République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Yahia Farès de Médéa
Département de Mathématiques et de l'Informatique

MÉMOIRE DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Thème : Les alliances globales dans les graphes et ses applications

Spécialité : Recherche opérationnelle

Par

OUSSAMA CHIKHI et **HOUSSAM EDDINE SAIB**

Devant le jury composé de :

Kamel TABLENNHASE, M.A.A à l'université Dr Yahia Farès de Médéa	Président
Mohamed ZAMIME, M.C.B à l'université Dr Yahia Farès de Médéa	Examinateur
Mohamed BOUZEFRANE, M.A.A à l'université Dr Yahia Farès de Médéa	Encadreur

MÉDÉA , Juin 2022

Table des matières

1 Remerciements 6
2 Dédicace 7
3 Dédicace 8
4 Résumé 9
5 Abstract 10
6 Introduction 11

1 GÉNÉRALITÉS SUR LES GRAPHES 13

1.1 Définitions et notations 13
1.1.1 Définition d'un graphe: 13
1.1.2 Graphe simple 13
1.1.3 Voisinages 14
1.1.4 Degré d'un sommet 14
1.2 Chaîne et cycle 15
1.2.1 Graphe partiel et sous-graphe 16
1.2.2 Connexité d'un graphe 17
1.2.3 Graphe complémentaire 17
1.2.4 Produit cartésien 19
1.2.5 Graphe grille 19

1.2.6 Arbres, étoile, double étoile, cactus et couronne d'un graphe 20
1.2.7 Subdivision d'un graphe 21
1.2.8 Aperçu sur La domination dans les graphes 22
1.2.9 Quelques types de domination 23

2 LES ALLIANCES DANS LES GRAPHES 25

2.1 Introduction 25
2.2 Types d'alliances 27
2.2.1 Alliances défensives 27
2.2.2 Alliances défensives globales dans les arbres 29
2.2.3 Alliances offensives 30
2.2.4 Alliances offensives globales dans les graphes planaires 31
2.2.5 Alliances offensives globales dans les arbres 31
2.2.6 Alliances puissantes 33
2.3 Bornes sur $\gamma_a(G)$, $\gamma_{\hat{a}}(G)$, $\gamma_o(G)$, $\gamma_{\hat{o}}(G)$ et $\gamma_{ap}(G)$ 33
2.3.1 Bornes supérieures sur $\gamma_a(T)$ et $\gamma_{\hat{a}}(T)$ 34
2.3.2 Bornes inférieures sur $\gamma_a(G)$ et $\gamma_{\hat{a}}(G)$. 34
2.3.3 Bornes sur $\gamma_o(G)$ et $\gamma_{\hat{o}}(G)$ 35
2.3.4 Bornes sur γ_{ap} et a_p 37
2.4 Relations entre γ_a, $\gamma_{\hat{a}}$, γ_o, $\gamma_{\hat{o}}$, β_0, γ_2 et i 37
2.4.1 Relations entre $\gamma_a, \gamma_{\hat{a}}$et β_0 37
2.5 Relations entre $\gamma_a(G)$ et $i(G)$ 38
2.5.1 Relations entre $\gamma_{\hat{a}}(G)$ et $i(G)$ 39
2.5.2 Relations entre γ_o, $\gamma_{\hat{o}}$, β_0, i et γ_2 dans les arbres 40
2.5.3 Relations entre $\gamma_{ap}(G)$ et $\gamma(G)$ 42
2.6 Généralisation des alliances 43
2.6.1 k-alliances 43
2.6.2 Bornes supérieure sur γ_o^k 43

2.7 Bornes inférieure sur γ_o^k 44
2.7.1 Bornes sur γ_a^k 44
2.7.2 Partition alliance 45

3 LES ALLIANCES GLOBALES DANS QUELQUES CLASSES DE GRAPHES 47

3.1 Calcul des nombres d'alliances défensives et offensives globales dans les chenilles. 47
3.2 Calcul des nombres d'alliances offensive et offensives fortes globales dans les grilles 50
3.2.1 Produit cartésien 50
3.3 Relations entre les paramètres d'alliances globales $\gamma_a(G)$ et $\gamma_{ap}(G)$ dans quelque classes des graphes 60
3.3.1 Les graphes milieux 60
3.3.2 Le graphe milieu d'une chaîne 60
3.4 Conclusion 63

Table des figures

1.1 Un graphe $G = (V, E)$ 14
1.2 Graph v 15
1.3 C_4 Un cycle et P_4 une chaîne 16
1.4 Un graphe G, Sous graphe induit par $\{b, c, f, e\}$,et graphe partiel de G 16
1.5 Un graphe G et son complémentaire H 17
1.6 *Une clique* K_5 18
1.7 Un graphe biparti complet $K_{3,4}$ 18
1.8 Graphe($P_2 \square P_5$) 19
1.9 Arbre T dordre $n = 14$,$|L(T)| = 7|$,$|S(T)| = 4|$. 20
1.10 Une étoile $s_{1,3}$ et une double étoile $s_{2,3}$ 20
1.11 Une chenille 20
1.12 Un graphe cactus 21
1.13 Graphe Couronne de C_4 21
1.14 Une étoile subdivisée 22
1.15 Un graphe G, où $\gamma(G) = 3$ et $\Gamma(G) = 5$ 22

2.1 $\gamma_a(C_4 = 2)$ 28
2.2 $\gamma_{\hat{o}}(P_9) = 6$ et $\gamma_o(P_7) = 3$ 32
2.3 Une double étoile $S_{2,2}$ 33

3.1 Un graphe chenille $Ch(2, 2.....2, 2)$. 48

3.2 Un graphe chenille. 48
3.3 Le graphe G est une chenille$Ch(p, p.....,p)$. 49
3.4 Graphe ($(P_2 \square P_5)$) 50
3.5 Graphe grille ($(P_2 \square P_2)$, $(P_2 \square P_3)$,$(P_2 \square P_4)$,$(P_2 \square P_5)$,$(P_2 \square P_6)$) 51
3.6 Graphe grille ($(P_2 \square P_2)$, $(P_2 \square P_3)$,$(P_2 \square P_4)$,$(P_2 \square P_5)$,$(P_2 \square P_6)$) 52
3.7 Graphe grille ($(P_2 \square P_2)$, $(P_2 \square P_3)$,$(P_2 \square P_4)$,$(P_2 \square P_5)$,$(P_2 \square P_6)$) 52
3.8 G une grille $(p_2 \square p_n)$ 53
3.9 Graphe grille ($(P_3 \square P_3)$, $(P_3 \square P_4)$,$(P_3 \square P_5)$,$(P_3 \square P_6)$) 54
3.10 Graphe grille ($(P_3 \square P_3)$, $(P_3 \square P_4)$,$(P_3 \square P_5)$,$(P_3 \square P_6)$)) 54
3.11 G une grille $(p_3 \square p_n)$ 55
3.12 Graphe grille ($(P_4 \square P_3)$, $(P_4 \square P_4)$,$(P_4 \square P_5)$,$(P_4 \square P_6)$)) 56
3.13 $(P_4 \square P_3)$, $(P_4 \square P_4)$,$(P_4 \square P_5)$,$(P_4 \square P_6)$)) 57
3.14 $(P_4 \square P_3)$, $(P_4 \square P_4)$,$(P_4 \square P_5)$,$(P_4 \square P_6)$) 58
3.15 G une grille $(p_4 \square p_n)$ 59
3.16 G une grille $(p_4 \square p_n)$ 60
3.17 Graphe milieu ($M(P_2)$,$M(P_3)$,$M(P_4)$) 61
3.18 Graphe milieu($M(P_5)$,$M(P_6)$) 61
3.19 Graphe milieu($M(P_2)$,$M(P_3)$,$M(P_4)$) 61
3.20 Graphe milieu ($M(P_5)$,$M(P_6)$) 62

1 REMERCIEMENTS

Nous remercions en premier lieu ALLAH pour la foi, la confiance et la volonté, il nous a dotés pour la réalisation de ce travail .

Nos remerciements vont à Mr BOUZEFRANE sans qui, notre mémoire n'aurait pu voir lieu, nous tenons à lui montrer toute notre reconnaissance pour s'être rendu disponible dans une période très difficile. Ce dernier a su faire preuve de patience, de professionnalisme et de savoir-faire tout au long de la durée de la réalisation de ce travail .

Nous exprimons nos remerciements chaleureux à Mr TABLENNEHAS qui nous a honorés en acceptant d'être président du jury de notre mémoire.

Nos remerciements s'adressent également à Mr ZAMIME Mohamed, qui nous a honorés en acceptant de faire partie de notre jury et d'examiner notre travail.

Enfin, nous remercions tous nos enseignants, et tous ceux qui de près ou de loin, ont contribué à ce travail.

2 Dédicace

Je dédie ce travail A ma chère famille, en particulier à mes chers parents pour leur soutien durant toute ma formation, pour leur bienveillance, Leurs enorts constants dans mes études et pour leur encouragement.
A mon chère binôme houssam.
Tout les proches que j'ai mentionnés et les autres que j'ai oubliés veuillez m'excuser.

Oussama .

3 Dédicace

Je dédie ce travail A ma chère famille, en particulier à mes chers parents pour leur soutien durant toute ma formation, pour leur bienveillance, Leurs enorts constants dans mes études et pour leur encouragement.
A mon chère binôme oussama.
Tout les proches que j'ai mentionnés et les autres que j'ai oubliés veuillez m'excuser.

Houssam .

4 RÉSUMÉ

Le but principal de ce mémoire est l'étude de certains paramètres d'alliances globales dans quelques classes de graphes. Nous commençons par donner une brève présentation sur les différents types d'alliances globales , par la suite nous calculons les nombrs d'alliances globales défensives (fort) offensives (fort) dans quelques graphes particuliers tel que les grilles, les chenilles Ch(2, 2, ..2), Ch(p, p, ..p), les graphes milieux .
Ainsi nous avons établis quelques relations entre ces paramètres d'alliances globales et nous terminons par une conclusion général et quelques perspectives.

5 ABSTRACT

The principal goal of this memory is the study of the global alliances parameters in some classes of graphs. In this work, we start by giving the different types of global alliance. Afterwards we calculate the global alliance defensive, offensive(strong defensive, strong offensive) numbers in some classes of graphs, say grid graphs, caterpilar graphs and midlle graphs, also etablished some relationships between these parameteres, Finally we finished by conclusion and some perspectives.

6 INTRODUCTION

La recherche opérationnelle peut être définie comme l'ensemble des méthodes et techniques rationnelles orientées vers la recherche du meilleur choix dans la façon d'opérer en vue d'aboutir au résultat visé ou au meilleur résultat possible ou encore au résultat optimal.

La théorie des graphes, la programmation linéaire, l'optimisation combinatoire, les processus aléatoires, l'optimisation dans les réseaux, la théorie des jeux, les files d'attentes, etc... sont les principales techniques auxquelles recourt la recherche opérationnelle.

La théorie des graphes constitue un outil puissant pour schématiser les modèles des liens et relations entre les objets. L'étude des graphes a commencé depuis le 18ième siècle par un problème de curiosité mathématique lorsque Euler a posé le célèbre problème du pont deK¨ønigsberg (Kaliningrad). Ces deux dernières décennies la théorie des graphes a suscité un intérêt exponentiel essentiellement grâce a son rôle comme des modèles d'optimisation et de calculs explicites nécessitant la conception et l'analyse de plusieurs algorithmes. En outre de son rôle éminent dans l'informatique, les mathématiques appliquées (analyse numérique matricielle), la biologie, la physique (circuits électriques), la chimie..., la théorie des graphes est devenue l'un des instruments les plus efficaces pour résoudre de nombreux problèmes discrets que pose de nombreux théories très utiles telles que la recherche opérationnelle et l'économie.

Un graphe est une structure de données non linéaire constituée de nœuds et d'arêtes. Les nœuds sont parfois appelés sommets et les arêtes sont des lignes ou des arcs reliant deux nœuds quelconques du graphe. Un graphe non orienté peut-être utilisé pour modéliser des relations de conflits entre individus ou objet. Un graphe orienté représente typiquement un réseau de communication, ou encore des relations de domination non-réciproque entre personnes, etc.

La technique de domination est devenue donc un outil pour la résolution des problèmes de la théorie des graphes. Généralement, il s'agit de trouver un ensemble de sommets d'un graphe qui satisfasse certaines conditions.

Nous étudions dans ce mémoire la notion des alliances dans les graphes. Les alliances dans les graphes ont été présentées la première fois par Kristiansen, Hedetniemi, et Hedetniemi dans [14] et [15]. Dans ce

mémoire, trois chapitres fondamentaux sont développés. Nous nous intéressons principalement à la notion des alliances globales dans les graphes.

Dans le première chapitre, nous présentons les définitions et les notions de base nécéssaires utilisées tout au long de ce mémoire. Les notions propres à un chapitre donné seront définies dans le chapitre en question.

Dans le deuxième chapitre, nous abordons le thème étudié et nous donnons un état de l'art sur les alliances dans les graphes, en rappelant les principaux résultats existants.

Enfin on termine par une conclusion générale sur nos travaux réalisés, et comme perspective, nous proposons quelques questions pour les recherches futures.

Nous donnons dans la première partie de ce chapitre les définitions de base et les notations usuelles de la théorie des graphes. Dans la seconde partie une brève présentation sur la domination dans les graphes sera donnée.

Pour plus de détails sur la terminologie utilisée dans ce mémoire, nous invitons le lecteur à se référer aux ouvrages de Berge [19], et de Haynes, Hedetniemi et Slater [2].

Le troisième chapitre nous déterminons quelques résultats dans les chenilles et les grilles qui nous avons trouvé.

Le mémoire s'achève par une conclusion générale sur l'ensemble des travaux réalisés et propose quelques futurs recherches.

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS SUR LES GRAPHES

1.1 Définitions et notations

1.1.1 Définition d'un graphe:

Un graphe $G = (V, E)$ est défini par l'ensemble fini $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ dont les éléments sont appelés sommets, et par l'ensemble fini $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ dont les éléments sont appelés arêtes .

Une arête "e" de l'ensemble E est définie par une paire non ordonnée de sommets, appelés les extrémités de "e". Si l'arête "e" relie les sommets a et b, on dira que ces sommets sont adjacents, ou incidents avec "e", ou bien que l'arête e" est incidente avec les sommets a et b.

On appelle ordre d'un graphe le nombre de sommets n de ce graphe . Pour alléger les notations, nous écrivons uv pour la paire $\{u, v\}$.

l'exemple de la Figure 1.1 représente sur un graphe $G = (V(G), E(G))$ avec $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ et $E(G) = \{v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_1, v_2v_5, v_3v_2, v_3v_4, v_3v_5, v_4v_1, v_4v_3, v_5v_2, v_5v_3\}$.

1.1.2 Graphe simple

Un graphe simple est un graphe sans boucle et sans arête multiple (c'est-à-dire toute paire de sommets sont reliée par au plus une arête).

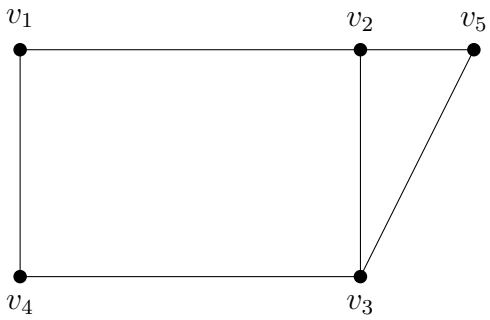


Figure 1.1: Un graphe $G = (V, E)$

Dans toute la suite de ce document, nous considérerons uniquement des graphes simples.

1.1.3 Voisinages

Pour un sommet v de G, **le voisinage ouvert** de v est $N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$, et le **voisinage fermé de** v est défini par $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Pour un sous-ensemble $S \subseteq V(G)$, **le voisinage ouvert** de S est $N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G(v)$ et **le voisinage fermé** de S est $N_G[S] = \cup_{v \in S} N_G[v]$. Parfois pour alléger les notations et lorsqu'il n'y a aucune confusion sur le graphe G, les voisinages ouverts et fermés d'un sommet v seront notés simplement par $N(v)$ et $N[v]$ à la place de $N_G(v)$ et $N_G[v]$, respectivement. De même pour $N(S)$ et $N[S]$ au lieu de $N_G(S)$ et $N_G[S]$ respectivement.

Pour le graphe G de la Figure 1.1, le voisinage ouvert est $N(v_2) = \{v_1, v_3, v_5\}$ et son voisinage fermé est $N[v_2] = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$. Soit S un ensemble de sommet. Le **voisinage privé** d'un sommet $v \in S$ par rapport à S est l'ensemble noté $pn[v, S]$ des sommets du voisinage fermé de v qui n'ont pas de voisins dans S autre que v, i-e: $pn[v, S] = \{u \in V(G) : N[u] \cap S = \{v\}\}$.

