الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DR. YAHIA FARES DE MEDEA

FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

Département du Génie Électrique et de l'Informatique



Projet de Fin d'étude

Présenté pour l'obtention du Diplôme
De Master en Génie Électrique

Spécialité : Automatique des systèmes

THEME

Commande Non linéaire du vol vertical d'un modèle d'Hélicoptère Drone

Proposé et dirigé par,

Mr. Medjbouri Ali

Préparé et présenté par,

1/ Sali Souad

2/ Fehis Messaouda

REMERCIEMENTS

Nous remercions tout d'abord, Allah qui nous a donné la force et le courage pour terminer nos études et élaborer ce modeste travail.

Nous tenons à remercier toutes les personnes sans lesquelles ces années d'étude n'auraient été que le pâle reflet de celles que nous avons passées.

Nos sincères remerciements à notre encadreur ***Mr. Medjbouri Ali*** *qui a bien voulu nous encadrer, et de nous avoir encouragé le long de notre travail, aussi pour toute la documentation qu'il a mis à notre disposition.*

Ainsi nous remercions toutes les personnes qui nous ont aidés dans la recherche de documentation.

Nos remerciements sont destinés également à tous nos enseignants et les responsables pour l'effort fourni pendant la durée des études.

Nous remercions également les membres du jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait juger ce travail.

Dédicace

Je dédié ce modeste travail

A mes parents qui m'ont beaucoup aidé à terminer mes études,

qui ont prié et se sont sacrifiés pour moi sans

Oublier mon frère CHOAIB et HECENE, et ma petite sœur LOUBNA

Ainsi que mes oncles et tantes

A toute la famille Sali sans exception.

A mes amis et tous ceux que j'ai oublié.

A toute la promotion Master 2 Automatique.

A tous ceux qui m'ont aidé durant ma vie universitaire

*A tous ceux que j'**aime** et qui m'**aiment**.*

.

Sali souad

Dédicace

Je dédié ce modeste travail

A mes parents qui m'ont beaucoup aidé à terminer mes études,

qui ont prié et se sont sacrifiés pour moi sans

oublier ma grande mère FATMA, mon grand père LHAJ et mes frères

KHLEDet RIDHA, et mes sœurs NAIMA, FATIMA, AMINA et

YOSRA

Ainsi que mes tantes et mon cousin YOUSSEF et mes cousines

A toute la famille FEHIS et BATTAM

A mes amis surtous mon binôme Souàd et Mr.Abdrahmen Ali et Zineb

tous ceux que j'ai oublié.

A toute la promotion 2émé année master Automatique des système

2014 et 2013

A tous ceux qui m'ont aidé durant ma vie universitaire

*A tous ceux que j'**aime** et qui m'**aiment**.*

Enfin je dédie ce modeste travail à tous les enseignants surtou

Mr.Naili Missoum

FEHIS Messaouda

SOMMAIRE

SOMMAIRE

LISTE DES FIGURES …… I
LISTE DES TABLEAUX ……... III
INTRODUCTION GÉNÉRALE …….. 01

CHAPITRE I : GINERALITE SUR LES HELECOPTERES

1.Introduction …… 03
2.Description et fonctionnement d'un'hélicoptère …… 04
3.Modes de vol d'un hélicoptère ……. 06
3.1 Le vol stationnaire (hover)…….. 06
3.2 Le vol vertical …… 06
3.3 Le vol de translation ……... 06
4. Attitudes de l'hélicoptère …….. 07
5. Description du rotor principal et du rotor de queue …….. 08
5.1 Description du Rotor principal …….. 08
5.1.1 Les pales (blades) …… 08
5.1.2 Plateau cyclique (Swatch plate) …… 10
5.1.3 Le mât (shaft) …… 10
5.1.4 Le moyeu (hub) 10
5.2 Description du rotor de queue (Tail rotor)…… 11
6. Les principales commandes de l'hélicoptère …… 12
6.1 Levier de variation du pas collectif 12
6.2 Manche de variation du pas cyclique (u3, u4)…….. 13
6.3 Les pédales ou palonnier (u2) …….. 14
7. conclusion ……. 15

CHAPITRE II :Modélisation de l'hélicoptère à 3DDL

1.Introduction …… 16
2. Expressions des forces agissant sur l'hélicoptère lors de son vol …… 16
3. Considération de l'élément différentiel des pales …….. 17
3.1 Rotor 17
3.2 Rotor de queue 19
4. Le modèle dynamique de l'hélicoptère à 3DDL …… 21
5. Conclusion ……. 26

CHAPITRE III : Commande de l'hélicoptère

1. Introduction…… 27
2. Linéarisation entrée/sortie …… 27
2.1 Principe ……. 27
2.2 Systèmes mono-entrée/mono-sortie 27

SOMMAIRE

SOMMAIRE

2.3 Notion du degré relatif ……. 28
2.4 Forme normale …….. 29
2.5 Linéarisation exacte par bouclage statique …… 30
2.6 Linéarisation partielle par retour d'état statique …… 31
2.6.1 La dynamique interne …… 32
2.6.2 La dynamique des zéros …….. 32
3. Systèmes multi-entrées/multi-sorties…… 33
4. Conception de la loi de commande externe 35
5. Application pour le modèle d'hélicoptère ……. 36
5.1 Le degré relatif (r) …….. 36
5.2 Matrice de découplage E(x) …… 38
5.3 Etude de la dynamique des zéros…… 41
5.4 Elaboration des consignes externs…….. 42
5.5 Résultats de simulation ……. 43
6. conclusion …… 45
CONCLUSION GENERALE ……. 46
BIBLIOGRAPHIE ……..
ANNEXE ……

LISTE DES FIGURES

Figure I.1. Hélicoptère drone miniature en vol autonome.…… 3

Figure I.2. Principales forces qui interviennent lors du vol d'un hélicoptère…… 5

Figure 1.3. Configuration typique d'un hélicoptère……..... 6

Figure 1.4. Vol verticale…… 7

Figure 1.5. vol en translation …… 7

Figure 1.6. Description de l'hélicoptère dans l'espace tridimensionnel…… 7

Figure 1.7. . Description du rotor principal…….. 8

Figure 1.8. Profil d'une pale d'hélicoptère……. 9

Figure 1.9. Description du plateau…….. 10

Figure 1.10. (a) Variation du pas collectif (vol vertical en haut et en bas)

(b) Variation du pas cyclique (vol en translation avant, à gauche et à droite)…… 11

Figure 1.11. Rotor de queue. …….. 12

Figure 1.12. Levier de variation du pas collectif…… 12

Figure 1.13. Manche de variation du pas cyclique……. 13

Figure I.14. Les pédales ou palonnier…….. 14

Figure 1I.1. Les forces et les couples aérodynamiques agissant sur l'hélicoptère…… 16

Figure 1I.2. Eléments différentiels des pales et vitesses tangentiel et perpendiculaire…….. 17

Figure II.3. L'hélicoptère plate-forme……. 21

Figure II.4. Schéma bloc du modèle de l'hélicoptère…….. 25

Figure III.1. Principe de la Commande non linéaire…… 35

Figure III.2. Système linéarisé et découplé…… 42

Figure III.3. Schéma bloc de la loi de commande…… 43

Figure III.4. Variations de l'altitude z et de l'erreur de poursuite en altitude…….43

Figure III.5. Variations de l'angle de lacet z et de l'erreur de poursuite en lacet……43

Figure III.6. Entrée de commande u_1……..44

Figure III.7. Entrée de commande u_2……..44

Figure III.8. Vitesse de rotation des pales……44

Liste des tableaux

Tableau II.1. Les forces généralisées ……20

Tableau II.2. Les variables d'état du modèle……..24

Introduction générale

Les drones ou UAV (Unmanned Aerial Vehicles) sont des engins volants sans pilote capables de mener à bien une mission de façon semi autonome ou en mode téléguidé. Leur utilisation est d'abord militaire pour des missions de reconnaissances ou de surveillance. En effet, ils sont bien adaptés pour la réalisation de missions qui mettraient potentiellement. Un équipage en danger ou qui nécessitent une permanence sur zone.

Des applications civiles font leur apparition comme la surveillance du trafic autoroutier, la prévention des feux de forêts, la récolte de données météorologiques ou bien encore l'inspection d'ouvrages d'art.

Le développement de plates-formes robotiques volantes connaît un essor croissant depuis quelques années en raison de la miniaturisation toujours plus poussée des capteurs et des actionneurs, mais surtout grâce à la possibilité d'embarquer des cartes de commande toujours plus performantes capables d'exécuter le calcul de la masse nécessaire au contrôle des robots volants.

L'objectif principal de ce projet de fin d'études est d'appliquer la commande linéarisante entrées-sorties (feedback linearization control) connu communément sous le non de la commande non linéaire pour le contrôle d'un hélicoptère drone miniature pour le cas particulier du vol vertical (décollage, montée, vol stationnaire, descente et atterrissage).

La technique de a linéarisation entrée-sortie est basée sur les outils de la géométrie différentielle, qui permet par une transformation difféomorphique des cordonnées (variables d'état) et un retour d'état non linéaire de découpler et linéariser le modèle mis sous forme canonique. Une fois le modèle linéarisé et découplé Le suivi des trajectoires de référence est peut être assuré avec de simples contrôleurs linéaires en se basant sur le principe de l'imposition des pôles en boucle fermée.

L'avantage de cette loi de commande est pouvoir commander séparément chaque sortie du système indépendamment tout en respectant le couplage et les non linéarités du modèle, ce qui permet d'atteindre de très bonnes performances de poursuite.

Comme toute les commandes en automatique, la première étape de la conception consiste à l'obtention d'un modèle mathématique qui rapproche bien la dynamique du système réel. Dans notre cas, L'obtention de ce modèle nécessite la connaissance de plusieurs aspects liés au comportement des hélicoptères, tels que l'aérodynamique des rotors, des stabilisateurs et la dynamique des corps rigides.

Afin d'atteindre les objectif fixés pour ce projet, le mémoire sera organisé comme suit :

Nous ferons dans le premier chapitre une analyse de l'aérodynamique générale des hélicoptères standards, où nous présenterons leurs principes de fonctionnement ainsi que leurs constitution de base.

Dans le chapitre 2, nous présenterons les principales étapes de modélisation dynamique de l'hélicoptère miniature considéré en mode de vol vertical par en s'appuyant sur formalisation de Lagrange. Enfin, une représentation d'état sera donnée pour ce système afin de faciliter son construction par des simulateurs numériques, et de pouvoir développer la loi de commande.

La commande non linéaire de l'hélicoptère drone fera l'objectif du troisième chapitre. Où après avoir présenté les bases théoriques de la loi de commande, l'application pour le cas du système considéré sera détaillée. Afin de pouvoir évaluer cette technique de contrôle, les résultats des simulations numériques seront présentés et commentés à la fin du chapitre.

Enfin, une conclusion générale finalise ce mémoire, récapitulant ainsi, en gros, le travail abordé.

Chapitre I

Généralités sur les hélicoptères

1. Introduction

Notre étude porte essentiellement sur la commande automatique des hélicoptères à modèle réduit sans pilote (sans être humain), appelés hélicoptères drones. Les hélicoptères drones ou HUAVs (Hovering Unmanned Air Vehicle) sont bien adaptés pour la réalisation des missions qui mettraient potentiellement un équipage en danger ou qui nécessitent une permanence sur une zone. Ils sont capables de mener à bien des missions de façon autonome ou en mode téléguidé. Leur utilisation est d'abord militaire pour des missions de surveillance et de reconnaissance, mais beaucoup d'applications civiles font leur apparition [1-2-3].

L'hélicoptère est un aéronef à voilures tournantes dont le ou les rotors procurent à eux seuls la propulsion et sustentation pendant toutes les phases de vol. Le rotor dit de sustentation, dont l'axe est sensiblement vertical, est une sorte de grande hélice à pas variable, et comporte de deux à huit surfaces aérodynamiques appelées pales, qui servent à déplacer l'appareil à la fois dans les plans verticaux et horizontaux [2-3-4-5].

Comparés aux aéronefs classiques à voilure fixe (ailes fixes), l'hélicoptère est d'une conception plus complexe, il est plus onéreux à l'achat, reste relativement lent, possède un rayon d'action réduit et ne peut pas emporter de très lourdes charges. Cependant, l'hélicoptère peut se maintenir immobile en l'air, décoller et atterrir verticalement, se déplacer lentement et dans tous les axes (en particulier latéralement et à reculons). En plus son efficacité et ses performances sont moins dégradées par rapport aux turbulences ou aux cisaillements de vent qu'un avion ce qui motive son utilisation en milieu urbain, surtout qu'il peut accéder aisément aux lieux étroits [3].



Figure I.1. *Hélicoptère drone miniature en vol autonome.*

L'hélicoptère drone est donc doué d'une manœuvrabilité adaptée à un certain nombre de situations spécifiques comme [1-2-3] :

- La recherche dans un secteur très grand, pollué ou encore dangereux pour localiser des victimes d'un accident ou d'une catastrophe naturelle,

- L'inspection des lignes électriques à haute tension, de grandes structures telles que des ponts et des barrages de manière rentable ou des bâtiments et des routes pour déceler les dommages potentiels après un tremblement de terre.

- La réalisation des cartes topologiques plus précises avec beaucoup d'économie puisque ils peuvent voler très bas et dans des secteurs plus petits et plus contraints.

2. Description et fonctionnement d'un hélicoptère

Dans le domaine aéronautique, un appareil volant est un aéronef. Pour pouvoir voler un Aéronef doit être à la fois soutenu et maintenu en l'air, ce qui a priori nécessite la production d'une force aérodynamique de poussée (ou portance) composée d'une force de sustentation (destinée à compenser le poids de l'appareil) et d'une force de propulsion (pour permettre le déplacement dans l'air). C'est pour cette raison qu'un avion possède une aile ainsi qu'une installation motrice (un ou plusieurs moteurs).

Un hélicoptère est un aéronef dont la sustentation et la propulsion sont assurées par des voilures tournantes, couramment appelées rotors, et entraînées par un ou plusieurs moteurs figure (I .1)

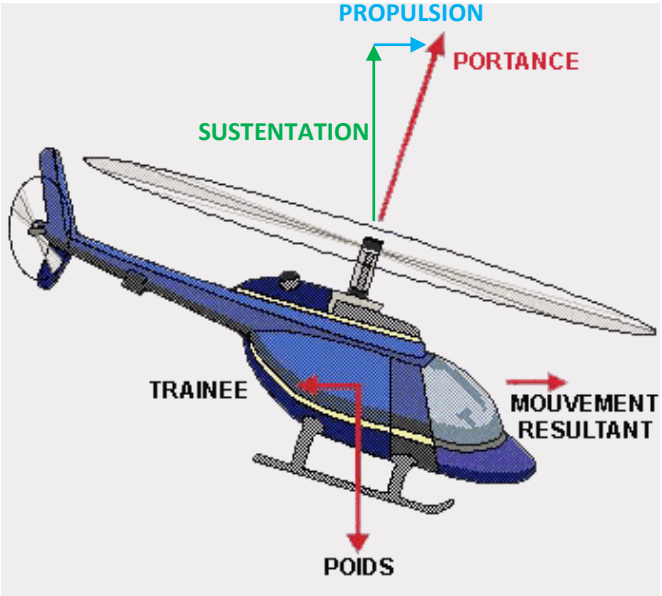


Figure I.2. *Principales forces qui interviennent lors du vol d'un hélicoptère.*

L'hélicoptère se compose d'un fuselage constitué du poste de pilotage, d'un réservoir d'énergie, d'un moteur et d'un train d'atterrissage pour faciliter les manœuvres au sol (figure I.2). Un ou plusieurs rotors fournissent la force nécessaire à l'avancement.

