République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Médéa
Faculté des Sciences

Polycopié de cours de l'Analyse 1

Selon le programme pédagogique officiel de L1 Mathématiques et informatique

Dr. Bouadjila Khaled
Maître de conférences
Département de mathématique et de l'informatique

Validé par le conseil scientifique de la faculté des sciences à 21/06/2022
Numéro de série :

Année universitaire 2021-2022

Ce polycopié a été expertisé par :

1. Hocine Ayadi, MCA, faculté des sciences, université de Médéa.
2. Rezak Souilah, MCA, faculté des Sciences Économiques, Commerciales et Sciences de Gestion, université de Médéa.

TABLE DES MATIÈRES

1 Corps des nombres réels **6**

1.1 Ensemble des nombres rationnel $\mathbb{Q}$ 6
1.2 Ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ 6
1.2.1 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un corps commutatif 7
1.2.2 $(\mathbb{R}, \leq)$ est totalement ordonné 7
1.3 Raisonnement par récurrence 8
1.4 Valeur absolue 9
1.5 Intervalles 9
1.6 Majorant, minorant, borne supérieure 10
1.7 Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$ 11
1.8 Propriété d'Archimède 11
1.9 Partie entière 12
1.10 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ 13
1.11 Exercices 14

2 Corps des nombres complexes **16**

2.1 Opérations algébriques sur les nombres complexes 16
2.1.1 Propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{C}$ 17
2.1.2 Conjugué d'un nombre complexe 17
2.1.3 Module d'un nombre complexe 17
2.1.4 Représentation géométrique d'un nombre complexe 18
2.2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe 18
2.2.1 Argument d'un nombre complexe 18
2.3 Formules d'Euler 19
2.4 Racine n-ième d'un nombre complexe 19
2.5 Exercices 20

3 Suites de nombres réels **21**

3.1 Définitions 21
3.2 Convergence d'une suite 23
3.2.1 Opérations sur les limites 25
3.2.2 Limites et inégalités 26
3.3 Suite extraite d'une suite 27
3.4 Suites monotones 28
3.5 Suites adjacentes 29
3.6 Théorème de Bolzano-Weierstrass 29
3.7 Limite supérieure, limite inférieure 30

3.8 Suites de Cauchy . . . 31
3.9 Suites récurrentes . . . 32
3.9.1 Suite récurrente définie par une fonction . . . 32
3.10 Exercices . . . 35

4 Fonctions réelles d'une variable réelle 38
4.1 Généralités . . . 38
4.1.1 Définitions . . . 38
4.1.2 Opérations sur les fonctions . . . 39
4.1.3 Fonctions bornées . . . 39
4.1.4 Fonctions monotones . . . 40
4.1.5 Parité, périodicité . . . 41
4.2 Limites . . . 41
4.2.1 Définitions . . . 41
4.2.2 Limite à gauche et à droite . . . 44
4.2.3 Propriétés . . . 44
4.2.4 Notation de Landau . . . 45
4.3 Continuité . . . 46
4.3.1 Théorème des valeurs intermédiaires . . . 49
4.4 Exercices . . . 51

5 Fonctions dérivables 53
5.1 Dérivée d'une fonction en un point . . . 53
5.1.1 Interprétation géométrique . . . 54
5.1.2 Fonction dérivée . . . 55
5.2 Dérivées successives . . . 56
5.3 Théorème des accroissements finis . . . 57
5.4 Fonctions convexe . . . 60
5.5 Formules de Taylor . . . 61
5.5.1 Opérations sur les polynômes de Taylor . . . 64
5.6 Exercices . . . 66

6 Fonctions élémentaires 68
6.1 Logarithme et exponentielle . . . 68
6.1.1 Logarithme népérien . . . 68
6.1.2 Exponentielle . . . 69
6.1.3 Logarithme de base quelconque . . . 70
6.1.4 Fonction puissance . . . 71
6.2 Fonctions trigonométrique réciproques . . . 72
6.2.1 Arccosinus . . . 72
6.2.2 Arcsinus . . . 73
6.2.3 Arctangente . . . 74
6.3 Fonctions hyperboliques et hyperboliques réciproques . . . 75
6.3.1 Cosinus et sinus hyperboliques . . . 75
6.3.2 Tangente hyperbolique . . . 76
6.3.3 Fonctions hyperboliques réciproques . . . 77
6.4 Exercices . . . 79