1.1.4 Degré d'un sommet

On appelle degré d'un sommet v et on note d(v), le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet. Une boucle sur un sommet compte double.

Dans un graphe simple, on peut aussi définir le degré d'un sommet comme étant le nombre de ses voisins (la taille de son voisinage).

Dans le graphe ci-contre, on a les degrés :

$\mathrm{d}(v_1) = 1$

$\mathrm{d}(v_2) = 2$

$\mathrm{d}(v_3) = 4$

$\mathrm{d}(v_4) = 1$

$\mathrm{d}(v_5) = 4$

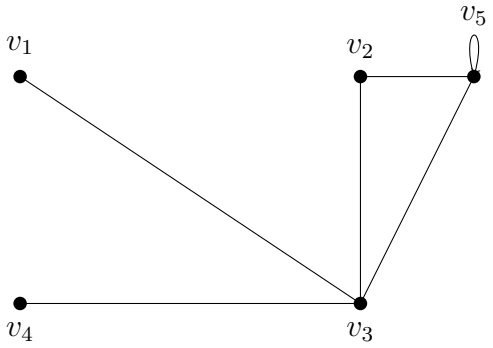


Figure 1.2: Graph v

1.2 Chaîne et cycle

Une **chaîne** C dans un graphe $G = (V(G), E(G))$ est une séquence finie de sommets $v_1, v_2, ..., v_k$ telle que pour tout $1 \leq i \leq k-1, e_i = v_i v_{i+1} \in E$. L'entier $k-1$ représente la **longueur** de C (au sens des arêtes) et les sommets v_1 et v_k sont appelés **extrémités** de la chaîne C. Une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête est dite **simple**. Une chaîne qui n'utilise pas deux fois le même sommet est dite **élémentaire**. Une **corde** est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une chaîne. Une chaîne **minimale** induite par n sommets, notée par P_n, est une chaîne élémentoire sans corde.P_5

On appelle **cycle** dans un graphe G une chaîne dont les extrémités sont confondues.

Soit u et v deux sommets d'un graphe G. On appelle **distance** entre u et v, notée $d_G(u, v)$, la longueur de la plus courte chaîne joignant u et v. *L'excentricité* d'un sommet v dans G est $exc(v) = \max\{d_G(v, w) :$



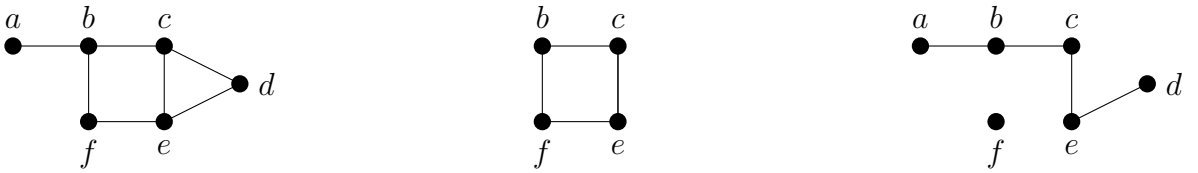
Figure 1.3: C_4 Un cycle et P_4 une chaîne

$w \in V(G)\}$ et le **diamètre** de G, noté $diam(G)$, est égal $\max\{exc(v) : v \in V(G)\}$. Un sommet de G ayant une excentricité minimum est appelé un **centre**.

1.2.1 Graphe partiel et sous-graphe

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Le graphe $\acute{G} = (V, \acute{E})$ est un graphe partiel de G, si $\acute{E}$ est inclus dans E . Autrement dit, on obtient $\acute{G}$ en enlevant une ou plusieurs arêtes au graphe G.

Pour un sous-ensemble de sommets A inclus dans V , le sous-graphe de G induit par A est le graphe $G = (A, E(A))$ dont l'ensemble des sommets est A et l'ensemble des arêtes $E(A)$ est formé de toutes les arêtes de G ayant leurs deux extrémités dans A. Autrement dit, on obtient $\acute{G}$ en enlevant un ou plusieurs sommets au graphe $\acute{G}$, ainsi que toutes les arêtes incidentes à ces sommets. Un Graphe de G :



Un graphe G Sous graphe induit par $\{b, c, f, e\}$ Un graphe partiel de G

Figure 1.4: Un graphe G, Sous graphe induit par $\{b, c, f, e\}$,et graphe partiel de G

$V = \{a, b, c, d, e, f\} E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{b, f\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}\{e, f\}\}$

Graphe partiel de G :

$V = \{a, b, c, d, e, f\}$ $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, e\}, \{d, e\}\}$

Sous-graphe de G :

$V = \{b, c, f, e, \}E = \{\{b, c\}, \{c, e\}, \{e, f\}\{b, f\}\}$

1.2.2 Connexité d'un graphe

Un graphe est connexe s'il y a une chaîne entre n'importe quelle paire de sommets distincts du graphe.

Un graphe qui n'est pas connexe est l'union de deux ou de plusieurs sous-graphes connexes, chaque paire de ceux-ci n'ayant pas de sommet en commun. une composantes connexes est un sous-graphes maximal connexes.

1.2.3 Graphe complémentaire

Le graphe complémentaire de G, noté $\overline{G}$ est un graphe ayant le même ensemble de sommets que G et une arête $uv \in E(\overline{G})$ si et seulement si $uv \notin E(G)$. Voir la Figure 1.5 qui illustre un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$.



Figure 1.5: Un graphe G et son complémentaire H

Un graphe **complet** d'ordre n, noté K_n est un graphe dont tous les sommets sont adjacents. Voir un exemple de K_5 dans la Figure 1.6.

Une **clique** dans un graphe $G = (V(G), E(G))$, est un sous graphe complet.

Un **stable** d'ordre p noté par S_p dans un graphe $G = (V(G), E(G))$ ou **ensemble indépendant**, est un sous ensemble de $V(G)$ de p sommets deux à deux non adjacents.

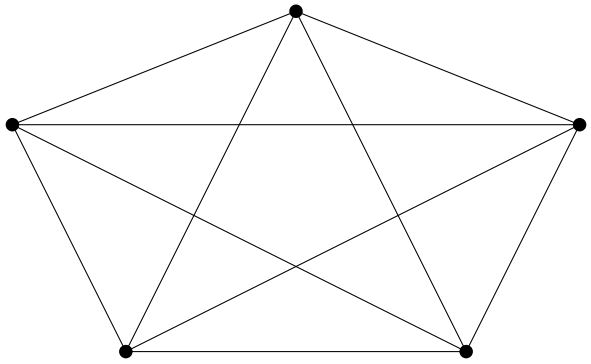


Figure 1.6: *Une clique* K_5

Un graphe $G = (V, E)$ est dit $\mathbf{k-parti}$, pour $k \geq 2$ entier, s'il existe une partition de $V(G)$ en k sous-ensembles $V_1, V_2, ..., V_k$ tels que chacun des $G[V_i]$ est un stable.

Si $k = 2$ le graphe G est dit **biparti.** Un graphe est biparti si et seulement si il ne contient pas de cycle de longueur impair.

On appelle graphe **biparti complet,** un graphe biparti tel que pour tout sommet $u \in V_1$ et $v \in V_2$, $uv \in E(G)$. Dans ce cas si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$ alors le graphe **biparti complet** est noté $K_{p,q}$. Un exemple du graphe $K_{3,4}$ est illustré dans la Figure 1.7

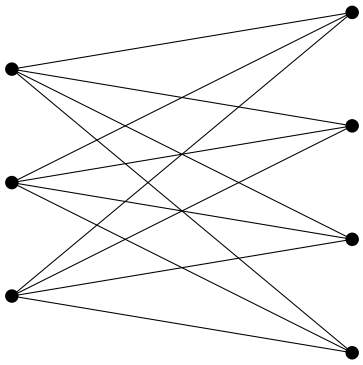


Figure 1.7: Un graphe biparti complet $K_{3,4}$

Un graphe G est dit d**-régulier** si chaque sommet de G a un degré d .Un graphe est dit biparti s'il existe une partition de son ensemble de sommets en deux stable.

1.2.4 Produit cartésien

Le produit cartésien de deux graphes G_1et G_2 notée par $G_1\square\, G_2$, est un graphe simple avec $V(G_1)\times V(G_2)$ comme ensemble de sommets et deux sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont adjacents dans $G_1\square G_2$ si et seulement si $u_1 = u_2$ et v_1, v_2 sont adjacents dans G_2, ou u_1, u_2 sont adjacents dans G_1 et $v_1 = v_2$. Dans la suite, où $|V(G_1)| = m$ et $|V(G_2)| = n$, on considère l'ensemble de sommets de $G_1\square G_2$ est $m \times n$, comme un tableau dans lequel l'entrée (i, j) correspond au sommet $(i; j)$; $i \in V(G_1)$ et $j \in V(G_2)$, et chaque colonne induit une copie du graphe G_1, chaque ligne induit une copie de graphe G_2.

1.2.5 Graphe grille

Soit P_n le chaine de n sommet . Un graphe grille est le produit cartésien de deux chaîne .

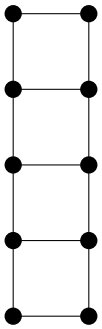


Figure 1.8: Graphe($P_2\square P_5$)

1.2.6 Arbres, étoile, double étoile, cactus et couronne d'un graphe

Un arbre est un graphe connexe sans cycles. Un arbre comporte exactement (n- 1) arêtes, il est noté habituellement T. Voir la figure suivant.

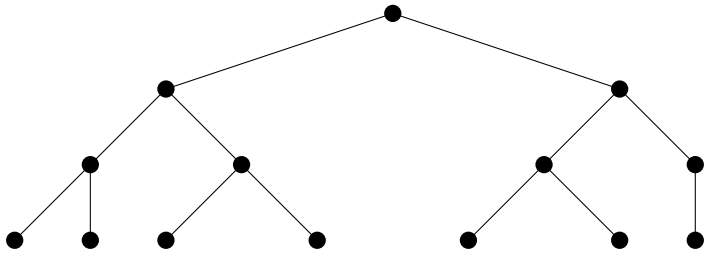
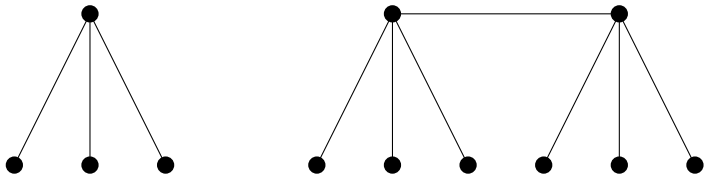


Figure 1.9: Arbre T dordre $n = 14$,$|L(T)| = 7|$,$|S(T)| = 4|$.

On appelle **étoile**, et on note par $K_{1,n}$, l'arbre à $n+1$ sommets ayant n feuilles. Une **double étoile** notée $S_{r,s}$ est le graphe obtenu par deux étoiles $K_{1,r}$ et $K_{1,s}$, en ajoutant une arête reliant les deux centres.



Une étoile ($S_{1,3}$) Une étoile double ($S_{2,3}$)

Figure 1.10: Une étoile $s_{1,3}$ et une double étoile $s_{2,3}$

Un arbre est dit **chenille** si le graphe obtenue en supprimant toutes les feuilles est une chaîne.

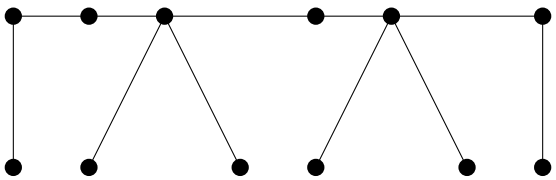


Figure 1.11: Une chenille

Un **graphe cactus** G est un graphe connexe dans lequel deux cycles simples ont au plus un sommet en commun. De manière équivalente, il s'agit d'un graphe connexe dans lequel chaque arête appartient à

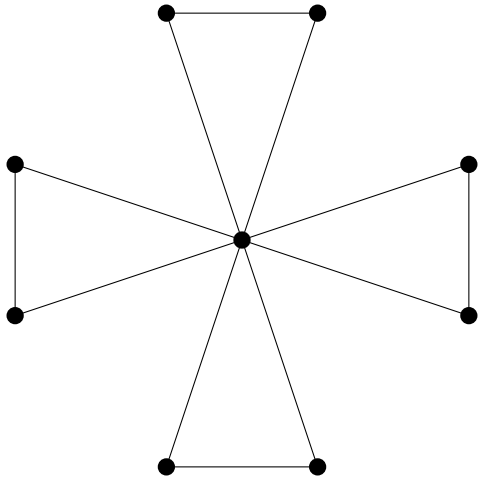


Figure 1.12: Un graphe cactus

au plus un cycle simple

La **couronne** $G = HoK_1$ d'un graphe H est le graphe obtenu d'une copie de H et pour tout sommet v de $V(G)$, on relie un sommet pendant. Il est évident que l'ordre H est égal à $2n$ si celui de G est n.

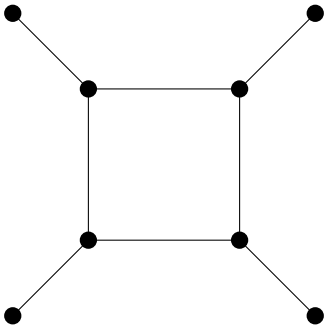


Figure 1.13: Graphe Couronne de C_4

1.2.7 Subdivision d'un graphe

l'opération de subdivision d'une arête uv d'un graphe G coniste á introduire un nouveau sommet w tel que $E(G_{uv}) = E(G) - \{uv\} \cup \{uw, wv\}$. On appelle étoile subdivisée $S_{1,k}$ l'étoile dans laquelle toutes les arêtes sont subdivisées. Voir la figure 1.15.

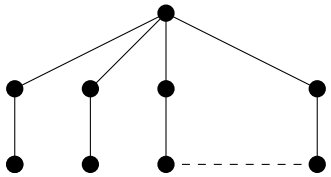


Figure 1.14: Une étoile subdivisée

1.2.8 Aperçu sur La domination dans les graphes

Soit $G = (V; E)$ un graphe simple. On dit qu'un sous-ensemble A de V verifant une proprieté P est minimal (resp, maximal) par rapport à P s'il n'existe pas d'ensemble $B \subset A$ $(resp, B \supset A)$ tel que $G[B]$ vérifie P.

Nous dirons qu'un sous-ensemble A de V verifiant une proprieté P est minimum ou de taille minimale (resp, maximum ou de taille maximale) par rapport à P s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq V$ tel que $G[B]$ vérifie P et $|A| > |B|$ $(resp, |B| > |A|)$.

Donnons maintenant la définition des ensembles dominants dans les graphes.Un sous ensemble S de V est un dominant si tout sommet de $V - S$ est adjacent à au moins un sommet de S. Le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G est appelé le nombre de domination et il est noté par γ (G). Le cardinal maximum d'un ensemble dominant minimal de G est appelé le nombre de domination supérieur et il est noté par $\Gamma(G)$:

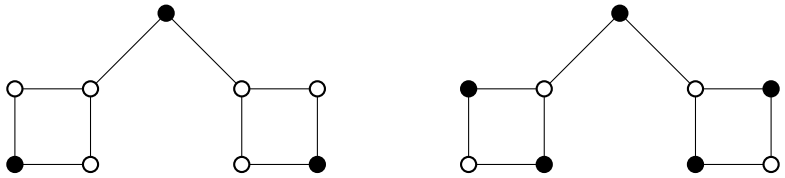


Figure 1.15: Un graphe G, où $\gamma(G) = 3$ et $\Gamma(G) = 5$

Dans la littérature, il existe d'autres définitions équivalentes aux ensembles dominants dans les graphes. En voici quelques unes.

Un ensemble $S \subseteq V$est un dominant si pour tout sommet $v \in V$: $|N[v] \cap S| \geq 1$.

Un ensemble $S \subseteq V$ est un dominant si pour tout sommet$v \in V$: $|N[v] \cap S| \neq \emptyset$.

Un ensemble $S \subseteq V$ est un dominant si $N[S] = V$.

Le concept de la domination trouve son origine dans le jeu d'échec. Le principe est de couvrir (dominer) l'ensemble des cases par certaines pièces du jeu. L'idée semble remonter au 16 éme siecle en Inde voir [16]. En 1862 Jaenish [17] posa le problème suivant: Determiner le nombre de reines à placer sur l'échiquier de telle manière que chaque case soit occupée en un seul mouvement par l'une des reines. Pour un échiquier 5×5 le nombre minimum est 3 et pour un échiquier 8×8 le nombre minimum est 5. Le nombre minimum dans un échiquier $n \times n$ reste indeterminé jusqu'à présent.