Pour un hélicoptère à deux rotors, le rotor principal génère la force de sustentation et permet à l'hélicoptère de décoller et de se maintenir à une certaine hauteur. Le rotor de queue sert à produire le couple qui annule le couple de réaction généré lors de la rotation des pales du rotor principal et qui ferait faire des rotations du fuselage si le rotor de queue n'existait pas. La portance est produite par la rotation des pales du rotor principal. Pendant le vol, l'hélicoptère peut voler vers l'avant à partir d'une vitesse d'avance nulle, il peut aussi voler vers l'arrière [4-5-6].

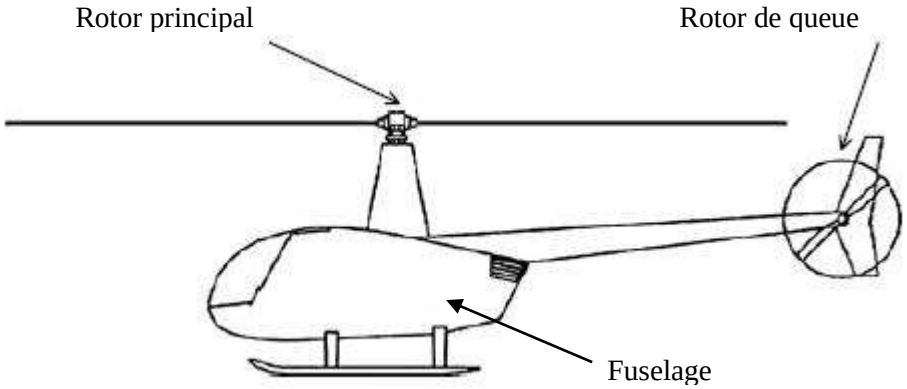


Figure I.3. *Configuration typique d'un hélicoptère.*

3. Modes de vol d'un hélicoptère

Dans la littérature, le fonctionnement aérodynamique est analysé selon le type de vol que réalise l'hélicoptère. L'hélicoptère exécute en principe trois sortes de vols [1-3-4-5-6]:

- vol stationnaire, l'appareil étant immobile par rapport à l'air.
- vol vertical (ascendant ou descendant).
- vol de translation (horizontalement ou incliné).

3.1. *Le Vol stationnaire (hover)*

Il est réalisé lorsque l'hélicoptère reste à une certaine hauteur par rapport au sol en ayant une vitesse de translation pratiquement nulle. Dans ce mode de vol, l'hélicoptère a la liberté de faire des rotations autour de l'axe *z*. Le vol stationnaire est obtenu lorsque la valeur de la force sustentatrice et la valeur de la force de pesanteur sont égales et opposées.

3.2. *Le vol vertical*

Dans le vol vertical, la résultante vectorielle de deux forces, aérodynamique et la force totale de pesanteur sont deux forces ayant la même direction mais sont de sens opposés, le vol est ascendant ou descendant, suivant que l'effet aérodynamique est supérieur ou inférieur au poids de l'appareil.

3.3. *Le vol de translation*

Le vol de translation correspond à tout vol en avant, en arrière ou sur le coté. Pour la réalisation de ce déplacement, il faut incliner la résultante de la force aérodynamique de l'engin pour créer une force de traction horizontale, latérale ou les deux.

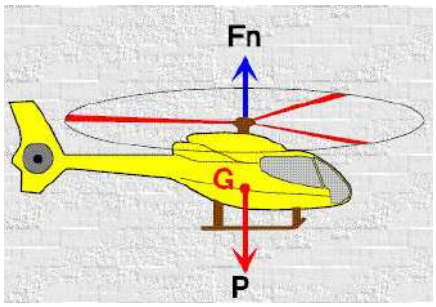


Figure I.4. *Vol verticale*

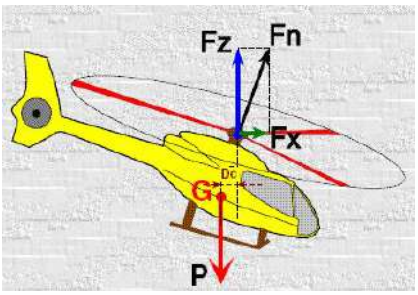


Figure I.5. *Vol en translation*

4. Attitudes de l'hélicoptère

Pour définir l'attitude de l'hélicoptère dans l'espace, on mesure les angles entre les axes principaux de l'hélicoptère et les plans du système terrestre (définis par la verticale locale et le nord magnétique).

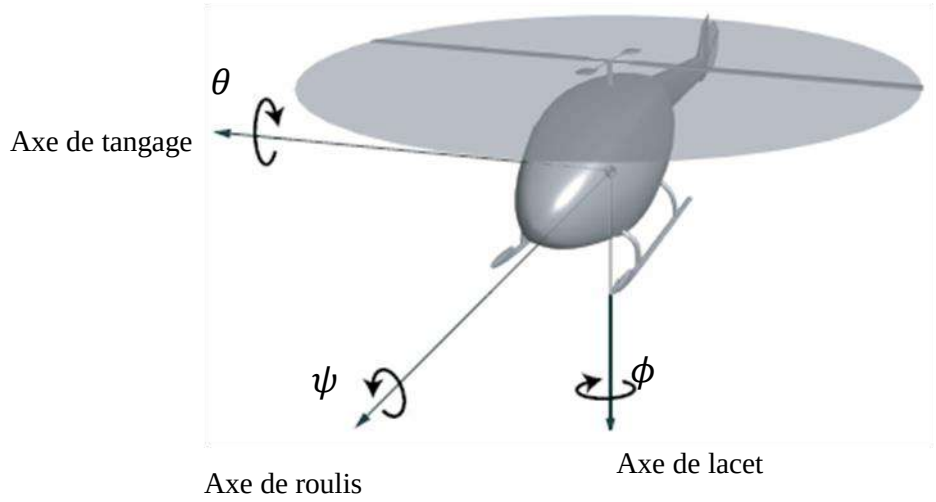


Figure I.6. *Description de l'hélicoptère dans l'espace tridimensionnel.*

Un hélicoptère a donc trois axes de rotation possibles [1-4-5-6]:

- **L'axe de lacet ϕ:** qui permet au nez de l'appareil de se diriger à droite ou à gauche**.**
- **L'axe de tangage θ:** le nez de l'hélicoptère monte ou descend. En s'inclinant ainsi, cela permet à l'appareil de se déplacer en avant ou en arrière.
- **L'axe de roulis ψ:** l'appareil s'incline à droite ou à gauche avec un effet de dérapage latéral.

5. Description du rotor principal et du rotor de queue

5.1. *Description du Rotor principal*

Un rotor est constitué des pales, du mât, du moyeu et du plateau cyclique [3-4-5-6].

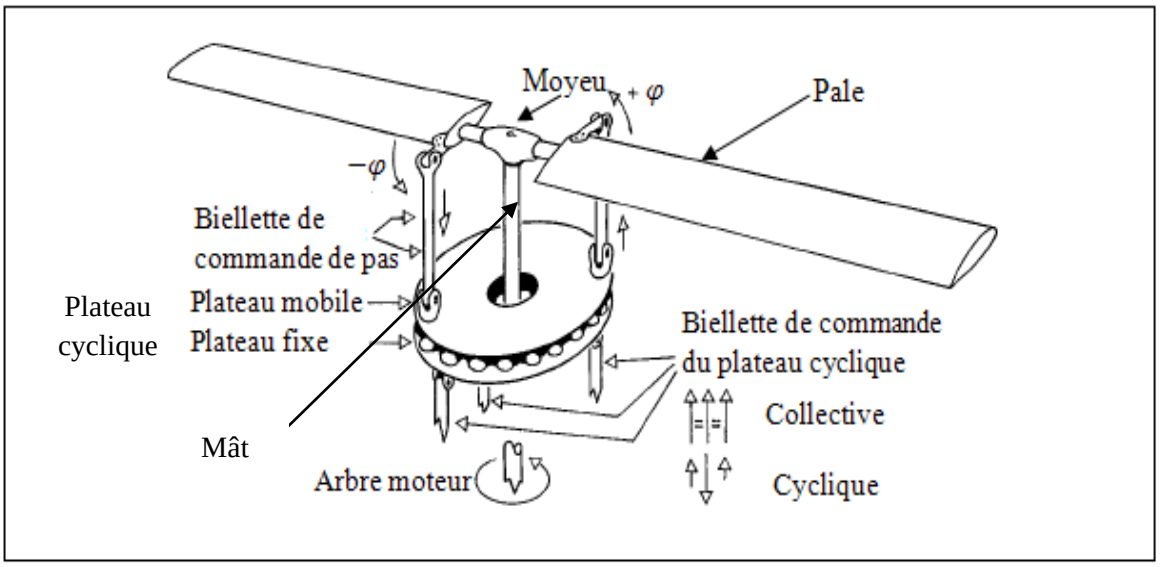


Figure I.7. *Description du rotor principal.*

5.1.1. *Les pales (blades)*

Un rotor est composé d'au moins deux pales. La forme du profil de la pale joue un rôle très important parce qu'il détermine les qualités aérodynamiques de la pale. Les différentes parties du profil sont : le bord d'attaque, le bord de fuite, et la corde qui joint les deux bords.

La face supérieure de la pale s'appelle extrados, et la face inférieure s'appelle intrados, elles sont soumises à des forces de dépression et de pression respectivement lorsque le profil est placé dans le vent relatif. Ce dernier est créé par la différence des vitesses du vent et de la pale (figure I.8) [4-5-6-7].

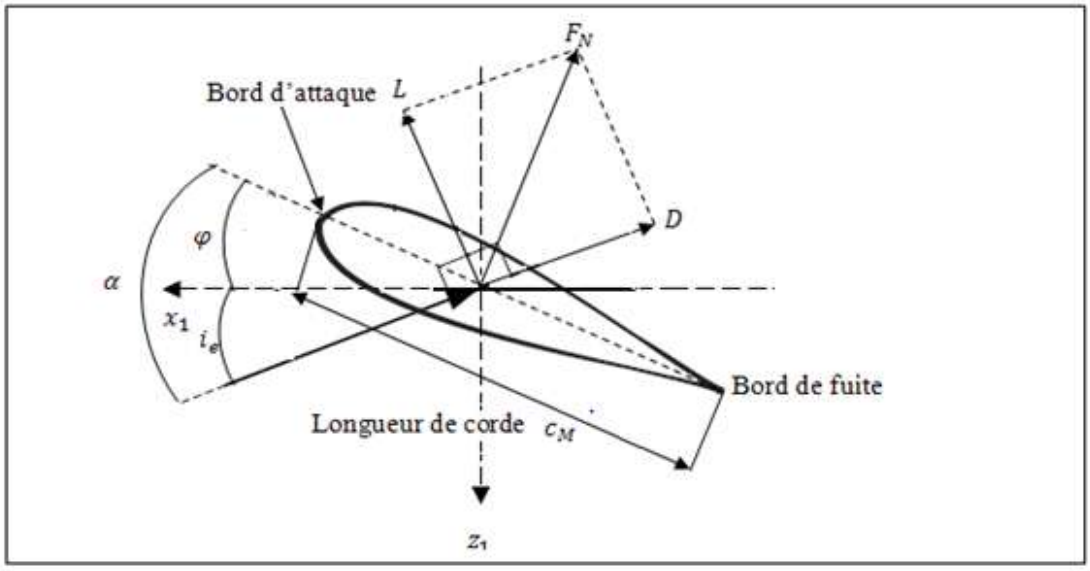


Figure I. 8. *Profil d'une pale d'hélicoptère.*

Les pales d'un même rotor sont en principe fixées au moyeu par l'intermédiaire des fusées, et le moyeu est relié directement au mât (ou l'arbre moteur). Chaque pale peut tourner autour d'un axe longitudinal généralement situé à 25% de la corde du profil à partir du bord d'attaque, ce mouvement correspond mécaniquement à une variation de l'angle de pas φ. Ce dernier représente l'angle que fait la corde avec le plan de rotation des pales.

Chaque élément de la pale supporte une force aérodynamique élémentaire, la résultante de ces forces correspond, pour une pale complète, à une force aérodynamique F_N appliquée au centre de poussée, lequel est situé sur l'axe longitudinal de la pale, au deuxième tiers à partir de l'emplanture. Nous pouvons décomposer cette force aérodynamique résultante en deux forces, la force de sustentation (Lift), qui est perpendiculaire à la direction du vent relatif, et la force de traînée (Drag) parallèle à la direction du vent relatif.

L'angle i_e est l'angle d'incidence du vent et α est l'angle d'attaque de la pale, alors on peut écrire :

$$\alpha = \varphi + i_e$$

5.1.2. *Plateau cyclique (Swatch plate)*

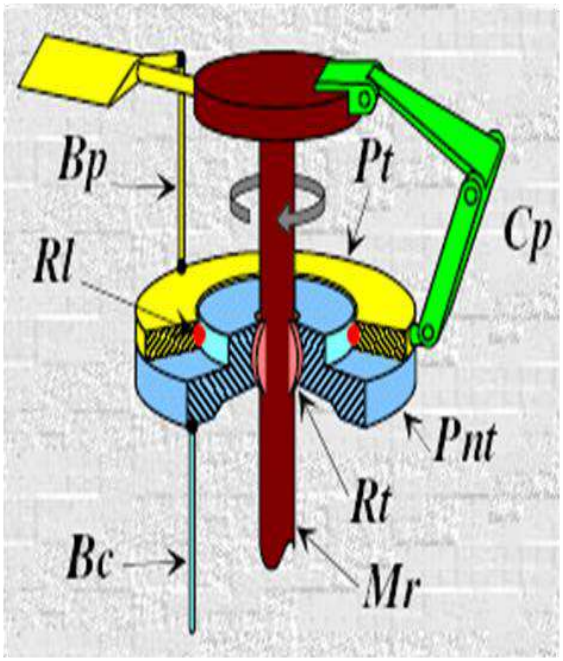
La commande de l'hélicoptère constitue toujours à faire varier la force de poussée produite par le rotor principal soit en amplitude, soit en direction, ou les deux ensemble.

En principe, le changement de la ligne d'action de la poussée est réalisé par l'inclinaison du mât (ou arbre moteur). Comme ce dernier est entraîné par le moteur, cette solution est impraticable. La deuxième solution d'incliner au moins le moyeu, nécessite l'application de grandes forces mécaniques, ce qui limite cette solution pour certains hélicoptères de très petite taille (modèles réduits) [4].

Dans les hélicoptères, l'inclinaison d'un dispositif appelé plateau cyclique (figure 1.2) produit l'inclinaison de la ligne d'action de la force de poussée par rapport a l'axe de rotation du rotor principal (le mât) ; en conséquence, un couple sur le rotor, soit de roulis, soit de tangage, ou une combinaison des deux.

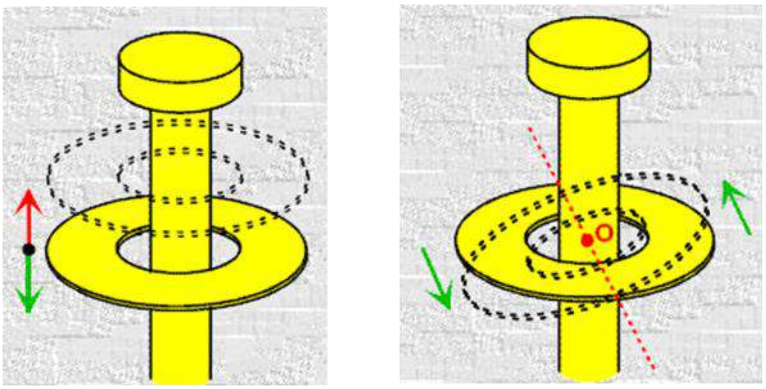
Le plateau est en fait composé de deux demi plateaux superposés coulissant et roulant autour de l'axe du mât du rotor principal, lequel étant entraîné en rotation par le ou les moteurs au travers de la boîte de transmission principale, et se termine par un moyeu sur lequel sont fixées les pales.

