat{a}_0, \hat{a}_1)$ للمعلمين يساوي:

$$Cov(\hat{a}_0, \hat{a}_1) = -\bar{x}Var(\hat{a}_1) \dots\dots.. (14.2)$$

ثالثا: الفرضيات الرئيسية لبناء الاختبارات الاحصائية:

1. فرضية الأخطاء الطبيعية:

توجد اختبارات تبين لنا جودة التقديرات المتحل عليها و التي تعتمد أساسا على المتغير العشوائي للأخطاء، و هذه الفرضيات التي سوف نتناولها لا تتعلق بالحصول على مقدر متقارب (أفضل مقدر) و إنما تسمح لنا ببناء الاختبارات الاحصائية التي تسمح بدورها بتحديد قانون التوزيع الاحتمالي للمقدرات، ونعلم أن توزيع المتغير العشوائي للأخطاء هو توزيع طبيعي (Normal Distribution): $\varepsilon_t \to N(0, \delta_\varepsilon^2)$.

سوف نثبت الآن بأن التوقع الرياضي للأخطاء يساوي الصفر و أن تباينها ثابت (لإثبات أنها تتبع توزيعا طبيعيا)

يمكن أن نبين بكل بساطة بأن $E(e_t) = 0$

e_t: هو الفرق بين القيم الحقيقية و القيم المقدرة

$$e_t = y_t - \hat{y}_t = y_t - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_t$$

$$\sum_{t=1}^{n} e_t = \sum_{t=1}^{n} (y_t - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_t)$$

نعلم أن التوقع الرياضي للأخطاء هو متوسط الأخطاء:

$$E(e_t) = \frac{1}{n}\sum e_t = \frac{1}{n}\sum (y_t - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_t)$$

$$E(e_t) = \bar{y} - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 \bar{x}$$

نعلم كذلك أن: $\hat{a}_0 = \bar{y} - \hat{a}_1 \bar{x}$ و هذا ما ينتج عنه:

$$E(e_t) = \bar{y} - \bar{y} + \hat{a}_1 \bar{x} - \hat{a}_1 \bar{x} = 0$$

نبحث الآن عن تباين الأخطاء:

أول خطوة نقوم بها هي البحث عن مربع الأخطاء، حيث لدينا:

$$e_t = y_t - \hat{y}_t = y_t - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_t$$

نعوض العلاقة السابقة (1): $\hat{a}_0 = \bar{y} - \hat{a}_1 \bar{x}$ في العلاقة السابقة الأخيرة ينتج لدينا:

$$e_t = y_t - \bar{y} + \hat{a}_1 \bar{x} - \hat{a}_1 x_t$$

$$e_t = y_t - \bar{y} - \hat{a}_1 (x_t - \bar{x})$$

بتعويض العلاقتين السابقتين في هذه الأخيرة $y_t = a_0 + a_1 x_t + \varepsilon_t$ و $\bar{y} = a_0 + a_1 \bar{x} + \bar{\varepsilon}$

$$e_t = a_0 + a_1 x_t + \varepsilon_t - a_0 - a_1 \bar{x} - \bar{\varepsilon} - \hat{a}_1 (x_t - \bar{x})$$

$$e_t = (a_1 - \hat{a}_1)(x_t - \bar{x}) + (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})$$

مجموع مربع البواقي يساوي إلى:

$$\sum e_t^2 = \sum [(a_1 - \hat{a}_1)(x_t - \bar{x}) + (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})]^2$$

$$\sum e_t^2 = (a_1 - \hat{a}_1)^2 \sum (x_t - \bar{x})^2 + 2(a_1 - \hat{a}_1) \sum (x_t - \bar{x})(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon}) + \sum (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2$$

لدينا من العلاقة (7) السابقة $\hat{a}_1 = a_1 + \frac{\sum (x_t - \bar{x})\varepsilon_t - \sum (x_t - \bar{x})\bar{\varepsilon}}{\sum (x_t - \bar{x})^2}$

$$(a_1 - \hat{a}_1) \sum (x_t - \bar{x})^2 = - \sum (x_t - \bar{x})(\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})$$

بتعويض هذه العلاقة الأخيرة في مجموع مربع البواقي ينتج لدينا:

$$\sum e_t^2 = (a_1 - \hat{a}_1)^2 \sum (x_t - \bar{x})^2 - 2(a_1 - \hat{a}_1)^2 \sum (x_t - \bar{x})^2 + \sum (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2$$

$$\sum e_t^2 = \sum (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2 - (a_1 - \hat{a}_1)^2 \sum (x_t - \bar{x})^2$$

التوقع الرياضي لمربع الأخطاء يساوي:

$$E(e_t^2) = E\left[\sum (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2\right] - E[(a_1 - \hat{a}_1)^2] \sum (x_t - \bar{x})^2 \ldots . (15)$$

نفكك العلاقة (15.2) إلى جزئين و نحسب كلا على حدى

$$E\left[\sum (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2\right] = E\left[\sum \varepsilon_t^2 - 2\bar{\varepsilon}\,\varepsilon_t - n\bar{\varepsilon}^2\right]$$

$$E\left[\sum (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2\right] = E\left[\sum \varepsilon_t^2 - \bar{\varepsilon} \sum e_t\right]$$

$$E\left[\sum (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2\right] = E\left[\sum \varepsilon_t^2 - \frac{1}{n} \sum \varepsilon_t^2\right]$$

$$E\left[\sum (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2\right] = \sum E(\varepsilon_t^2) - \frac{1}{n} \sum E(\varepsilon_t^2)$$

$$E\left[\sum (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})^2\right] = n\delta_\varepsilon^2 - \delta_\varepsilon^2 \ldots \ldots \ldots \ldots (16)$$

هذا لأن: $\sum E(\varepsilon_t^2) = n\delta_\varepsilon^2$

لدينا في الطرف الثاني:

$$E(a_1 - \hat{a}_1)^2 \sum (x_t - \bar{x})^2 = \frac{\delta_\varepsilon^2}{\sum (x_t - \bar{x})^2} \sum (x_t - \bar{x})^2$$

$$E(a_1 - \hat{a}_1)^2 \sum (x_t - \bar{x})^2 \dots\dots\dots\dots\dots (17)$$

و بتعويض العلاقتين (16) و (17) في العلاقة (15) ينتج لدينا:

$$E(e_t^2) = n\delta_\varepsilon^2 - \delta_\varepsilon^2 - \delta_\varepsilon^2 = (n-2)\delta_\varepsilon^2$$

على هذا الأساس فإن تباين الأخطاء المقدرة تساوي إلى:

$$\hat{\delta}_\varepsilon^2 = \frac{1}{n-2} \sum e_t^2 \dots\dots\dots\dots.. (18)$$

إن تباين المعلمتين $(\hat{a}_1)$ و $(\hat{a}_0)$ الذي برهنا علية و الذي تحصلنا عليه في العلاقتين (12) و (13) السابقتين ما هو إلا تباين نظري قيمتيه غير معروفتين، لكن بما أن تباين الأخطاء المقدرة معروفة فإن نعوضها في العلاقتين (12) و (13) التي تعطى كما يلي:

$$\hat{\delta}_{\hat{a}_1}^2 = \frac{\hat{\delta}_\varepsilon^2}{\sum (x_t - \bar{x})^2} \dots\dots\dots\dots (19)$$

$$\hat{\delta}_{\hat{a}_0}^2 = \hat{\delta}_\varepsilon^2 \left[\frac{1}{n} - \frac{\bar{x}^2}{\sum (x_t - \bar{x})^2}\right] \dots\dots\dots\dots (20)$$

2. اختبار (t–student):

لنختبر الفرضيتين الآتيتين عند مستوى معنوية 5%:

فرضية العدم: $H_0: a_1 = 0$

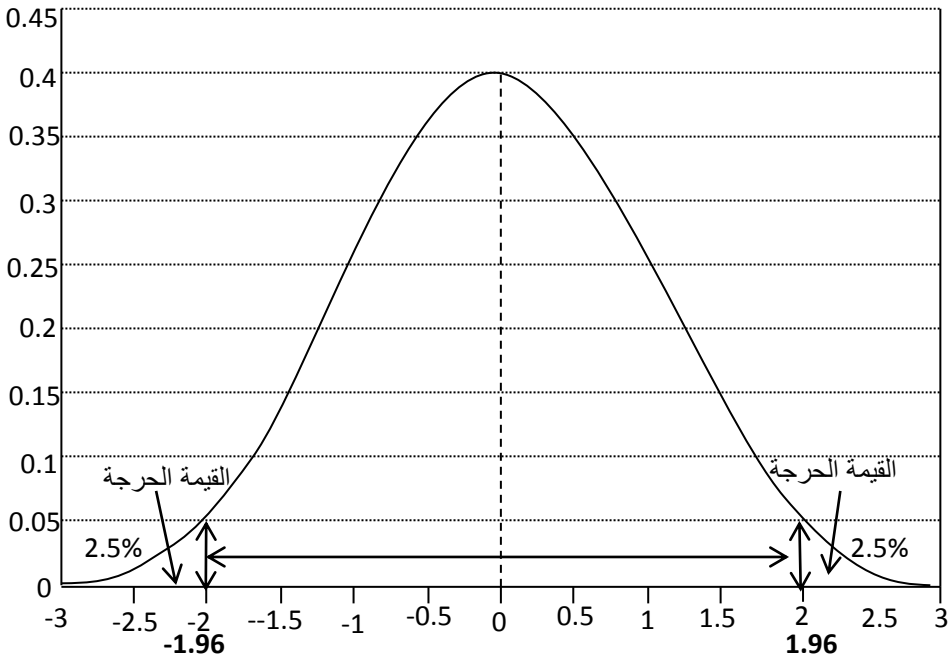
الفرضية البديلة: $H_1: a_1 \neq 0$

تتبع $\frac{\hat{a}_1-a_1}{\hat{\delta}_{\hat{a}_1}}$ قانون (t-student) بدرجة حرية $(n-2)$، و تحت فرضية العدم $(H_0: a_1 = 0)$ تستلزم حساب القيمة المحسوبة $(t_{\hat{a}_1})$ و مقارنتها بالقيمة المجدولة (t_t) عند درجة حرية $(n-2)$، حيث:

$$t_{\hat{a}_1} = \frac{|\hat{a}_1 - a_1|}{\hat{\delta}_{\hat{a}_1}} = \frac{|\hat{a}_1|}{\hat{\delta}_{\hat{a}_1}} \qquad / \quad a_1 = 0$$

إذا كانت $t_{\hat{a}_1} > t_{n-2}^{0.05}$ نرفض فرضية العدم $(H_0: a_1 = 0)$ و نقبل الفرضية البديلة $(H_1: a_1 \neq 0)$، و بالتالي نقول أن المعلمة $(\hat{a}_1)$ معنوية تختلف عن الصفر (لها دلالة احصائية). نشير إلى أنه إذا كانت درجة الحرية يفوق $(n \geq 30)$ فإن قيمة $(t_{\infty}^{0.05} = 1.96)$، لذا إذا كانت $(t_{\hat{a}_1} > t_{\infty}^{0.05} = 1.96)$ نرفض فرضية العدم و يكون المعامل (a_1) النظري الغير معروف معنوي يختلف عن الصفر، و يبين الشكل (2) ذلك.

الشكل (2): الاختبار الثنائي عن 5.%



التمرين (02): بالاعتماد على نتائج التمرين (01) السابق

1. هل معلمة الميل الحدي للاستهلاك معنوية تختلف عن الصفر عند مستوى معنوية 5%؟.
2. ما هو مجال الثقة للميل الحدي للاستهلاك عند مستوى الثقة 95%.