En 1958; Claude Berge [19] donna une formulation de la domination dans les graphes oriéntés. Le nombre de domination s'appelait alors le coefficient de stabilité externe. L'appelation actuelle du nombre de domination est due à Ore [20] en 1962 qui utilisa la notation (G) pour désigner le nombre de domination dans un graphe non orienté. A l'exception de quelques résultats, la domination n'a connu sa véritable expansion qu'aprés la parution de l'article de Cockayne et Hedetniemi [21] en 1977. Depuis l'étude de la domination dans les graphes avec des propriétés additionnelles a donné naissance à plusieurs paramètres de domination dont la résolution est NP-Complet (Voir [22], [23], [24]). Ainsi beaucoup de voies de recherche sont à explorer, par exemple: la recherche d'algorithmes polynomiaux, détermination des bornes supérieures et inférieures, etc....

En 1990, un numéro spécial de la revue Discrete Mathematics édité par Hedetniemi et Laskar a été consacré entièrement à la domination dans les graphes. Dans ce numéro, Hedetniemi et Laskar (Voir [25]) ont inclus une liste de quelques 400 références. On dénombre actuellement plus d'une centaine types de domination (certains ont été définis avec des applications pratiques) et plus de 3000 références dans le domaine.

Pour un aperçu détaillé, le lecteur peut consulter les deux livres de Haynes, Hedetniemi et Slater ([26]).

1.2.9 Quelques types de domination

Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe simple, Le nombre de domination inférieur (ou nombre de domination) d'un graphe G, noté$\gamma\,(G)$, représente la cardinalité minimum d'un ensemble dominant de G. Un ensemble dominant minimum avec une telle cardinalité est appelé $\gamma\,(G)$-ensemble

one note qu'un graphe G peut avoir $\gamma(G)$-ensemble plusieurs La cardinalité max- imum d'un ensemble dominant minimal est appelée nombre de domination supérieur et est noté par $\Gamma(G)$. D'une maniére générale si on considére que F est la famille des ensembles dominants minimaux.$D \subseteq V$, alors on peut définir les deux paramétres :

$\gamma(G) = \min_{D \in \Im}(|D|)$: nombre de domination inférieur.

$\Gamma(G) = \max_{D \in \Im}(|D|)$: nombre de domination supérieur.

Etant donnés un graphe $G = (V(G), E(G))$ et un ensemble dominant D de G. On pet définir plusieurs types de domination, a titre d'exemple on peut citer:

La domination totale: Un sous-ensemble D de V est dit dominant total de G si tout sommet de V possède un voisin dans D. Le nombre de domination totale, noté $\gamma_t(G)$, est la taille minimum d'un ensemble dominant total de$G$. l'ensemble $D = \{c, d\}$ est un ensemble dominant total minimum et donc $\gamma_t(G) = 2$.

La domination double: Un sous-ensemble$D$ de V est dit dominant double de G si tout sommet de V est dominé par au moins deux sommets de D. c'est à dire ou le sommet $v \in D$ et possède au moins un voisin dans D, ou bien $v \in V - D$et possède au moins deux voisins dans D. Le nombre de domination double, noté$\gamma_{\times 2}(G)$, est la taille minimum d'un ensemble dominant double de G.

La domination couplée: Un sous-ensemble D de V est dit dominant couplé de G si D est un dominant de G et le sous-graphe induit par D admet au moins un couplage parfait. Le 19 nombre de domination couplée, noté $\gamma_{pr}(G)$, est le cardinal minimum d'un ensemble dominant couplé de G.

CHAPITRE 2

LES ALLIANCES DANS LES GRAPHES

2.1 Introduction

Le mot alliance peut être défini comme une union ou une association formée pour un bénéfice mutuel, par exemple, il peut s'agir : d'un accord formel ou d'un traité entre deux ou plusieurs nations pour coopérer à des fins spécifiques, d'une fusion d'efforts ou d'intérêts par des personnes, des familles, des états , ou des organisations. Les alliances dans les graphes ont été presentè la premiére foit par Kristiansen et al.[15]. en définissant différents types d'alliances qui ont été largement étudiés au cours de la dernière décennie.
Ces types d'alliances sont appelées alliances défensives , alliances offensives et alliances duales ou puissantes. Une généralisation de ces alliances appelée k-alliance (ou r-alliance) introduite par Shafique et Dutton a fait l'objet d'une attention particulière ces dernières années. Dans ce cadre, il y a eu définitions de nombreux et divers paramètres qui ont été largement étudiés dans le cas de la défense k-alliances (offensives, puissantes) et pour différentes classes de graphes. L'étude des alliances (dans sa sens large) est motivé par des applications intéressantes dans plusieurs domaines.

Les travaux de recherche de Kristiansen et al. [15], est motivé par l'alliance des nations en guerre pourur support mutuel. Ils ont considéré deux cas : le premier qui correspond à une alliance défensive se réalise lorsque les nations sont obligées d'unir leurs forces si une ou plusieurs d'entre elles sont attaquées et que deuxièmement, une alliance offensive utilisée comme moyen de maintenir la paix comme exemple de

illustration, l'action des troupes de l'OTAN dans un pays déchiré par la guerre est donnée. Ainsi dans le correspondant graphique de cette situation, les sommets représentent les nations et les arêtes correspondent aux possibles relations (d'amitié ou d'hostilité) entre eux. Kristiansen et al. [15] ont étudié les propriétés mathématiques des alliances défensives dans les graphes.

Haynes et al. [2] ont étudié les caractéristiques structurelles d'une classe de biomolécules dans le domaine de la bioinformatique en impliquant plusieurs invariants graphiques basés sur des nombres de domination. En réalité, ils ont étudié l'applicabilité des graphiques dans l'analyse de la structure de l'ARN secondaire. Ils ont utilisé les arbres théoriques des graphes comme méthode de modélisation pour représenter des motifs d'ARN secondaires. Plus précisément, ils utilisé cinq paramètres de domination, y compris le nombre d'alliances défensives globales (1), qui sont très sensible aux changements structurels des petits arbres ordonnés, pour identifier quels arbres d'ordres sept et huit ont une structure semblable à celle de l'ARN. Avec cette étude, on montre que les invariants graphiques, qui aident à l'optimisation des réseaux informatiques et électriques, sont utiles et servent de outil intéressant pour les prédictions génomiques et protéomiques.

En informatique distribuée, l'un des problèmes centraux est de savoir comment gérer les pannes. Flocchini et coll, Peleg, Srimani et Xu , et Xu et Srimani ont étudié la tolérance aux pannes des réseaux informatiques et de communication distribués. Généralement, un système distribué est représenté par un graphe où les sommets représentent les processeurs et les arêtes correspondent à différentes communications entre eux. Ainsi, en utilisant le processus du vote à la majorité locale dans graphiques, les processeurs sont partitionnés en deux alliances. De plus, Srimani et Xu , et Xu et Srimani ont conçu des algorithmes distribués tolérants aux pannes auto-stabilisants pour le alliances défensives (offensives) dans un graphe arbitraire donné.

Les alliances sont également utilisées dans les réseaux commerciaux et sociaux afin d'atteindre des objectifs communs par les partenaires. Dans ce contexte, Dickson et Weaver ont étudié l'interaction entre la taille de l'entreprise et le niveau d'intensité nationale de RD pour déterminer s'il serait intéressant pour une PME (petite et moyenne entreprise) pour former une alliance stratégique. Par ailleurs, H. Chen et TJ Chen ont étudié les alliances stratégiques entre des organisations en fournissant des preuves pour montrer quel type de ressources devrait être partagé et comment ce partage de ressources devrait être organisé

entre partenaires.

2.2 Types d'alliances

Considérons un graphe simple $G = (V(G), E(G))$.

2.2.1 Alliances défensives

Définition 1 *Un ensemble Sest appelé un ensemble dominant si chaque sommet de $V - S$ a un voisin dans S. Le nombre de domination de G, noté $\gamma(G)$, est la cardinalité minimale d'un ensemble dominant de G. Un ensemble dominant minimal de un graphe G est appelé un $\gamma(G)-$ensemble.*

Définition 2 *Une alliance défensive dans un graphe $G = (V(G), E(G))$. est un ensemble de sommets $S \subseteq V$ satisfaisant la condition que pour tout sommet $v \in S$, le nombre de voisins v a dans S plus un (en comptant v)est au moins aussi grand que le nombre de voisins qu'il a dans $V - S$. En raison d'une telle alliance, les sommets de S, acceptant de se soutenir mutuellement, ont la force du nombre pour pouvoir se défendre des sommets en $V - S$. Une alliance défensive S est appelé global s'il affecte chaque sommet de $V - S$, c'est-à-dire chaque sommet de $V - S$ est adjacent à au moins un membre de l'alliance S. Notez qu'une alliance défensive globale est un ensemble dominant. Nous étudions les alliances défensives globales dans les graphes.*

Définition 3 *Une alliance défensive globale dans un graphe $G = (V(G), E(G))$est un ensemble dominant S vérifiant la condition que pour tout sommet $v \in S$,*
$|N[v] \cap S| \geq |N(v) \cap (V - S)|$. Si l'inégalité est stricte alors l'alliance défensive est dite forte.

Définition 4 *Le nombre d'alliance défensive $a(G)$ (respectivement le nombre d'alliance défensive forte $\hat{a}(G)$) est le cardinal minimum d'une alliance défensive (respectivement d'une alliance défensive forte).*

Définition 5 *Le nombre d'alliance défensive globale $\gamma_a(G)$ et alliance défensive globale forte $\gamma_{\hat{a}}(G)$ est le cardinal minimum d'une alliance défensive globale et alliance défensive globale forte.*

par exampel: le graphe G de la Figure 2.1. L'ensemble $S = \{a, d\}$ est une alliance défensive globale du graphe G, d'ou $\gamma_a(c_4) = 2$, et $S = \{a, d\}$ est une alliance défensive globale forte de G, d'ou$\gamma_{\hat{a}}(c_4) = 2$.

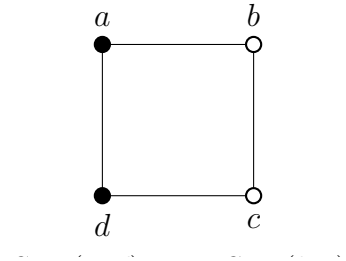


Figure 2.1: $\gamma_a(C_4 = 2) \quad \gamma_{\hat{a}}(P_4) = 2$

Dans ce qui suit, nous présentons quelques résultats relatifs aux paramétres $\gamma_a(G)$ et $\gamma_{\hat{a}}(G)$.

[Haynes, Hedetniemi et Henning [2] 2003] Pour tout graphe G, d'or[illegible],

(i) $1 \leq \gamma(G) \leq \gamma_a(G) \leq \gamma_{\hat{a}}(G) \leq n$

(ii) $1 \leq a(G) \leq \gamma_a(G) \leq n$;

(iii) $1 \leq a(G) \leq \hat{a}(G) \leq \gamma_{\hat{a}}(G) \leq n$.

Les mêmes auteurs [2] ont donné les valeurs exactes de γ_a et $\gamma_{\hat{a}}$ pour quelques classes de graphes.

Proposition 6 (Haynes, Hedetniemi et Henning [2] 2003). *Pour un graphe complet K_n*

(i) $\gamma_a(K_n) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$,

(ii) $\gamma_{\hat{a}}(K_n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.

Haynes et al. [2] ont présenté aussi des résultats liant les nombres d'alliances globales aux nombre de domination totale $\gamma_t(G)$ défini comme étant le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G dont le sous-graphe induit est sans sommets isolés.

1. Pour un cycle C_n, $n \geqslant 3$, $\gamma_a(C_n) = \gamma_{\hat{a}}(C_n) = \gamma_t(C_n)$

2. Pour $n \geqslant 3$, $\gamma_{\hat{a}}(P_n) = \gamma_t(P_n)$.

3. Pour $n \geqslant 2$,
$$\gamma_a(P_n) = \begin{cases} \gamma_t(P_n) - 1 & \text{si } n \equiv 2(mod4), \\ \gamma_t(P_n) & \text{sinon .} \end{cases}$$

4. Pour $r, s \geqslant 1$, $\gamma_a(S_{r,s}) = \lfloor (r-1)/2 \rfloor + \lfloor (s-1)/2 \rfloor + 2$.

5. Pour $r, s \geqslant 1$, $\gamma_{\hat{a}}(S_{r,s}) = \lfloor r/2 \rfloor + \lfloor s/2 \rfloor + 2$.

2.1. Alliances défensives globales dans les graphes planaires.

Définition 7 (Rodriguez et al [1]). *Soit $G = (V, E)$un graphe d'ordre n . Soit S une défensive globale alliance dans G telle que le sous-graphe $\langle S \rangle$ soit plan.*

(a) si $n > 6$, alors $|S| \geq \lceil \frac{n+12}{8} \rceil$

(b) si $n > 6$ et $\langle S \rangle$ est un graphe sans triangle, alors$|S| \geq \frac{n+8}{6}$

(c) si $n > 4$, et l'alliance S est forte, alors $|S| \geq \lceil \frac{n+12}{7} \rceil$

(d) si $n > 4$ et l'alliance S est forte, et $\langle S \rangle$ est un graphe sans triangle, alors $|S| \geq \frac{n+8}{5}$

Corollaire 8 ([1]). *Soit G un graphe planaire d'ordre n.*

(a) si $n > 6$, alors $\gamma_a(G) \geq \lceil \frac{n+12}{8} \rceil$.

(b) si $n > 6$ et G est un graphe sans triangle, alors $\gamma_a(G) \geq \lceil \frac{n+8}{6} \rceil$

(c) si $n > 4$,alors $\gamma_{\hat{a}}(G) \geq \lceil \frac{n+12}{7} \rceil$

(b) si $n > 4$ et G est un graphe sans triangle, alors $\gamma_{\hat{a}}(G) \geq \lceil \frac{n+8}{5} \rceil$

2.2.2 Alliances défensives globales dans les arbres

Théorème 9 (Haynes [1]) . *Soit Tun arbre d'ordre n. Soit S une alliance défensive globale sur T tel que le sous-graphe $\langle S \rangle$ a c composantes connexes. Alors,*

(a) $|S| \geq \lceil \frac{n+2c}{4} \rceil$

(b) si l'alliance S est forte, $|S| \geq \lceil \frac{n+2c}{3} \rceil$

Théorème 10 (Haynes et al [2]) . *Pour tout arbre T d'ordre n .*

(a) $\gamma_a(T) \geq \lceil \frac{n+2}{4} \rceil$.

(b) $\gamma_{\hat{a}}(T) \geq \lceil \frac{n+2}{3} \rceil$.

Proposition 11 (Haynes et al [2]) . *Pour l'étoile $K_{1,r}$.*

$\gamma_a(K_{1,r}) = 1 + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$.

Proposition 12 (Haynes et al [2]) . *Pour l'étoile double $S(r, s)$.*

(a) $\gamma_a(S_{r,s}) = 2 + \lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor$.

(b) $\gamma_{\hat{a}}(K_{r,s}) = \lceil \frac{r}{2} \rceil + \lceil \frac{s}{2} \rceil$.

Soit τ la famille d'arbres T, où $T = p_5$ ou $T = K_{1,4}$ ou T est un arbre obtenu à partir de $tK_{1,4}$ (l'union disjointe de t copies de $K_{1,4}$) en ajoutant $t-1$ arêtes entre les feuilles de ces copies de $K_{1,4}$ de telle sorte que le centre de chaque $K_{1,4}$ soit adjacent à exactement trois feuilles dans T.

Proposition 13 (Haynes et al [2]) . *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 4$,alors :*

(a) $\gamma_a(T) \leq \frac{3n}{5}$,*avec égalité si et seulement si* $T \in \tau$.

Chellali et Haynes [2] ont présenté une borne supérieure sur le nombre total de domination d'un arbre en fonction de son ordre et du nombre de sommets de support.

2.2.3 Alliances offensives

La frontière d'un ensemble $S \subseteq V$ est définie comme $\partial(S) := \cup_{v \in S} N_{v-s}(v)$.

Un ensemble de sommets $S \subseteq V$ est appelé alliance offensive si et seulement si pour tout $v \in \partial(S), |N_S(v)| \geq |N_{V \setminus S}(v)|+1$. Une alliance offensive S est dite forte si pour chaque sommet $v \in \partial(S), |N_S(v)| \geq |N_{V \setminus S}(v)| + 2$.

Un ensemble non vide de sommets $S \subseteq V$est une alliance offensive globale si pour chaque sommet $v \in V \setminus S, |N_S(v)| \geq |N_{V \setminus S}(v)| + 1$. Ainsi, les alliances offensives mondiales dominent également ensembles, et on peut définir le nombre d'alliances offensives globales, noté $\gamma_o(T)$ égal à la cardinalité minimale d'une

alliance offensive globale dans G . De manière analogue, $S \subset V$ est un alliance offensive forte globale si pour tout sommet $v \in V \backslash S$, $|N_S(v)| \geq |N_{V\backslash S}(v)| + 2$, et le nombre global d'alliances offensives fortes, noté $\gamma_{\delta}(T)$, est défini comme le minimum cardinalité d'une alliance offensive forte globale en G.