Avant propos

Ce polycopié s'agit d'un ensemble de cours d'analyse 1 qui ont été présentés ces dernières années aux étudiants de première année mathématiques et informatique à la faculté des sciences de l'Université de Médéa.
L'objectif de ce cours est de faire une transition entre les connaissances en analyse accumulées au lycée et les bases qui formeront un des piliers dans la formation en analyse mathématique de la licence.
Nous rappelons que le contenu de ce polycopié est exactement le même proposé dans l'offre de formation officiel applicable actuellement dans tous les départements de Mathématiques des Universités Algériennes.
Venons-en à une description plus précise de ce que l'on trouvera dans ce polycopié. Ce polycopié débute par un chapitre sur le corps des nombres réels, dans ce chapitre, nous nous concentrerons sur les parties bornée et les propriétés des bornes supérieures et inférieures, qui sont des concepts nouveaux à ce niveau. Puis, dans le deuxième chapitre, on se tourne vers les nombres complexes à travers d'un rappel des définitions et concepts de base qui ont été abordés en terminale. Quant au troisième chapitre, il est consacré aux suites de nombres réels, et nous y mentionnerons les concepts précédemment étudiés avec le développement de la notion de limite et de convergence.
Le reste des chapitres passe en revue les fonctions numériques : limites, continuité, dérivation. Nous terminons ce cours par les fonctions élémentaires et nous nous concentrerons sur les fonctions inverses de chacune des fonctions : sinus, cosinus et tangente, ainsi que sur les fonctions hyperboliques et leurs fonctions inverses.
Nous fournirons autant d'exemples et de figures nécessaires afin d'obtenir une meilleure compréhension du cours.
A la fin de chaque chapitre, nous avons présenté une série d'exercices, dont la plupart ont été abordés dans les séances de travaux dirigés.

CHAPITRE 1

CORPS DES NOMBRES RÉELS

Notations

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels $\{0, 1, 2, ...\}$.
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs $\{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$.
- $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

1.1 Ensemble des nombres rationnel $\mathbb{Q}$

Par définition, l'ensemble des nombres rationnels est

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Exemple 1.1. $0, -1, \frac{2}{5}, \frac{-3}{4}$ *sont des nombres rationnels*

Les nombres décimaux sont les nombres rationnels de la forme $\frac{p}{10^n}; p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.2. $0,5 = \frac{5}{10}, -1, \frac{6}{25} = \frac{24}{10^2}$ *sont des nombres décimaux*

Proposition 1.1. *Un nombre est rationnel si et seulement s'il admet une écriture décimale périodique ou finie.*

Exemple 1.3. $\frac{3}{10} = 0,3, \frac{-5}{2} = -2.5, \frac{4}{3} = 1,3333...$

Remarque 1.1. Si un nombre n'est pas rationnel, on dit qu'il est irrationnel.

1.2 Ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est la réunion des nombres rationnels et irrationnels.

Exemple 1.4. $2, -9, 4.5, \frac{4}{11}, \sqrt{2}, \pi, e$ *sont des nombres réels*

On représente souvent les nombres réels sur une « droite numérique » :

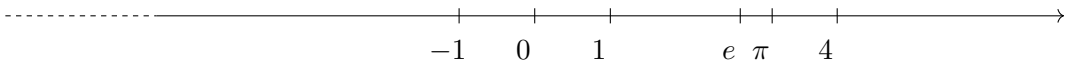


FIGURE 1.1 – Droite numérique

1.2.1 $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un corps commutatif

➤ L'addition $(+)$ dans $\mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes :

1) Elle est associative :$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a + b) + c = a + (b + c)$.
2) Elle possède un élément neutre 0 : $\forall a \in \mathbb{R}, a + 0 = 0 + a = a$.
3) Chaque réel possède un opposé :$\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : a + b = b + a = 0$, le nombre b opposé à a est noté $-a$.
4) Elle est commutative :$\forall a, b \in \mathbb{R}, a + b = b + a$.

➤ La multiplication $(\cdot)$ dans $\mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes :

1) Elle est associative :$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
2) Elle possède un élément neutre 1 : $\forall a \in \mathbb{R}, a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
3) Chaque réel non nul possède un inverse :$\forall a \in \mathbb{R}^*, \exists b \in \mathbb{R}^* : a \cdot b = b \cdot a = 1$, le nombre b inverse de a est noté a^{-1} ou encore $1/a$.
4) Elle est commutative :$\forall a, b \in \mathbb{R}, a \cdot b = b \cdot a$.

De plus, on a :

➤ La multiplication $(\cdot)$ dans $\mathbb{R}$ est distributive relativement à l'addition : $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

➤ Si $a \cdot b = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$.