الحل:

1. إن معرفة معنوية المعلمة المفسِرة هي في غاية الأهمية الاقتصادية، حيث تدل المعلمة غير معنوية على أن المتغيرة المفَسِرة التي تتمثل في الدخل المتاح ليست كمفسرة جيدة للاستهلاك، إذن لدينا:

$$H_0: a_1 = 0$$

$$H_1: a_1 \neq 0$$

تحت فرضية العدم H_0 يكون لدينا:

$$t_{\hat{a}_1} = \frac{\hat{a}_1 - a_1}{\hat{\delta}_{\hat{a}_1}} = \frac{\hat{a}_1 - 0}{\hat{\delta}_{\hat{a}_1}} = \frac{\hat{a}_1}{\hat{\delta}_{\hat{a}_1}}$$

هنا يجب أن نحسب أولا مجموع مربع البواقي:

t	القيم الحقيقية t	القيم المقدرة $\hat{y}$	e_t	e_t^2
1	1520	1519.32	0.68	0.4624
2	1630	1640.03	-10.03	100.6009
3	1780	1730.72	49.28	2428.5184
4	1750	1821.32	-71.32	5086.5424
5	1925	1930.04	-5.04	25.4016
6	1930	1942.12	-12.12	146.8944
7	2100	2062.92	37.08	1373.814
8	2120	2123.32	-3.32	11.0224
9	2180	2123.32	56.68	3212.6224
10	2205	2213.92	-8.92	79.5664
11	2285	2304.52	-19.52	381.0304
12	2320	2334.72	-14.72	216.6784
المجموع			00	13065.9

تباين الأخطاء يساوي:

$$\hat{\delta}_{\varepsilon}^2 = \frac{\sum e_t^2}{n-2} = \frac{13065.9}{12-2} = 1306.95$$

إذن تباين المعلمة المقدرة ($\hat{a}_1$) يساوي:

$$\hat{\delta}^2_{\hat{a}_1} = \frac{\hat{\delta}^2_\varepsilon}{\sum(x_t - \bar{x})^2} = \frac{1306.95}{2063491.667} = 0.00063$$

مع العلم أن $\sum(x_t - \bar{x})^2$ تم حسابها في الأول (ارجع إلى الجدول).

$$\hat{\delta}_{\hat{a}_1} = \sqrt{\hat{\delta}^2_{\hat{a}_1}} = 0.0251$$

نحسب الآن القيمة الحرجة للإحصائية (t–student) :

$$t_{\hat{a}_1} == \frac{\hat{a}_1}{\hat{\delta}_{\hat{a}_1}} = \frac{0.604}{0.0251} = 24.06$$

لدينا من الجدول (الملحق رقم (01)) قيمة (t) المجدولة $t_{10}^{0.05}$=2.228 و بالتالي فإن $t_{\hat{a}_1}$ أكبر من t_t، و هذا ما يسمح لنا برفض فرضية العدم و قبول الفرضية البديلة، و التي تعني أن معلمة الميل الحدي للاستهلاك معنوية تختلف عن الصفر.

نقول بصفة عامة أنه إذا كانت $t_{\hat{a}_1}$ أكبر من $(+t_t^{\frac{\alpha}{2}})$ أو أقل من $(-t_t^{\frac{\alpha}{2}})$ فإننا نرفض فرضية العدم و نقبل الفرضية البديلة، و بذلك من الأحسن أن نكتب:

تكون المعلمة معنوية إذا كانت: $t_{\hat{a}_1} = \frac{|\hat{a}_1|}{\hat{\delta}_{\hat{a}_1}} > t_t^{0.025}$ عند مستوى معنوية $(n-2)$، حيث نرفض فرضية العدم و العكس صحيح.

2. يمكن استنتاج مجال الثقة من الشكل (3.2) السابق بالعلاقة الآتية:

$$\frac{\hat{a}_1 - a_1}{\hat{\delta}_{\hat{a}_1}} = \pm t_t^{\propto/2} \rightarrow a_1 = \hat{a}_1 \pm \hat{\delta}_{\hat{a}_1} t_{n-2}^{\propto/2}$$

$$a_1 = 0.604 \pm (0.0251 * 2.228) = [0.55 \ : \ 0.66]$$

يدل مجال الثقة المحصل عليه أن المعامل الحقيقي (a_1) يوجد ضمن المجال [0.55 : 0.66] عند مستوى المعنوية 5%.

3. معامل التحديد و تحليل جدول التباين:

1.3. معامل التحديد:

معامل التحديد هو عبارة عن نسبة التغيرات المفسرة (SCE) إلى التغيرات الكلية، و هو يقيس نسبة التغير في المؤشر التابع نتيجة التغير الذي يحدث في المتغير المستقل، بعبارة أخرى، يوضح معامل التحديد نسبة مساهمة المتغير المستقل في التغيرات التي تحدث في المتغير التابع، بذلك يستعمل معامل التحديد لمعرفة جودة توفيق خط الانحدار المقدرة بين كل من المتغير التابع و المتغير المستقل[16].

سوف نحاول الآن البرهان على علاقتين أساسيتين و هما

- نعلم سابقا أن $\sum e_t = 0$:
- مجموع المتغيرة التابعة الحقيقية تساوي مجموع المتغيرة المقدرة $\sum y_t = \sum \hat{y}_t$:

$$y_t - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 x_t == y_t - \hat{y} = e_t \rightarrow \sum y_t - \sum \hat{y}_t = \sum e_t = 0$$

نستنتج من هذه العلاقة الأخيرة أن متوسط المتغيرة التابعة الحقيقية يساوي متوسط المتغيرة التابعة المقدرة، حيث بقسمة هذه الأخيرة على (n) نحصل:

$$\frac{\sum y_t}{n} - \frac{\sum \hat{y}_t}{n} = \frac{\sum e_t}{n} = 0 \quad \rightarrow \bar{y} = \bar{\hat{y}}$$

يمكن الآن استخدام هاتين العلاقتين الأساسيتين تحليل التباين

$$\sum y_t = \sum \hat{y}_t + \sum e_t$$

$$\underset{SCT}{\sum (y_t - \bar{y})^2} = \underset{SCE}{\sum \left(\hat{y}_t - \bar{\hat{y}}\right)^2} + \underset{SCR}{\sum e_t^2} \ldots\ldots (21)$$

SCT مجموع التباين الكلي تساوي مجموع تباين المتغيرة المفسِرة SCE زائدا مجموع تباين بواقي التقدير SCR.

16 - Verbeek M (2017), ***A guide to modern econometrics***, USA : Willy, P21.

تسمح العلاقة (21) بالتحقق من جودة النموذج، حيث كلما كان تباين المتغيرة المفسِرة قريبة من التباين الكلي (مجموع تغيرات المشاهدات) كان النموذج جيدا، و تكون البواقي أقل ما يمكن بطريقة المربعات الصغرى العادية، على هذا الأساس يمكننا حساب معامل التحديد (R^2) كما يلي:

بقسمة العلاقة (21) على $(\sum(y_t - \bar{y})^2)$ ينتج لدينا:

$$\frac{\sum(\hat{y}_t - \bar{\hat{y}})^2}{\sum(y_t - \bar{y})^2} + \frac{\sum e_t^2}{\sum(y_t - \bar{y})^2} = 1$$

نضع: $R^2 = \frac{\sum(\hat{y}_t - \bar{\hat{y}})^2}{\sum(y_t - \bar{y})^2}$ نحصل على:

$$R^2 = \frac{\sum(\hat{y}_t - \bar{\hat{y}})^2}{\sum(y_t - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\sum e_t^2}{\sum(y_t - \bar{y})^2} \dots\dots\dots (22)$$

تبين العلاقة (22) علاقة معامل التحديد (R^2) الذي يشير إلى نسبة تفسير المتغيرة المستقلة للمتغيرة التابعة، فمثلا إذا كان معامل التحديد يساوي (0.85) نقول أن المتغيرة المستقلة تفسِر المتغيرة التابعة بنسبة 85%.

2.3. اختبار Fisher:

يمثل الجدول (1.2) الآتي تحليل التباين للنموذج البسيط.

الجدول (01): تحليل التباين للنموذج البسيط

مصدر التغيرات	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط المربعات
x	$SCE = \sum(\hat{y}_t - \bar{\hat{y}})^2$	1	$SCE/_1$
البواقي	$SCR = \sum e_t^2$	$n-2$	$SCR/_{n-2}$
الاجمالي	$SCT = \sum(y_t - \bar{y})^2$	$n-1$	

تتعلق درجة الحرية بعدد القيم التي نود تقييمها، فمثلا المتغيرة المستقلة في النموذج البسيط التي نود تقييمها هي واحدة (1).

إن اختبار الفرضية $H_0: a_1 = 0$ هي نفسها اختبار الفرضية $H_0: SCE = 0$ (المتغيرة المستقلة x_t لا تساهم في تفسير النموذج). أما اختبار الفرضية $H_1: SCR = 0$ مقابل الفرضية $H_0: SCR \neq 0$.

تعطى احصائية هذا الاختبار بالعلاقة الآتية:

$$F_c = \frac{SCE/_{ddl}}{SCR/_{ddl}} = \frac{\sum(\hat{y}_t - \bar{\hat{y}})^2/_1}{\sum e_t^2/_{n-2}}$$

بقسمة (SCE) و (SCR) على $\sum(y_t - \bar{y})^2$ نحصل:

$$F_c = \frac{R^2/_1}{1 - R^2/_{n-2}} = \frac{R^2(n-2)}{1 - R^2}$$

تسمى هذه الاحصائية بإحصائية (Fisher) و هي تساوي مجموع تباين المتغيرة المفسِرة على مجموع تباين البواقي، حيث أن كل مجموع مقسوم على درجة الحرية الخاص به، و إذا كان مجموع التغيرات المفسِرة معنوي أكبر من مجموع تغيرات البواقي، هذا يدل على أن (x_t) مفسِرة حقيقية للنموذج.

إذا كانت $F_{(1,n-2)}^{\alpha} < F_c$ نرفض فرضية العدم عند مستوى المعنية α التي تفرض تساوي التباينات و نقبل الفرضية البديلة ، و هذا ما يدل على أن المتغيرة المفسِرة تفسر المتغيرة التابعة، و العكس صحيح.

التمرين (03): بالاعتماد على معطيات التمرين (01) السابق أوجد:

1. مجموع التغيرات الكلية و مجموع التغيرات المفسِرة.
2. معامل التحديد احصائية فيشر.
3. و هل النموذج ككل مقبول.

الحل:

1. حساب التغيرات الكلية و مجموع التغيرات المفسِرة:

يمكن مما سبق حساب مجموع التغيرات الكلية:

$$SCT = \sum (y_t - \bar{y})^2 = 765756.25$$

و كنا قد حسبنا سابقا مجموع مربع أخطاء التقدير:

$$SCR = \sum e_t^2 = 13065.9$$

و منه يمكن حساب مجموع التغيرات المفسِرة:

$$SCT = SCE + SCR \rightarrow SCE = SCT - SCR$$

$$SCE = \sum \left(\hat{y}_t - \bar{\hat{y}}\right)^2 = 765756.25 - 13065.9 = 752690.35$$

2. حساب معامل التحديد و احصائية فيشر:

$$R^2 = \frac{\sum \left(\hat{y}_t - \bar{\hat{y}}\right)^2}{\sum (y_t - \bar{y})^2} = \frac{752690.35}{765756.25} = 0.98$$

يشير معامل التحديد أن المتغيرة المستقلة أو المفسِرة تفسر المتغيرة التابعة بنسبة 98%.

$$F_c = \frac{\Sigma \left(\hat{y}_t - \bar{\hat{y}}\right)^2 / 1}{\sum e_t^2 / n - 2} = \frac{752690.35}{13065.9/10} = 576.07$$

3. لمعرفة النموذج ككل على أنه معنوي، نقوم بمقارنة احصائية فيشر المحسوبة مع احصائية فيشر المجدولة (الملحق (02))، و ذلك عند مستوى معنوية 5% و درجة الحرية $(k, n-2) = (1,10)$

$$F_c = 1800 > F_{(1.10)}^{0.05} = 4.96$$

نقبل الفرضية البديلة H_1 ،على هذا الأساس نقول أن النموذج ككل معنوي.