Dans cette section, nous utiliserons l'affirmation évidente mais utile suivante :

2.2.4 Alliances offensives globales dans les graphes planaires

Théorème 14 (Rodriguez et al [1]). *Soit $G = (V, E)$ un graphe planaire d'ordre $n > 2$. Si Sest une alliance global offensive dans Γ telle que le sous-graphe $\langle V \backslash S \rangle$ a c composantes connexes, alors:*

(a) $|S| \geq \lceil \frac{n+4-2c}{3} \rceil$.

(b) Si l'alliance S est forte,alors $|S| \geq \lceil \frac{n-c+2}{2} \rceil$.

Théorème 15 (Rodriguez et al [1]). *Soit Gun graphe planaire d'ordre n. Si S est une alliance offensive globale en G tel que le degré minimum de $\langle V \backslash S \rangle$ soit au moins k , alors*

(a) $|S| \geq \lceil \frac{n(k-1)+4}{k+1} \rceil$.

(b) Si l'alliance S est forte,alors $|S| \geq \lceil \frac{nk+4}{k+2} \rceil$.

2.2.5 Alliances offensives globales dans les arbres

Théorème 16 (Rodriguez et al [1]). *Pour tout arbre T, le sous-graphe induit par une alliance offensive forte globale différent de Tn'est pas connexe.*

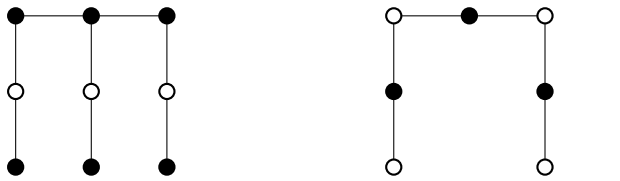
Théorème 17 (Rodriguez et al [1]). *Si S est une alliance offensive globale dans un arbre $T = (V, E)$d'ordre n telque le sous-graphe $\langle S \rangle$ a $c$composantes connexes, alors*

La taille de $\langle V \backslash S \rangle$ est majorée par $\frac{c-1}{3}$.

Si l'alliance S est forte, la taille de $\langle V \backslash S \rangle$est majorée de $\frac{1}{3}(c + |S| - n - 1)$.

Théorème 18 (Rodriguez et al [1]). *Soit S une alliance offensive globale dans un arbre $T = (V, E)$d'ordre n. Si le sous-graphe $\langle S \rangle$ a une, deux ou trois composantes connexes, alors $V \backslash S$ est un ensemble indépendant.*

On remarque que si Sest une alliance offensive globale dans un arbre et que le sous-graphe $\langle S\rangle$ est un arbre, alors tout sommet de $V\backslash S$ est une feuille. La figure suivante nous montre un arbre T tel que $\gamma_o(P_7) = 3$ et $\gamma_{\hat{o}}(P_9) = 6$



$\gamma_{\hat{o}}(P_9) = 6$ $\gamma_o(P_7) = 3$

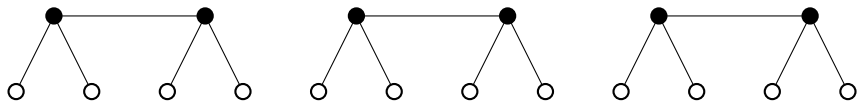
Figure 2.2: $\gamma_{\hat{o}}(P_9) = 6$ et $\gamma_o(P_7) = 3$

2.2.6 Alliances puissantes

Définition 19 *Une alliance est dite puissante si elle est a la fois défensive et offensive . Elle peut s'exprimée par la condition suivante : pour tout sommet .v* $\in N[S]$, $|N[v] \cap S| \geq |N[v] - S|$. *Une alliance puissante globale de G est une alliance puissante qui domine G.*

Définition 20 *Le nombre d'alliance puissante globale est le cardinal minimum d'une alliance puissante globale, est noté* γ_{ap}.

La figure suivante représente une double étoile $S_{2,2}$ avec :$\gamma_{ap}(S_{2,2}) = \gamma_a(S_{2,2}) = \gamma_o(S_{2,2})$



$\gamma_o(S_{2,2}) = 2$ $\gamma_a(S_{2,2} = 2)$ $\gamma_{ap}(S_{2,2}) = 2$

Figure 2.3: Une double étoile $S_{2,2}$

Voici quelques valeurs exactes de $a_p\ (G)$ et $\gamma_{ap}\,(G)$ dans des familles de graphes spécifiques [19].

1. Pour toute chaine P_n avec $n \geq 2$, $a_p(P_n) = \gamma_{ap}(P_n) = \lfloor 2n/3 \rfloor$, et
2. Pour tout cycle C_n, $a_p(C_n) = \gamma_{ap}(C_n) = \lceil 2n/3 \rceil$
3. Pour le graphe complet K_n, $a_p(K_n) = \gamma_{ap}(K_n) = \lceil n/2 \rceil$
4. Pour un graphe biparti complet $K_{r,s}$, $1 \leq r \leq s$,

$$a_p(K_{r,s}) = \gamma_{ap}(C_{r,s}) = \min\{r + \lfloor s/2 \rfloor, \lceil (r+1)/2 \rceil + \lceil (s+1)/2 \rceil\}$$

2.3 Bornes sur $\gamma_a(G)$, $\gamma_{\hat{a}}(G)$, $\gamma_o(G)$, $\gamma_{\hat{o}}(G)$ et $\gamma_{ap}(G)$

Dans ce qui suit, on présentera quelques propriétés et principaux résultats existants sur les paramètres d'alliances définis auparavant.

2.3.1 Bornes supérieures sur $\gamma_a(T)$ et $\gamma_{\hat{a}}(T)$

La proposition suivante établie par Haynes et al dans [2]. donne une borne supérieure sur γ_a et $\gamma_{\hat{a}}$ pour tout graphe G son sommet isolés .

Proposition 21 (Haynes, Hedetniemi et Henning [2] 2003). *Pour tout graphe G sans sommets isolés et de degré minimum δ alors:*

(i) $\gamma_a(G) \leqslant n - \lceil \delta/2 \rceil$,

(ii) $\gamma_{\hat{a}}(G) \leqslant n - \lceil \delta/2 \rceil$,

Le corollaire suivant se découle immédiatement de la proposition précédente.

Corollaire 22 (Haynes, Hedetniemi et Henning [2] 2003). *Pour tout graphe G, $\gamma_a(G) = n$ si et seulement si $G = \overline{K}_n$.*

Théorème 23 (Haynes, Hedetniemi et Henning [2] 2003). *Si T est un arbre d'ordre $n \geqslant 4$, alors $\gamma_a(T) \leq \frac{3n}{5}$, avec égalité si et seulement si $T \in F_1$.*

Théorème 24 (Haynes, Hedetniemi et Henning [2] 2003). *Si T est un arbre d'ordre $n \geqslant 3$, alors $\gamma_{\hat{a}}(T) \leqslant \frac{3n}{4}$, avec égalité si et seulement si $T \in F_2$.*

2.3.2 Bornes inférieures sur $\gamma_a(G)$ et $\gamma_{\hat{a}}(G)$.

Dans [2], Haynes et al. ont donné des bornes inférieures sur $\gamma_a(G)$ et $\gamma_{\hat{a}}(G)$ en fonction de l'ordre n .

Théorème 25 (Haynes, Hedetniemi et Henning [2] 2003). *Si G est un graphe d'ordre n, alors*

(i) $\gamma_a(G) \geqslant (\sqrt{4n+1} - 1)/2$.

(ii) $\gamma_{\hat{a}}(G) \geqslant \sqrt{n}$.

Théorème 26 (Haynes, Hedetniemi et Henning [2] 2003). *Si T est un arbre d'ordre n, alors*

(i) $\gamma_a(T) \geqslant \frac{n+2}{4}$,

(ii) $\gamma_{\hat{a}}(T) \geqslant \frac{n+2}{3}$,

Théorème 27 (Rodriguez et Sigaretta [29] 2007) *Soit G un graphe simple d'ordre n et de degré maximum Δ. Alors $\gamma_a(G) \geqslant \left\lceil \frac{2n}{\Delta+3} \right\rceil$ et $\gamma_{\hat{a}}(G) \geqslant \left\lceil \frac{n}{\lfloor \frac{\Delta}{2} \rfloor + 1} \right\rceil$*

Théorème 28 (Rodriguez et Sigaretta [29] 2007) *Soit G un graphe biparti d'ordre n, et de degré maximum Δ. alors $\gamma_a(G) \geqslant \left\lceil \frac{2n}{\Delta+3} \right\rceil$ et $\gamma_{\hat{a}}(G) \geqslant \left\lceil \frac{2n}{\Delta+2} \right\rceil$*

2.3.3 Bornes sur $\gamma_o(G)$ et $\gamma_{\hat{o}}(G)$

Le résultat suivant établi par Chellali [2], donne une borne supérieures sur γ_o pour tout graphe biparti.

Théorème 29 (Chellali [2]) *Pour tout graphe biparti G sans sommets isolés, $\gamma_o(G) \leq (n - \ell(G) + s(G))/2$.*

A noter q'une caractérisation constructive des arbres extremaux verifiant $\gamma_o(T) = (n - l(T) + s(T))/2$ a été faite par Chellali dans le même article.

Sigaretta et Rodriguez donne une borne supérieure et une borne inférieure sur γ_o pour tout graphe G en fonction de l'ordre n, le degré minimum δ et maximum Δ,

Théorème 30 (Rodriguez et Sigaretta [29] 2006) *Pour tout graphe G d'ordre n, et de degré minimum δ et degré maximum $\triangle$,*

$$\frac{2n}{3} \geq \gamma_o(G) \geq \begin{cases} \left\lceil \frac{n(\delta+1)}{2\triangle+\delta+1} \right\rceil & \text{si } \delta \text{ est impair;} \\ \left\lceil \frac{n\delta}{2\triangle+\delta} \right\rceil & \text{sinon.} \end{cases}$$

Rappelons q'un graphe G est dit d-régulier si tous ses sommets sont de degré d.

Théorème 31 (Rodriguez et Sigaretta [23] 2006) *Pour tout graphe régulier G d'ordre n et de degré minimum δ $\frac{n(\delta+1)}{3\delta+1} \leq \gamma_o(G) \leq \frac{n}{2}$.*

Dans le cas des graphes cubiques (3- régulier) on a: $\frac{2n}{5} \leq \gamma_o(G) \leq \frac{n}{2}$.

Dans [10], Blidia, Chellali et Volkmann ont montré que tout graphe biparti G sans sommets isolés satisfait $\gamma_2(G) \leqslant (n + \ell(G))/2$. Du fait que pour tout $\gamma_{\hat{o}}(G)$-*ensemble* S, tout sommet $v \in V - S$ possède au moins deux voisins dans S, alors S est un 2-dominant de G. D'ou $\gamma_2(G) \leq \gamma_{\hat{o}}(G)$ pour tout graphe G. La précédente borne supérieure sur γ_2 établie dans [10] par Blidia, Chellali et Volkmann a été améliorée pour $\gamma_{\hat{o}}$ par Chellali dans [12] en montrant que:

Théorème 32 (Chellali [2]). *Pour tout graphe biparti G sans sommets isolés, $\gamma_{\hat{o}}(G) \leq (n + \ell(G))/2$.*

A noter aussi q'une caractérisation constructive des arbres extrémaux atteignant la borne du Théorème 2.25 à été donnée par Chellali dans le même article.

Dans [23]. Rodriguez et Sigaretta ont donné une borne supérieure et une borne inférieure sur $\gamma_{\hat{o}}$ pour les graphes cubiques ainsi qu'une caractérisation des graphes extrémaux.

Théorème 33 (M.Bouzefranne et M. Chellali [27] (2009)). *Soit T un arbre d'ordre $n \succeq 3$ avec $l(T)$feuilles et $s(T)$ sommets supports.*
Alors $\gamma_o(G) \geq (n - \ell(T) + s(T) + 1)/3$

Théorème 34 (M. Bouzefranne et S. Ouatiki [28] (2018)). *Soit G un graphe connexe unicycle d'ordre n avec $l(T)$ feuilles et $s(T)$ sommets support.*
Alors $\gamma_o(G) \geq (n - \ell(T) + s(T))/3$

Théorème 35 (Chellali [2]). *Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 3$ alors $\gamma_o(T) \geq \frac{3}{2}\gamma_a(T) - 1$*

Théorème 36 (Rodriguez et Sigaretta [23] 2006). *Soit G un graphe cubique d'ordre n.*

1. $\frac{n}{2} \leqslant \gamma_{\hat{o}}(G) \leqslant \frac{3n}{4}$
2. $\gamma_{\hat{o}}(G) = \frac{n}{2}$ si et seulement si G est un graphe biparti.
3. $\gamma_{\hat{o}}(G) = \frac{3n}{4}$ si et seulement si G est isomorphe au graphe complet K_4

2.3.4 Bornes sur γ_{ap} et a_p

Proposition 37 **(Brigham et al [5] (2009))**. *Pour tout arbre $T, a_p(T) \leq n - \gamma(T)$, et cette borne est atteinete.*

Théorème 38 **(Brigham et al [5] (2009))**. *Si T est un arbre d'ordre n et $T \neq Pn$, alors*
$a_p(T) \leq \lceil \frac{n+3}{2} \rceil$

Théorème 39 **(Brigham et al [5] (2009))** *Pour tout graphe G d'ordre n,*
$n \leq \left(\frac{\Delta+\delta+2}{\delta+1}\right) \gamma_{ap}(G)$.

Corollaire 40 **(Brigham et al [5] (2009))** *Si G est un graphe régulier d'ordre n, alors*
$n \leq 2\gamma_{ap}(G)$

2.4 Relations entre γ_a, $\gamma_{\hat{a}}$, γ_o, $\gamma_{\hat{o}}$, β_0, γ_2 et i

2.4.1 Relations entre $\gamma_a, \gamma_{\hat{a}}$et β_0 .

Pour les graphes généraux, le nombre d'alliances défensives globales peut être beaucoup plus grand que le nombre d'indépendance. Par exemple, le graphe complet Kn .

Théorème 41 **(Chellali et Haynes [4] (2006))** $\beta_0(K_n) = 1 \leqslant \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \gamma_a(K_n)$.

Théorème 42 **(Chellali et Haynes [4] (2006))** . *Pour tout arbre T,*
$\gamma_a(T) \leq \beta_0(T)$. *et cette borne est atteinette.*

Théorème 43 **(Chellali et Haynes [4] (2006))** *Si T est un arbre d'ordre $n \geqslant 4$, alors:*
$\gamma_a(T) \leq \frac{3n}{5}$

Puisque $\beta_0(T) \leq \left(\frac{n+\ell-1}{2}\right)$ pour tout arbre non trivial T avec ℓ feuilles, le corollaire suivant est une amélioration de la borne du théorème 3 pour $\ell \leqslant n/5$.

Corollaire 44 **(Chellali et Haynes [4] (2006))** . *pour tout arbre non trivial T avec ℓ feuilles*

$\beta_0(T) \leq \left(\frac{n+\ell-1}{2}\right)$

Avant de conclure cette section, notons que $\gamma_a(T)$ et $i(T)$ sont incomparables. Pour une étoile T d'ordre $n \geq 3$, $1 = i(T) < \lceil \frac{n}{2} \rceil = \gamma_a(T)$.Sur le d'autre part, pour la chenille T_{6k}avec $6k$ sommets de support chacun adjacent à exactement deux feuilles a $\gamma_a(T_k) = 6k$, tandis que $i(T_k) = 9k$.

Théorème 45 **(Chellali et Haynes [4] (2006))** . *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$, avec S sommets support, alors:*

(a) $\gamma_{\hat{a}}(T) \leq \frac{3\beta_0(T)-1}{2}$,

(b) $\gamma_{\hat{a}}(T) \leq \beta_0(T) + s - 1$.

2.5 Relations entre $\gamma_a(G)$ et $i(G)$

Définition 46 (Favaron [8] 2008)

F_1 est la famille de graphes obtenus à partir d'une clique $S \sim K_k$ en attachant $k = d_s(u) + 1$ feuilles à chaque sommet $u$de S.

F_2 est la famille de graphes bipartis obtenus à partir d'un bipartis complet équilibré graphe $S \sim K_k$ en attachant $k + 1 = d_{s(u)} + 1$ feuilles à chaque sommetu de S.