Sur le demi-plateau supérieur (mobile) sont fixées des *biellettes de pas* dont chacune est reliée à une pale pour faire varier son angle d'incidence en fonction des commandes cycliques.



Bp : Biellette de pas (en jaune).
Rl : Roulement à biles (en rouge) qui permet de faire tourner le plateau tournant **Pt** (en jaune) sur le plateau non tournant **Pnt** (en bleu).
Bc : Biellette de commande (en turquoise).
Pt : Plateau tournant (en jaune) relié par biellettes **Bp** (en jaune) aux leviers de pas des pales.
Rt : Rotule (en rose) qui peut coulisser le long du mat rotor **Mr**(en marron) et qui permet au plateau de pivoter dans tous les sens.
Mr : Mat rotor (en marron).
Cp : Compas (en vert) qui permet de rendre solidaire le plateau tournant **Pt** (en jaune) au mat rotor **Mr** (en marron).
Pnt : Plateau non tournant (en bleu).

Figure I.9. *Description du plateau cyclique.*



(a) *(b)*

Figure I.10. (a)Variation du pas collectif (vol vertical en haut et en bas).
(b)Variation du pas cyclique (vol en translation avant, à gauche et à droite)

5.1.3. *Le mât (shaft)*

Sur lequel sont fixés un moyeu et des pales reçoit la puissance motrice, généralement transmise du moteur par l'intermédiaire d'un réducteur.

5.1.4. *Le moyeu (hub)*

La seule fonction du moyeu est d'assurer la liaison entre le mât et les pales.

5.2. Description du rotor de queue (Tail rotor)

Le rotor de queue appelé aussi anti couple est un rotor auxiliaire de petite taille situé à l'arrière d'un hélicoptère et dont le pas des pales est actionné par les pédales d'un palonnier servant à commander les mouvements de la machine autour de l'axe de lacet :

- en vol de translation pour contrer le couple induit par le rotor principal qui tend à faire tourner la cellule dans le sens opposé,
- en vol stationnaire pour effectuer un mouvement de giration.

En ce qui concerne la conception le rotor de queue, il est composé du même mécanisme que le rotor principal sauf qu'il ne contient pas l'ensemble des articulations qui aident à la commande du pas cyclique. Ce rotor est aussi entraîné par le moteur qui fait tourner le rotor principal [3-4-5-6].



Figure I .11. Rotor de queue.

6. Les principales commandes de l'hélicoptère

6.1. *Levier de variation du pas collectif (u_1)*

Il s'agit d'un levier de manœuvre manuelle qui peut être augmenté ou diminué et cette position est linéairement reliée à l'angle d'attaque des pales du rotor principal et la manette des gaz du moteur pour maintenir la RPM (Révolution Par Minute) des pales constantes. Cette commande agit sur toutes les pales du rotor principal en même temps. Cette action produit une force de sustentation variable (une entrée de commande que nous appellerons u_1).

Le levier collectif permet au pilote un changement de la hauteur du plateau cyclique, ce qui change simultanément l'angle de pas de toutes les pales, ce qui permet de varier l'altitude de l'appareil [4-5]. (Figure 1.11).

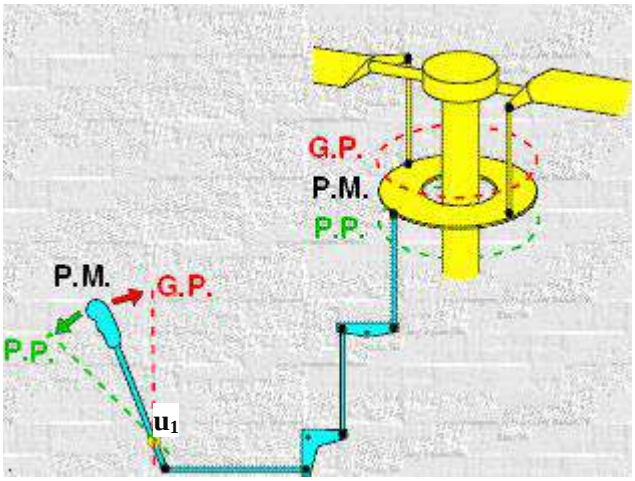


Figure I. 12. *Levier de variation du pas collectif.*

6.2. *Manche de variation du pas cyclique (u3, u4)*

Le Cyclique est responsable du mouvement de translation latérale et longitudinale de l'hélicoptère. Cette commande produit deux couples qui commandent les mouvements de tangage et de roulis (les entrées de commande que nous avons appelées u_3 et u_4).

Le Cyclique change l'angle d'attaque des pales du rotor individuellement et ceci permet à l'hélicoptère de se déplacer dans toutes les directions autour. Ceci est mis en œuvre avec l'utilisation du plateau cyclique.

Une action sur le cyclique provoque une inclinaison de la force de sustentation par rapport à sa direction initiale et donc une inclinaison de la machine. Ce mouvement est connu dans la littérature sous le nom de pas cyclique, qui produit une inclinaison dans la direction de force de poussée, qui génère une composante de traction et une translation aura lieu [4-5]. (Voir figure I.13).

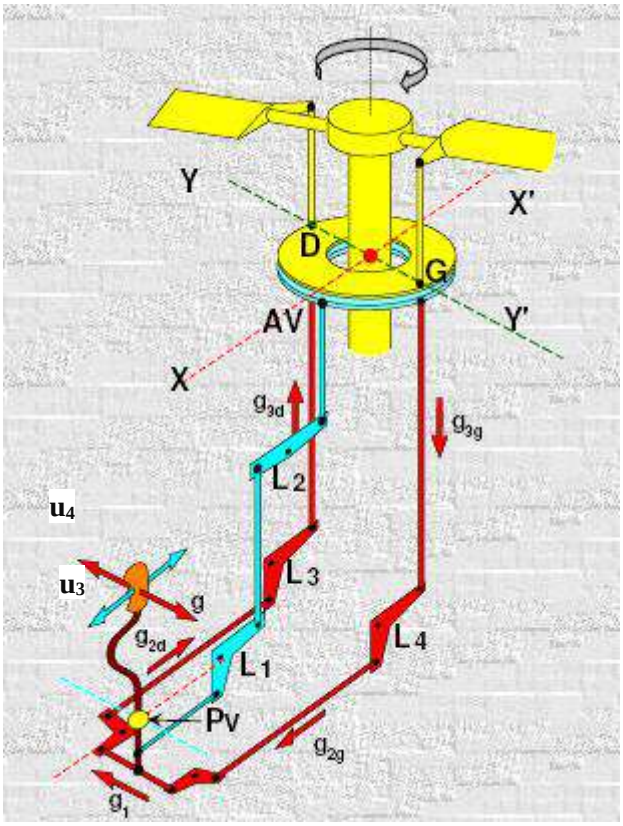


Figure I. 13. *Manche de variation du pas cyclique.*

6.3. *Les pédales ou palonnier (u2)*

Deux pédales commandées par les pieds du pilote agissent sur le rotor de queue situé à l'arrière de l'hélicoptère. Principalement elles permettent d'adapter la force nécessaire pour annuler la rotation du fuselage autour de l'axe du rotor principal.

Cette action produit un couple pour contrôler le mouvement du lacet de l'appareil [4-5]. (l'entrée de commande que nous avons appelée u_2).

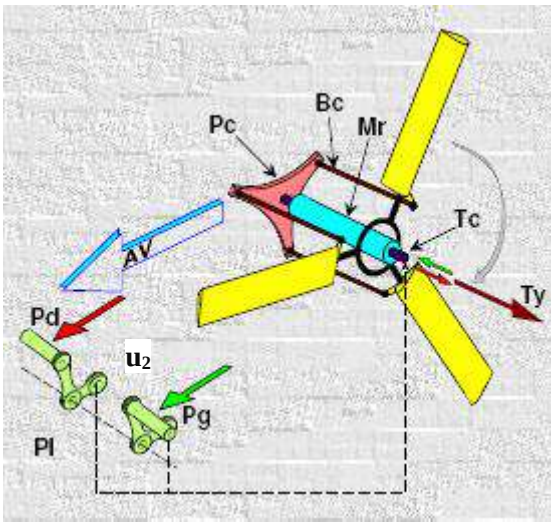


Figure I.14. *Les pédales ou palonniers*

7. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons donné quelques définitions et principes de base du fonctionnement de l'hélicoptère. Ce qui nous amène à dire que l'hélicoptère une machine incroyablement complexe du point de vue aérodynamique. L'hélicoptère peut voler dans à peu près tout les sens et faire du surplace. Cela est du aux effets de poussée des deux rotors, l'un vertical (rotor de queue), l'autre horizontal (rotor principal), assurant une meilleure stabilité à l'appareil. Le pilote dispose de quatre commandes à la main et au pied pour maîtriser ces mouvements tandis que pour accélérer ou ralentir, il fait varier la vitesse de rotation Ces commandes sont le collectif, l'anti-couple, et les deux commandes du cyclique

Pour résumer nous pouvons dire que pilotage de l'hélicoptère repose sur l'action que l'on va effectuer sur le pas des pales des rotors :

- En modifiant uniformément le pas des pales, on change globalement la portance du rotor. C'est le pas collectif.
- En modifiant le pas de chacune des pales, individuellement, on transforme l'équilibre des forces et donc l'orientation du rotor et par de la l'hélicoptère. C'est le pas cyclique.

Chapitre II

Modélisation de l'hélicoptère à 3DDL

1. Introduction

La dynamique des hélicoptères est particulièrement difficile à appréhender, tant les effets aérodynamiques et les couplages des degrés de liberté sont nombreux. Dans ce chapitre nous allons développer un modèle mathématique permettant de décrire les mouvements de l'hélicoptère dans le cas particulier du vol axial (décollage, montée, vol stationnaire, descente, et atterrissage) en reprenant les travaux de l'auteur dans [7]. Dans cette approche de modélisation, et sous les hypothèses évoquées dans le chapitre précédent, la dynamique de l'hélicoptère peut être considérée comme étant la dynamique du corps rigide associé au fuselage a laquelle sont ajoutées les forces aérodynamiques générées par le mouvement des deux rotors principal et de queue.

2. Expressions des forces agissant sur l'hélicoptère lors de son vol

Les forces et les couples aérodynamiques les plus importants intervenant lors du vol d'un hélicoptère sont montrés dans la figure (II.1.) [1-3-7].

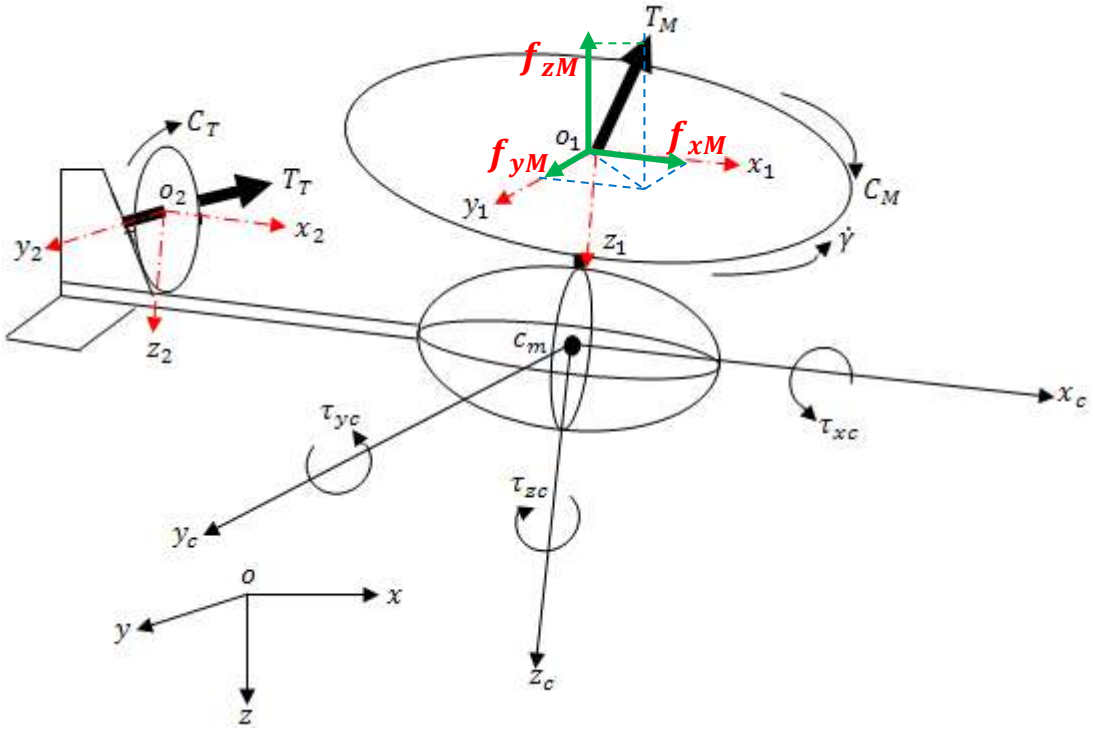


Figure II.1. *les forces et les couples aérodynamiques agissant sur hélicoptère*

- La force de poussée principal T_M est celle qui garantit la sustentation de l'hélicoptère et qui génère à partir de son inclinaison des force de traction f_{xM}, f_{yM}, f_{zM} permettant la présence de translations horizontales et verticales.

- Cette inclinaison produit aussi les couples aérodynamiques de tangage et/ou de roulis comme le résultat d'un bras de levier de la ligne d'action de T_M au centre de masse de l'hélicoptère. Les couples de tangage τ_{yc}, de roulis τ_{xc}, et de lacet τ_{zc}, sont avec C_M et C_T les couples les plus importants considérés dans les analyse aérodynamiques des hélicoptères [7].
- Les couples de traînée C_M et C_T sont générés par les forces de traînée qui agissent sur les pales du rotor principal et de queue respectivement. Ces forces de traînée représentent la résistance de l'air que les pales doivent vaincre lors de leurs rotations.

3. Considération de l'élément différentiel des pales

3.1 .Rotor principal

Considérons un élément différentiel de pale comme celui montré sur la figure(II.2) [1-3-7].