رابعا: التنبؤ في النموذج الخطي البسيط:

يمكننا حساب القيم المتوقعة خلال الفترة (h) إذا كانت معلمات النموذج مقدرة خلال الفترة $(t = 1,2\ldots, n)$، حيث:

$$y_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_t + e_t$$

و إذا كانت قيمة المتغيرة المفسِرة (x_t) معروفة خلال الفترة $(n+1)$ فإن القيمة المتوقعة للمتغيرة التابعة تعطى بالشكل:

$$\hat{y}_{t+1} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_{n+1}$$

لكن هنا يجب أن نثبت بأن هذه التوقعات أو التنبؤات تكون غير متحيزة، حيث توقع الخطأ يعطى كما يلي:

$$e_{n+1} = y_{n+1} - \hat{y}_{n+1} = (a_0 + a_1 x_{n+1} + \varepsilon_{n+1}) - (\hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_{n+1})$$

$$e_{n+1} = (a_0 - \hat{a}_0) + (a_1 - \hat{a}_1) x_{n+1} + \varepsilon_{n+1}$$

بالرجوع إلى الفرضيات الأساسية للنموذج و المتعلقة بالعلاقتين (9) و (11) السابقتين يكون لدينا:

$$E(e_{n+1}) = 0 \rightarrow E(e_{n+h}) = 0$$

يتم الحصول على القيم التنبؤية غير المتحيزة عن طريق التعويض مباشرة في النموذج المقدر، لكن يجب أن نعرف درجة الثقة التي يجب أن نمنحها لها، لذا، يجب أن نحسب تباين أخطاء التنبؤ التي تعطى بالعلاقة:

$$Var(e_{n+1}) = Var[(a_0 - \hat{a}_0) + (a_1 - \hat{a}_1) x_{n+1} + \varepsilon_{n+1}]$$

بما أن قيمة (x_{n+1}) معلومة و الأخطاء (ε_{n+1}) غير مرتبطة مع (ε_t) فإنه يمكن أن نكتب:

$$Var(e_{n+1}) = Var(\hat{a}_0) + {x_{n+1}}^2 Var(\hat{a}_1) + 2x_{n+1} Cov(\hat{a}_0, \hat{a}_1) + Var(\varepsilon_{n+1})$$

بتعويض العلاقات السابقة (12) و (13) و (15) ينتج لدينا:

$$Var(e_{n+1}) = \delta_\varepsilon^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum(x_t - \bar{x})^2}\right] + {x_{n+1}}^2 \frac{\delta_\varepsilon^2}{\sum(x_t - \bar{x})^2} - 2x_{n+1}\bar{x} Var(\hat{a}_1) + \delta_\varepsilon^2$$

$$Var(e_{n+1}) = \delta_\varepsilon^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2 + {x_{n+1}}^2 - 2x_{n+1}\bar{x}}{\sum(x_t - \bar{x})^2} + 1\right]$$

$$Var(e_{n+1}) = Var(y_{n+1} - \hat{y}_{n+1}) = \delta_\varepsilon^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \bar{x})^2}{\sum(x_t - \bar{x})^2} + 1\right] \dots\dots (23)$$

نلاحظ من العلاقة (23) أن تباين أخطاء التنبؤ هي دالة بدلالة الفرق التربيعي بين القيمة المتوقعة للمتغير المفسِرة و متوسطها، حيث كلما زادت هذه القيمة كلما زاد تباين أخطاء التنبؤ. و تسمح فرضية أن (ε_t) تخضع للقانون الطبيعي بتحديد مجال التنبؤ عند $(1-\propto)$:

$$e_{n+1} = y_{n+1} - \hat{y}_{n+1} \to N\left\{0, \hat{\delta}_{\varepsilon}^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \overline{x})^2}{\sum(x_t - \bar{x})^2} + 1\right]\right\}$$

حيث:

$$\frac{\hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_{n+1} - y_{n+1}}{\hat{\delta}_{\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \bar{x})^2}{\sum(x_t - \bar{x})^2} + 1}} \to t_{n-2}^{\alpha/2}$$

و هذا ما ينتج لنا:

$$y_{n+1} = \hat{y}_{n+1} \pm t_{n-2}^{\alpha/2}\hat{\delta}_{\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \overline{x})^2}{\sum(x_t - \bar{x})^2} + 1} \dots\dots(24)$$

التمرين (04): بالاعتماد على نتائج التمرين (01) السابق أين تم تقدير الاستهلاك بدلالة الدخل المتاح، حيث كانت النتائج:

$$y_t = \underset{(4.43)}{311.32} + \underset{(24.06)}{0.604}x_t + e_t$$

$$\sum e_t^2 = 13063.15 \quad , \sum (y_t - \bar{y})^2 = 763926.9$$

أوجد القيم التنبؤية للاستهلاك و مجال التنبؤ عند مستوى الثقة 95% إذا كان الدخل المتاح للشهر 13 و الشهر 14 هو 3400 و 3430 على التوالي.

الحل:

$$\hat{y}_{13} = 311.32 + 0.604(3400) = 2364.92$$

حيث لدينا المعطيات (للتذكير):

$$n = 12\ , \bar{x} = 2760.83\ , \delta_\varepsilon = \sqrt{\delta_\varepsilon^2} = 36.15\ , \sum (x_t - \bar{x})^2 = 2063491.667$$

$$t_{10}^{0.05} = 2.228\ , x_{13} = 3400\ , \hat{y}_{13} = 2364.92$$

نحسب الآن مجال الثقة للمتغيرة الحقيقية التابعة كما يلي:

$$y_{13} = \hat{y}_{13} \pm t_{10}^{0.05} \hat{\delta}_\varepsilon \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_{13} - \bar{x})^2}{\sum (x_t - \bar{x})^2} + 1}$$

$$y_{13} = 2364.92 \pm 2.228 \left[36.15 \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{(3400 - 2760.83)^2}{2063491.667} + 1} \right]$$

$$y_{13} \in [2273.75 : \ 2456.09]$$

بنفس الطريقة نجد توقع الشهر 14 و مجال الثقة:

$$\hat{y}_{14} = 311.32 + 0.604(3430) = 2383.04$$

$$y_{14} = 2383.04 \pm 2.228 \left[36.15 \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{(3430 - 2760.83)^2}{2063491.667} + 1} \right]$$

$$y_{14} \in [2291.20 : \ 2474.88]$$

التمرين (3) (المقارنة بين المعلمات المقدرة): أراد اقتصادي متخصص في اقتصاد العمل ايجاد العلاقة بين الكفاءة و مدة الدراسة (نظرية رأس المال البشري)، و من أجل هذا اقترح عينة مكونة من 35 رجلا و 20 امرأة من نفس السن، حيث أن الكفاءة السنوية ممثلة بآلاف الدولارات و عدد سنوات الدراسة بالسنوات، و كانت التقديرات كما يلي:

الرجال:

$$y_i = 14978.86 + 3684.28 x_i \quad / \ i = 1,2 \ldots\ldots,35$$

$$(-2.88) \qquad (14.31)$$

$$R^2 = 0.86$$

النساء:

$$y_i = \underset{(4.10)}{31008.37} + \underset{(2.11)}{779.29}x_i \quad / \ i = 1,2 \ldots\ldots,20$$

$$R^2 = 0.2$$

1. هل لسنوات الدراسة أثر معنوي على الكفاءة المهنية؟.

2. هل يوجد اختلاف معنوي لأثر سنوات الدراسة على الكفاءة لدى الرجال و النساء؟

الحل:

1. لدراسة الأثر المعنوي لسنوات الدراسة على الكفاءة نحسب احصائية (t–student) و نقارنها مع المجدولة:

الرجال (h)

$$t_{\hat{a}_{1h}} = \frac{\hat{a}_{1h}}{\hat{\delta}_{\hat{a}_{1h}}} = 14.31 > t^{0.05}_{n-1>30} = 1.96$$

النساء (f)

$$t_{\hat{a}_{1f}} = \frac{\hat{a}_{1f}}{\hat{\delta}_{\hat{a}_{1f}}} = 2.10 \cong t^{0.05}_{18} = 2.10$$

حيث أن الانحراف المعياري يساوي إلى

$$\hat{\delta}_{\hat{a}_{1h}} = 257.46 \ , \qquad \hat{\delta}_{\hat{a}_{1f}} = 369.33$$

المستوى التعليمي عند الرجال له أثر معنوي على الكفاءة هذا لأن $T_{\hat{a}_{1h}}$ أكبر من t_{th} ، حيث كلما زاد المستوى التعليمي عند الرجال كلما زادت الكفاءة عندهم. نلاحظ كذلك أن المستوى التعليمي عند النساء له أثر معنوي على الكفاءة لكن بأقل حدة عند الرجال هذا لأن $(t_{\hat{a}_1} \simeq t_{tf})$.

2. نعم يوجد اختلاف معنوي لأثر سنوات الدراسة على الكفاءة لدى الرجال و النساء، و يعود هذا الاختلاف إلى اختلاف التباينات غير المتساوية:

$$H_0 : a_{1h} = a_{1f} \ \rightarrow H_0 : a_{1h} - a_{1f} = 0$$

$$H_1 : a_{1h} \neq a_{1f} \ \rightarrow H_0 : a_{1h} - a_{1f} \neq 0$$

نستعمل اختبار (t–student) بدرجة حرية $(n1 + n2 - 4)$

$$\frac{(\hat{a}_{1h} - \hat{a}_{1f}) - (a_{1h} - a_{1f})}{\hat{\delta}_{\hat{a}_{1h}} - \hat{\delta}_{\hat{a}_{1f}}} \rightarrow (n1 + n2 - 4)$$

حيث:

$$\hat{\delta}_{\hat{d}} = \hat{\delta}_{\hat{a}_{1h}} - \hat{\delta}_{\hat{a}_{1f}} \quad و \quad \hat{d} = \hat{a}_{1h} - \hat{a}_{1f}$$

و تحت فرضية العدم H_0 ينتج لدينا:

$$\frac{\hat{d}}{\hat{\delta}_{\hat{d}}} = t_c = \frac{3684.28 - 779.29}{\sqrt{257.46^2 + 369.33^2}} = 6.45 > t_{51}^{0.05} = 1.96$$

إذن يوجد أثر معنوي لأثر سنوات الدراسة على كفاءة العمل عند النساء و الرجل و بذلك نرفض فرضية العدم.

تذكير:

$$Var(ax_1 + bx_2) = a^2 Var(x_1) + b^2 Var(x_2) + 2ab\, Cov(x_1, x_2)$$

بما أن المتغيرين (x_1) و (x_2) مستقلين فإن: $Cov(x_1, x_2) = 0$

$$Var(\hat{a}_{1h} - \hat{a}_{1f}) = Var(\hat{a}_{1h}) + Var(\hat{a}_{1f})$$

الفصل الثالث: نموذج الانحدار الخطي المتعدد

تطرقنا في الفصل السابق لنموذج الانحدار الخطي البسيط الذي تكون فيه متغيرة مفسِرة واحدة للمتغيرة التابعة، لكن أغلب المتغيرات أو الظواهر الاقتصادية تتأثر بعدة متغيرات اقتصادية و غير اقتصادية (اجتماعية، سياسية،...)، و هذا ما يستوجب علينا دراسة نموذج الانحدار الخطي المتعدد.

أولا: النموذج الخطي المتعدد:

1. عرض النموذج:

توجد في النموذج الخطي البسيط متغيرة مفسِرة واحدة للمتغيرة التابعة، لكن في النموذج الخطي العام توجد أكثر من متغيرة مفسِرة، لذا، فإن النموذج الخطي العام يكتب بالعلاقة:

$$y_t = a_0 + a_1 x_{1t} + a_2 x_{2t} + \cdots + a_k x_{kt} + \varepsilon_t \quad / \quad t = 1,2 \ldots, n$$

y_t : المتغيرة التابعة أو المتغيرة الداخلية في الفترة (t).

x_{1t} : المتغيرة المفسِرة (المستقلة) الأولى في الفترة (t).

x_{2t} : المتغيرة المفسِرة (المستقلة) الثانية في الفترة (t).

x_{kt} : المتغيرة المفسِرة (المستقلة) (k) في الفترة (t).

$(a_0 , a_1 , a_2 , \ldots , a_k x_{kt})$: معلمات النموذج.

ε_t: الحد العشوائي للأخطاء و هي غير معروفة في النموذج غير المقدر.

n: حجم العينة.