On dit que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un corps commutatif.

1.2.2 $(\mathbb{R}, \leq)$ est totalement ordonné

Considérons sur $\mathbb{R}$ la relation $\leq$.
Pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$, on a :

➤ $a \leq a$. ($\leq$ est réflexive).

➤ Si $a \leq b$ et $b \leq a$, alors $a = b$. ($\leq$ est antisymétrique)

➤ Si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$.($\leq$ est transitive).

De plus on a : $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$ ou $b \leq a$.
On dit que $(\mathbb{R}, \leq)$ est totalement ordonné.

Remarque 1.2. Les opérations $(+)$ et $(\cdot)$ sur $\mathbb{R}$ sont compatibles avec la relation d'ordre $\leq$ au sens suivant, pour des réels a, b, c, d :

. Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.
. Si $a \leq b$ et $c \geq 0$, alors $a \cdot c \leq b \cdot c$.
. Si $a \leq b$ et $c \leq 0$, alors $a \cdot c \geq b \cdot c$.

1.3 Raisonnement par récurrence

Un raisonnement par récurrence est un raisonnement du type suivant : Soit $P(n)$ une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$. Elle peut, pour chaque n, être vraie ou fausse. Pour montrer que $P(n)$ est vraie pour tout n, il suffit de vérifier que $P(0)$ est vraie puis de vérifier que $P(n+1)$ est vraie en supposant que $P(n)$ est vraie. La justification d'un tel raisonnement repose sur le théorème suivant, appliqué à l'ensemble

$$E = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ est vraie}\}.$$

Théorème 1.1

Soit $E \subset \mathbb{N}$ un ensemble tel que $0 \in E$, et tel que $(n+1) \in E$ dès que $n \in E$. Alors $E = \mathbb{N}$.

Démonstration. Admis □

Exemple 1.5. *Soit $r \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Montrons, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

La formule est triviale si $n = 0$. Supposant que

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r},$$

on aura

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n + r^{n+1} = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} + r^{n+1} = \frac{1 - r^{n+2}}{1 - r}.$$

Théorème 1.2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n) = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^{n-k}b^k.$$

Démonstration. On peut supposer que $a \neq 0$ et $a \neq b$. En divisant par a^{n+1}, on voit qu'il s'agit de démontrer l'égalité

$$1 - \frac{b^{n+1}}{a^{n+1}} = \left(1 - \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{b}{a} + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{a}{b}\right)^n\right),$$

ou encore, en posant $r = b/a$ et en divisant par $1 - r$,

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

□

Le théorème suivant s'énonce au moyen des nombres dits coefficients du binôme qui s'écrivent eux-mêmes en termes des nombres dits factoriels : par définition,

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n,\ n \in \mathbb{N}^*, \quad \text{et} \quad 0! = 1$$

et

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Théorème 1.3

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Démonstration. La preuve est laissée en exercice. □

1.4 Valeur absolue

Définition 1.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la valeur absolue de x comme étant le nombre réel positif, noté $|x|$ donné par :

$$|x| = \begin{cases} x, & si \quad x \geq 0, \\ -x, & si \quad x \leq 0. \end{cases}$$

Théorème 1.4

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

1) $|x| \geq 0$,
2) $|x| = 0$, ssi $x = 0$,
3) $|xy| = |x||y|$ et $|-x| = |x|$,
4) $|x+y| \leq |x| + |y|$,
5) $\sqrt{x^2} = |x|$,
6) $||x| - |y|| \leq |x+y|$,
7) $|y-x| \leq r$, ssi $x - r \leq y \leq x + r$.

Démonstration. Les preuves sont laissées au lecteur à titre exercice. □

1.5 Intervalles

Définition 1.2. Un intervalle de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante :

$$Soit\ a, b \in I;\ \text{si} \quad a \leq x \leq b, \quad alors\ x \in I.$$

Proposition 1.1

Intervalle de $\mathbb{R}$ est un ensemble d'une des formes suivantes :

- $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$
- $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$
- $\{a\} = [a, a]$
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$
- $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$
- $]a, a[= \phi$
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$

Démonstration. Admis □

1.6 Majorant, minorant, borne supérieure

Définition 1.3 (Plus grand élément, plus petit élément)**.** Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et un réel a. On dit que a est : .

- le plus grand élément de A si $a \in A$ et $\forall x \in A, x \leq a$.
- le plus petit élément de A si $b \in A$ et $\forall x \in A, x \geq b$.