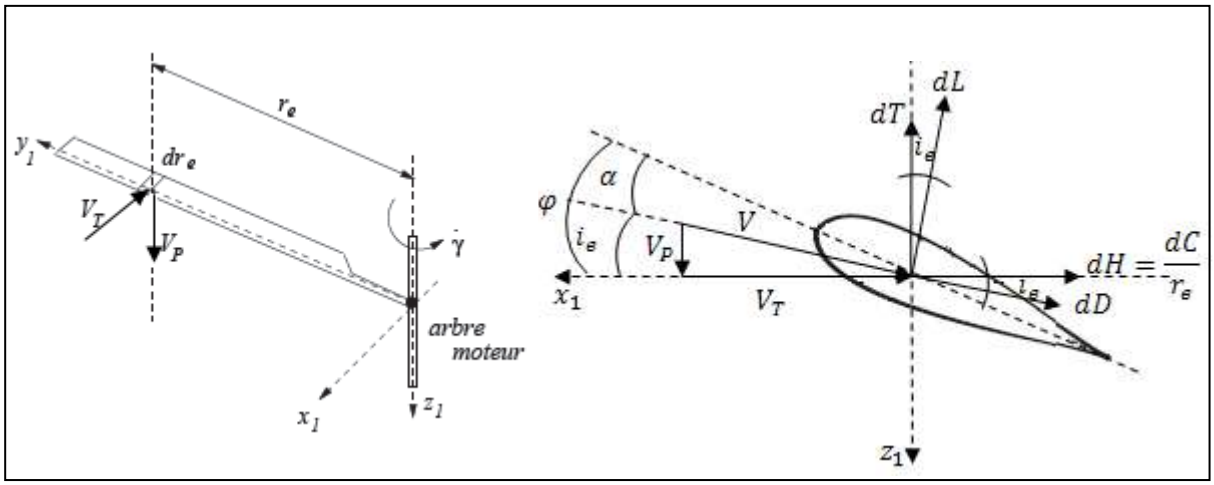


Figure II.2. *Eléments différentiels des pales et vitesses tangentiel et perpendiculaire.*

$$dL = P_d c_l c_M dr_e \qquad \text{(II.1)}$$

Où dL est l'élément différentiel de la force de sustentation, P_d est la pression dynamique, $c_l = a\alpha$ est le coefficient de sustentation, c_M est la longueur de la corde de la pale dr_e est l'élément différentiel de distance radial. En écrivons l'équation (II.1) en termes de conditions de l'élément de pale :

$$dL = \frac{\rho}{2} V^2 a\alpha c_M dr_e \qquad \text{(II.2)}$$

Où ρest la masse volumique de l'air, V est la valeur algébrique de la vitesse relative de l'air, a est la pente de la courbe de la force de sustentation ou gradient de portance et α est l'angle d'attaque de l'élément de pale.

L'élément différentiel de la force de traînée dD est donné par :

$$dD = \frac{\rho}{2} V^2 c_d c_M dr_e \quad \text{(II.3)}$$

Où c_d est le coefficient de traînée.

Projetant ces deux forces sur les axes parallèle et normal au plan de disque rotor (plan de rotation), nous aurons les forces élémentaires de poussée dT :

$$dT = dLcos(i_e) - dDsin(i_e) \quad \text{(II.4)}$$

Et l'élément différentiel du couple de traînée dC :

$$dC = (dLsin(i_e) + dDcos(i_e))r_e \quad \text{(II.5)}$$

Généralement l'angle d'incidence du vent est considéré très petit ($|i_e| \ll 1$), alors les approximations suivantes peuvent être faites [3-4] :

$$V \cong V_T \quad \text{(II.6)}$$

$$dT \cong dL \quad \text{(II.7)}$$

$$dC \cong (i_e dL + dD)r_e \quad \text{(II.8)}$$

Alors, nous pouvons écrire :

$$dT = \frac{\rho}{2} V_T^2 a\alpha c_M dr_e \quad \text{(II.9)}$$

$$dD = \frac{\rho}{2} V_T^2 c_d c_M dr_e \quad \text{(II.10)}$$

La force de poussée totale est égale au nombre de pales fois la force moyenne de sustentation par pale [1-3-7] :

$$T_M = \frac{P_M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_M} \frac{dL}{dr_e} dr_e d\gamma = \frac{\rho P_M a c_M}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_M} V_T^2 \, \alpha dr_e d\gamma \quad \text{(II.11)}$$

Considérons maintenant le cas du couple de traînée du rotor principal. En écrivant (II.8) en termes de conditions de l'élément pale nous trouvons :

$$dC_M = (\frac{\rho}{2} c_d c_M V_T^2 dr_e + \frac{\rho}{2} c_l c_M V_T^2 dr_e \frac{V_P}{V_T}) r_e \quad \text{(II.12)}$$

Alors : $$C_M = \frac{\rho P_M a c_M}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_M} \left[\frac{c_d}{a}(V_T^2 r_e) + (V_T^2 r_e)\alpha \frac{V_P}{V_T}\right] dr_e d\gamma \quad \text{(II.13)}$$

Et $$C_M = \frac{\rho P_M a c_M}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_M} \left[\frac{c_d}{a}(V_T^2 r_e) + (r_e V_P^2 + r_e V_T V_P \varphi)\right] dr_e d\gamma \qquad \text{(II.14)}$$

Les expressions des forces de poussée et des couples produits par le rotor principal dans le repère mobile lié à c_m en négligeant le phénomène de battement des pales en fonction des entrées de commandes [1] :

$$F_M = \begin{bmatrix} f_{xM} \\ f_{yM} \\ f_{zM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_M \sin(u_3)\cos(u_4) \\ T_M \cos(u_3)\sin(u_4) \\ T_M \cos(u_3)\cos(u_4) \end{bmatrix}$$

$$\tau_M = \begin{bmatrix} \tau_{xM} \\ \tau_{yM} \\ \tau_{zM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_M\, cos(u_3)\, cos(u_4) y_M - T_M\, cos(u_3)\, sin(u_4) z_M \\ T_M\, sin(u_3)\, cos(u_4)\, z_M - T_M\, cos(u_3)\, cos(u_4) x_M \\ T_M\, cos(u_3)\, sin(u_4)\, x_M - T_M\, sin(u_3)\, cos(u_4) y_M \end{bmatrix}$$

Où (x_M, y_M, z_M) est la position du rotor principal par rapport à c_m.

3.2. Rotor de queue

La force de sustentation et la force de traînée élémentaire sont données par [1-3-7]:

$$dL_T = \frac{\rho}{2} V_T^2 a_T \alpha_T c_T dr_{e_T}$$

$$dD_T = \frac{\rho}{2} {V_T}^2 c_{d_T} c_T dr_{e_T}$$

La force de poussée du rotor de queue est décrite par [1-3-7]:

$$T_T = \frac{P_T}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_T} -dL_T \, d\gamma_T$$

Où P_T est le nombre de pales du rotor de queue, R_T est le rayon du rotor de queue, γ_T est l'angle d'azimut des pales du rotor de queue.

Le couple produit par le rotor de queue est donné par [1-3-7] :

$$C_T = \frac{P_T}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_T} -r_{e_T}(i_{e_T} dL_T + dD_T)\, d\gamma_T$$

Comme la force de poussée du rotor de queue a seulement une composante le long de l'axe *y2* (parallèle à *y1*) nous avons donc $f_{xT} = f_{zT} = 0$. Le résultat des forces et des couples produits par le rotor de queue peut être écrit de la façon suivante (par rapport au *cm*) [7] :

$$F_T = \begin{bmatrix} f_{xT} \\ f_{yT} \\ f_{zT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ T_T \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tau_T = \begin{bmatrix} \tau_{xT} \\ \tau_{yT} \\ \tau_{zT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_T z_T \\ C_T \\ -T_T x_T \end{bmatrix}$$

En tenant compte du fait que : $u_3 \approx 0 \; et \; u_4 \approx 0$ [1-7], les composantes du vecteur de forces externes F_L en fonction des forces et des couples aérodynamiques mentionnés dans le chapitre précédent sont montrées dans le tableau :

	Expression Analytique
f_{xc}	$T_M u_3$
f_{yc}	$T_M u_4 + T_T$
f_{zc}	$T_M + D_{vi}$
τ_{xc}	$-T_M u_4 z_M$
τ_{yc}	$C_T + T_M u_3 z_M$
τ_{zc}	$C_{mot} + C_M$

Tableau. II.1. les forces généralisées

En cas de vol verticale les déplacements horizontales selon les axes *x* et *y* les angles de rotation en roulis et en tangage son nuls (*x=0, y=0, θ=0, ψ=0*), et les seules entrées de commandes sont le levier de pas cyclique u1 et le palonnier u2 (u3=u4=0).

Alors, les composantes du vecteur de forces externes (ou généralisées) en fonction des

Entrées de commande selon [7]

$$f_{zc} = T_M + D_{vi} = c_8 \dot{\gamma}^2 u_1 + c_9 \dot{\gamma} + c_{10} \qquad \text{(II.15)}$$

$$\tau_{zc} = T_T x_T = c_{11} \dot{\gamma}^2 u_2 \qquad \text{(II.16)}$$

$$\tau_\gamma = C_M + C_{mot} = (c_{12} \dot{\gamma} + c_{13}) u_1 + c_{14} \dot{\gamma}^2 + c_{15} \qquad \text{(II.17)}$$

Où c_i(i =0,...,17) sont les constantes physiques aérodynamiques du modèle d'hélicoptère donnée dans l'annexe.

4. Le modèle dynamique de l'hélicoptère à 3DDL

Nous présentons une formulation de Lagrange afin d'obtenir le modèle de l'hélicoptère lorsqu'il est monté sur une plate-forme expérimentale figure (II.2).Nous avons donc un système à trois degrés de liberté z, ϕ et γ. Il n'ya pas de mouvement dans les directions x et y ni en tangage ni en roulis, et en conséquence $x = y = \theta = \psi = 0$.

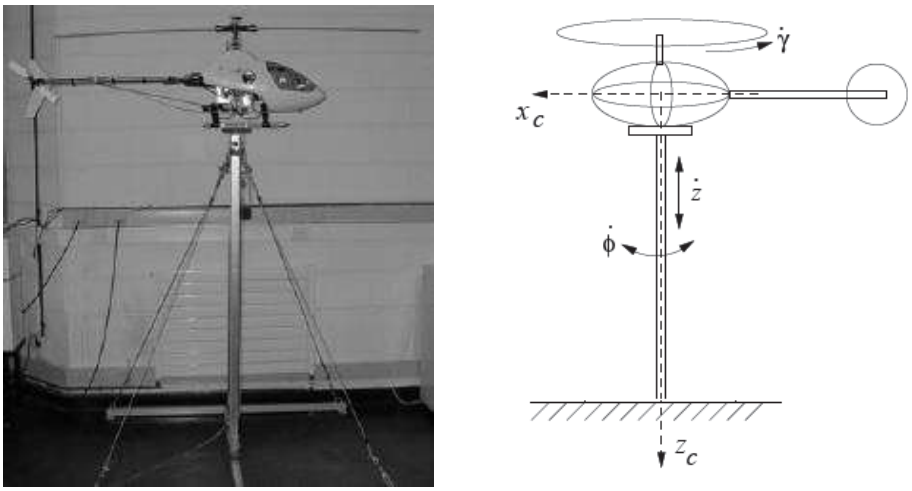


Figure II.3. *L'hélicoptère plate-forme* [3-7].

L'énergie cinétique de translation prend une forme simple car elle considère uniquement un déplacement dans la direction z, nous trouvons donc [1-3-7]:

$$T_t = \frac{1}{2} m\dot{z}^2 \qquad \text{(II.18)}$$

De manière simple, nous pouvons dire que la seule composante significative de la vitesse angulaire du fuselage est donnée par $\dot{\phi}$; en plus l'axe z du repère inertiel coïncide avec l'axe z_c lié a l'hélicoptère et donc la vitesse angulaire dans le repère inertiel est la même que celle exprimée dans le repère de l'hélicoptère. Elle est donnée par l'équation :

$$\omega_z = \omega_{zc} = \dot{\phi} \qquad \text{(II.19)}$$

En ce qui concerne l'énergie cinétique de rotation elle est définie par [1-3-7]:

- ✓ Pour le fuselage : $T_{rF} = \frac{1}{2} I_{zzF} \dot{\phi}^2$ (II.20)
- ✓ Pour le rotor principal : $T_{rM} = \frac{1}{2} I_{zzM} (\dot{\phi} + \dot{\gamma})^2$ (II.21)

✓ Pour le rotor de queue : $T_{rT} = \frac{1}{2} I_{zzT} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I_{yyT} \dot{\gamma}^2 r_\gamma^2 - \frac{1}{2} I_{yzT} \dot{\phi} \dot{\gamma} r_\gamma$ (II.22)

L'énergie potentielle est formée par l'énergie potentielle gravitationnelle et par la partie de l'énergie élastique correspondant à l'angle de conicité (battement vertical des pales).

Nous pouvons maintenant calculer le Lagrangien $L = T - U$ et obtenir les équations du mouvement de l'hélicoptère à partir de [1-3-7]:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad \text{(II.23)}$$

Où $q_i \; i = 1,2,3$ sont les coordonnées généralisées. Le développement de cette équation permet d'obtenir le modèle général de l'hélicoptère sous forme matricielle, qui est donné par :

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = Q(u) \quad \text{(II.24)}$$

$M(q)$ est la matrice d'inertie, $C(q,\dot{q})$ représente la matrice de Coriolis, $G(q)$ est le vecteur des forces conservatives, et $Q(u)$ le vecteur des forces généralisées donné par Le Lagrangien est donc exprimé par :

$$L = T - U = \frac{1}{2} m\dot{z}^2 + \frac{1}{2} I_{zzF} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I_{zzM} (\dot{\phi} + \dot{\gamma})^2 + \frac{1}{2} I_{zzT} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I_{yyT} \dot{\gamma}^2 r_\gamma^2 - \frac{1}{2} I_{yzT} \dot{\phi} \dot{\gamma} r_\gamma + \\ + mgz - ka_0^2 \quad \text{(II.25)}$$

Nous prenons l'hypothèse d'une force de poussée toujours vertical dans ce système, car une variation dans l'orientation de T_M entraînerait un changement du mode de vol (par exemple en vol en palier) qui ne peut pas se produire dans le système hélicoptère/plate-forme. D'autre part l'angle de conicité est considéré constant. Le vecteur de coordonnées généralisées prend donc la forme suivante :

$$q = [z \;\; \phi \;\; \gamma]^T \quad \text{(II.26)}$$

La dérivée du vecteur de coordonnées généralisées est :

$$\dot{q} = [\dot{z} \;\; \dot{\phi} \;\; \dot{\gamma}]^T \quad \text{(II.27)}$$

Les entrées utilisées dans ce cas sont définies par le vecteur d'entrée :

$$u = [u_1 \;\; u_2]^T \quad \text{(II.28)}$$

A partir de (II.25), en tenant compte du fait $I_{yzT} = 0$ et en utilisons l'équation (II.23) nous avons :

$$\frac{\partial L}{\partial z} = mg \tag{II.29}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \tag{II.30}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = -\frac{2}{3} m_T b^2 r_\gamma \sin(r_\gamma \gamma) \cos(r_\gamma \dot{\phi}^2 \gamma) \tag{II.31}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \tag{II.32}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_{zzF}\dot{\phi} + I_{zzM}(\dot{\phi} + \dot{\gamma}) + 2m_T(x_T^2 + y_T^2)\dot{\phi} + \frac{2}{3} m_T b^2 \cos^2(r_\gamma \gamma)\dot{\phi} \tag{II.33}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}} = I_{zzM}(\dot{\phi} + \dot{\gamma}) + I_{yyT} r_\gamma^2 \dot{\gamma} \tag{II.34}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right] = m\ddot{z} \tag{II.35}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right] = I_{zzF}\ddot{\phi} + I_{zzM}(\ddot{\phi} + \ddot{\gamma}) + 2m_T(x_T^2 + y_T^2)\ddot{\phi} + \frac{2}{3} m_T b^2 \cos^2(r_\gamma \gamma)\ddot{\phi} - \frac{4}{3} m_T b^2 \sin(r_\gamma \gamma) \cos(r_\gamma \gamma) r_\gamma \dot{\gamma}\dot{\phi} \tag{II.36}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}}\right] = I_{zzM}(\ddot{\phi} + \ddot{\gamma}) + I_{yyT} r_\gamma^2 \ddot{\gamma} \tag{II.37}$$

A partir des équations ci-dessus nous pouvons écrire la forme matricielle du modèle à 3DDL:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = Q(u) \tag{II.38}$$

où

$$M(q) = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & I_{zzF} + I_{zzM} + m_T(x_T^2 + y_T^2) + \frac{3}{2} m_T b^2 \cos^2(r_\gamma \gamma) & I_{zzM} \\ 0 & I_{zzM} & I_{zzM} + I_{yyT} r_\gamma^2 \end{bmatrix} \tag{II.39}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} m_T b^2 r_\gamma \sin(2 r_\gamma \gamma)\dot{\gamma} & -\frac{1}{3} m_T b^2 r_\gamma \sin(2 r_\gamma \gamma)\dot{\phi} \\ 0 & \frac{1}{3} m_T b^2 r_\gamma \sin(2 r_\gamma \gamma)\dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \tag{II.40}$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} -mg \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{II.41}$$