إن هذه الكتابة للنموذج الخطي المتعدد تكون صعبة الفهم و غير تطبيقية نوعا ما، و للتبسيط نكتب الشكل المصفوفاتي لها، حيث:

$$\begin{aligned}
y_1 &= a_0 + a_1 x_{11} + a_2 x_{21} + \cdots + a_k x_{k1} + 1 \\
y_t &= a_0 + a_1 x_{12} + a_2 x_{22} + \cdots + a_k x_{k2} + 2 \\
y_3 &= a_0 + a_1 x_{13} + a_2 x_{23} + \cdots + a_k x_{k3} + 3 \\
&\vdots \\
y_t &= a_0 + a_1 x_{1t} + a_2 x_{2t} + \cdots + a_k x_{kt} + \varepsilon_t
\end{aligned}$$

بالتالي يمكن كتابة الشكل المصفوفاتي في علاقة خطية كما يلي:

$$\underset{(n,1)}{Y} = \underset{(n,k+1)}{X} \cdot \underset{(k+1,1)}{a} + \underset{(n,1)}{\varepsilon}$$

تمثل القيم التي بين قوسين أبعاد المصفوفات، فمثلا $(n,1)$ هو بعد المصفوفة (Y)، حيث تتضمن (n) سطر و 1 عمود.

نكتب:

$$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_t \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} ,X=\begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{1t} & x_{2t} & \cdots & x_{kt} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{kn} \end{pmatrix} ,a=\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} ,\varepsilon=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_t \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن كل العمود المتعلق بالمصفوفة (X) هو الرقم واحد (1)، و هو يتعلق بمعامل (a_0) (معامل الحد الثابت. إذن بعد المصفوفة (X) هو (n) سطر و $(k+1)$ عمود، حيث (k) هو عدد المتغيرات المفسِرة.

ثانيا: تقدير النموذج الخطي المتعدد و خصائصه:

1. تقدير معلمات النموذج:

تهدف طريقة المربعات الصغرى العادية إلى الحصول على أقل مربع الأخطاء و التي تعبر عن الفرق بين القيم الحقيقية و القيم المقدرة، و حتى نتمكن من الحصول على أفضل منحنى يجب الحصول على أفضل تقدير للشعاع a و ذلك بالحصول على أقل قيم للأخطاء[17].

يمكن أن نكتب الشكل المصفوفاتي (k) متغيرة و (n) مشاهدة بالعلاقة:

$$Y = X\,a + \varepsilon$$

حيث يتضمن الشعاع (a) المعاملات $(a_0 , a_1 , a_2 , \dots , a_k x_{kt})$، و سوف نستخدم طريقة المربعات الصغرى العادية (OLS) للحصول على أقل مربع الأخطاء العشوائية.

$$Min\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2 = Min\varepsilon'\varepsilon = Min(Y-Xa)'(Y-Xa) = MinS$$

ε': هي منقول مصفوفة المتغير العشوائي.

$$MinS = Y'Y - Y'Xa - a'X'Y + a'X'Xa$$

17 - Pour plus de détails voir :
Judge G.G (1985), ***the theory and econometric methods***, J.W.S, N-Y, PP 13-16.

إن العمليات على المصفوفات ينتج لنا:

$$Y'Xa = a'X'Y$$

إذن:

$$MinS = Y'Y - 2a'X'Y + a'X'Xa$$

و من أجل الحصول على أقل مربع الأخطاء العشوائية نشتق هذه العلاقة الأخيرة:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2X'Y + 2X'Xa = 0$$

$$X'Xa = X'Y$$

نضرب طرفي العلاقة في $(X'X)^{-1}$ (مقلوب المصفوفة $(X'X)$)، و من نحصل:

$$\hat{a} = (X'X)^{-1}X'Y \dots\dots\dots\dots (01)$$

هنا تكون المصفوفة $(X'X)$ مربعة ذات البعد $(k+1, k+1)$، كما تكون مصفوفة عكوس إذا كان محددها لا يساوي الصفر، بالتالي إذا كانت المصفوفة غير مربعة أو محددها يساوي الصفر فإنه لا يمكن تقدير المعلمات.

يمكن أن نكتب العلاقة $X'Xa = X'Y$ بالشكل المصفوفاتي كما يلي:

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_{1t} & \sum x_{2t} & \dots & \sum x_{kt} \\ \sum x_{1t} & \sum x_{1t}^2 & \sum x_{1t}x_{2t} & \dots & \sum x_{1t}x_{kt} \\ \sum x_{2t} & \sum x_{2t}x_{1t} & \sum x_{2t}^2 & \dots & \sum x_{2t}x_{kt} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum x_{kt} & \sum x_{kt}x_{1t} & \sum x_{kt}x_{2t} & \dots & \sum x_{kt}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_t \\ \sum x_{1t}y_t \\ \sum x_{2t}y_t \\ \vdots \\ \sum x_{kt}y_t \end{pmatrix}$$

المصفوفة $(X'X)$ هي مصفوفة متناظرة و بالتالي تكون معكوس المصفوفة متناظرة.

نكتب النموذج الخطي المتعدد المقدر بالعلاقة:

$$\hat{y}_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_{1t} + \hat{a}_2 x_{2t} + \dots + \hat{a}_k x_{kt}$$

يمكن أن نكتب المعلمات المقدرة بالشكل المصفوفاتي بدلالة التباين و التباين المشترك كما يلي:

$$\begin{pmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\\ \hat{a}_3\\ \vdots\\ \hat{a}_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Var(x_1) & Cov(x_1,x_2) & Cov(x_1,x_3) & \dots & Cov(x_1,x_k)\\ Cov(x_2,x_1) & Var(x_2) & Cov(x_1,x_3) & \dots & Cov(x_2,x_k)\\ Cov(x_3,x_1) & Cov(x_3,x_2) & Var(x_3) & \dots & Cov(x_3,x_k)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ Cov(x_k,x_1) & Cov(x_k,x_2) & Cov(x_k,x_3) & \dots & Var(x_k)\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}Cov(x_1,y_t)\\ Cov(x_2,y_t)\\ Cov(x_3,y_t)\\ \vdots\\ Cov(x_k,y_t)\end{pmatrix}$$

حيث يكون لدينا أيضا:

$$\hat{a}_0=\bar{y}-\hat{a}_1\bar{x}_1-\hat{a}_2\bar{x}_2-\dots-\hat{a}_k\bar{x}_k$$

2. فرضيات و خصائص المقدرات:

يتضمن النموذج الخطي المتعدد فرضيات عديدة، حيث بالإضافة إلى الفرضيات المذكورة في النموذج الخطي البسيط يكون لدينا أيضا[18]:

H_6. غياب التعدد الخطي بين المتغيرات المفسِرة، و هذا يتضمن أن المصفوفة $(X'X)$ منتظمة و أن المصفوفة العكوس لها $(X'X)^{-1}$

H_7. المصفوفة $(X'X)/n$ هي مصفوفة نهائية، محددها لا يساوي الصفر موجودة (المقدر متقارب). .

H_8. عدد المشاهدات (حجم العينة) يكون أكبر من عدد المتغيرات المفسرة $(n>k+1)$.

3. خصائص المقدرات:

هنا نقوم بدراسة خصائص العلاقة (01) السابقة، و في البداية نحاول أن نثبت بأن المقدر غير متحيز، حيث لدينا من العلاقة (01) السابقة:

$$Y=Xa+\varepsilon\dots\dots(02)$$

بتعويض العلاقة (02) في العلاقة (01) ينتج لدينا:

$$\hat{a}=(X'X)^{-1}X'Y=(X'X)^{-1}X'[Xa+\varepsilon]=(X'X)^{-1}(X'X)a+(X'X)^{-1}X'\varepsilon$$

$$\hat{a}=a+(X'X)^{-1}X'\varepsilon\dots\dots.(03)$$

التوقع الرياضي هو:

$$E(\hat{a})=E(a)+(X'X)^{-1}X'E(\varepsilon)\quad /\ E(\varepsilon)=0$$

$$E(\hat{a})=a$$

و عليه فإن المعلمات المقدرة في النموذج الخطي المتعدد تكون غير متحيز بطريقة المربعات الصغرى العادية.

18 - Régis Bourbonnais (2015) **,** ***Économétrie***, 9emeéd, Paris : DUNOD, P51.

و الآن نبحث عن مصفوفة التباين و التباين المشترك لمعلمات الانحدار ($\hat{\Omega}$)، حيث لدينا من العلاقة (03):

$$\hat{a} - a = (X'X)^{-1}X'\varepsilon$$

$$(\hat{a} - a)(\hat{a} - a)' = (X'X)^{-1}X'\varepsilon\varepsilon'X(X'X)^{-1}$$

مصفوفة التباين هي:

$$\Omega_{\hat{a}} = E[(\hat{a} - a)(\hat{a} - a)'] = (X'X)^{-1}X'E(\varepsilon\varepsilon')X(X'X)^{-1} \dots . (04)$$

$V(\varepsilon) = E(\varepsilon\varepsilon') = \delta_\varepsilon^2 I$: هي مصفوفة التباين و التباين المشترك للأخطاء، و تحت الفرضية الثالثة (تباين الأخطاء ثابت) و الفرضية الرابعة (الأخطاء غير مرتبطة)، فإن:

$$\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{pmatrix} E(\varepsilon_1\varepsilon_1) & E(\varepsilon_2\varepsilon_1) & \dots & E(\varepsilon_n\varepsilon_1) \\ E(\varepsilon_2\varepsilon_1) & E(\varepsilon_2\varepsilon_2) & \dots & E(\varepsilon_n\varepsilon_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E(\varepsilon_n\varepsilon_1) & E(\varepsilon_n\varepsilon_2) & \cdots & E(\varepsilon_n\varepsilon_n) \end{pmatrix}$$

$$\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{pmatrix} \delta_\varepsilon^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_\varepsilon^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \delta_\varepsilon^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \delta_\varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

و منه نكتب العلاقة (04) كما يلي:

$$\Omega_{\hat{a}} = \delta_\varepsilon^2 (X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}$$

$$\Omega_{\hat{a}} = \delta_\varepsilon^2 (X'X)^{-1} \dots \dots . (05)$$

$$\lim_{n\to\infty} \Omega_{\hat{a}} = \frac{\delta_\varepsilon^2}{n}\left(\frac{X'X}{n}\right)^{-1} = 0$$

تعني هذه النتيجة الأخيرة أن المقدر متقارب، و بذلك تحقق الفرضية السابعة، و حسب نظرية Gauss-Markov، فإن العلاقة (01) السابقة المقدرة بطريقة المربعات الصغرى العادية تكون تقديراتها جيدة إذا كانت المقدرات غير متحيزة (Best Linear Unbiased Estimators) (BLUE)، و هنا يجب أن نبحث عن تباين الأخطاء غير المتحيز باتباع الخطوات الآتية[19]:

19 - Pour plus de détails voir :
Régis Bourbonnais , op.cit., PP53-105.

$$e = Y - X\hat{a} = Y - X[(X'X)^{-1}X'Y]$$

$$e = [I - X(X'X)^{-1}X']Y$$

نضع: $P = I - X(\quad 'X)^{-1}X'$ و حيث:

$$PX = [I - X(X'X)^{-1}X']X = 0$$

كما أن المصفوفة P متماثلة حيث $(P^2 = P)$، حيث:

$$P^2 = (I - X(X'X)^{-1}X')(I - X(X'X)^{-1}X')'$$

$$P^2 = I^2 - 2X(X'X)^{-1}X' + (X'X)^{-1}X'XX'(X'X)^{-1}$$

$$P^2 = I^2 - X(X'X)^{-1}X'$$

$$P^2 = \mathrm{I} - X(X'X)^{-1}X' \qquad / \quad I^2 = I$$

I: هي مصفوفة أحادية:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

إذن:

$$e = PY = P(Xa + \varepsilon) = PXa + P\varepsilon$$

$$e = P\varepsilon$$

إذن التوقع الرياضي للأخطاء يعطى بالعلاقة الآتية انطلاقا من هذه العلاقة الأخيرة:

$$E(e'e) = E(\varepsilon'P'P\varepsilon) = E(\varepsilon'P\varepsilon) \qquad / \quad P^2 = P$$