F_3 est la famille d'arbres obtenu à partir d'un arbre S en attachant un ensemble L_u de $d_{s(u)} + 1$ feuilles à chaque sommet u de S

Proposition 47 (Favaron [8] 2008)

Si $G \in F_1$ alors $i(G) = \gamma_a(G) - \gamma_a(G) + 1$,

Si $G \in F_2$ alors $i(G) = \gamma_a(G)/4 + \gamma_a(G)$,

Si $G \in F_3$ alors $i(G) = 2\gamma_a(G) - 1$,

1. *Tout graphe G satisfait $i(G) \leqslant \gamma_a(G) - \gamma_a(G) + 1$, avec l'égalité si et seulement si $G \in F_1$*

2. *Tout graphe biparti G satisfait $i(G) \leqslant \gamma_a(G)/4 + \gamma_a(G)$, avec l'égalité si et seulement si $G \in F_2$*

3. *Tout arbre G satisfait $i(G) \leqslant 2\gamma_a(G) - 1$, avec l'égalité si et seulement si $G \in F_3$*

2.5.1 Relations entre $\gamma_{\hat{a}}(G)$ et $i(G)$

Il suffit de chercher des bornes sur le type $i(G) \leqslant g(\gamma_{\hat{a}}(G))$ valables pour tout graphe, graphe biparti ou arbre.

Puisque $\gamma_a \leqslant \gamma_{\hat{a}}$ pour tout graphe, Favaron dans [8], a donné des bornes du type $i(G) \leqslant g(\gamma_{\hat{a}}(G))$ pour un graphe général, biparti ou un arbre. Elle a défini des familles des graphes suivantes.

1. *F_4 est la famille des graphes obtenus d'une clique $S \sim K_k$ par la fixation de $k - 1 = d_s(u)$ feuilles a chaque sommet u de la clique S.*

2. *F_5 est la famille des graphes bipartit obtenu à partir d'un graphe biparti complet équilibré $S \sim K_{k,k}$ par la fixation de $k = d_s(u)$ feuilles à chaque sommet u de S.*

3. **s** *est la famille des arbres S telque pour tout ensemble d'indépendance maximale J de S, le nombre des composantes des fôrets $S - J$ est au plus $S/2$.* $_6$ *est la familles des arbres obtenus par un arbre S de* **s** *par la fixation de l'ensemble $L(u)$ de $d_s(u)$ feuilles a chaque sommet u de S.*

Le théorème suivant de Favaron [8] donne une relation entre $\gamma_{\hat{a}}(G)$ et $i(G)$ sous forme $i(G) \leq f(\gamma_{\hat{a}}(G))$. avec une caractérisation des graphes extrémaux.

Théorème 48 (Favaron [8] 2008)

1. *Tout graphe G satisfait $i(G) \leqslant \gamma_{\hat{a}}(G) - 2\gamma_{\hat{a}}(G) - 2$, avec l'égalité si et seulement si $G \in F_4$*

2. *Tout graphe biparti G sans sommets isolés satisfait $i(G) \leqslant \gamma_{\hat{a}}(G)/4 + \gamma_{\hat{a}}(G)/2$, avec l'égalité si et seulement si $G \in F_5$*

3. *Tout arbre G d'ordre $n \geqslant 2$ satisfait $i(G) \leqslant 3\gamma_{\hat{a}}(G)/2 - 1$, avec l'égalité si et seulement si $G \in F_6$*

2.5.2 Relations entre γ_o, $\gamma_{\hat{o}}$, β_0, i et γ_2 dans les arbres

Le théorème suivant de Favaron [11], donne une relation entre γ_o et i dans les arbres

Théorème 49 (Favaron [11] 2008) *Pour tout arbre T, $\gamma_o(T) \leq 2i(T) - 1$ et cette borne est atteinte.*

Le résultat qui suit établi par Favaron [11], est une borne sur $\gamma_{\hat{o}}$ en fonction de i pour la classe des arbres.

Théorème 50 (Favaron [11] 2008) *Pour tout arbre non trivial T, $\gamma_{\hat{o}}(T) \geq i(T)+1$ et cette borne est atteinte.*

En 2007 Volkmann [21] a donné une relation sur γ_2 en fonction de γ pour la classe des arbres.

Théorème 51 (Volkmann [21] 2007) *Pour tout arbre non trivial T, $\gamma_2(T) \geq \gamma(T) + 1$ avec égalité si et seulement si T est une étoile subdivisée, une couronne d'une étoile ou une double étoile subdivisée.*

Le théorème suivant établi par Hansberg et al. [20], nous donne une caractérisation pour tout les arbres T ayant $\gamma_2(T) = i(T) + 1$.

Théorème 52 **(Hansberg et Volkmann [20] 2006))**.*Pour tout arbre non trivial T, $\gamma_2(T) \geq i(T) + 1$ avec égalité atteinte si et seulement si $\gamma_2(T) \geq \gamma(T) + 1$ ou $T = (S_{2,2})$.*

Puisque pour tout graphe G $\gamma_{\hat{o}}(G) \geq \gamma_2(G)$. Chellali et al. [18] ont utilisé le théorème 2.38 et ont montré ce qui suit:

Théorème 53 (Chellali, Haynes et Volkmann [17] 2009) *Pour tout arbre non trivial T, $\gamma_{\hat{o}}(T) \geq \gamma(T) + 1$ avec égalité si et seulement si T est une étoile subdivisée, T est une couronne d'une êtoile ou bien T est une double êtoile subdivisée.*

Les mêmes auteurs en [17], ont donné une borne inférieure pour le nombre d'alliance offensive globale forte $\gamma_{\hat{o}}(G)$ pour tout graphe en fonction de $\gamma_o(G)$, ℓ et s.

Théorème 54 (Chellali, Haynes et Volkmann [17] 2009) *. Pour tout graphe G d'ordre $n \geqslant 3$, avec s sommet suports et ℓ feuilles, $\gamma_{\hat{o}}(G) \geq \gamma_o(G) + \ell - s$.*

On note que pour tout graphe G les feuilles de G sont dans tout $\gamma_{\hat{o}}(G)$ ensemble. Avant d'énoncer la chaîne d'inégalités établie par Chellali et al. On donne l'observation suivante justifiée par le fait que $V - D$ est une aog pour tout stable D.

[Chellali et Haynes [9] 2006] Si G est un graphe sans sommets isolés. Alors $\beta_0(G) + \gamma_o(G) \leqslant n$.

En utilisant l'inégalité triviale suivante: $\gamma(G) \leqslant \gamma_o(G) \leqslant \gamma_{\hat{o}}(G)$ on a alors

Corollaire 55 *pour tout arbre T, on a $\gamma(T) \leqslant \gamma_o(T) \leqslant \beta_0(T) \leqslant \gamma_2(T) \leqslant \gamma_{\hat{o}}(T)$.*

Le résultat suivant est un recent résultat de Chellali et al. qui est une relation entre le nombre d'alliance offensive globale forte $\gamma_{\hat{o}}$ et le nombre d'alliance offensive globale γ_o pour les arbres.

Théorème 56 (Chellali, Haynes et Volkmann [17] 2009) *. Pour tout arbre non trivial T, $\gamma_{\hat{o}}(T) \geq \gamma_o(T) + 1$, avec égalité si et seulement si une des propriétés suivantes est vérifiée.*

(i) T un arbre subdivisé.

(ii) T est obtenu a partir des arbres T_1 et T_2 qui est obtenue à partir d'arbres T_1 et T_2 qui sont des subdivisions des arbres T_1' et T_2', respectivement, en ajoutant une arête entre un sommet u_1 de T_1' et u_2 de T_2', où au moins l'un de u_1 et u_2 est une feuille ou isolé de $T_1 \cup T_2$.

Le résultat suivant est dû a Blidia et al.

Théorème 57 (Blidia, Chellali et Favaron [10] 2005 ***)*** *. Soit T un arbre, alors les propréités suivantes sont équivalantes:*

a) $\gamma_2(T) = \beta_0(T)$,

b) $T = K_1$ *ou* $T \in F_1$

c) T *a un* $\gamma_2(T) -$*ensemble et aussi est un* $\beta_o(T) -$*ensemble.*

Il est à noter qu'en utilisant le Théorème 2.44*, Chellali et al. [17], ont donné une caractérisation déscriptive des arbres satisfaisant $\gamma_{\hat{o}}(T) = \beta_0(T)$.*

2.5.3 Relations entre $\gamma_{ap}(G)$ et $\gamma(G)$

La proposition suivante donne une relation entre le nombre d'alliance puissante globale $\gamma_{ap}(G)$ et le nombre de domination $\gamma(G)$

Proposition 58 (Brigham et al. [19] 2009). *Pour tout graphe G, $\gamma(G) + \lfloor \delta(G)/2 \rfloor \leq \gamma_{ap}(G)$.*

Brigham et al. [19] ont caractérisé les graphes tels que $\gamma(G) = \gamma_{ap}(G)$ par le théorème suivant:

Théorème 59 (Brigham et al. [19] 2009). *Un graphe G vérifie $\gamma(G) = \gamma_{ap}(G)$ si et seulement si $N[v]$ contient au moins $\lceil |N[v]| /2 \rceil$ sommets supports pour tout sommet $v \in V(G)$.*

Les mêmes auteurs ont caractérisé aussi les arbres tels que $a_p(T) = \gamma_{ap}(T) = \left\lceil \frac{\Delta+1}{2} \right\rceil$.

Théorème 60 (Brigham et al. [19] 2009). *Un arbre T a $a_p(T) = \gamma_{ap}(T) = \left\lceil \frac{\Delta+1}{2} \right\rceil$ si et seulement si T est une double étoile $S_{2,2}$ ou bien T peut être obtenu d'une étoile $K_{1,t}$ en subdivisant au plus $\left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor$ de leurs arêtes exactement une seule fois.*

2.6 Généralisation des alliances

2.6.1 k-alliances

Les concepts des alliances défensives et offensives ont été généralisés aux k-alliances offensives et défensives respectivement, où la force d'une alliance est liée à la valeur du paramètre k. Avant de présenter quelques résultats éxistants sur ces concepts donnons les définitions suivantes

Définition 61 *Soit $k \geq 1$ un entier. Un ensemble non vide S de sommets d'un graphe G est appelé une k-alliance offensive globale si $|N(v) \cap S| \geq |N(v) - S| + k$ pour tout $v \in V(G) - S$. Le nombre k-alliance offensive globale de G, noté $\gamma_o^k(G)$, est le cardinal minimum d'une k-alliance offensive globale de G.*

Définition 62 *Un ensemble non vide $S \subseteq V$ est une k-alliance défensive globale si pour tout $v \in S, |N(v) \cap S| \geq |N(v) - S| + k$. Le nombre k-alliance défensive globale de G, noté $\gamma_a^k(G)$, est le cardinal minimum d'une k-alliance défensive globale de G.*

Dans [24] Fernau, Rodriguez et Sigarreta ont montré que le problème de la recherche du nombre d'alliance k-offensive (défensive) globale est NP-Complet. On donne par la suite quelques résultats établies sur γ_o^k et γ_a^k.

La figure suivante représente un graphe G avec $\gamma_o^2(G)$-ensemble, et un arbre T avec $\gamma_a^2(T)$-ensemble.

2.6.2 Bornes supérieure sur γ_o^k

Chellali et Volkmann ont donné une borne supérieure sur γ_o^k pour les graphes bipartis. Soit $L_k(G) = \{x \in V(G) : d_G(x) \leq k-1\}$.

Théorème 63 (Chellali et Volkmann [17] 2008). *Soit $k \geq 1$, un entier. Si G est un graphe bipartit alors, $\gamma_o^k(G) \leq \frac{n(G)+|L_k(G)|}{2}$.*

Une caractérisation constructive des arbres atteignant la borne du Théorème 2.51. a été faite par les mémes auteurs.

Théorème 64 (Chellali et Volkmann [17] 2008). *Soit $k \geq 2$ un entier. Un arbre T satisfait $\gamma_o^k(T) = (n(T) + |L_k(T)|)/2$ si et seulement si ou bien $\triangle(T) \leq k-2$ ou $T \in F_k$. ou F_k est obtenu d'une manière constructive.*

Par ailleurs dans [18] Chellali et al. ont donné une borne supérieure sur γ_o^k pour tout graphe.

Théorème 65 (Chellali et al. [18] 2009). *Soit $k \geq 1$ un entier. Si G est un graphe d'ordre n et de degré minimum $\delta \geq k$ alors, $\gamma_o^k(G) \leq \frac{k+1}{k+2}n$.*

Dans le cas ou $\delta \geq k+2$, on obtient la borne suivante qui améliore la borne du Théorème précèdent.

Théorème 66 (Chellali et al. [18] 2009). *Soit $k \geq 2$ un entier, et soit G un graphe d'ordre n et de degré minimum $\delta \geq k+2$. Alors $\gamma_o^k(G) \leq \frac{k}{k+1}n$.*

2.7 Bornes inférieure sur γ_o^k

Théorème 67 (Chellali et al. [9] 2009). *Soit k un entier positif. Si G est un graphe d'ordre n, de degré minimum δ et de degré maximum $\triangle$, alors $\gamma_o^k(G) \geq \frac{n(\delta+k)}{2\triangle+\delta+k}$.*

Théorème 68 (Chellali et al. [9] 2009). *Soit $k \geq 1$ est un entier et soit G est un graphe d'ordre n, et de degré minimum δ et maximum $\triangle$. Si δ est pair et k est impair ou δ est impair et k est pair alors, $\gamma_o^k(G) \geq \frac{n(\delta+k+1)}{2\triangle+\delta+k+1}$*

Théorème 69 (Chellali et al. [9] 2009). *Soit $k \geq 2$ un entier, et soit G un graphe d'ordre n avec degré minimum $\delta \geq k+2$. Alors.*

$$\gamma_o^k(G) \geq \frac{k}{k+1}n.$$

2.7.1 Bornes sur γ_a^k

Théorème 70 (Rodriguez et Sigaretta [10] 2006). *Pour tout graphe G,*

$$\frac{\sqrt{4n+k^2}+k}{2} \leq \gamma_a^k(G) \leq n - \left\lfloor \frac{d_n-k}{2} \right\rfloor,$$

Les mêmes auteurs ont généralisé la borne du Théorème précédent

Théorème 71 (Rodriguez et Sigaretta [10] 2006). *Pour tout graphe G de taille m et de degrés maximum $d_1 \geq d_2$,*

$$\gamma_a^k(\zeta(\mathbf{G})) \geq \left\lceil \frac{m}{\lfloor \frac{\mathbf{d_1}+d_2-2-k}{2} \rfloor + 1} \right\rceil.$$

Rodriguez et al. ont donnés d'autres résultats pour les graphes cubiques et planaires sur ce paramétre, pour plus de détaille (Voir [10]).

2.7.2 Partition en alliance

Le nombre de partition en alliance a été défini dans [15] comme suit:

Définition 72 *Le nombre de partition en alliance d'un graphe G noté ψ_a est le nombre maximum d'ensembles dans une partition de $V(G)$ de telle sorte que chaque ensemble est une alliance. De même le nombre de partition en alliance globale ψ_g est le nombre maximal d'ensembles dans une partition de $V(G)$ de telle sorte que chaque ensemble est une alliance globale, c'est à dire chaque ensemble est une alliance et un ensemble dominant.*

Dans ce qui suit on donne quelques résultats éxistants sur le nombre de partition en alliance globale ψ_g. Le théorème suivant établi par Eroh et Gera dans [11], donne une borne sur ψ_g pour tout graphe connexe en fonction de degré minimum δ.

Proposition 73 (Eroh et Gera [11] 2007). *Soit G un graphe discontinu dont les composantes sont $G_1, G_2, \ldots, G_p$ alors*

$$\Psi g(G) = \min_{1 \leq i \leq p} \Psi g(Gi).$$

Théorème 74 (Eroh et Gera [11] 2007). *Soit G un graphe connexe de degré minimum δ. Alors $1 \leq \psi_g(G) \leq 1 + \lceil \frac{\delta}{2} \rceil$. Et cette borne est atteinte.*

Proposition 75 (Eroh et Gera [11] 2007). *Soit T un arbre. Alors il y a un arbre T de classe 2 qui contient T comme sous-graphe induit*

Corollaire 76 (Eroh et Gera [11] 2007). *Soit G un arbre d'ordre $n \geq 3$, Alors:*
$\psi_g(G) \leq 2$.

Il existe plusieurs résultats sur ce concept. Pour plus de détail sur cette notion, voir [12], [13] et [14].

CHAPITRE 3

LES ALLIANCES GLOBALES DANS QUELQUES CLASSES DE GRAPHES

Dans ce chapitre, nous étudions certains paramètres d'alliances globales.Dans la première partie de ce chapitre, nous calculons les nombres d'alliances globales dans quelques graphes particuliers. Dans la deuxième partie, nous donnons quelques relations entre les paramètres d'alliances globales .