Les matrices$M$, C et le vecteur G prennent donc les formes suivantes :

$$M(q) = \begin{bmatrix} c_0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2 \cos^2(c_3\gamma) & c_4 \\ 0 & c_4 & c_5 \end{bmatrix} \quad \text{(II.42)}$$

$$C(q,\dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_6 \sin(2c_3\gamma)\dot{\gamma} & c_6 \sin(2c_3\gamma)\dot{\phi} \\ 0 & -c_6 \sin(2c_3\gamma)\dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(II.43)}$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} c_7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(II.44)}$$

A partir de (III.15) (III.16) (III.17) le second membre de (II.39) peut être mis sous la forme$Q(u) = A(\dot{q})u + B(\dot{q})$, et en tenant compte que :

$$A(\dot{q}) = \begin{bmatrix} c_8\dot{\gamma}^2 & 0 \\ 0 & c_{11}\dot{\gamma}^2 \\ c_{12}\dot{\gamma} + c_{13} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(II.45)}$$

$$B(\dot{q}) = \begin{bmatrix} c_9\dot{\gamma} + c_{10} \\ 0 \\ c_{14}\dot{\gamma}^2 + c_{15} \end{bmatrix} \quad \text{(II.46)}$$

Il est intéressant d'utiliser une représentation d'état qui sera utilisée pour faire des simulations en Matlab/Simulink. Nous prenons donc les trois variables du vecteur de coordonnées généralisées et leurs dérivées comme variables d'état du modèle :

Variable	Dérivée
$x_1 = z$	$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{z}$
$x_3 = \phi$	$x_4 = \dot{x}_3 = \dot{\phi}$
$x_5 = \gamma$	$x_6 = \dot{x}_5 = \dot{\gamma}$

Tableau II.2. *Les variables d'état du modèle*

La représentation d'état de l'hélicoptère en vol vertical est donnée par le système d'équations:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= \frac{1}{c_0}[c_8 x_6^2 u_1 + c_9 x_6 + c_{10} - c_7] \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= \frac{1}{c_1 c_5 - c_4^2}[c_5 c_{11} x_6^2 u_2 - c_4\big((c_{12} x_6 + c_{13})u_1 + c_{14} x_6^2 + c_{15}\big)] \\
\dot{x}_5 &= x_6 \\
\dot{x}_6 &= \frac{1}{c_1 c_5 - c_4^2}[-c_4 c_{11} x_6^2 u_2 + c_1\big((c_{12} x_6 + c_{13})u_1 + c_{14} x_6^2 + c_{15}\big)]
\end{aligned} \tag{II.47}$$

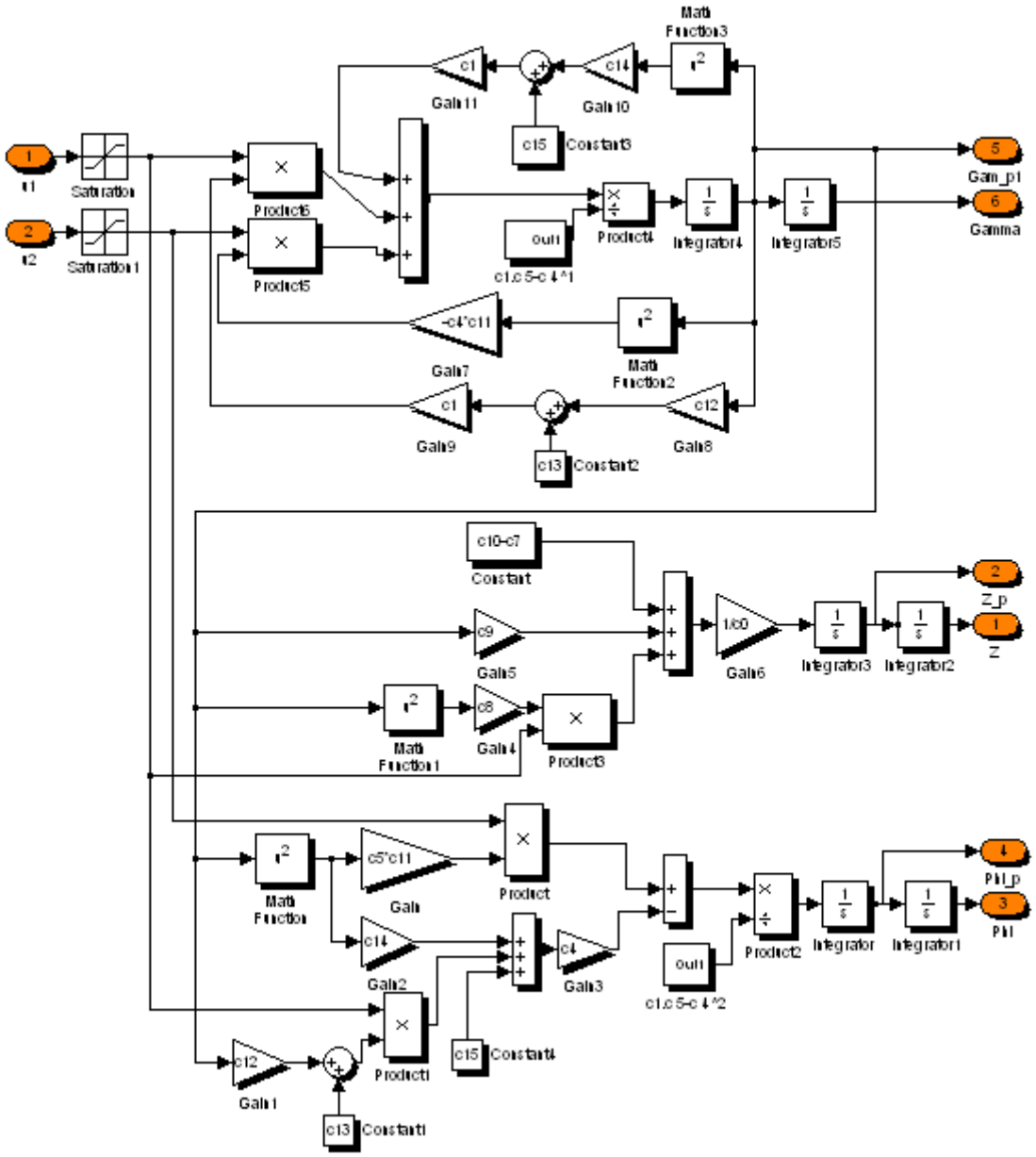


Figure II.4. *Schéma bloc du modèle de l'hélicoptère.*

5. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté la modélisation dynamique de l'hélicoptère de taille réduite en mode de vol vertical. Nous avons d'abord présenté la modélisation dynamique d'un corps rigide en se basant sur le formalisme de Lagrange auquel nous avons ajouté les forces et les couples produits par les deux rotors. De cette façon le modèle dynamique était complètement décrit. Enfin, nous avons obtenu un modèle non linéaire d'ordre réduit de l'hélicoptère monté sur la plateforme, que nous l'avons mis sous forme d'état plus adaptée pour faire des simulations. Dans le chapitre suivant nous allons étudier la commande de l'hélicoptère drone considéré.

Chapitre III

Commande de l'hélicoptère

1. Introduction

Une fois le modèle dynamique est établi, on s'intéresse au problème du contrôle de l'hélicoptère à 3DDL. Le modèle mathématique obtenu présente un grand défi à cause des forts couplages entre les entrées de commande et les états du système, de plus ce système est sous-actionné (deux entrées de commande et trois degrés de liberté). Durant cette dernière décennie, des méthodologies de conception de lois de commande pour les hélicoptères drones ont été développées, ceci dans le but de stabiliser leurs mouvements soit sur une trajectoire, sur un chemin ou autour d'un point fixe.

Dans ce travail, la commande de l'hélicoptère est basée sur l'idée de transformer la dynamique non linéaire en forme linéaire en utilisant la commande linéarisante entrées sorties. La linéarisation entrée-sortie signifie la génération d'une relation différentielle linéaire entre la sortie et une nouvelle entrée de commande. Ainsi la dynamique du système non linéaire original est décomposée en partie externe (entrées-sorties) et interne [8-9-10-11-12]. Puisque la partie externe se compose d'une relation linéaire entre la sortie et la nouvelle entrée, il est facile de concevoir l'entrée de sorte que la sortie se comporte comme désirée.

2. Linéarisation entrée/sortie

2.1. Principe

Le principe consiste à établir un bouclage non linéaire, qui linéarise et découple le système non linéaire après une transformation des coordonnées dans l'espace d'état. Cette technique diffère entièrement de la linéarisation conventionnelle car elle ne met pas en œuvre un quelconque développement limité autour d'un point de fonctionnement et des stratégies de découplage du système linéaire obtenu. La technique de linéarisation peut être regardée comme une manière de transformer des modèles de systèmes complexes en modèles équivalents plus simples en se basanant sur les outils de géométrie différentielle (dérivée de Lie) [8-9-10-11-12].

2.2. Systèmes mono-entrée/mono-sortie

Soit un système non linéaire, correspond à la classe définie par :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \qquad \text{(III.1)}$$

Avec $x \in \mathbb{R}^n$ vecteur d'état $x = [x_1\ x_2 \cdots x_n]^T$.

$u \in \mathbb{R}$ Entrée de commande.

$y \in \mathbb{R}$ Sortie du système.

$f(x) \in \mathbb{R}^n$ et $g(x) \in \mathbb{R}^n$ des champs de vecteur et $h(x)$ est une fonction analytique elles sont définies dans un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $f(x)$ et $g(x)$ sont supposées infiniment différentiables.

2.3 .Notion du degré relatif

Un système de la forme (III.1) est dit de degré relatif r au voisinage d'un point x_0 si

$$1)\ L_g L_f^i h(x) = 0 \qquad 0 \le i \le r-2$$
$$2)\ L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$$

Où $L_f h(x)$ est la dérivée de Lie de $h(x)$ selon le champ de vecteur $f(x)$

$$L_f h(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x}.f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h(x)}{\partial x_i}.f_i(x) \qquad \text{(III.2)}$$

$$L_f^k h(x) = L_f\left(L_f^{k-1} h(x)\right) \qquad \text{(III.3)}$$

$$L_f^0 h(x) = h(x) \qquad \text{(III.4)}$$

$$L_g L_f^k h(x) = L_g\left(L_f^k h(x)\right) \qquad \text{(III.5)}$$

Alors, Le degré relatif d'un système non linéaire, représente le nombre de fois qu'il faut dériver la sortie afin de faire apparaître explicitement l'entrée.

2.4. Forme normale

Comme dans le cas des systèmes linéaires, les systèmes non linéaires peuvent être mis sous une forme canonique appelée forme normale. Cette dernière est basée sur une transformation non linéaire des coordonnées, définie par [8-9-10] :

$$\begin{cases} z_1 = \Phi_1(x) = h(x) \\ z_2 = \Phi_2(x) = L_f h(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_r = \Phi_r(x) = L_f^{r-1} h(x) \end{cases} \qquad \text{(III.6)}$$

Dans le cas général le degré relatif r est inférieur à l'ordre n du système, mais nous pouvons toujours trouver des fonctions $\Phi_{r+1} \dots \dots \Phi_n$ telle que la transformation $\Phi(x) = [\Phi_1 \dots \dots \Phi_n]^T$ soit un difféomorphisme. Les dérivées successives de (III.6) donnent :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = L_f h(x) = z_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dot{z}_{r-1} = L_f^{r-1} h(x) = z_r \end{cases} \quad \text{(III.7)}$$

La dernière dérivée est donnée par :

$$\dot{z}_r = L_f^r h(x) + L_g L_f h(x) u \quad \text{(III.8)}$$

Sachant que $x = \Phi^{-1}(z)$, la dernière équation peut être mise sous la forme :

$$\dot{z}_r = b(z) + a(z) u \quad \text{(III.9)}$$

Avec : $$\begin{cases} a(z) = L_g L_f^{r-1} h(\Phi^{-1}(z)) \\ b(z) = L_f^r h(\Phi^{-1}(z)) \end{cases} \quad \text{(III.10)}$$

Pour les $(n - r)$ équations restantes

$$\dot{z}_{r+i} = \frac{\partial \Phi_{r+i}(x)}{\partial x} f(x) + \frac{\partial \Phi_{r+i}(x)}{\partial x} g(x) u$$

$$= L_f \Phi_{r+i}\left(\Phi^{-1}(z)\right) + L_g \Phi_{r+i}(\Phi^{-1}(z)) u \quad \text{(III.11)}$$

En posant :

$$\begin{cases} q_i\,(z) = L_f \Phi_i\left(\Phi^{-1}(z)\right) \\ p_i(z) = L_g \Phi_i(\Phi^{-1}(z)) \end{cases} \text{ Pour } r + 1 \leq i \leq n \quad \text{(III.12)}$$

Nous obtenons pour les $(n - r)$ équations différentielles restantes :

$$\dot{z}_i = q_i(z) + p_i(z) u \quad \text{(III.13)}$$

Finalement, la représentation d'état du système dans les nouvelles coordonnées est :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{z}_{r-1} = z_r \\ \dot{z}_r = b(z) + a(z)u \\ \dot{z}_{r+1} = q_{r+1}(z) + P_{r+1}(z)u \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{z}_{r+1} = q_i(z) + P_i(z)u \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{z}_n = q_n(z) + P_n(z)u \end{cases} \quad \text{(III.14)}$$

Et l'équation de sortie : $y = h(x) = z_1$ (III.15)

Remarques [8-9-10]:

1. Les fonctions $\Phi_{r+1} \dots \dots \Phi_n$ peuvent être choisies tels que $L_g \Phi_{r+i}(x) = 0$, alors $p_i = 0$ pour $r + 1 \leq i \leq n$.
2. Si $r = n$, la forme normale ne nécessite pas les fonctions additionnelles Φ_i $r + 1 \leq i \leq n$, et on peut à travers un retour non linéaire trouver une équation différentielle linéaire d'ordre n entre l'entrée u et la sortie y.
3. Si $r < n$, les fonctions Φ_i $r + 1 \leq i \leq n$ sont exigées pour compléter la transformation de coordonnées, et on peut à travers un retour non linéaire trouver une équation différentielle linéaire d'ordre r entre l'entrée u et la sortie y, le système est particulièrement linéarisable.

2.5. Linéarisation exacte par bouclage statique

La linéarisation exacte nécessite la condition $r = n$. Dans la section précédente, nous avons vu que la transformation (III.6), peut transformer le système non linéaire (III.1) en un autre système dont les premières $(n - 1)$ équations sont linéaires et ne contiennent pas le terme de contrôle u [8-9-10-11-12] :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dot{z}_{n-1} = z_n \\ \dot{z}_n = \alpha(x) + \beta(x)u \end{cases} \quad \text{(III.16)}$$

Avec $x = \Phi^{-1}(z)$

Afin de linéariser le système (III.1) complètement, posons :

$$v = \alpha(x) + \beta(x)u \qquad \text{(III.17)}$$

Les deux résultats suivants peuvent être obtenus :

- ✓ Premièrement, nous avons trouvé un système exactement linéarisé et complètement contrôlable dans le nouveau système de coordonnées $Z = [z_1\, z_2 \dots \dots z_n]^T$ qui a une forme dite la forme normale de Brunovsky [9] :

$$\dot{Z} = AZ + Bv \qquad \text{(III.18)}$$

Avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots\dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots\dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(III.19)}$$

- ✓ Deuxièmement, selon la définition du degré relatif, on sait que dans l'équation (III.17) $\beta \neq 0$. Alors la loi de commande u qui linéarise exactement le système (III.1) est donnée par :

$$u = -\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} + \frac{1}{\beta(x)}v$$

De la section, on sait que :

$$\alpha\,(z) = L_f^n h(x) \qquad \text{(III.20)}$$

$$\beta(z) = L_g L_f^{n-1} h(x) \qquad \text{(III.21)}$$

Remarque [8-9-10] :

Le degré relatif du système varie suivant le choix de la sortie $y = h(x)$. La recherche d'une linéarisation exacte est équivalente à la recherche d'une sortie $y = w(x)$ qui satisfait à la condition $r = n$.