نحسب الآن أثر (tr) المصفوفة الذي يساوي مجموع قطر المصفوفة كما يلي:

$$E(\varepsilon'P\varepsilon) = E\big(tr(\varepsilon'P\varepsilon)\big) = E\big(tr(\varepsilon\varepsilon'P)\big) = \delta_\varepsilon^2 tr(P)$$

$$E(\varepsilon'P\varepsilon) = \delta_\varepsilon^2 tr(I - X(X'X)^{-1}X') = \delta_\varepsilon^2 tr(I) - \delta_\varepsilon^2 tr(X(X'X)^{-1}X')$$

$$E(\varepsilon'P\varepsilon) = \delta_\varepsilon^2 tr(I) - \delta_\varepsilon^2 tr((X'X)^{-1}X'X)$$

$$E(\varepsilon'P\varepsilon) = \delta_\varepsilon^2 n - \delta_\varepsilon^2 (k+1)$$

$$E(\varepsilon'P\varepsilon) = \delta_\varepsilon^2 (n - k - 1)$$

هذا لأن:

$$tr(I) = n \quad \text{و} \quad tr((X'X)^{-1}X'X) = \mathrm{k} + 1$$

و يكتب تباين الأخطاء بالعلاقة:

$$\hat{\delta}_{\varepsilon}^{2} = \frac{e'e}{n-k-1} \dots\dots (06)$$

بتعويض ($\hat{\delta}_{\varepsilon}^{2}$) مكان ($\delta_{\varepsilon}^{2}$) يصبح تباين للعلاقة (05):

$$\Omega_{\hat{a}} = \delta_{\varepsilon}^{2}(X'X)^{-1} = \frac{e'e}{n-k-1}(X'X)^{-1} \dots\dots (07)$$

ثالثا: الاختبارات الاحصائية و جودة النموذج:

1. اختبار t–student:

لنختبر الفرضيتين الآتيتين عند مستوى معنوية 5%:

فرضية العدم: $H_0: a_i = 0$

الفرضية البديلة: $H_1: a_i \neq 0$

و تحت فرضية العدم ينتج لدينا:

$$t_{\hat{a}_i} = \frac{\hat{a}_i}{\hat{\delta}_{\hat{a}_i}} \rightarrow t - student\ (n-k-1)$$

حيث $(n-k-1)$ هي درجة الحرية.

نرفض فرضية العدم إذا كانت $t_{\hat{a}_i} > t_{n-k-1}^{\alpha/2}$ و نقول أن المعلمة a_i معنوية تختلف عن الصفر عند مستوى معنوية محدد. أما إذا كانت $t_{\hat{a}_i} < t_{n-k-1}^{\alpha/2}$ نقبل فرضية العدم ،و بالتالي فإن المعلمة a_i تكون غير معنوية لا تختلف عن الصفر.

2. اختبار Fisher:

نختبر الفرضيات الآتية:

$H_0 : a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$ لا توجد أي معلمة معنوية

$H_1 :$ توجد على الأقل معلمة واحدة معنوية

ففي حالة قبول فرضية العدم فإن هذا يدل على أنه لا توجد علاقة خطية معنوية بين المتغيرات المفسِرة و المتغيرة التابعة. و نعتمد على العلاقة السابقة المستخرجة في النموذج البسيط (الفصل السابق) لتحليل التباين:

$$\sum(y_t - \bar{y})^2 = \sum\left(\hat{y}_t - \bar{\hat{y}}\right)^2 + \sum e_t^2 \dots\dots\dots (08)$$

يسمح الجدول (01) بتحليل التباين:

مصدر التغيرات	التباينات	درجة الحرية	متوسط التباينات
$x_1, x_2 \dots x_k$	$SCE = \sum\left(\hat{y}_t - \bar{\hat{y}}\right)^2$	k	$SCE/_k$
البواقي	$SCR = \sum e_t^2$	$n-k-1$	$SCR/_{n-k-1}$
الاجمالي	$SCT = \sum(y_t - \bar{y})^2$		

يعطى اختبار Fisher بالعلاقة الآتية:

$$F_C = \frac{SCE/k}{SCR/n-k-1} = \frac{R^2/k}{R^2/n-k-1} \dots\dots\dots\dots (09)$$

تتضمن فرضية الأخطاء الموزعة طبيعيا أنه إذا كانت قيمة فيشر المحسوبة أكبر من قيمة فيشر المجدولة نرفض فرضية العدم و نقبل الفرضية البديلة عند درجة حرية $(k, n-k-1)$، بذلك نقول أن النموذج ككل مقبول، حيث أن المتغيرات المفسِرة تفسر المتغيرة التابعة.

3. معامل التحديد و معامل التحديد المصحح:

تسمح أيضا العلاقة (08) بمعرفة جودة النموذج، حيث كلما كانت التغيرات المفسِرة قريبة من مجموع التغيرات الكلية كلما كان النموذج جيد.

$$R^2 = \frac{\sum\left(\hat{y}_t - \bar{\hat{y}}\right)^2}{\sum(y_t - \bar{y})^2} = 1 - \frac{\sum e_t^2}{\sum(y_t - \bar{y})^2} \dots\dots (10)$$

R^2: هو معامل التحديد الذي يقيس نسبة تأثير تباين المتغيرة المفسِرة على التباين الكلي، و هو محصور بين الصفر و الواحد، فمثلا إذا كان $(R^2 = 0.9)$ نقول أن المتغيرات المفسِرة كلها تفسر المتغيرة التابعة بنسبة 90%.

لكن جودة ^{2} تكون مرتبطة بدرجة الحرية، حيث إذا كان حجم العينة صغيرا، فهنا يجب أن نصحح معامل التحديد، و هذا ما يصطلح عليه بمعامل التحديد المصحح الذي يعطى بالعلاقة الآتية:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{(n-1)}{n-k-1}(1-R^2)$$

في حالة العينة صغيرة يكون:

$$\bar{R}^2 < R^2$$

و في حالة العينة كبيرة يكون:

$$\bar{R}^2 \simeq R^2$$

بصفة عامة كلما كان معامل التحديد المصحح قريبا من معامل التحديد دل ذلك على أنه عند إضافة متغيرة غير مفسِرة للنموذج فإن معامل التحديد لن يتغير، و العكس صحيح.

فعندما لا ترتفع قيمة معامل التحديد (R^2) بإضافة متغيرة مُفسِرة جديدة، ففي هذه الحالة تنخفض قيمة معامل التحديد المصحح $(\bar{R}^2)$ لأن (k) ترتفع بوحدة واحدة[20].

التمرين (01): ليكن الجدول الآتي الذي تكون فيه ثلاث متغيرات مستقلة أو مفسِرة.

t	y_t	x_{1t}	x_{2t}	x_{3t}
1	5	12	10	20
2	7	11	13	21
3	6	10	10	21
4	8	9	13	23
5	10	7	15	24
6	9	8	16	24
7	12	6	19	26
8	14	4	23	29
9	15	6	25	30
10	16	5	28	31
11	18	4	31	33
12	22	3	37	35

1. أكتب الشكل المصفوفاتي للنموذج و أبعاد كل مصفوفة.

20 - Philippe Casin (2013), ***Exercice d'économétrie et d'analyse de données***, Paris : TECHNIP, P96.

2. قدر معلمات النموذج.

3. أحسب تباين الأخطاء و الانحراف المعياري لكل معلمة.

4. هل معلمات المتغيرات المفسِرة معنوية.

5. أحسب معامل التحديد و معامل التحديد المصحح، ثم تأكد من أن النموذج ككل معنوي.

الحل:

1. كتابة الشكل المصفوفاتي للنموذج الذي يتضمن 12 عينة $(n = 12)$ و ثلاث متغيرات مفسرة $(k = 3)$.

$$Y = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \\ \vdots \\ 22 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 10 & 20 \\ 1 & 11 & 13 & 21 \\ 1 & 10 & 15 & 21 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 3 & 37 & 35 \end{pmatrix}, a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$
$$(12,1) \qquad (12,4) \qquad (4,1) \qquad (12,1)$$

القيم التي هي بين قوسين تمل بعد كل مصفوفة.

2. تقدير معلمات النموذج، حيث لدينا:

$$\hat{a} = (X'X)^{-1}X'Y$$

نحسب المصفوفة $(X'X)$ ثم نحسب معكوس المصفوفة.

$$(X'X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 12 & 11 & 10 & \dots & 3 \\ 10 & 13 & 10 & \dots & 37 \\ 20 & 21 & 21 & \dots & 35 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 12 & 10 & 20 \\ 1 & 11 & 13 & 21 \\ 1 & 10 & 10 & 21 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 3 & 37 & 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 85 & 240 & 317 \\ 85 & 697 & 1444 & 2092 \\ 240 & 1444 & 5648 & 6823 \\ 317 & 2092 & 6823 & 8655 \end{pmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 179.3207 & -4.26804 & 3.3417 & -8.17059 \\ -4.26804 & 0.13019 & -0.05777 & 0.1704 \\ 3.3417 & -0.05777 & 0.082616 & -0.17356 \\ -8.17059 & 0.1704 & -0.17356 & 0.39501 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن المصفوفة $(X'X)$ متناظرة و هو كذلك لمعكوسها $(X'X)^{-1}$.

$$X'Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 12 & 11 & 10 & \dots & 3 \\ 10 & 13 & 10 & \dots & 37 \\ 20 & 21 & 21 & \dots & 35 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \\ \vdots \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 142 \\ 847 \\ 3344 \\ 4041 \end{pmatrix}$$

و عليه فإن المعلمات المقدرة تساوي إلى:

$$a = \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 179.3207 & -4.26804 & 3.3417 & -8.17059 \\ -4.26804 & 0.13019 & -0.05777 & 0.1704 \\ 3.3417 & -0.05777 & 0.082616 & -0.17356 \\ -8.17059 & 0.1704 & -0.17356 & 0.39501 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 142 \\ 847 \\ 3344 \\ 4041 \end{pmatrix}$$

$$a = \begin{pmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \hat{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.86 \\ -0.398 \\ 0.5 \\ -0.045 \end{pmatrix}$$

$$\hat{y}_t = 5.86 - 0.398x_{1t} + 0.5x_{2t} - 0.045x_{3t}$$

3. حساب تباين الأخطاء و الانحراف المعياري لكل معلمة.