3.1 Calcul des nombres d'alliances défensives et offensives globales dans les chenilles.

Définition 77 *Une chenille est un arbre dans lequel tous les sommets sont à distance* 1 *d'un chemin central.*

Le résultat suivant nous donne la valeur exacte du nombre d'alliance dèfensive global $\gamma_a(G)$ *et du nombre d'alliance offensive globale* $\gamma_o(G)$ *pour le graphe chenille* $Ch(2, 2.....2, 2)$.

Proposition 78 *Si* G *est un graphe chenille* $Ch(2, 2.....2, 2)$*, de* m *sommets supports avec* $m \geq 2$*, alors*

1. $\gamma_a(G) = m$.
2. $\gamma_o(G) = m$.

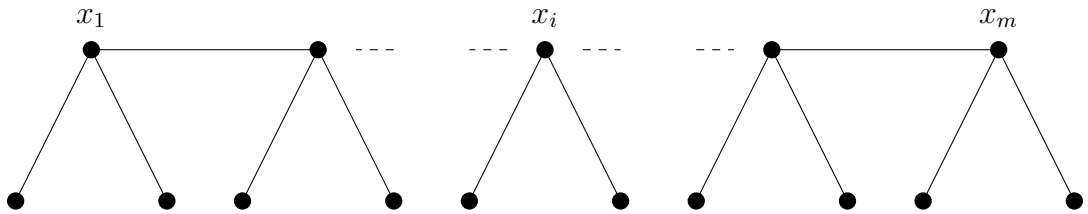


Figure 3.1: Un graphe chenille $Ch(2, 2.....2, 2)$.

Preuve. *1. Soit G un graphe chenille $Ch(2, 2.....2, 2)$ de m sommets supports et de p feuilles ($p = 2m$) et soit S un γ_a -ensemble et soient x_1 et x_m les deux sommets supports d'extrémités et soit x un sommet support différent de x_1 et x_m dans la chaine $P_n = \{x_1, ..., x_i, ...x_m\}$. Par la Définition 2, tous sommets supports sont dans S .$N[x] \cap S| = 3$ et$| N(x) \cap (V - S)| = 2$ alors dans tous les cas $|N[x] \cap S| \geq |N(x) \cap (V - S)|$. D'autre part $|N[x_1] \cap S| = |N[x_m] \cap S| = 2$ et $|N(x_1) \cap S| = |N(xm) \cap S| = 2$. d'ou $|S| = m$.*

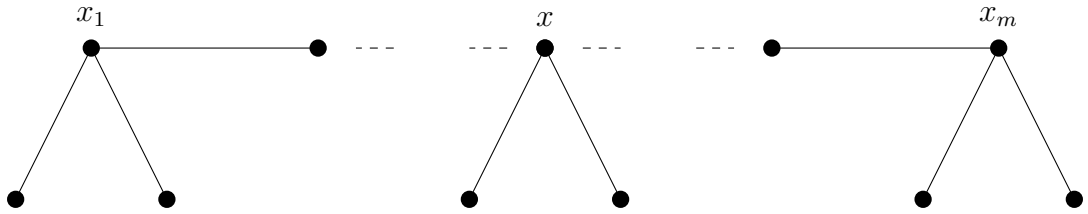


Figure 3.2: Un graphe chenille.

Proposition 79 *Soit G un graphe chenille $Ch(p, p, ..., p)$ de m sommets support et $(m.p)$ feuilles avec $m, p \geq 3$, alors:*

1. $\gamma_a(G) = \begin{cases} \frac{p.m}{2} \text{ si } p \text{ est pair} \\ \frac{m(p-1)}{2} + 2 \text{ sinon.} \end{cases}$

2.$\gamma_o(G) = m$.

Preuve. *1. Soit G un graphe chenille $Ch(p, p.....p, p)$ de m sommets supports et de $(m.p)$ feuilles et soit $S = \gamma_a$-ensemble et soit $x_1$et x_m les deux sommets supports d'extrémités et soit x un sommet support différent de x_1 et x_m dans la chaine $Pn = \{x_1, ..., x_i, ...x_m$ avec $m, p \geq 3$ et $1 \leq k \leq p$. Par la Définition 2, tous sommets supports sont dans S. $|N[x] \cap S| = 3$ et $|N(x) \cap (V - S)| = p$, d'ou $|N[x] \cap S| < |N(x) \cap (V - S)|$. Donc il faut ajouter k sommets à x pour vérifier l'égalite donc $|N[x] \cap S| + k > p - k \Longrightarrow 3 + 2k > p \Longrightarrow k > \frac{p-1}{3}$. Si p est pair, alors $k > \frac{p-1}{2}$ et $k > \frac{p-1}{2} - 1$ si p est impair. D'autre part $|N[x_1] \cap S| = |N[x_m] \cap S| = 2$ et $|N(x_1) \cap (V - S)| = |N(x_m) \cap (V - S)| = p$ d'ou $|N[x_1] \cap S| < |N(x_1) \cap (V - S)|$ et $|N[x_m] \cap S| < |N(x_m) \cap (V - S)|$.*

Finallement si p est pair, alors on obtient γ_a-ensemble de G, d'ou $|S| = (\frac{P}{2} - 1) + 1 + (\frac{P}{2} - 1) + 1(\frac{P}{2} - 1) + 1 + ... + (\frac{P}{2} - 1) + 1$ $|S| = m(\frac{p}{2} - 1) + m \Longrightarrow |S| = \frac{p.m}{2}$ si p est pair, alors on obtient un γ_d-ensemble de G,d'ou $|S| = m + 2(\frac{p-1}{2}) + (m - 2)(\frac{p-1}{2} - 1) \Longrightarrow |S| = \frac{m(p-1)}{2} + 2$

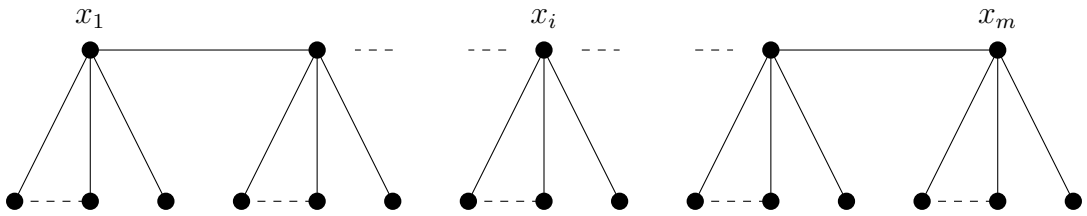


Figure 3.3: Le graphe G est une chenille$Ch(p, p....., p)$.

3.2 Calcul des nombres d'alliances offensive et offensives fortes globales dans les grilles

3.2.1 Produit cartésien

Le produit cartésien de deux graphes G_1et G_2 notée par $G_1\square\ G_2$, est un graphe simple avec $V(G_1)\times V(G_2)$ comme ensemble de sommets et deux sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont adjacents dans $G_1\square G_2$ si et seulement si $u_1 = u_2$ et v_1, v_2 sont adjacents dans G_2, ou u_1, u_2 sont adjacents dans G_1 et $v_1 = v_2$. Dans la suite, où $|V(G_1)| = m$ et $|V(G_2)| = n$, on considère l'ensemble de sommets de $G_1\square G_2$ est $m \times n$, comme un tableau dans lequel l'entrée (i, j) correspond au sommet $(i; j)$; $i \in V(G_1)$ et $j \in V(G_2)$, et chaque colonne induit une copie du graphe G_1, chaque ligne induit une copie de graphe G_2.

Définition 80 *Soit P_n le chaine de n sommet . Un graphe grille est le produit cartésien de deux chaîne .*

Example 81 *Soit G est une graphe grille $(P_2\square P_5)$:*

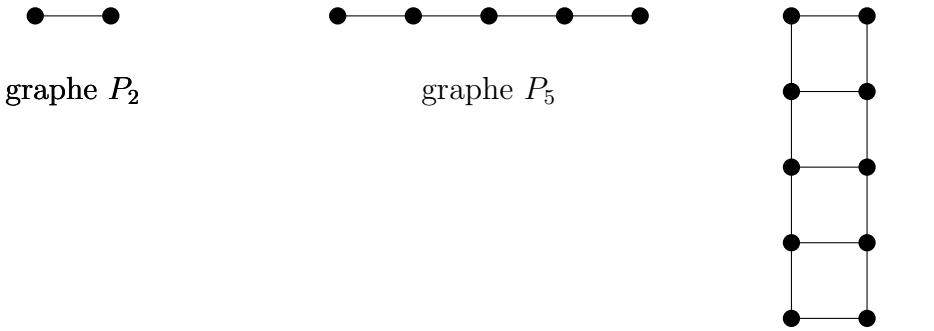


Figure 3.4: Graphe ($(P_2\square P_5)$)

Ainsi nous calculons $\gamma_a(P_2\Box P_n)$ et vu la difficulté de calcules de ces paramètres ou a proposé sans démonstrations les deux bornes suivants :

Une borne supérieur*: Si G est une graphe grille $(P_2\Box P_n)$ alors $\gamma_a(P_2\Box P_n) \leq \frac{2}{3}(n+2)$*

Une borne inférieur*: Si G est une graphe grille $(P_2\Box P_n)$ alors $\gamma_a(P_2\Box P_n) \geq \frac{2n}{3}$*

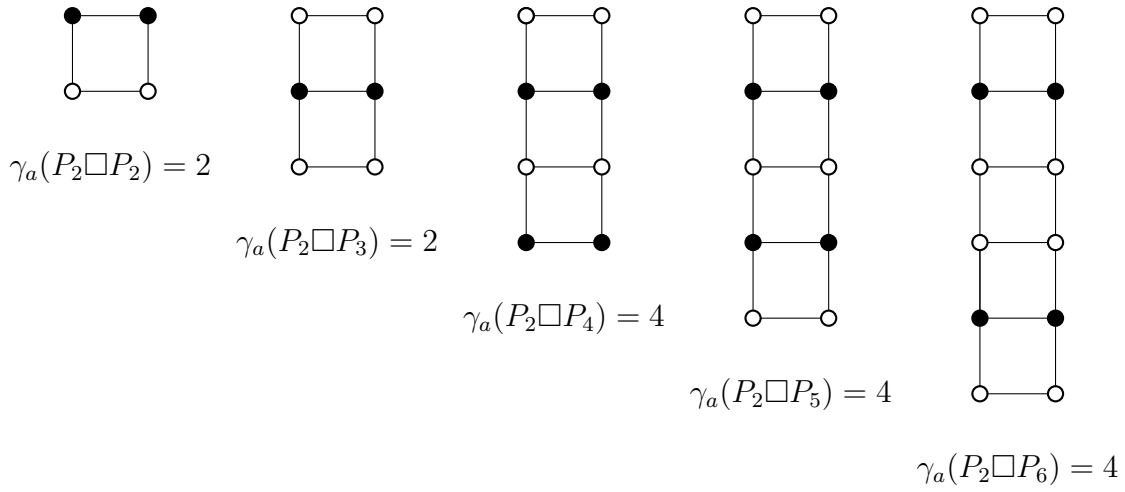


Figure 3.5: Graphe grille ($(P_2\Box P_2)$, $(P_2\Box P_3)$,$(P_2\Box P_4)$,$(P_2\Box P_5)$,$(P_2\Box P_6)$)

si $G = (P_2\Box P_2)$ alors: $\gamma_a(P_2\Box P_2) = 2 \leq \frac{2}{3}(n+2) = 2$ d'ou l'égalité.
si $G = (P_2\Box P_6)$ alors: $\gamma_a(P_2\Box P_6) = 4 \leq \frac{2n}{3} = 4$ d'ou l'égalité.

Example 82 *Soit G une grille $P_2\Box P_n$:*

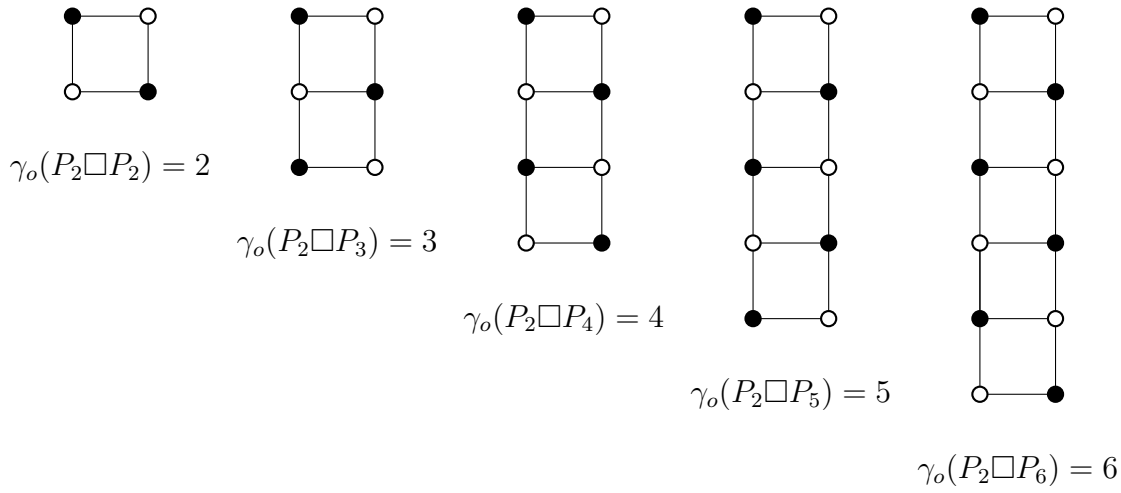


Figure 3.6: Graphe grille ($(P_2\Box P_2)$, $(P_2\Box P_3)$,$(P_2\Box P_4)$,$(P_2\Box P_5)$,$(P_2\Box P_6)$)

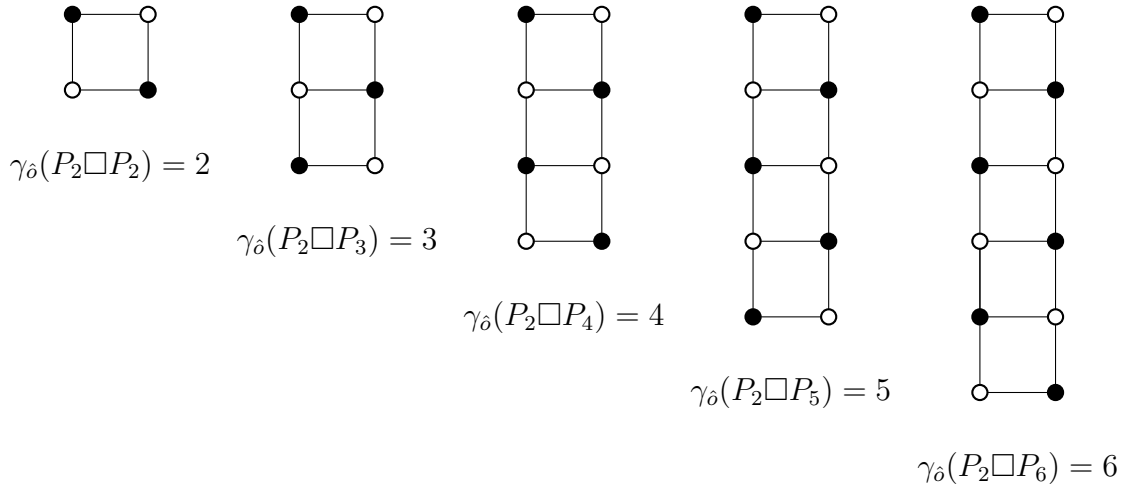


Figure 3.7: Graphe grille ($(P_2\Box P_2)$, $(P_2\Box P_3)$,$(P_2\Box P_4)$,$(P_2\Box P_5)$,$(P_2\Box P_6)$)

les résultats suivantes nous établit $\gamma_{\hat{o}}(p_2\Box p_n)$ et $\gamma_o(P_2\Box P_n)$:

Proposition 83 *Soit G une grille $(p_2\Box p_n)$ alors:*

1. $\gamma_o(p_2\Box p_n) = n$.
2. $\gamma_{\hat{o}}(p_2\Box p_n) = n$.