2.6. Linéarisation partielle par retour d'état statique

La linéarisation partielle correspond à un degré relatif inférieur à l'ordre du système $r < n$. La forme normale du système est donnée par (III.14). Introduisant les notations suivantes :

$$\zeta = [z_1\ z_2 \dots z_r]^T$$

$$\eta = [z_{r+1}\ z_{r+2} \dots z_n]^T$$

Le système (III.14) s'écrit en fonction de ζ et η :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{z}_{r-1} = z_r \\ \dot{z}_r = b(\zeta,\eta) + a(\zeta,\eta)u \\ \dot{\eta} = q(\zeta,\eta) \end{cases} \quad \text{(III.22)}$$

Avec :

$$\begin{cases} a(\zeta,\eta) = L_g L_f^{r-1} h(\Phi^{-1}(\zeta,\eta)) \\ b(\zeta,\eta) = L_f^r h(\Phi^{-1}(\zeta,\eta)) \end{cases} \quad \text{(III.23)}$$

Remarque : $p(\zeta,\eta)$ est choisi tel que $p(\zeta,\eta) = 0$ (voir forme normale)

2.6.1. *La dynamique interne*

La linéarisation entrée-sortie partielle décompose la dynamique du système en deux parties [8-9-10]:

- ✓ Une partie externe représentée par les r premières équations de (III.22), qui donne la relation différentielle entre l'entrée et la sortie.
- ✓ Une partie interne non observable représentée par le vecteur η dans (III.22). Cette partie est appelée dynamique interne.

2.6.2. *La dynamique des zéros*

La stabilité de la dynamique interne du système est exigée pour la conception des lois de commande. Pour les systèmes linéaires, la dynamique interne est stable si les zéros de la fonction de transfert se trouvent dans le demi-plan gauche du domaine complexe [8-9-10].

Par analogie pour étudier la stabilité de la dynamique interne des systèmes non linéaire, on introduit la notion de la dynamique des zéros :

La dynamique des zéros est une caractéristique intrinsèque du système qui est défini comme étant la dynamique interne lorsque l'entrée du système est choisie de manière à porter la sortie à zéro à $t = t_0$ et l'y maintient.

Etant donné que : $y(t) = 0$ pour $t \geq t_0$

Alors : $y^{(i)}(t) = 0 \quad 0 \leq i \leq r$ pour $t \geq t_0$

Pour $i = r$: $y^{(i)}(t) = b(0,\eta) + a(0,\eta)u = 0$ d'où :

$$u(t) = \frac{-b(0,\eta)}{a(0,\eta)}$$

En imposant cette sortie au système, on obtient la dynamique des zéros du système non linéaire :

$$\begin{cases} \zeta = 0 \\ \dot{\eta}(t) = q(0,\eta(t)) \end{cases} \quad \text{(III.24)}$$

Avec $\eta(0) = \eta_0$(choisi non nul pour éviter la solution triviale)

3. Systèmes multi-entrées/multi-sorties

La théorie développée pour les systèmes non linéaires mono variables peut être étendu pour le cas multi variables. On ne considère que les systèmes carrés (même nombre de sorties que d'entrées).

Soit un système non linéaire de p entrée et p sortie suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{p} g_i(x)u_i \\ y_i = h_i(x) \quad i = 1, \dots, p \end{cases} \quad \text{(III.25)}$$

Avec $x \in \mathbb{R}^n$ vecteur d'état $x = [x_1\ x_2 \cdots x_n]^T$.

$u = [u_1\ u_2 \dots u_p]^T \in \mathbb{R}^p$ Le vecteur de commande.

$y = [y_1\ y_2 \dots y_p]^T \in \mathbb{R}^p$ Le vecteur de sortie du système.

$f(x) \in \mathbb{R}^n$ et $g_i(x) \in \mathbb{R}^n$ des champs de vecteur lisses et $h_i(x)$ est une fonction des fonctions lisses.

Le problème consiste à trouver une relation entre l'entrée et la sortie en dérivant la sortie jusqu'au moins une entrée apparaisse :

$$y_i^{(r_i)} = L_f^{r_i} h_i(x) + \sum_{j=1}^{p} L_{g_j} L_f^{r_i - 1} h_i(x) u_j \quad \text{(III.26)}$$

Où $L_{g_j} L_f^{r_i} h_i(x) = 0$ pour $1 \leq r_i \leq r_i - 2 \ \ \forall j \in \{1, \dots, p\}$

Le degré relatif total r : $r = \sum_{i=1}^{p} r_i$ doit être inférieur ou égale à l'ordre du système n.

Dans le cas ou le degré relatif totale du système est égale à l'ordre du système ($r = \sum_{i=1}^{p} r_i = n$), le système (III.25) accepte une linéarisation exacte. Pour trouver l'expression de la loi de commande u qui permet de linéariser la relation entre l'entrée et la sortie, on écrit l'expression (III.26) sous forme matricielle [8-9-10-11] :

$$\left[y_1^{r_1} \dots y_p^{r_p}\right]^T = A(x) + E(x)u \qquad \text{(III.27)}$$

Avec :

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1(x) \\ \vdots \\ L_f^{r_p} h_p(x) \end{bmatrix} \qquad E(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1 - 1} h_1(x) & L_{g_2} L_f^{r_1 - 1} h_1(x) & \dots & L_{g_p} L_f^{r_1 - 1} h_1(x) \\ L_{g_1} L_f^{r_2 - 1} h_2(x) & L_{g_2} L_f^{r_2 - 1} h_2(x) & \dots & L_{g_p} L_f^{r_2 - 1} h_2(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_p - 1} h_p(x) & L_{g_2} L_f^{r_p - 1} h_p(x) & \dots & L_{g_p} L_f^{r_p - 1} h_p(x) \end{bmatrix}$$

$E(x)$: Est appelée matrice de découplage du système.

Si on suppose que $E(x)$ n'est pas singulière, la loi de commande linéarisante est donnée par :

$$u = E(x)^{-1}[-A(x) + v] \qquad \text{(III.28)}$$

La linéarisation n'est possible que si $E(x)$ est inversible. Remplaçant (III.28) dans (III.27) le système équivalent devient linéaire et totalement découplé de la forme :

$$\left[y_1^{(r_1)} \ \dots \ y_p^{(r_p)}\right]^T = \left[v_1 \ \dots \ v_p\right]^T \qquad \text{(III.29)}$$

Ce qui nous permet de lui imposer n'importe quelle dynamique stable par le nouveau vecteur d'entrée $v = \left[v_1 \ \dots \ v_p\right]^T$.

Dans le cas ou le degré relatif totale du système est inférieur à l'ordre du système ($r = \sum_{i=1}^{p} r_i < n$), le système (III.25) n'accepte qu'une linéarisation partielle et le système comporte une dynamique interne d'ordre $(n - r)$, qu'il faut s'assurer de sa stabilité (III.26).

4. Conception de la loi de commande externe *v*

Le vecteur *v* est conçu selon les objectifs de commande. Pour le problème de poursuite envisagé, il doit satisfaire [13-14-15-16-17]:

$$v_j = y_{dj}^{(r_j)} + K_{r_j-1}\left(y_{dj}^{(r_j-1)} - y_j^{(r_j-1)}\right) + \cdots + K_0\left(y_{dj} - y_j\right) \qquad \text{(III.30)}$$

Où les vecteurs $\left\{y_{dj}\ \ y_{dj}^{(1)}\ \ \ldots\ldots y_{dj}^{(r_j-1)}\ y_{dj}^{(r_j)}\right\}$ définissent les trajectoires de référence imposées pour les différentes sorties.

Si on remplace (III.30) dans (III.29), on arrive à la dynamique de poursuite suivante :

$$e_j^{(r_j)} + K_{r_j-1}e_j^{(r_j-1)} + \cdots K_1\dot{e}_j + K_0 e_j = 0 \qquad \text{(III.31)}$$

Si les $K_i$sont choisis de façon à ce que le polynôme $s^{r_j} + K_{r_j-1}s^{r_j-1} + \cdots K_1 s + K_0$ soit un polynôme d'Hurwitz (possède des racines avec des parties réelles négatives), alors on peut montrer que l'erreur $e_j(t) = y_{dj}^{(r_j-1)} - y_j^{(r_j-1)}$ satisfait :

$\lim_{t\to\infty} e_j(t) = 0$ le système linéarisé en boucle fermée est donné par la figure.

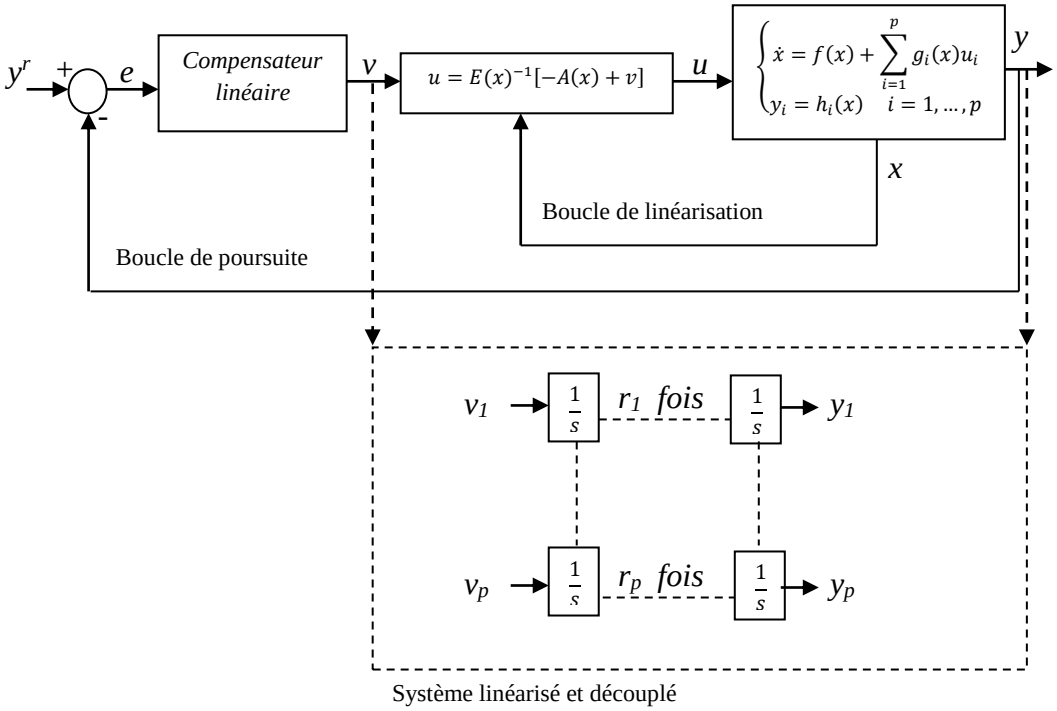


Figure III.1. *Principe de la Commande non linéaire.*

5. Application pour le modèle d'hélicoptère

Le modèle d'état non linéaire de l'hélicoptère est donné par les équations (II.15) du chapitre 2 peut être représenté sous la forme :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{III.32}$$

Où les champs vectoriels f et g sont donnés par :

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \\ f_4(x) \\ f_5(x) \\ f_6(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \frac{1}{c_0}(c_9 x_6 + c_{10} - c_7) \\ x_4 \\ -\frac{c_4}{c_1 c_5 - c_4^2}(c_{14} x_6^2 + c_{15}) \\ x_6 \\ \frac{c_1}{c_1 c_5 - c_4^2}(c_{14} x_6^2 + c_{15}) \end{bmatrix}$$

$$g(x) = [g_1(x) \quad g_2(x)]$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{c_8}{c_0} x_6^2 & 0 & -\frac{c_4}{c_1 c_5 - c_4^2}(c_{12} x_6 + c_{13}) & 0 & \frac{c_1}{c_1 c_5 - c_4^2}(c_{12} x_6 + c_{13}) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c_5 c_{11}}{c_1 c_5 - c_4^2} x_6^2 & 0 & -\frac{c_4 c_{11}}{c_1 c_5 - c_4^2} x_6^2 \end{bmatrix}^T$$

Les variables à contrôler sont :

- La position verticale de l'hélicoptère (z).
- L'angle de lacet (ϕ).

$$y = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z = x_1 \\ \phi = x_3 \end{bmatrix} \tag{III.33}$$

5.1. Le degré relatif (r)

Le degré relatif d'une sortie est le nombre de fois qu'il faut dériver la sortie pur faire apparaître le terme de l'entrée $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$.

- **Degré relatif de la position verticale (z) :**

Pour $r_1 = 1$:

$\dot{h}_1(x) = \dot{x}_1 = f_1(x) = x_2$

$$\dot{h}_1(x) = L_f h_1(x) + [L_{g_1} h_1(x) \quad L_{g_2} h_1(x)] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Par identification :

$$L_f h_1(x) = x_2$$

$$L_{g_1} h_1(x) = 0$$

$$L_{g_2} h_1(x) = 0$$

Pour $r_1 = 2$

$$\ddot{h}_1(x) = \dot{x}_2 = f_2(x) = \frac{1}{c_0}(c_9 x_6 + c_{10} - c_7) + \frac{c_8}{c_0} x_6^2 u_1$$

$$\ddot{h}_1(x) = L_f^2 h_1(x) + [L_{g_1} L_f h_1(x) \quad L_{g_2} L_f h_1(x)] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

On trouve :

$$L_f^2 h_1(x) = \frac{1}{c_0}(c_9 x_6 + c_{10} - c_7)$$

$$L_{g_1} L_f h_1(x) = \frac{c_8}{c_0} x_6^2$$

$$L_{g_2} L_f h_1(x) = 0$$

Conclusion **:** Le degré relatif de la position verticale *z* est $r_1 = 2$.

- **Degré relatif de l'angle de lacet (ϕ):**

Pour $r_2 = 1$:

$$\dot{h}_2(x) = \dot{x}_3 = f_3(x) = x_4$$

$$\dot{h}_2(x) = L_f h_2(x) + [L_{g_1} h_2(x) \quad L_{g_2} h_2(x)] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

On obtient :

$$L_f h_2(x) = x_4$$

$$L_{g_1} h_2(x) = 0$$

$L_{g_2} h_2(x) = 0$

Pour $r_2 = 2$:

$$\ddot{h}_2 = \dot{x}_4 = f_4(x)$$

$$= -\frac{c_4}{c_1 c_5 - c_4^2}(c_{14} x_6^2 + c_{15}) - \frac{c_4}{c_1 c_5 - c_4^2}(c_{12} x_6 + c_{13}) u_1 + \frac{c_5 c_{11}}{c_1 c_5 - c_4^2} x_6^2 u_2$$

$$\ddot{h}_2(x) = L_f^2 h_2(x) + [L_{g_1} L_f h_2(x) \quad L_{g_2} L_f h_2(x)] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$L_f^2 h_2(x) = -\frac{c_4}{c_1 c_5 - c_4^2}(c_{14} x_6^2 + c_{15})$$

$$L_{g_1} L_f h_2(x) = -\frac{c_4}{c_1 c_5 - c_4^2}(c_{12} x_6 + c_{13})$$

$$L_{g_2} L_f h_2(x) = \frac{c_5 c_{11}}{c_1 c_5 - c_4^2} x_6^2$$

Conclusion **:** Le degré relatif de l'angle de lacet (ϕ) est $r_2 = 2$.