أولا يجب أن نحسب بواقي التقدير التي تساوي القيمة الحقيقية ناقصا القيمة المقدرة لها، حيث:

$$e_t = y_t - \hat{y}_t = y_t - [\hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_{1t} + \hat{a}_2 x_{2t} + \hat{a}_3 x_{2t}]$$

$$e_1 = 5 - [5.86 - 0.398(12) + 0.5(10) - 0.045(20)] = -0.166$$

$$e_2 = 7 - [5.86 - 0.398(11) + 0.5(13) - 0.045(21)] = -0.019$$

t	y_t	$\hat{y}_t$	e_t	$e'e$
1	5	5.166	-0.166	0.027556
2	7	7.014	-0.019	0.0036
3	6	6.0814	0.0819	0.0067
4	8	7.726	0.274	0.07507
5	10	9.477	0.523	0.2735
6	9	9.578	-0.578	0.33408
7	12	11.7841	0.2159	0.0466
8	14	14.445	-0.4445	0.1976
9	15	14.602	0.398	0.1584
10	16	16.4546	-0.4546	0.20666
11	18	18.262	-0.262	0.0686
12	22	21.5691	0.4309	0.18567
المجموع			00	1.58

$$\hat{\delta}_\varepsilon^2 = \frac{e'e}{n-k-1} = \frac{1.58}{12-3-1} = 0.1975$$

$$\Omega_{\hat{a}} = \hat{\delta}_{\varepsilon}^{2}(X'X)^{-1} = 0.1975\begin{pmatrix} 179.3207 & -4.26804 & 3.3417 & -8.17059 \\ -4.26804 & 0.13019 & -0.05777 & 0.1704 \\ 3.3417 & -0.05777 & 0.082616 & -0.17356 \\ -8.17059 & 0.1704 & -0.17356 & 0.39501 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\delta}_{\hat{a}_0}^{2} = 0.1975(179.3207) = 35.4158 \rightarrow \hat{\delta}_{\hat{a}_0} = \sqrt{\hat{\delta}_{\hat{a}_0}^{2}} = 5.95$$

$$\hat{\delta}_{\hat{a}_1}^{2} = 0.1975(0.13019) = 0.0257 \rightarrow \hat{\delta}_{\hat{a}_1} = \sqrt{\hat{\delta}_{\hat{a}_1}^{2}} = 0.16$$

$$\hat{\delta}_{\hat{a}_2}^{2} = 0.1975(0.082616) = 0.01632 \rightarrow \hat{\delta}_{\hat{a}_2} = \sqrt{\hat{\delta}_{\hat{a}_2}^{2}} = 0.1277$$

$$\hat{\delta}_{\hat{a}_3}^{2} = 0.1975(0.39501) = 0.078 \rightarrow \hat{\delta}_{3} = \sqrt{\hat{\delta}_{\hat{a}_3}^{2}} = 0.279$$

4. اختبار معنوية المعلمات المقدرة بالاعتماد على اختبار t–student:

$$t_{\hat{a}_1} = \frac{\hat{a}_1}{\hat{\delta}_{\hat{a}_1}} = \frac{0.398}{0.16} = 2.487 > t_8^{0.05} = 2.306$$

$$t_{\hat{a}_2} = \frac{\hat{a}_2}{\hat{\delta}_{\hat{a}_2}} = \frac{0.5}{0.1277} = 3.915 > t_8^{0.05} = 2.306$$

$$t_{\hat{a}_3} = \frac{\hat{a}_3}{\hat{\delta}_{\hat{a}_3}} = \frac{0.045}{0.279} = 0.16 < t_8^{0.05} = 2.306$$

x_1 و 2 تفسران المتغيرة التابعة y لأن $t_{\hat{a}_i}$ المحسوبة أكبر من المجدولة t_t، و بهذا نقبل الفرضية البديلة H_1، أما المتغيرة x_3 لا تفسر المتغيرة التابعة و بذلك نقبل فرضية العدم H_0.

5. حساب معامل التحديد و معامل التحديد المصحح:

نحسب أولا: $\sum(y_t - \bar{y})^2 = 265.1387$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_t^2}{\sum(y_t - \bar{y})^2} = 1 - \frac{1.58}{265.1387} = 0.994$$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{(n-1)}{n-k-1}(1 - R^2) = 0.9917$$

نلاحظ أن معامل التحديد المصحح ($\bar{R}^2$) قد انخفض بشكل بسيط عن (R^2)، هذا لأن معامل التحديد قد تم تصحيحه بإضافة درجة الحرية.

نستعمل الآن اختبار فيشر للتأكد من أن النموذج ككل معنوي (يوجد على الأقل متغير مفسِر واحد على الأقل)

$$F_C = \frac{R^2/k}{R^2/n-k-1} = \frac{0.994/3}{(1-0.994)/12-3-1} = 441.78 > F_{(3;8)}^{0.05} = 4.07$$

نرفض فرضية العدم و نقبل الفرضية البديلة التي تدل على أنه يوجد على الأقل متغير واحد مفسِر للمتغيرة التابعة.

الفصل الثالث: مدخل لنماذج المعادلات الآنية

سوف نتطرق في هذا الفصل إلى نماذج خاصة، أين تكون العلاقات أو المعادلات مترابطة مع بعضها البعض، بمعنى أنه توجد مجموعة من العلاقات التي تتضمن على متغيرات تابعة في علاقة ما و متغيرات مفسِرة في علاقات أخرى، و في نفس الوقت.

أولا: النموذج الهيكلي و النموذج المختصر:

بما أننا سوف نعرض نموذج خطي لعدة علاقات، فإنه سوف يكون لدينا متغيرات تابعة لعلاقات ما و التي يمكن أن تكون في نفس الوقت كمتغيرات مستقلة في علاقات أخرى، و يسمح هذا التواجد المزدوج لبعض المتغيرات بأن تكون المعلمات المقدرة متحيزة بطريقة المربعات الصغرى العادية، لذا، يجب أن نقوم بتحويل النموذج الأساسي إلى نموذج تكون فيه المتغيرات التابعة مُفَسَرة بالمتغيرات المستقلة للنموذج فقط[21].

1. مثال توضيحي: ليكن النموذج الآتي للاقتصاد الكلي أين نفترض وجود ثلاث قطاعات

$$C_t = a_0 + a_1 y_t + \varepsilon_{1t} \dots\dots\dots (01)$$
$$I_t = b_0 + b_1 y_{t-1} + \varepsilon_{2t} \dots\dots\dots (02)$$
$$y_t = C_t + I_t \dots\dots\dots\dots\dots\dots (03)$$

C_t: استهلاك الفترة t، I_t: الاستثمار الاجمالي للفترة t، y_t: دخل الفترة t، y_{t-1}: دخل الفترة السابقة.

يتضمن هذا المثال على ثلاث علاقات، حيث العلاقتين الأوليتين هي علاقات سلوك، في حين تمثل العلاقة (03) علاقة تعريفية لا تتضمن على أي معلمات مقدرة و لا على الحد العشوائي للأخطاء. كما يتضمن هذا النموذج على ثلاثة متغيرات تابعة وهي: (C_t, I_t, y_t) و متغيرة مستقلة أو مفسِرة واحدة (y_{t-1}).

نلاحظ أيضا أن المتغيرة (y_t) هي متغيرة تابعة في العلاقة (03) و متغيرة مستقلة في العلاقة (01)، و كذلك هو الحالة بالنسبة للاستثمار (I_t)، و لتجاوز هذه المشكلة نقوم بكتابة المتغيرات التابعة بدلالة المتغيرات المستقلة فقط. و في مثالنا التوضيحي لدينا متغيرة مستقلة واحدة (y_{t-1}).

نقوم بتعويض العلاقة (03) في العلاقة (01) ينتج لدينا:

$$C_t = a_0 + a_1 C_t + a_1 I_t + \varepsilon_{1t}$$

و بتعويض العلاقة (02) في هذه الأخيرة و نقل $a_1 C_t$ يسارا ينتج لدينا:

$$(1 - a_1) C_t = a_0 + a_1 b_0 + a_1 b_1 y_{t-1} + a_1 \varepsilon_{2t} + \varepsilon_{1t}$$

$$C_t = \frac{a_0 + a_1 b_0}{1 - a_1} + \frac{a_1 b_1}{1 - a_1} y_{t-1} + \frac{a_1 \varepsilon_{2t} + \varepsilon_{1t}}{1 - a_1} \dots\dots\dots (04)$$

[21] - Régis Bourbonnais , op.cit., P218.

و بنفس الطريقة ينتج لدينا:

$$I_t = b_0 + b_1 y_{t-1} + \varepsilon_{2t} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (05)$$

$$y_t = \frac{a_0 + b_0}{1 - a_1} + \frac{b_1}{1 - a_1} y_{t-1} + \frac{\varepsilon_{2t} + \varepsilon_{1t}}{1 - a_1} \dots\dots\dots\dots\dots (06)$$

و تشير العلاقة (06) إلى أن (y_t) غير مستقلة عن الأخطاء العشوائية (ε_{1t})، و هذا ناتج عن تقدير العلاقة الأولى بطريقة المربعات الصغرى العادية، و هذا ما ينتج عنه مقدرات متحيزة و تباين أكبر.

بصفة عامة في ظل النموذج للمعادلات الآنية يكون التباين المشترك للمتغيرة التابعة مع المتغير العشوائي للأخطاء غير معدوما، كما أن التقدير بطريقة المربعات الصغرى العادية للنموذج الهيكلي تكون متحيزة و غير متقاربة[22].

و نلاحظ أن الشكل المختصر يسمح بقياس الأثر الاجمالي عند تغير المتغيرة المستقلة (y_{t-1}) على المتغيرات التابعة بطريقة مباشرة أو غير مباشرة.

2. النموذج العام (تعميم) و الشكل المختصر:

ليكن النموذج العام الذي يتضمن (g) علاقة هيكلية (عدد المتغيرات التابعة، و (k) عدد المتغيرات المستقلة:

$$a_{11}y_{1t} + a_{12}y_{2t} + \cdots + a_{1g}y_{gt} + b_{11}x_{1t} + b_{12}x_{2t} + \cdots + b_{1k}x_{kt} = \varepsilon_{1t}$$

$$a_{21}y_{1t} + a_{22}y_{2t} + \cdots + a_{2g}y_{gt} + b_{21}x_{1t} + b_{22}x_{2t} + \cdots + b_{2k}x_{kt} = \varepsilon_{2t}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$a_{g1}y_{1t} + a_{g2}y_{2t} + \cdots + a_{gg}y_{g1} + b_{g1}x_{1t} + b_{g2}x_{2t} + \cdots + b_{gk}x_{kt} = \varepsilon_{gt}$$

و نكتب هذا النموذج بالشكل المصفوفاتي:

$$\underset{(g.g)}{A} \ . \ \underset{(g.1)}{Y} + \underset{(g.k)}{B} \ . \ \underset{(k.1)}{X} = \underset{(g.1)}{\varepsilon}$$

نشير إلى أن بعض المتغيرات المستقلة و التابعة تكون معدومة في بعض العلاقات، و أن المتغيرة التي يكون معاملها يساوي الواحد فهي متغيرة تابعة، لكن إذا كانت كل معاملات المتغيرات إحدى العلاقات تساوي الواحد و لا تتضمن على الحد العشوائي، فهي تمثل علاقة تعريفية.

22 - Isabelle Cadoret & Cathrine Benjamin et autres (2004), ***Économétrie appliquée***, Bruxelles : De Boeck université, P 263.

إذا كان محدد المصفوفة (A) غير معدوم (قابلة للقلب A^{-1})، فإنه يمكننا تحويل النموذج الهيكلي الأساسي إلى النموذج المختصر كما يلي:

$$AY = -BX + \varepsilon$$
$$Y = -A^{-1}BX + A^{-1}\varepsilon$$

بما أن $(A^{-1}\varepsilon)$ مستقل عن (X) فإنه يمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية لتقدير النموذج المختصر، لكن تكون لدينا مشكلة تتعلق بالتمييز (التشخيص) بسبب وجود $(g.k)$ عنصر للمصفوفة $(-A^{-1}B)$ و هي غير معروفة.

و يمكن أن نكتب المثال التوضيحي السابق بالشكل المصفوفاتي كما يلي:

$$Y = \begin{pmatrix} C_t \\ I_t \\ y_t \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} U \\ y_{t-1} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -a_0 & 0 \\ -b_0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

U: هي مصفوفة الوحدة

ثانيا: مشكلة التمييز (التشخيص):

بهدف تمييز هيكل النموذج يمكن استعمال معلمات النموذج المختصر، لكن أيضا يتطلب معلومات متعلقة بالنظرية الاقتصادية[23]. فمثلا في مثالنا التوضيحي فإنه حسب النظرية الاقتصادية الاستثمار يكون معامله معدوما في دالة الاستهلاك، أي أن الاستثمار لا يفسر الاستهلاك.

1. القيود على المعاملات:

توجد قيود على المعاملات في النماذج الهيكلية، حيث توجد في كل مرة معلمة تمثل قيد عند كتابة النموذج تكون مساوية لقيمة محددة، و هنا نشير إلى نوعين من القيود:

- القيود الملغاة و التي تكون فيها المتغيرة التابعة أو المستقلة في النموذج غير موجودة في العلاقة، ففي هذه الحالة نعتبر أثرها معدوما، و بالرجوع إلى مثالنا التوضيحي السابق فإن (I_t) غير موجود في العلاقة (01) و بذلك معاملها يساوي الصفر.
- قيود خطية و التي تفترض بعض النماذج الخاصة متغيرات لتعيين معاملات محددة، و هنا يتعلق الأمر بقيود مختارة في معلمات النموذج.

23 - Isabelle Cadoret & Cathrine Benjamin et autres, op.cit, P264.