Preuve. (1)*:Soit* G *une grille* $(p_2 \square p_n)$ *de* x_i *sommets , avec* $i = \overline{1, 2n}$ *et soit* S *un* $\gamma_{\hat{o}}$*-ensemble alors* $\{x_1, x_3, x_5, ..., x_{m-1}\}$ *et* $V \backslash S = \{x_2, x_4, x_6, ..., x_m\}$

car si en prend $x_1 \in S$ *alors forcément* $x_3 \in S$ *et* $x_2, x_4 \in (v \backslash s)$ *, sinon* $N[x_3] \cap S < N[x_3] \cap (V - S)$ *ce qui contre dit que* S *est un* $\gamma_o(G)$*-ensemble.*

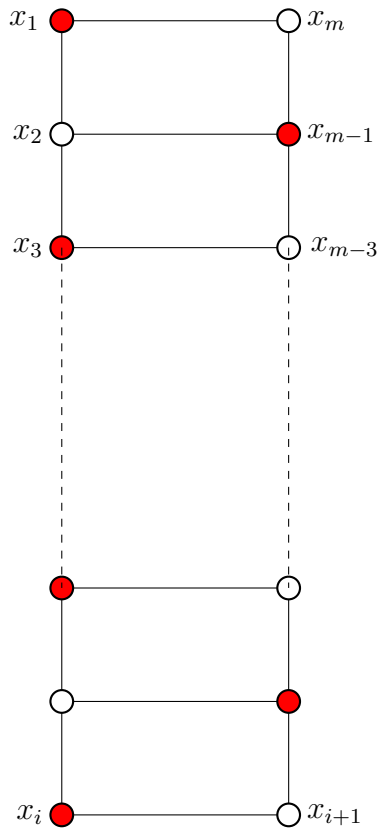


Figure 3.8: G une grille $(p_2 \square p_n)$

d'ou S *n'est pas un* $\gamma_o(G)$*-ensemble et dans tous cas.*

$\gamma_o(G) = \frac{m}{2} \quad = \frac{2n}{2} = n$.

(2)*:soit* G *un grille* $(p_2 \square p_n)$ *de* x_i *sommets ,avec* $i = \overline{1, 2n}$ *et soit* S *un* $\gamma_{\hat{o}}$*-ensemble alors* $S = \{x_1, x_3, x_5, ..., x_{m-1}\}$ *et* $V \backslash S = \{x_2, x_4, x_6, ..., x_m\}$

car si en prend $x_1 \in S$ *alors* $x_3 \in Set$ $x_2, x_4 \in (v \backslash s)$,

sinon $N[v] \cap S < N[v] \cap (V - S)$ *ce qui contre dit qui* S *et un* S*-ensemble.d'ou* $\gamma_{\hat{o}(G)}$ *n'est pas* $\gamma_{\hat{o}(G)}$*-ensemble et dans tous cas.*

$\gamma_{\hat{o}}(G) = \frac{m}{2} \quad = \frac{2n}{2} = n$.

Nous calculons $\gamma_{\hat{o}}(p_3 \square p_n)$ *et* $\gamma_o(P_3 \square P_n)$ *:*

Example 84 *Soit G une grille* $P_3 \square P_n$:

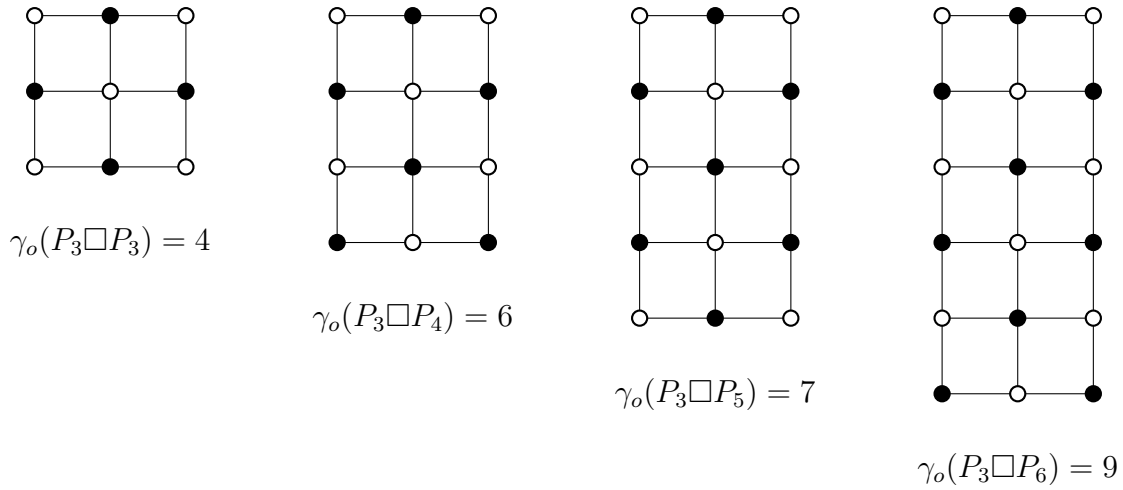


Figure 3.9: Graphe grille $((P_3 \square P_3)$, $(P_3 \square P_4)$,$(P_3 \square P_5)$,$(P_3 \square P_6))$

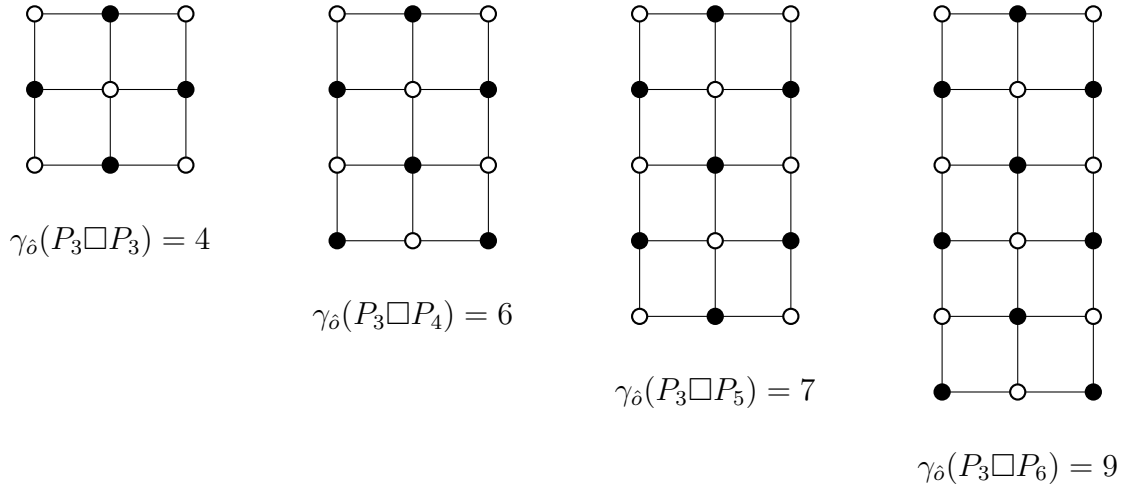


Figure 3.10: Graphe grille $((P_3 \square P_3)$, $(P_3 \square P_4)$,$(P_3 \square P_5)$,$(P_3 \square P_6)))$

les résultats suivantes nous établit $\gamma_{\hat{o}}(p_3\square p_n)$ et $\gamma_o(P_3\square P_n)$:

Proposition 85 *Soit G une grille $(p_3\square p_n)$ alors :*

1. $\gamma_o(p_3\square p_n) = \frac{3n}{2}$.
2. $\gamma_{\hat{o}}(p_3\square p_n) = \frac{3n}{2}$.

Preuve. (1)*:Soit G une grille $(p_3\square p_n)$ de x_i sommets, avec $i = \overline{1,3n}$ et soit S un $\gamma_o(G)$-ensemble alors $S = \{x_2, x_4, x_6, ..., x_m\}$ et $V\backslash S = \{x_1, x_3, x_5, ..., x_{m-1}\}$*

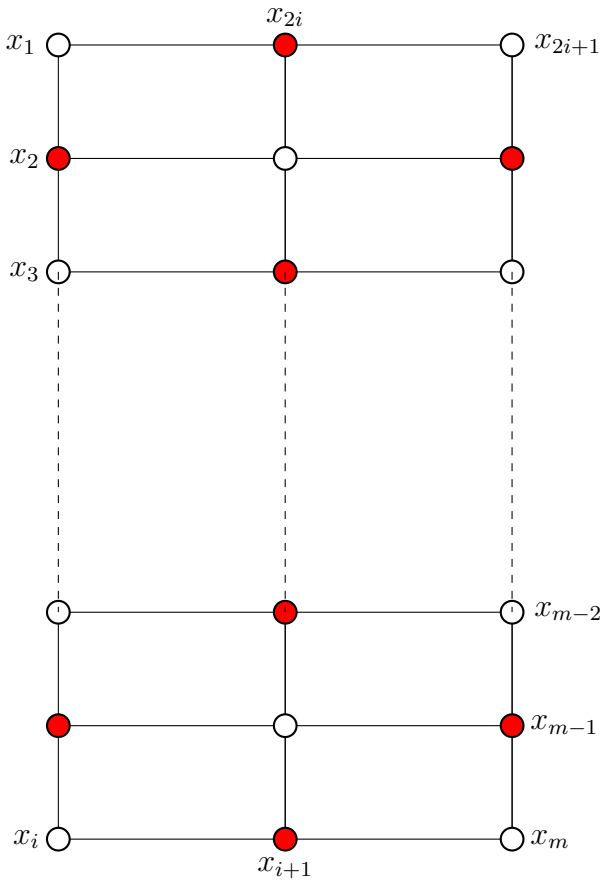


Figure 3.11: G une grille $(p_3\square p_n)$

car si on prend $x_2 \in S$ alors $x_4 \in S$. et $x_1, x_3 \in (v\backslash s)$, sinon $N[x_2] \cap S < N[x_2] \cap (V - S)$. d'ou S n'est pas $\gamma_o(G)$-ensemble et dans tous cas.

$\gamma_o(G) = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor = \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$.

(2):*soit* G *un grille* $(p_3 \square p_n)$ *de* x_i *sommets , avec* $i = \overline{1,3n}$ *et soit* S *un* $\gamma_{\hat{o}}(G)$*-ensemble alors* $S = \{x_2, x_4, x_6, ..., x_m\}$ *et* $V \backslash S = \{x_1, x_3, x_5, ..., x_{m-1}\}$

car on prend si $x_2 \in S$ *alors* $x_4 \in S$ *et* $x_1, x_3 \in (v \backslash s)$,

sinon $N[v] \cap S \leq N[v] \cap (V - S)$.

d'ou S *n'est pas* $\gamma_{\hat{o}}(G)$*-ensemble et dans tous cas.*

$\gamma_{\hat{o}}(G) = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \quad = \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$.

Nous calculons $\gamma_{\hat{o}}(p_4 \square p_n)$ *et* $\gamma_o(P_4 \square P_n)$ *:*

Example 86 *Soit* G *une grille* $P_4 \square P_n$;

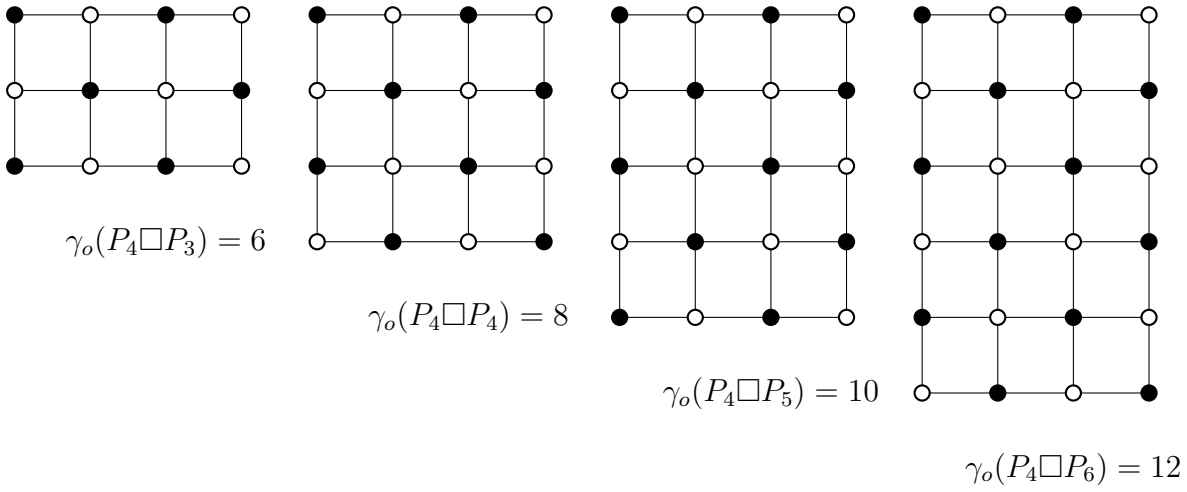


Figure 3.12: Graphe grille (($P_4 \square P_3$), ($P_4 \square P_4$),($P_4 \square P_5$),($P_4 \square P_6$)))

les résultats suivantes nous établit $\gamma_{\hat{o}}(p_4 \square p_n)$ *et* $\gamma_o(P_4 \square P_n)$ *:*

Proposition 87 *Soit* G *une grille* $(p_3 \square p_n)$ *alors :*

1. $\gamma_o(p_4 \square p_n) = 2n$.
2. $\gamma_{\hat{o}}(p_4 \square p_n) = 2n$.
3. $\gamma_{\hat{a}}(p_4 \square p_n) = 2n$.

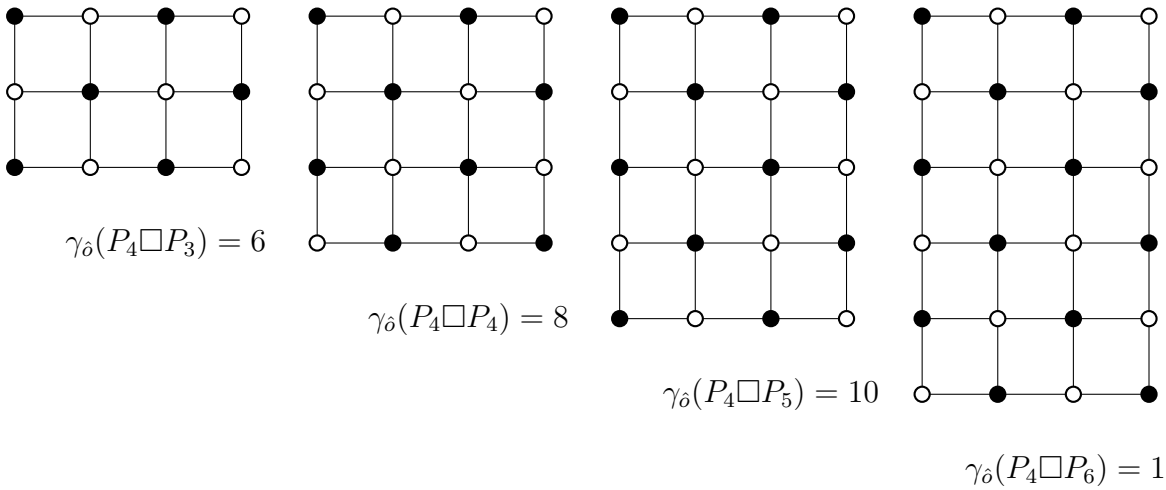


Figure 3.13: $(P_4\Box P_3)$, $(P_4\Box P_4)$,$(P_4\Box P_5)$,$(P_4\Box P_6)))$

Preuve. (1)*:Soit G une grille $(p_4\Box p_n)$ de x_i sommets ,avec $i = \overline{1, 4n}$ et soit S un $\gamma_o(G)$-ensemble alors* $S = \{x_1, x_3, x_5, ..., x_{m-1}\}$ *et* $V\backslash S = \{x_2, x_4, x_6, ..., x_m\}$

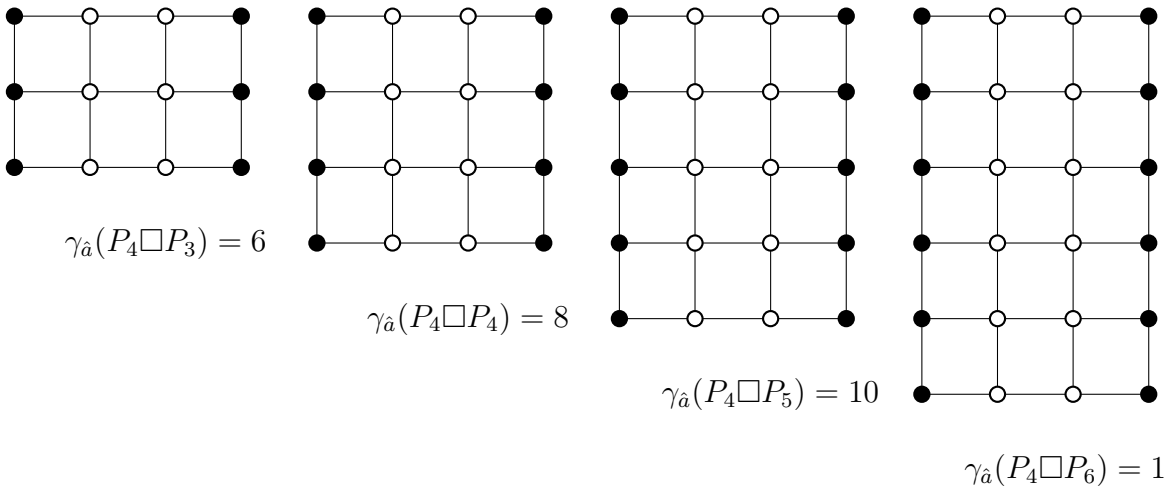


Figure 3.14: $(P_4\Box P_3)$, $(P_4\Box P_4)$,$(P_4\Box P_5)$,$(P_4\Box P_6)$)

car si on prend $x_1 \in S$ *alors* $x_3 \in S$ *et* $x_2, x_4 \in (v\backslash s)$ *, sinon* $N[x_3] \cap S < N[x_3] \cap (V - S)$.