- **Degré relatif total**

La sortie $h_1 = z$ est de degré relatif $r_1 = 2$ et la sortie $h_2 = \phi$ est de degré relatif $r_2 = 2$, ce qui donne un degré total $r = r_1 + r_2 = 4$. La dimension de notre modèle est $n = 6$, alors $r < n$, ce qui implique l'existence d'une dynamique interne inobservable d'ordre 2. Il est nécessaire de vérifier la stabilité de cette dynamique interne.

Par conséquent le système est linéarisable par un retour d'état non linéaire.

5.2. *Matrice* de découplage $E(x)$

D'après (III.27) on obtient l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} y_1^{(r_1)} & y_2^{(r_2)} \end{bmatrix}^T = A(x) + E(x)u$$

Où :

$$\begin{bmatrix} \ddot{h}_1(x) \\ \ddot{h}_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_f^2 h_1(x) \\ L_f^2 h_2(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f h_1(x) & L_{g_2} L_f h_1(x) \\ L_{g_1} L_f h_2(x) & L_{g_2} L_f h_2(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Tel que :

$$A(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_0}(c_9 x_6 + c_{10} - c_7) \\ -\frac{c_4}{c_1 c_5 - c_4^2}(c_{14} x_6^2 + c_{15}) \end{bmatrix}$$

$$E(x) = \begin{bmatrix} \frac{c_8}{c_0} x_6^2 & 0 \\ -\frac{c_4}{c_1 c_5 - c_4^2}(c_{12} x_6 + c_{13}) & \frac{c_5 c_{11}}{c_1 c_5 - c_4^2} x_6^2 \end{bmatrix}$$

Pour que le retour d'état puisse exister, il faut que $E(x)$ soit non singulière (inversible).

$$Det\big(E(x)\big) = \frac{c_5 c_8 c_{11}}{c_0(c_1 c_5 - c_4^2)} x_6^4 = K.x_6^4$$

$K \neq 0$ par conséquent $Det\big(E(x)\big) \neq 0$ et $E(x)$ est inversible.

Conclusion **:** La non singularité de la matrice de découplage et le degré vectoriel du système nous permet de réaliser une linéarisation entrées-sorties par retour d'état non linéaire.

Pour linéariser le système on applique le retour d'état non linéaire (III.28) :

$$u = E(x)^{-1}[-A(x) + v]$$

Où $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ est une consigne externe ce qui aboutit à deux sous-systèmes mono variable, linéaires et découplés.

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_8 x_6^2}[c_0 v_1 - c_9 x_6 - c_{10} + c_7] \\ \frac{1}{c_5 c_{11} x_6^2}\left[(c_1 c_5 - c_4^2)v_2 + c_4\left(\frac{1}{c_8 x_6^2}(c_{12} x_6 + c_{13})(c_0 v_1 - c_9 x_6 - c_{10} + c_7) + c_{14} x_6^2 + c_{15}\right)\right] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{c_8 x_6^2}[c_0 v_1 - c_9 x_6 - c_{10} + c_7] \\ \frac{1}{c_5 c_{11} x_6^2}\left[(c_1 c_5 - c_4^2)v_2 + c_4\left((c_{12} x_6 + c_{13})u_1 + c_{14} x_6^2 + c_{15}\right)\right] \end{bmatrix}$$

5.3. Etude de la dynamique des zéros

Le calcul du degré relatif total (r) nous a donné que $r < n$ ce qui implique l'existence d'une dynamique interne, alors il est nécessaire de vérifier la stabilité de cette dynamique. En fait, d'après (III.31), la dynamique de rotation des pales $\dot{\gamma} = x_6$ représente cette dynamique interne.

Les termes non linéaires du modèle (III.32) peuvent être compensés en introduisant les deux nouvelles commandes v_1 et v_2 comme suit :

$$u_1 = \frac{1}{c_8 x_6^2}[c_0 v_1 - c_9 x_6 - c_{10} + c_7]$$

$$u_2 = \frac{1}{c_5 c_{11} x_6^2}\left[(c_1 c_5 - c_4^2)v_2 + c_4\left((c_{12}x_6 + c_{13})u_1 + c_{14}x_6^2 + c_{15}\right)\right]$$

Alors le modèle d'hélicoptère (III.32) devient :

$\ddot{z} = v_1$

$\ddot{\phi} = v_2$

$\ddot{\gamma} = \frac{1}{c_1 c_5 - c_4^2}[b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3]$

Avec

$b_1 = \frac{c_4 c_0}{c_5 c_8 \dot{\gamma}^2}(c_{12}x_6 + c_{13})(c_1 c_5 + c_4)$

$b_2 = \frac{c_4}{c_5}(c_1 c_5 - c_4^2)$

$b_3 = \frac{c_4}{c_5}(c_1 c_5 + c_4)\left[(c_{12}x_6 + c_{13})(-c_9 x_6 - c_{10} + c_7)\frac{1}{c_8 x_6^2} + c_{14}x_6^2 + c_{15}\right]$

La dynamique des zéros est obtenue en faisant :

$y(t) = 0$ Pour $t \geq t_0$

Alors $z = \phi = 0 \Rightarrow \dot{z} = \dot{\phi} = 0 \Rightarrow \ddot{z} = \ddot{\phi} = 0$

D'où $v_1 = v_2 = 0$

On obtient :

$$\dot{x}_6 = \frac{1}{c_1 c_5 - c_4^2} b_3 = b_4 x_6^2 + \frac{b_5}{x_6^2} + \frac{b_6}{x_6} + b_7 \qquad \text{(III.34)}$$

Avec :

$$b_4 = \frac{c_4 c_{14}(c_1 c_5 + c_4)}{c_5(c_1 c_5 - c_4^2)} = 4{,}1425 \times 10^{-5}$$

$$b_5 = \frac{c_4 c_{13}(c_1 c_5 + c_4)}{c_5 c_8(c_1 c_5 - c_4^2)}(c_7 - c_{10}) = -7{,}783 \times 10^5$$

$$b_6 = \frac{c_4(c_1 c_5 + c_4)}{c_5 c_8(c_1 c_5 - c_4^2)}(-c_{10} c_{12} + c_7 c_{12} - c_{13} c_9) = -6{,}142 \times 10^3$$

$$b_7 = \frac{c_4(c_1 c_5 + c_4)}{c_5 c_8(c_1 c_5 - c_4^2)}(c_8 c_{15} - c_9 c_{12}) = 0{,}1814$$

$\dot{\gamma} = x_6$, alors l'équation (III.34) peut s'écrire sous la forme :

$$\ddot{\gamma} = b_4 \dot{\gamma}^2 + \frac{b_5}{\dot{\gamma}^2} + \frac{b_6}{\dot{\gamma}} + b_7 \qquad \text{(III.35)}$$

Pour trouver les points d'équilibre de (III.35), il faut résoudre l'équation :

$$b_4 \dot{\gamma}^2 + \frac{b_5}{\dot{\gamma}^2} + \frac{b_6}{\dot{\gamma}} + b_7 = 0$$

Pour le cas de l'hélicoptère VARIO, les quatre solutions sont :

$$\dot{\gamma}^* = \begin{cases} -219{,}5 \pm i\, 468{,}2 \ \ (rad/s) \\ 563{,}71 \ \ (rad/s) \\ -124{,}634 \ \ (rad/s) \end{cases} \qquad \text{(III.36)}$$

Seulement les deux valeurs réelles de $\dot{\gamma}^*$ ont une signification physique. D'autre part, la valeur $\dot{\gamma}^* = 563{,}7\, rad/s$ est trop grande au regard de la fragilité des pales [1-3-7]. La dynamique (III.36) linéarisé autour du point d'équilibre $\dot{\gamma}^* = -124{,}634\, rad/s$, a une valeur propre égale à -0.419. Par conséquent, toutes les trajectoires commençant suffisamment près de $\dot{\gamma}^*$ converge vers ce dernier. Alors la dynamique des zéros de (III.34) a un comportement stable.

5.4. Elaboration des consignes externes

Après linéarisation du système par le retour d'état non linéaire, nous obtenons un système linéarisé découplé d'équations :

$$\ddot{z} = v_1 \quad \text{(III.37)}$$

$$\ddot{\phi} = v_2 \quad \text{(III.38)}$$

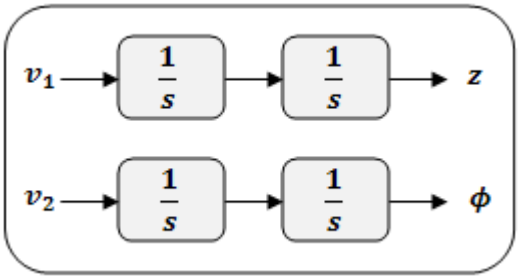


Figure III.2. Système linéarisé et découplé.

L'application des lois de commande linéaires :

$$v_1 = \ddot{z}_d + K_{z1}(\dot{z}_d - \dot{z}) + K_{z2}(z_d - z)$$

$$v_2 = \ddot{\phi}_d + K_{\phi 1}(\dot{\phi}_d - \dot{\phi}) + K_{\phi 2}(\phi_d - \phi)$$

Nous permet d'avoir les dynamiques de poursuites suivantes :

$$\ddot{e}_z + K_{z1}\dot{e}_z + K_{z2}e_z = 0$$

$$\ddot{e}_\phi + K_{\phi 1}\dot{e}_\phi + K_{\phi 2}e_\phi = 0$$

Avec :

$$e_z = z_d - z$$

$$e_\phi = \phi_d - \phi$$

Si les coefficients sont choisis de façon à ce que les polynômes

$$s^2 + K_{z1}s + K_{z2}$$

$$s^2 + K_{\phi 1}s + K_{\phi 2}$$

Soient des polynômes d'Hurwitz (possède des racines avec des parties réelles négatives), alors :

$$\lim_{t\to\infty} e_z = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} e_\phi = 0$$

Et les sorties du système converges vers les valeurs désirées. Le choix des coefficients détermine la dynamique de poursuite.

5.5. Résultats de simulation

Dans ce paragraphe, nous présentons les résultats de simulation obtenus en simulation en utilisant la commande non linéaire pour la commande de l'hélicoptère en vol vertical avec les conditions initiales :

$z(0) = -0.2\,m,\ \dot{z}(0) = 0\ {}^{m}/_{s},\ \phi(0) = 0\,rad,\ \dot{\phi}(0) = 0\ {}^{rad}/_{s},\ \gamma(0) = -\pi\,rad,$ et $\dot{\gamma}(0) = -99{,}5\ {}^{rad}/_{s}$.

Le Schéma bloc de la boucle d'asservissement sous Matlab/Simulink et les résultats obtenus en simulation sont donnés par les figures ci-dessous :

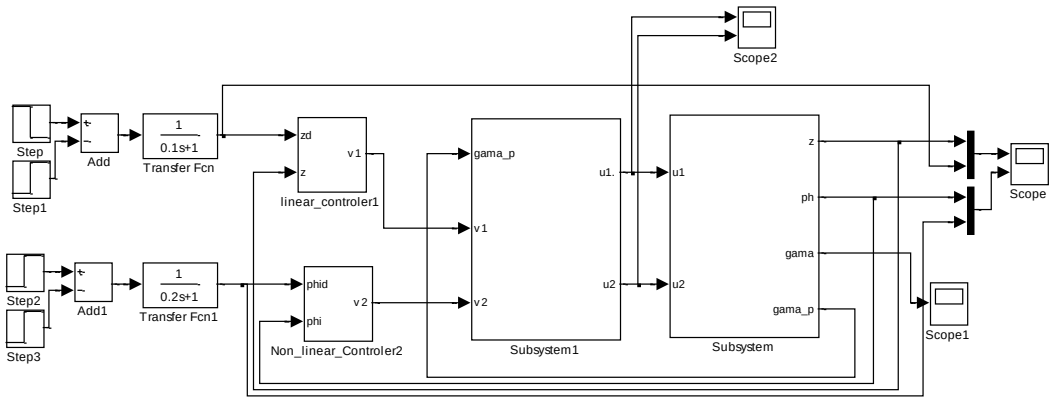


Figure III.3. Schéma bloc de la loi de commande

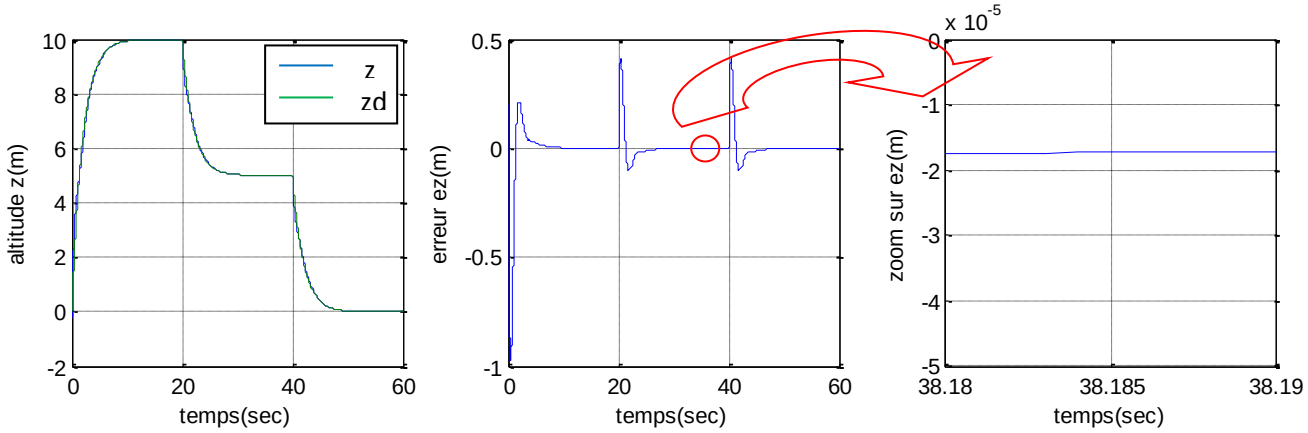


Figure III.4. Variations de l'altitude z et de l'erreur de poursuite en altitude

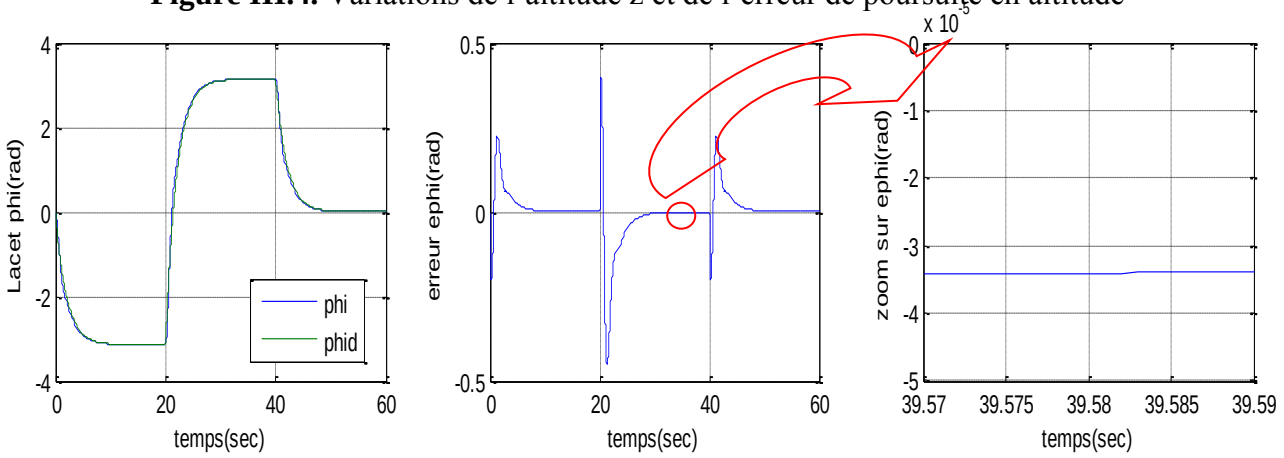


Figure III.5. Variations de l'angle de lacet z et de l'erreur de poursuite en lacet

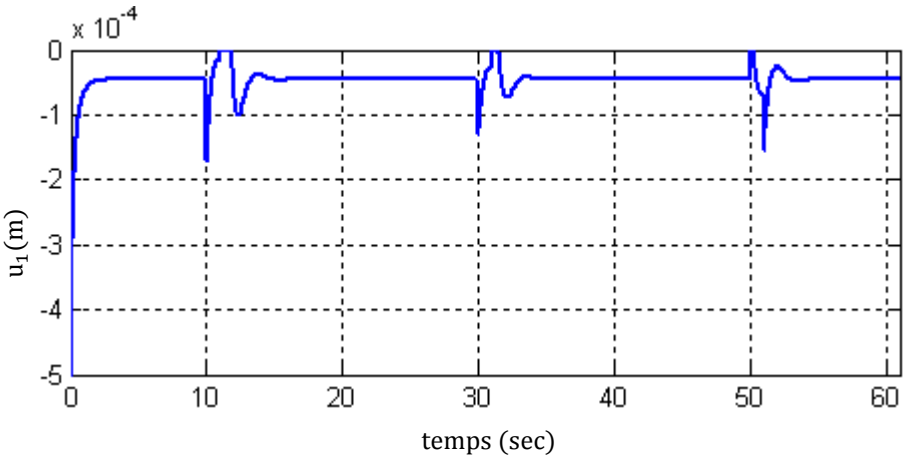


Figure III.6. Entrée de commande u_1.