2. شروط التمييز:

نقول عن أي علاقة في النموذج الهيكلي على أنها تحقق شرط التحديد إذا كان عدد المتغيرات المستقلة الملغاة في العلاقة هي على الأقل أكبر من عدد المتغيرات التابعة[24]. و يتعلق شرط التحديد بتشخيص كل علاقة في النموذج على حدى، و نميز هنا بين ثلاث حالات:

- يكون النموذج غير مميز إذا كانت إحدى العلاقات غير محددة، و هذا النوع من المستحيل حله.
- يكون النموذج مميزا إذا كانت كل العلاقات محددة (مشخصة) تماما.
- يكون النموذج مميزا إذا كانت كل العلاقات محددة تماما أو فوق التحديد.

و يمكن أن تكون عملية التحديد أو التمييز معقدة، لكن توجد طريقة بسيطة و هي:

$g - 1 > g - g' + k - k'$ العلاقة غير مميزة

$g - 1 = g - g' + k - k'$ العلاقة مميزة تماما

$g - 1 < g - g' + k - k'$ العلاقة مميزة

g: عدد علاقات النموذج أو عدد المتغيرات التابعة.

g': عدد المتغيرات التابعة التي تتضمنها العلاقة المراد تشخيصها.

k: عدد المتغيرات المستقلة للنموذج.

k': عدد المتغيرات المستقلة التي تتضمنها العلاقة المراد تشخيصها

بصفة عامة نقول أنه إذا كانت العلاقة غير مميزة أو تحت التشخيص، إذا كان عدد المتغيرات الملغاة (تابعة و مستقلة) في العلاقة المراد تشخيصها أقل من عدد معادلات النموذج ناقصا العلاقة المشخصة $(g - 1)$.

ثالثا: طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين للتقدير (TSLS):

تعتبر طريقة (Two Stages Least Squars) من الطرق الأكثر استخداما لتقدير مثل هذه النماذج، لأنها تستعمل عندما تكون العلاقات مميزة تماما أو فوق التمييز.

إن هدف طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين هو تطهير كل متغير مستقل، و التي تظهر كمتغيرات مفسِرة لتركيبها العشوائي[25].

24 - Jeffrey M. Wooldridge, traduction par P.André et autres (2015) , 5eéd Américaine, Belgique :De Boeck Supérieur, P803.

25 - Rachid Bendhib (2014), ***économétrie : théorie et application***, Alger : Office de Publication Universitaires (OPU), P143.

و يتم التقدير بهذه الطريقة على مرحلتين، حيث إذا كان النموذج الآتي يتضمن (g) متغيرة تابعة (عدد العلاقات)، و (k) متغيرة مستقلة:

$$a_{11}y_{1t} + a_{12}y_{2t} + \cdots + a_{1g}y_{gt} + b_{11}x_{1t} + b_{12}x_{2t} + \cdots + b_{1k}x_{kt} = \varepsilon_{1t}$$

$$a_{21}y_{1t} + a_{22}y_{2t} + \cdots + a_{2g}y_{gt} + b_{21}x_{1t} + b_{22}x_{2t} + \cdots + b_{2k}x_{kt} = \varepsilon_{2t}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_{g1}y_{1t} + a_{g2}y_{2t} + \cdots + a_{gg}y_{g1} + b_{g1}x_{1t} + b_{g2}x_{2t} + \cdots + b_{gk}x_{kt} = \varepsilon_{gt}$$

نقوم في المرحلة الأولى بتقدير المتغيرات التابعة أين تكون كل متغيرات المستقلة للنموذج الهيكلي كمتغيرات مفسِرة:

$$y_{1t} = \alpha_{11}x_{1t} + \alpha_{12}x_{2t} \ldots + \alpha_{1k}x_{kt} + u_{1t}$$

$$y_{2t} = \alpha_{21}x_{1t} + \alpha_{22}x_{2t} \ldots + \alpha_{2k}x_{kt} + u_{2t}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$y_{gt} = \alpha_{g1}x_{1t} + \alpha_{g2}x_{2t} \ldots + \alpha_{gk}x_{kt} + u_{gt}$$

و نقوم في المرحلة الثانية بتعويض المتغيرات التابعة التي تعتبر كمتغيرة مفسِرة في النموذج الهيكلي بقيمتها المقدرة في العلاقة التي اعتبرت فيها كمتغيرة مفسِرة:

$$y_{1t} = a_{12}\hat{y}_{2t} + \cdots + a_{1g}y_{gt} + b_{11}x_{1t} + b_{12}x_{2t} + \cdots + b_{1k}x_{kt} + e_{1t}$$

$$y_{1t} = a_{21}\hat{y}_{1t} + a_{23}\hat{y}_{3t} + \cdots + a_{2g}\hat{y}_{gt} + b_{21}x_{1t} + \cdots + b_{2k}x_{kt} + e_{2t}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$y_{gt} = a_{g1}\hat{y}_{2t} + a_{g2}\hat{y}_{2t} + \cdots + a_{(g-1)g}\hat{y}_{(g-1)1} + b_{g1}x_{1t} + \cdots + b_{gk}x_{kt} + e_{gt}$$

التمرين: لنفرض النموذج الهيكلي المتعلق بمؤسسة و الذي يتكون من أربع علاقات كما يلي:

$$Q_d = a_{10} + a_{11}P + a_{12}PS + \varepsilon_1 \ldots\ldots (1)$$
$$Q_s = a_{20} + a_{21}P + a_{23}tax + \varepsilon_2 \ldots\ldots (2)$$
$$P = a_{30} + a_{31}R + a_{32}PS + \varepsilon_3 \ldots\ldots (3)$$
$$pro = Q_d - tax \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Q_d: الطلب على السلعة و هي تمثل مبيعات الشركة.

Q_s: المعروض من السلعة.

P: سعر السلعة.

PS: سعر السلعة البديلة.

R: دخل العائلات.

pro: الأرباح.

tax: الضرائب.

و قد كانت المعطيات الخاصة بهذه المؤسسة كما هو مبين في الجدول الآتي:

t	Q_d	Q_s	P	PS	R	tax
1	1150000	1180000	100	85	1500	115000
2	1127000	1150000	102	87	1580	115000
3	1160800	1120000	105	92.5	1600	117500
4	1100000	1115000	107.5	91.8	1600	118300
5	1060000	1099000	109	90.5	1670	119530
6	1040000	1065000	109	89.7	1690	120100
7	1163000	1190000	106	93.5	1690	117200
8	1000000	1088000	110.5	80	1750	119360
9	1217000	1230000	100.5	95	1700	115800
10	1090000	1150000	107	90	1780	117300
11	1276000	1300000	101	98.6	1650	112000
12	1265000	1325600	90	98	1600	110500

1. حدد المتغيرات التابعة و المتغيرات المستقلة.

2. قدر العلاقات بطريقة المربعات الصغرى العادية.

3. قم بتشخيص شرط التمييز لهذا النموذج.

4. قدر النموذج بطريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين، و ماذا تلاحظ، ثم أحسب قيمة الأرباح لكل الفترات.

الحل:

1. عدد المتغيرات التابعة 4 (Q_d, Q_s, p, pro) و هي تساوي عدد علاقات هذا النموذج $(g = 4)$، أما عدد المتغيرات المستقلة أو المفسِرة هي $(k = 3)$ و هي (PS, R, tax).

2. نقوم الآن بتقدير علاقات النموذج بطريقة (OLS)، حيث العلاقة الأخيرة لا يتم تقديرها لأنه تمثل علاقة تعريف فقط و هي لا تتضمن على أي معلمة، و بالتالي يتم حساب قيم الأرباح (pro) في الأخير. و قد كانت نتائج التقدير بالاعتماد على برنامج eviews كما يلي:

$$Q_d = 1278551.65 - 8513.34P + 8177.51PS \dots\dots\dots (5)$$
$$(3.40) \quad (-4.01) \quad (3.58)$$
$$R^2 = 0.87 \quad n = 12 \quad F_C = 31.07 \quad DW = 2.14$$

$$Q_s = 4243324.93 - 400.71P - 26.76tax \dots\dots\dots\dots (6)$$
$$(7.45) \quad (0.09) \quad (-3.26)$$
$$R^2 = 0.88 \quad n = 12 \quad F_C = 35 \quad DW = 1.43$$

$$\mathrm{P} = 97.32 - 0.54PS + 0.03R \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (7)$$
$$(2.60) \quad (-2.16) \quad (2.0)$$
$$R^2 = 0.50 \quad n = 12 \quad F_C = 4.61 \quad DW = 0.94$$

3. تشخيص شرط التمييز لكل علاقة في النموذج، حيث لدينا $(g-1=3)$ و $(k=3)$

تتضمن العلاقة (1) على متغيرين تابعين $(g'=2)$ و هما (Q_d, P) و متغير مستقل واحد $(k'=1)$ و هو (PS)

$$g-1=3<4-2+3-1=4$$ العلاقة مميزة

تتضمن العلاقة (2) على متغيرين تابعين $(g'=2)$ و هما (Q_S, P) و متغير مستقل واحد $(k'=1)$ و هو (tax)

$$g-1=3<4-2+3-1=4$$ العلاقة مميزة

تتضمن العلاقة (3) على متغيرين تابعين $(g'=1)$ و هو (P) و متغيرين مستقلين $(k'=2)$ و هما (PS, R)

$$g-1=3<4-1+3-2=4$$ العلاقة مميزة

4. بما أن كل علاقات النموذج مشخصة فإنه يمكن تقدير النموذج بطريقة $(TSLS)$، و نستخدم هنا برنامج eviews الذي يقوم بالتقدير بشكل آلي، حيث من أجل تقدير العلاقة (1) نقوم نكتب في الأيقونة:

$$tsls\ Q_d\ c\ P\ PS@\ c\ PS\ R$$

حيث: $(c\ PS\ \ R\ tax)$ تمثل المتغيرات الأداتية أي أنها المتغيرات المستقلة التي تستخدم في المرحلة الأولى في تقدير المتغيرات التابعة كما ذكرنا سابقا. و قد كانت النتائج كما يلي:

Dependent Variable: QD
Method: Two-Stage Least Squares
Date: 02/07/20 Time: 22:08
Sample: 1 12
Included observations: 12
Instrument specification: C PS R TAX

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1582878.	424152.9	3.731858	0.0047
P	-10460.80	2446.847	-4.275215	0.0021
PS	7057.623	2457.641	2.871707	0.0184

R-squared	0.861642	Mean dependent var	1137400.
Adjusted R-squared	0.830896	S.D. dependent var	85970.14
S.E. of regression	35352.88	Sum squared resid	1.12E+10
F-statistic	30.18554	Durbin-Watson stat	2.334555
Prob(F-statistic)	0.000102	Second-Stage SSR	5.85E+09
J-statistic	0.004856	Instrument rank	4
Prob(J-statistic)	0.944444		

و يمكن كتابة نتائج تقدير العلاقة (1) بطريقة المربعات الصغرى العادية كما يلي:

$$Q_d = 1582878 - 10460.8P + 7057.62PS \dots\dots\dots (8)$$
$$(3.73) \qquad (-4.27) \qquad (2.87)$$
$$R^2 = 0.86 \quad n = 12 \quad F_C = 30.18 \quad DW = 2.33$$

و من أجل تقدير العلاقة (2) نقوم نكتب كذلك في الأيقونة العبارة الآتية:

$$tsls\ Q_s\ c\ P\ tax@\ c\ PS\ R\ tax$$

Dependent Variable: QS
Method: Two-Stage Least Squares
Date: 02/07/20 Time: 22:06
Sample: 1 12
Included observations: 12
Instrument specification: C PS R TAX

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	5702689.	1974856.	2.887648	0.0180
P	14643.49	18534.28	0.790076	0.4498
TAX	-52.00912	33.17734	-1.567610	0.1514

R-squared	0.745986	Mean dependent var	1167717.
Adjusted R-squared	0.689538	S.D. dependent var	82166.02
S.E. of regression	45782.17	Sum squared resid	1.89E+10
F-statistic	16.00729	Durbin-Watson stat	2.338615
Prob(F-statistic)	0.001086	Second-Stage SSR	7.16E+09
J-statistic	1.737401	Instrument rank	4
Prob(J-statistic)	0.187468		