d'ou S n'est pas un $\gamma_o(G)$*-ensemble et dans tous cas.*

$\gamma_o(G) = \frac{m}{2} = \frac{4n}{2} = 2n.$

(2)*:soit G une grille* $(p_4\Box p_n)$ *de* x_i *sommets ,avec* $i = \overline{1, 4n}$ *et soit S un* $\gamma_{\hat{o}}(G)$*-ensemble alors* $S = \{x_1, x_3, x_5, ..., x_{m-1}\}$ *et* $V\backslash S = \{x_2, x_4, x_6, ..., x_m\}$

si car on prend $x_1 \in S$ *alors* $x_3 \in S$ *et* $x_2, x_4 \in (v\backslash s)$,

sinon $N[x_3] \cap S \leq N[x_3] \cap (V - S)$.

d'ou S n'est pas $\gamma_{\hat{o}}(G)$*-ensemble et dans tous cas.*

$\gamma_{\hat{o}}(G) = \frac{m}{2} = \frac{4n}{2} = 2n.$

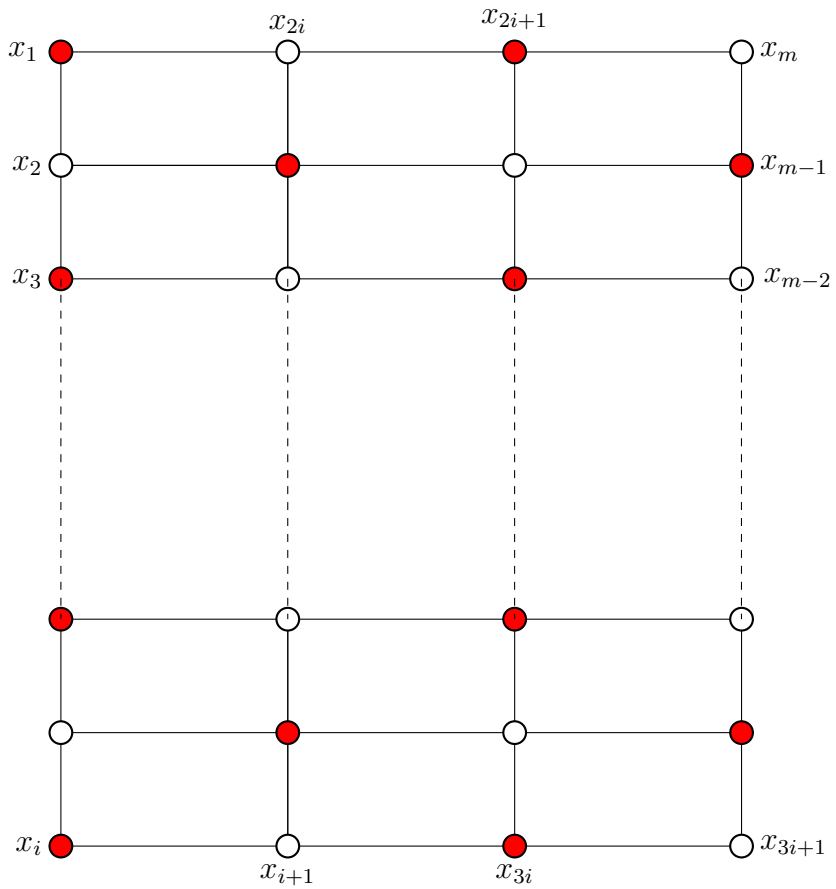


Figure 3.15: G une grille $(p_4 \square p_n)$

(3)*:soit* G *une grille* $(p_4 \square p_n)$ *de* x_i *sommets, avec* $i = \overline{1, 4n}$ *et soit* S *un* $\gamma_{\hat{a}}(G)$*-ensemble alors* $S = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\} \cup \{x_{3n+1}, x_{3n+2}, x_{3n+3}, ..., x_m\}$ *et* $V \backslash S = \{x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+2}, ..., x_{3n}\}$

car si on prend $x_1 \in S$ *alors* $x_2 \in S$ *et* x_{2n+1},$x_{2n+2} \in (v \backslash s)$,

sinon $N[x_2] \cap S \leq N[x_2] \cap (V - S)$.

d'ou S *n'est pas* $\gamma_{\hat{a}}(G)$*-ensemble et dans tous cas.*

$\gamma_{\hat{a}}(G) = \frac{m}{2} \quad = \frac{4n}{2} = 2n.$

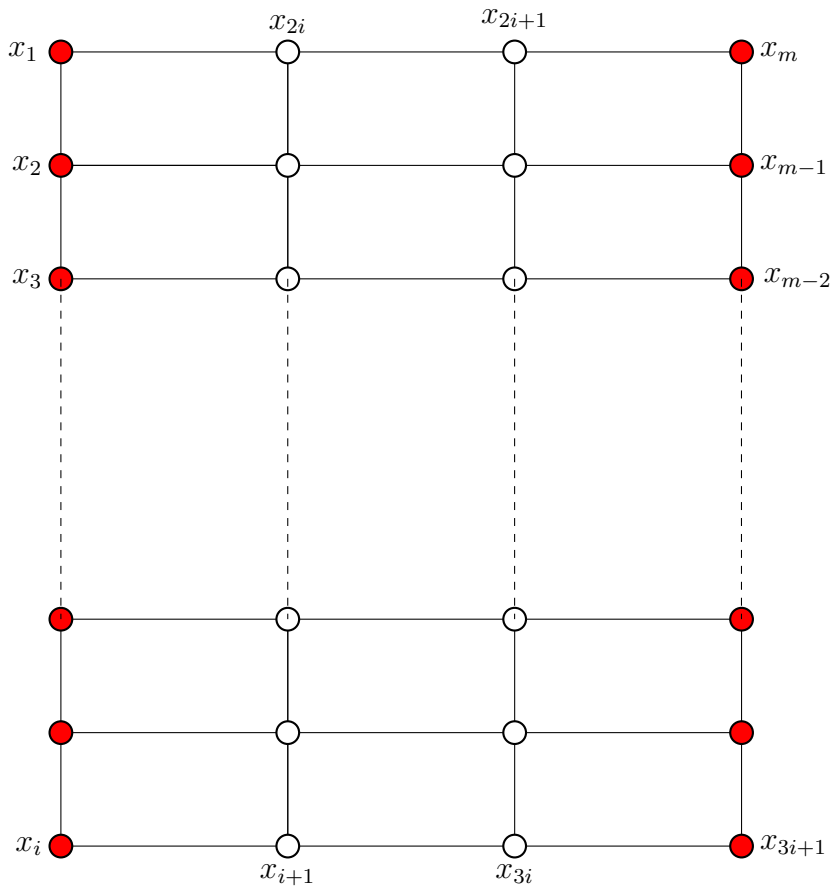


Figure 3.16: G une grille $(p_4 \square p_n)$

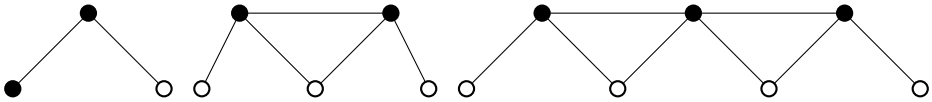
3.3 Relations entre les paramètres d'alliances globales $\gamma_a(G)$ et $\gamma_{ap}(G)$ dans quelque classes des graphes

3.3.1 Les graphes milieux

3.3.2 Le graphe milieu d'une chaîne

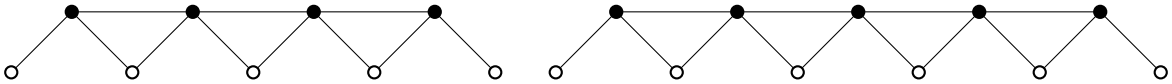
Dans (29) F.Souad ,M.Fatma zohra ont donnè le resultat suivant:

Théorème 88 (29) *Pour tout graphe milieu G d'une chaîne d'ordre n avec $n \geq 2$, on a :*



$\gamma_a M(P_2) = 2$ $\gamma_a M(P_3) = 2$ $\gamma_a M(P_4) = 3$

Figure 3.17: Graphe milieu ($M(P_2)$,$M(P_3)$,$M(P_4)$)



$\gamma_a M(P_5) = 4$ $\gamma_a M(P_6) = 5$

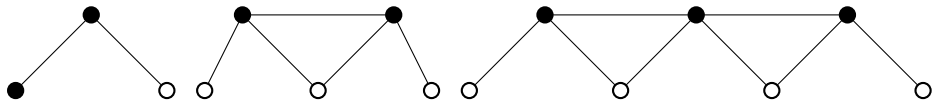
Figure 3.18: Graphe milieu($M(P_5)$,$M(P_6)$)

$$\gamma_a(G) = \begin{cases} 2 si\ n = 2 \\ n - 1 si\ n \geq 3 \end{cases}$$

Le theoreme suivant nous donne la valeur exacte du nombre d'alliance puissant globale pour le graphe millieu d'une chaîne

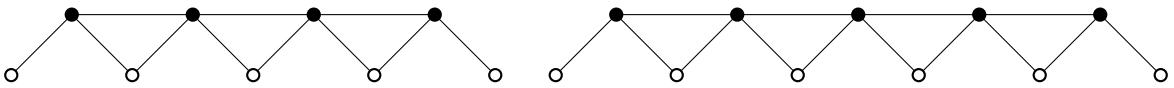
Théorème 89 *Pour tout graphe milieu G d'une chaîne d'ordre n avec $n \geq 2$, ona :*

$$\gamma_{ap}(G) = \begin{cases} 2 si\ n = 2 \\ n - 1 si\ n \geq 3 \end{cases}$$



$\gamma_{ap} M(P_2) = 2$ $\gamma_{ap} M(P_3) = 2$ $\gamma_{ap} M(P_4) = 3$

Figure 3.19: Graphe milieu($M(P_2)$,$M(P_3)$,$M(P_4)$)



$\gamma_{ap}M(P_5) = 4$ $\gamma_{ap}M(P_6) = 5$

Figure 3.20: Graphe milieu ($M(P_5)$,$M(P_6)$)

Proposition 90 *Pour tout graphe milieu G d'une chaîne d'ordre n avec $n \geq 2$, ona :*

$\gamma_{ap}(G) = \gamma_a(G)$.

Preuve. *Pour tout graphe milieu G d'une chaîne d'ordre $n \geq 2$ Par les deux résultats obtenues en (29) , on distingue les cas suivants :*

si $n = 2$: $\gamma_{ap}(G) = \gamma_a(G) = 2$

si $n \geq 3$:

$\gamma_{ap}(G) = \gamma_a(G) = n - 1$.

Pour le G graphe milieu d'une chaîne d'ordre n, $\gamma_{ap}(G) = \gamma_a(G)$.

3.4 Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés a étudier les alliances globales dans quelques classes de graphes. Dans un premier temps nous avons établi les principaux résultats existants sur ce conept.
Dans un second temps on a rappelé quelques résultats des travaux de recherches réalisés au paravant sur les alliances (défensives, offensives et puissantes) globales, En dernier lieu on a déterminé quelques résultats sur le nombre d'alliance offensive et défensive globales pour des classes particulièrs de graphe.
Par ailleur, nous avons recevé tout au long de ce mèmoire des problèmes non encore résoulu nous proposons ces questions pour des recherches futur .
1 .Caractériser les graphes pour les quel $\gamma_{ap}(G) = \gamma_a(G)$
2 .Donner des bornes supérieures et inférieures du nomber d'alliance defensive globale.
3 .Trouver des relations entre les différents paramétres d'alliances globales pour d'autres quelques classes des graphes.

bibliographie

[1] J. A. Rodriguez-Velazquez, J. M. Sigarreta & Odile Favaron (Communicated by) (2007) Global alliances in planar graphs

[2] TW Haynes, ST. Hedetniemi et M.A. Henning, Alliances défensives globales dans les graphiques, Electronic J. Combin., 10 (2003), # R47.

[3] M. Chellali et T.W. Haynes, Nombres de domination totaux et appariés d'un arbre, AKCEJ. Graphs Combin.,1:2(2004), 69-75.the electronic journal of combinatorics18(2011), #P2027

[4] M. Chellali and T. Haynes, Global alliances and independence in trees.

[5] R. C. Brigham, R. D. Dutton, T. W. Haynes, and S. T. Hedetniemi, Powerful alliances in graphs, Discrete Math .

[7] M. Blidia, M. Chellali and O. Favaron, Independence and 2-domination in trees, Austral. J. Combin. 33 (2005) 317–327

[8] Odile Favaron. Global alliances and independent domination in some classes of graphs. The Electronic. Journal of Combinatorics 15 (1) *R*123 2008.

[9] M. Chellali, T. W. Haynes, B. Randerath et L. Volkmann, Bounds on the global offensive k-alliance number in graphs. Discussiones Mathematicae Graph Theory 29 (2009) 597 − 613.

[10] J. A. Rodríguez-Velázquez et J. M. Sigarreta, Global defensive k-alliances in graphs. Disc Applied Math 157 *(*2009*)* 211-218.

[11] Linda Eroh et Ralucca Gera, Global alliance partition in trees, J. Combin. Math Combin Comput. 66 (2008), 161-169

[12] H. S. Khurram, Partitioning a graph in alliances and its application to data clustering. Phd thesis, School of Computer Science, University of Central Florida, Orlando, 2001.

[13] T. W. Haynes et J. A. Lachniet, The alliance partition number of grid graphs. AKCE Int. J. Graphs Comb. 4 (1) (2007) 51-59.

[14] L. Eroh et R. Gera, Alliance partition number in graphs. Soumis à publication Janvier 2007.

[15] P. Kristiansen, S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, Alliances in graphs, The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, Vol. 48 (2004), 157-177

[16] S.T. Hedetniemi et R.C. Laskar, Introduction. Discrete Mathematics, 86 (1990), 3-9.

[17] C.F. de Jaenisch, Applications de l'analyse mathématique au jeu des echecs. Petro-grade (1862).

[18] G.H. Fricke, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, A.A. McRae, C.K. Wallis, M.S.Jacobson, H.W. Martin et W.D. Weakley, Combinatorial problems on chessboards:A briev survey, dans Graph Theory, Combinatorics and Applications: Proc. SeventhQuad. Internat. Conf. on the Theory and Applications of Graphs, vol. 1, Y. Alavi and A. Schwenk, Eds., Wiley, 1995, pp. 507-528.

[19] C. Berge, Théorie de graphes et ses applications. Dunod, Paris, 1958.

[20] O. Ore, Theory of graphs. Amer. Soc. Colloq. Pub 38, Providence, R.I.(1962).

[21] E. J. Cockayne et S. T. Hedetniemi, Towards a theory of domination graphs. Net- works, 7(1977) 247-261.

[22] K.S. Booth et J.H. Johnson, Dominating sets in chordal graphs. SIAM J. Comput, 11(1982) 191-199.

[23] [21] R. Laskar et K. Peters, Domination and irredundance in graphs. Technical Report 434, Dep. Mathematical Sciences, Clemson univ, (1983).

[24] R. Laskar, J. Pfa, S.M. Hedetniemi et S.T. Hedetniemi, On the algorithmic complexity of total domination. SIAM J. Alg. Disc. Meth. Vol. 5, No 3, september 1984.

[25] S.T. Hedetniemi et R.C. Laskar, Introduction. Discrete Mathematics, 86 (1990) 3-9.

[26] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi et P. J. Slater, Domination in Graphs: Advanced Topics. Marcel Dekker, New York, 1998

[27] M. Bouzefrane, M.chellali, on the global offensive alliance number of a tree, Opuscula math.29(3)(2009) 223-228.

*[28] M.**Bouzefrane** , S.ouatiki, on the global offensive alliance in unicycle graphs, AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics 15 (2018) 72-78.*

[29] J.A. Rodriguez et J. M. Sigarreta, Spectral study of alliances in graphs,Discussiones Mathematices graph theory 27 (1) (2007) 143 157.

*[30] M. **chellali**, Offensive alliances in bipartits graphs, J. combin. Math. Combin. Comput. Accepté.*

[29] F. Souad, M. Fatma zohra, etude des alliances dans les Grephes,Mémoire de master math universié de Medea.(2017).