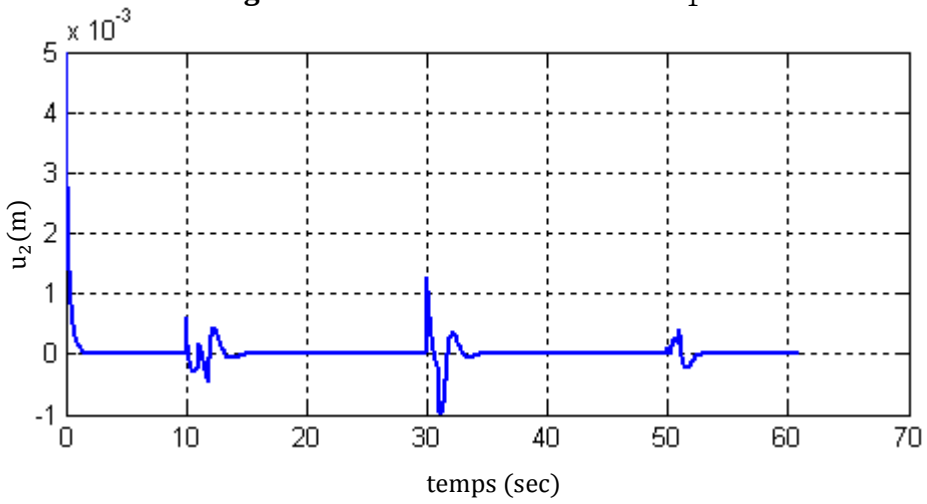


Figure III.7. Entrée de commande u_2.

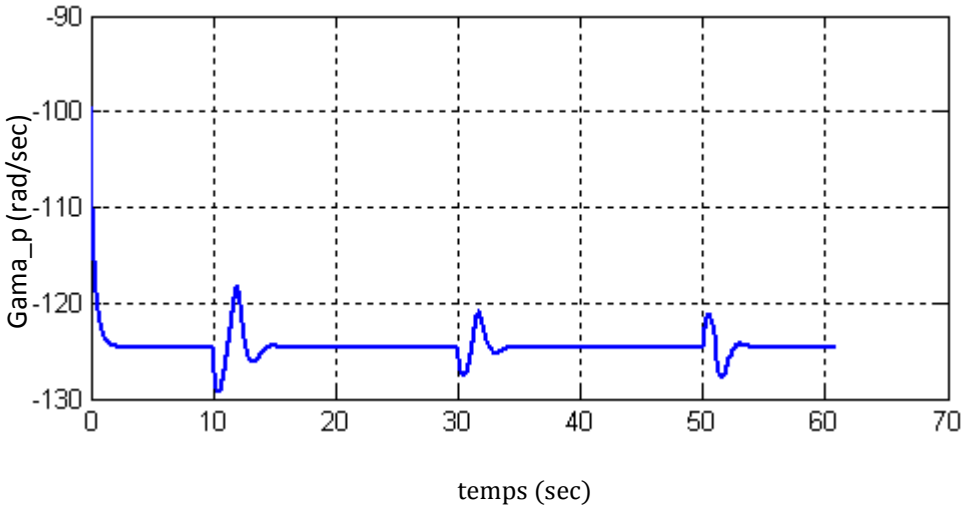


Figure.III.8. Vitesse de rotation des pales.

❖ ***Commentaires :***

Les figures (III.4) et (III.5), montrent que l'altitude z et le lacet ϕ suivent parfaitement les trajectoires désirées. La commande par retour non linéaire assure un bon découplage entre la dynamique du déplacement vertical z et celle de rotation en lacet ce qui confirme les équations (III.37) et (III.38), et le bon choix des paramètres du contrôleur linéaire assure la stabilité de l'hélicoptère et la poursuite des trajectoires de référence.

Les figures (III.6) et (III.7) illustre les variations des entées de commande, où à partir des conditions initiales et quand $\|\dot{\gamma}\|$ augmente rapidement nous pouvons observer que les entrées de commande se saturent sans détruire la stabilité du système en boucle fermée.

De la figure (III.8) nous pouvons observer que la vitesse de rotation des pales $\dot{\gamma}$ converge vers une valeur constante $\dot{\gamma} = -124{,}6\ {}^{rad}/_{sec}$ et reste bornée comme il est prouvé dans l'analyse de la dynamique des zéros.

6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les bases théoriques de la commande non linéaire qui se résume comme étant un retour d'état non linéaire qui permet de compenser les termes non linéaire du modèle. De cette façon le système résultant va se comporter comme une série d'intégrateurs indépendants les uns des autres. Une fois le système linéarisé et découplé au moyen de ce retour non linéaire, la synthèse des contrôleurs de la boucle externe devient une tache facile, en s'appuyant sur la théorie de l'asservissement linéaire. A la fin du chapitre, nous avons appliqué cette technique pour la commande de l'altitude et du lacet d'un hélicoptère drone miniature en vol verticale, les résultats ainsi obtenus ont été assez satisfaisantes et prometteuses.

Conclusion générale

Ce projet de fin d'études a été consacré pour la commande non linéaire (linéarisante entrées-sorties) d'un hélicoptère drone à modèle réduit dans le cas particulier du vol verticale (décollage, montée, vol stationnaire, descente et atterrissage).

Du point de vue modélisation, le modèle d'état de l'hélicoptère drone à 3 DDL présenté, est un modèle non linéaire qui présente des forts couplages entre les états du système et les entrées de commande, de plus ce modèle est sous-actionné dans le sens ou le nombre d'entrées de commande est inférieur aux degrés de liberté; ce qui rend la tâche de commande extrêmement difficile.

L'application de la commande linéarisante entrées-sorties connu communément sous le nom de la commande non linéaire, nous a permet de résoudre cette difficulté en transformant ce système MIMO (multi-entrées/ multi-sorties) extrêmement non linéaire en série de systèmes linéaire mono-variables (SISO) entièrement découplées les uns des autres grâce à un retour d'état non linéaire. Le suivi des trajectoires de référence (altitude et angle de lacet désirées) à été assuré par des contrôleurs linéaires classiques. Du fait que le degré relatif total du système est inférieur à l'ordre du système, on a conclu qu'il existe une dynamique interne non commandable qu'on été obligé de s'assurer de sa stabilité.

Afin de tester les performances de cette loi de commande, des simulations numériques ont été réalisées, les résultats ainsi obtenus on été suffisamment satisfaisantes du point de vue performances de poursuite (position désirée bien atteinte et erreur de poursuite nulle en régime permanent). Cela sollicite l'application de ces contrôleurs sur le système réel en vu d'effectuer une vérification et de s'assurer des performances.

Bibliographie

[1] A. Martini. "Modélisation et Commande de Vol d'un Hélicoptère Drone Soumis à une Rafale de Vent". Thèse de doctorat, Université De Paul Verlaine-Metz, 2008.

[2] A. Boutayeb. "Modélisation Observation et Commande d'Un Drone Miniature à Birotor Coaxial". Thèse de doctorat, Université de Loraine, 2012

[3] A. Medjebouri. "Commande neuro-floue d'un modèle d'hélicoptère". Mémoire de Magister, Université 20 août 1955 de Skikda, 2010.

[4] J. Seddon. "Basic Helicopter Aerodynamics". BSP Professional Books, 1990.

[5] A. R. S. Bramwell, George Done, David Balmford. "Bramwell's Helicopter Dynamics". Butterworth-Heinemann, 2001.

[6] G. D. Padfield. "Helicopter Flight Dynamics: The Theory and Application of Flying Qualities and Simulation Modeling". Second edition, Blackwell Science LTD, 2007.

[7] A. Vilchis. "Modélisation et Commande d'Hélicoptère". PhD thesis, Institut National Polytechnique Grenoble, 2001.

[8] J. J. Slotine, W. Li. "Applied Non Linear Control" Prentice-Hall, Inc., New Jersey, U.S.A, 1991.

[9] Q. Lu, Yanzhang, S. Mei. "Nonlinear Control Systems And Power System Dynamics". Kluwer Academic Publishers, 2001.

[10] A. Isidori. "Nonlinear Control Systems". Third edition, Springer-Verlag London, 1995.

[11] S. H. Zak. "Systems and Control". Oxford University press, 2003.

[12] C. Kravaris and, C. Chung. "Nonlinear State Feedback Synthesis by Global Input /Output Linearization". AIChE Journal, Vol. 33, No. 4, pp. 592-603, Avril 1987.

[13] A. Ben Ferdia. "Commande non Linéaire d'un Moteur Synchrone à Aimants Permanents". Mémoire de Magister, Université de Batna, 2006.

[14] O. Fadli. "Modélisation Et Commande Non Linéaire De L'Association : Machine Synchrone À Aimants Permanents-Onduleur De Tension À Trois Niveaux". Mémoire de Magister, Université de Batna, 2006.

[15] A. Medjebouri. " Commande Linéarisante Entrées-Sorties d'un Bras Manipulateur de Type SCARA ". 2ème Conférence Internationale sur la Maintenance et la Sécurité Industrielle, Skikda, 2013.

[16] Y. Bendaha, B. Mazari, et M. Chebre, " Commande Adaptative Linéarisante par Géométrie Différentielle d'un Moteur Asynchrone", Acta Electrotehnica, Vol. 53, Number 2, pp. 115-120, 2012.

[17] A. Bentaallah, A. Meroufel, A. Massoum, A. Bendaoud, et K. Medles " Commande Non Linéaire d'une Machine Asynchrone sans Capteur Mécanique avec Observateur du Flux Rotorique par Mode Glissant", Acta Electrotehnica, Vol. 48, Number 1, pp. 3-9, 2007.

ANNEXE

Les paramètres de l'hélicoptère

Les paramètres de l'hélicoptère VARIO sont issus de [7] et ils sont donnés par le tableau:

Paramètre	Description
$m = 7{,}5\ kg$	Masse de l'hélicoptère
$I_{yyF} = 0.03\ kg.m^2$	Moment d'inertie fuselage axe y
$I_{zzF} = 0.03\ kg.m^2$	Moment d'inertie fuselage axe z
$a = 5.73/rad$	Gradient de portance
$A = 2.544\ m^2$	Aire de disque rotor
$b = 0.15\ m$	Longueur des pales du rotor de queue
$c_M = 0.06\ m$	Corde des pales du rotor principal
$c_T = 0.015\ m$	Corde des pales du rotor de queue
$c_d = 0.01$	Coefficient de trainée
$d = 0.9\ m$	Longueur des pales du rotor principal
$K_{mot} = 1 \times 10^5\ N$	Gain du moteur
$k = 75{,}13\ N.m/rad$	Raideur des pales du rotor principal
$p_M = 2$	Nombre des pales du rotor principal
$P_T = 2$	Nombre des pales du rotor de queue
$R_M = 0.9\ m$	Rayon du rotor principal
$R_T = 0.15\ m$	Rayon du rotor de queue
$r_\gamma = -4{,}1428$	Rapport des vitesses angulaires des rotors
$z_M = -0.25\ m$	Coordonnée z du centre du rotor principal/ c.m
$x_T = -0.75\ m$	Coordonnée x du centre du rotor de queue/c.m
$y_T = -0.05\ m$	Coordonnée y du centre du rotor de queue/ c.m
u	Entrée de commande.
$\rho = 1.225\ kg/m^3$	Masse volumique de l'air

ملخص

يتناول هذا العمل التحكم الالى لطوافة من نوع (درون) بدون طيار ذات طيران عمودي مع تقديم نموذج ثلاثي الأبعاد (**lagragien à 3DDL degré de liberté**) **.** هذا النموذج الغير خطي المضطرب يمثل تحديا كبيرا بسبب التوصيل القوي بين مداخل النظام و بياناته **.**فيما يخص تقنية التحكم الخطي للمداخل والمخارج فهي تسمح بتحويل المعطيات وبعودة النظام الغير خطي لتفكيك وتخطيط النموذج المناسب.

بتخطيط النموذج يمكن تثبيت تتابع مسارات المراجع بواسة مراقبات خطية بسيطة بالتركيز على مواضع الأقطاب في حلقة مغلقة **.**

الكلمات المفتاحية **:** طوافة (درون) **.**طيران عمودي **.** نموذج غير خطي**.** تحكم غير خطي

Résumé : Ce travail concerne la commande automatique d'un hélicoptère drone à modèle réduit en mode de vol vertical. En ce qui concerne la modélisation, un modèle lagrangien à 3 DDL (degrés de liberté) de l'hélicoptère est présenté. Ce modèle non linéaire présente un grand défi pour la commande à cause du fort couplage entre les entrées de commande et les états du système, en plus ce modèle est sous actionné. Pour la commande, La technique de la linéarisation entrée-sortie permet par une transformation difféomorphique des cordonnées et un retour d'état non linéaire de découpler et linéariser le modèle mis sous forme canonique. Une fois le modèle linéarisé et découplé Le suivi des trajectoires de référence est peut être assuré avec de simples contrôleurs linéaires en se basant sur le principe de l'imposition des pôles en boucle fermée.

Mots clés: hélicoptère drone, vol vertical, modèle non linéaire, commande non linéaire.

Abstract: This workconcerns themodelingandthe control ofa small scale helicopter model in vertical flight.Regarding modeling, a Lagrangian modelwith 3DOF (degrees of freedom) waspresented. This nonlinear model has a major challenge because the strong coupling between the control inputs and the system states. Furthermore this model is under actuated. For the synthesis of controllers, we have initially started to linearize and uncouple this system using a nonlinear state feedback then we can apply linear systems control theory, which is summarized in a pole placement to ensure asymptotic tracking of reference trajectories with desired performances.

Keywords: autonomous helicopter, vertical flight, nonlinear model, feedback linearization control.