و نكتب نتائج تقدير العلاقة (2) بطريقة المربعات الصغرى العادية كما يلي:

$$Q_s = 5702689 + 14643.49P - 52tax \dots\dots\dots (9)$$
$$(2.88) \quad (0.79) \quad (-1.56)$$
$$R^2 = 0.74 \quad n = 12 \quad F_C = 16 \quad DW = 2.33$$

و بنفس العملية نحصل على نتيجة العلاقة (3) كما يلي:

Dependent Variable: P
Method: Two-Stage Least Squares
Date: 02/07/20 Time: 21:51
Sample: 1 12
Included observations: 12
Instrument specification: C PS TAX R

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	97.32357	37.31368	2.608254	0.0284
PS	-0.544475	0.252252	-2.158456	0.0592
R	0.034022	0.016986	2.002967	0.0762

R-squared	0.506251	Mean dependent var	103.9583
Adjusted R-squared	0.396529	S.D. dependent var	5.686740
S.E. of regression	4.417652	Sum squared resid	175.6408
F-statistic	4.613948	Durbin-Watson stat	0.938617
Prob(F-statistic)	0.041762	Second-Stage SSR	175.6408
J-statistic	6.684904	Instrument rank	4
Prob(J-statistic)	0.009723		

$$\mathrm{P} = 97.32 - 0.54PS + 0.03R \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (10)$$
$$(2.60) \quad (-2.16) \quad (2.0)$$
$$R^2 = 0.50 \quad n = 12 \quad F_C = 4.61 \quad DW = 0.94$$

نلاحظ أن نتائج التقدير في العلاقتين (1) و (2) بطريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين تختلف عن نتائج التقدير بطريقة المربعات الصغرى العادية، هذا لأنه توجد متغيرات أداتية (مستقلة) تؤثر على بعض المتغيرات التابعة التي تكون كمتغيرات مستقلة في علاقات أخرى. لكن نلاحظ أن نتائج تقدير العلاقة (3) بطريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين هي نفسها المقدرة بطريقة المربعات الصغرى العادية، هذا لأن العلاقة (3) لا تتضمن على متغيرات مستقلة تعتبر كمتغيرات تابعة في علاقات أخرى.

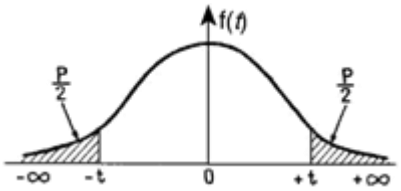
نقول في الأخير أن سعر السلعة البديلة (PS) و الدخل (R) تحدد سعر السلعة (P)، و بدورها فإن هذه الأخيرة و التي يتم تعويضها في العلاقتين (1) و (2) تؤثر على كل من الطلب و العرض على السلعة.

و الآن يمكن حساب قيمة الأرباح المقدرة (pro)، حيث يتم في المرحلة الأولى بحساب القيم المقدرة للمبيعات (الطلب على السلعة) بطريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين، ثم نقوم بحساب الأرباح حسب العلاقة (4)، و ذلك كما يلي:

t	$\hat{Q}_d = 1582878 - 10460.7P + 7057.6PS$	tax	$pro = \hat{Q}_d - tax$
1	1136696.83	115000	1021696.83
2	1129890.48	115000	1014890.49
3	1137325.02	117500	1019825.02
4	1106232.7	118300	987932.7
5	1081366.59	119530	961836.59
6	1075720.49	120100	955620.49
7	1133921.85	117200	1016721.85
8	991570.35	119360	872210.35
9	1202042.67	115800	1086242.67
10	1098759.37	117300	981459.37
11	1222219.71	112000	1110219.71
12	1333053.9	110500	1222553.9

قائمة الملاحق

الملحق (01): جدول توزيع Student.



ν	$P = 0.9$	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.05	0.02	0.1
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,82l	63,657
2	0,142	0, 89	0,445	0,617	0,816	1,06l	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
5	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
∞	0,12566	0,25335	0,38532	0,52440	0,67449	0,84162	1,03643	1,28155	1,6448	1,9599	2,3263	2,5758

ν: هو عدد درجات الحرية

Source : Régis Bourbonnais (2015) **,** Économétrie, 9eme éd, Paris : DUNOD, P369.

الملحق (02): جدول توزيع Fisher – Snedecor

v_2	v_1=1		v_1=2		v_1=3		v_1=4		v_1=5	
	P = 0,05	P = 0,01	P = 0,05	P = 0,01	P = 0,05	P = 0,01	P = 0,05	P = 0,01	P = 0,05	P = 0,01
1	161,4	4 052	199,5	4 999	215,7	5 403	224,6	5 625	230,2	5764
2	18,51	98,49	19,00	99,00	19,16	99,17	19,25	99,25	19,30	99,30
3	10,13	34,12	9,55	30,81	9,28	29,46	9,12	28,71	9,01	28,24
4	7,71	21,20	6,94	18,00	6,59	16,69	6,39	15,98	6,26	15,52
5	6,61	16,26	5,79	13,27	5,41	12,06	5,19	11,39	5,05	10,97
6	5,99	13,74	5,14	10,91	4,76	9,78	4,53	9,15	4,39	8,75
7	5,59	12,25	4,74	9,55	4,35	8,45	4,12	7,85	3,97	7,45
8	5,32	11,26	4,46	8,65	4,07	7,59	3,84	7,01	3,69	6,63
9	5,12	10,56	4,26	8,02	3,86	6,99	3,63	6,42	3,48	6,06
10	4,96	10,04	4,10	7,56	3,71	6,55	3,48	5,99	3,33	5,64
11	4,84	9,65	3,98	7,20	3,59	6,22	3,36	5,67	3,20	5,32
12	4,75	9,33	3,88	6,93	3,49	5,95	3,26	5,41	3,11	5,06
13	4,67	9,07	3,80	6,70	3,41	5,74	3,18	5,20	3,02	4,86
14	4,60	8,86	3,74	6,51	3,34	5,56	3,11	5,03	2,96	4,69
15	4,54	8,68	3,68	6,36	3,29	5,42	3,06	4,89	2,90	4,56
16	4,49	8,53	3,63	6,23	3,24	5,29	3,01	4,77	2,85	4,44
17	4,45	8,40	3,59	6,11	3,20	5,18	2,96	4,67	2,81	4,34
18	4,41	8,28	3,55	6,01	3,16	5,09	2,93	4,58	2,77	4,25
19	4,38	8,18	3,52	5,93	3,13	5,01	2,90	4,50	2,74	4,17
20	4,35	8,10	3,49	5,85	3,10	4,94	2,87	4,43	2,71	4,10
21	4,32	8,02	3,47	5,78	3,07	4,87	2,84	4,37	2,68	4,04
22	4,30	7,94	3,44	5,72	3,05	4,82	2,82	4,31	2,66	3,99
23	4,28	7,88	3,42	5,66	3,03	4,76	2,80	4,26	2,64	3,94
24	4,26	7,82	3,40	5,61	3,01	4,72	2,78	4,22	2,62	3,90
25	4,24	7,77	3,38	5,57	2,99	4,68	2,76	4,18	2,60	3,86
26	4,22	7,72	3,37	5,53	2,98	4,64	2,74	4,14	2,59	3,82
27	4,21	7,68	3,35	5,49	2,96	4,60	2,73	4,11	2,57	3,78
28	4,20	7,64	3,34	5,45	2,95	4,57	2,71	4,07	2,56	3,75
29	4,18	7,60	3,33	5,42	2,93	4,54	2,70	4,04	2,54	3,73
30	4,17	7,56	3,32	5,39	2,92	4,51	2,69	4,02	2,53	3,70
40	4,08	7,31	3,23	5,18	2,84	4,31	2,61	3,83	2,45	3,51
60	4,00	7,08	3,15	4,98	2,76	4,13	2,52	3,65	2,37	3,34
120	3,92	6,85	3,07	4,79	2,68	3,95	2,45	3,48	2,29	3,17
∞	3,84	6,64	2,99	4,60	2,60	3,78	2,37	3,32	2,21	3,02

v_1 : عدد معلمات المتغيرات المستقلة

Source : Régis Bourbonnais (2015) **,** Économétrie, 9eme éd, Paris : DUNOD, P369.

قائمة المراجع

قائمة المراجع:

أ. باللغة العربية:

1. أبو القاسم مسعود الشيخ (2014)، بحوث العمليات، القاهرة: المجموعة العربية للتدريب و النشر.
2. بوقرة رابح (2008)، بحوث العمليات، الاسكندرية : مؤسسة شباب الجامعة.
3. تومي صالح (1999)، مدخل لنظرية القياس الاقتصادي، الجزء الاول الجزائر: ديوان المطبوعات الجامعية.
4. جهاد صياح بني هاني، نازم محمود ملكاوي و فالح عبد القادر الحوري (2013)، تطبيقات بحوث العمليات في إدارة الأعمال، الطبعة الأولى، عمان: دار الحامد للنشر و التوزيع.
5. حسام علي داود و خالد محمد السواعي (2013)، الاقتصاد القياسي بين النظرية و التطبيق، الأردن: دار المسيرة.
6. راتول محمد (2006)، بحوث العمليات، الطبعة الثانية، الجزائر: ديوان المطبوعات الجامعية.
7. ريتشارد برونسن (2012)، ترجمة حسن حسنى الغباري، بحوث العمليات، الطبعة الرابعة، مصر: الدار الدولية للاستثمارات الثقافية.
8. شيخي محمد (2012)، طرق القياس الاقتصادي- محاضرات و تطبيقات، الطبعة الأولى، الأردن: دار الحامد.
9. فروخي جمال (1993)، نظرية الاقتصاد القياسي، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر.
10. مراد كمال عوض (2017)، الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الادارية: بحوث العمليات، الطبعة الأولى، عمان: دار البداية و دار المستقبل.
11. مكيد علي (2015)، بحوث العمليات و تطبيقاتها الاقتصادية، الجزء الأول، الجزائر: ديوان المطبوعات الجامعية.
12. مكيد علي (2016)، بحوث العمليات و تطبيقاتها الاقتصادية، الجزء الثاني، الجزائر: ديوان المطبوعات الجامعية.
13. منعم زمزير الموسوي (2009)، بحوث العمليات، الطبعة الأولى، عمان: دار وائل للنشر.

ب. باللغة الأجنبية:

1. Dodge Y, Fedorov VV & Wynn HP (1988). Optimal Design and Analysis of
Experiments,. North-Holland, Amsterdam.
2. G.S.Maddala (1988), introduction to econometrics, USA: Mac Miillan Publishing Company.
3. Gujarati D (2004), basic econometrics, four Edition, USA: McGraw-Hill.
4. Isabelle Cadoret & Cathrine Benjamin et autres (2004), Économétrie appliquée, Bruxelles : De Boeck université.
5. Jean-François Phelizon (1998), Méthode et modèles de la recherche opérationnelle, Paris :Ed ECONOMICA.
6. Jeffrey M. Wooldridge, traduction par P.André et autres (2015) , 5eéd Américaine, Belgique :De Boeck Supérieur.
7. Judge G.G (1985), the theory and econometric methods, J.W.S, N-Y.
8. Osker Lange (1978) , 4th Ed, Introduction to Econometrics, Pergamon Press Oxford.
9. Michel Nakhla, Jean-Claude Moisdon (2010), recherche opérationnelle :Methodes d'optimisation en gestion, France : Presses des.
10. Philippe Casin (2013), Exercice d'économétrie et d'analyse de données, Paris : TECHNIP.
11. Rachid Bendhib (2014), économétrie : théorie et application, Alger : Office de Publication Universitaires (OPU).
12. Régis Bourbonnais (2015) **,** Économétrie, 9emeéd, Paris : DUNOD.
13. Sami Khedhiri (2007), cours d'économétrie-méthodes et application, Paris : Lavoisier.
14. Verbeek M (2017), A guide to modern econometrics, USA: Willy.