S'il existe, le plus grand élément de A est unique. Nous le noterons $\max A$. De même, s'il existe, le plus petit élément de A est unique et nous le noterons $\min A$.

Exemple 1.6.
1. $\max[a, b] = b, \min[a, b] = a$.
2. *L'intervalle* $]a, b[$ *n'a pas de plus grand élément, ni de plus petit élément.*
3. $\mathbb{N}$ *possède un plus petit élément* 0 *mais il n'a pas de plus grand élément.*

Définition 1.4 (Majorant, minorant)**.** Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Un réel M est un majorant de A si :$\forall x \in A, x \leq M$. Un réel m est un minorant de A si :$\forall x \in A, x \geq m$.

Exemple 1.7.
1. $\sqrt{2}$ *est majorant de* $]0, 1[$.
2. $-1; 0.5, 1.3, 2$ *sont des minorants de* $]3, +\infty[$*, mais il n'y a pas de majorant.*

Définition 1.5 (Borne supérieure, borne inférieure)**.** Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. La borne supérieure de A est, si elle existe, le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A. On la note $\sup A$.
2. La borne inférieure de A est, si elle existe, le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A. On la note $\inf A$.

Exemple 1.8.
1. 2 *est la borne supérieure de* $]0, 2[$ *ou de* $[0, 2]$.
2. 3 *est la borne inférieure de* $[3, +\infty[$*, mais il n'y a pas d'une borne supérieure.*

Proposition 1.2

Si une partie A de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure alors celle-ci est unique.

Démonstration. Si a_1 et a_2 sont des bornes supérieures de A, alors a_1 est majorant de A, d'où $a_2 \leq a_1$. De même $a_1 \leq a_2$. D'où $a_1 = a_2$. □

Axiome de la borne supérieure

➤ Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.

➤ De la même façon : Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure.

Caractérisation de la borne supérieure

Théorème 1.5

Soient A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et a un nombre réel. Les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

(1) $\sup A = a$

(2) $\begin{cases} \forall x \in A, x \leq a, \\ \forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in A : a - \epsilon < x_\epsilon \leq a. \end{cases}$

Démonstration. 1. ($\Longrightarrow$) Supposons que a est la borne supérieure de A. Par définition de celle ci, a est un majorant de A et la première affirmation de (2) est prouvée. Soit $\epsilon > 0$, si $a - \epsilon$ était un majorant de A , on aurait $a \leq a - \epsilon$ ce qui est faux. Puisque $a - \epsilon$ n'est pas un majorant de A, il existe $x_\epsilon \in A$ tel que $a - \epsilon < x_\epsilon$.

2. ($\Longleftarrow$) Supposons maintenant que (2) est vraie et montrons que a est la borne supérieure de A. Il est clair que a est un majorant de A . Il faut montrer que c'est le plus petit des majorants de A. Supposons que ce ne soit pas le cas. Il existe alors un réel a' qui majore A et qui est plus petit que a. On a donc :

$$\forall x \in A, x \leq a' < a.$$

Posons $\epsilon = a - a' > 0$. En appliquant (2), on peut affirmer qu'il existe un élément $x \in A$ tel que $a - \epsilon < x \leq a$, c-à-d $a' < x \leq a$, et a' ne peut être un majorant de A ce qui prouve la seconde implication par l'absurde.

□

Corollaire 1.2. *Soient A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ et b un nombre réel, on a :*

$$\inf A = b \iff \begin{cases} \forall x \in A, x \geq b, \quad \textit{et} \\ \forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in A : b \leq x_\epsilon < b + \epsilon \end{cases}$$

1.7 Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$

Définition 1.6 (Droite numérique achevée)**.** On appelle droite numérique achevée l'ensemble, noté $\overline{\mathbb{R}}$, obtenu en ajoutant les deux éléments $+\infty, -\infty$ à $\mathbb{R}$.

Notation : On prolonge la relation d'ordre $\leq$ sur $\overline{\mathbb{R}}$ en posant :

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, x \leq +\infty, x \geq -\infty.$$

Remarque 1.3. $\overline{\mathbb{R}}$ possède un plus grand élément : $+\infty$ et un plus petit élément : $-\infty$.

1.8 Propriété d'Archimède

Théorème 1.6

L'ensemble $\mathbb{R}$ vérifie la propriété suivante, dite d'Archimède :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : nx \geq y.$$

Démonstration. On raisonne par l'absurde.
Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : nx < y.$$

Définissons la partie de $\mathbb{R}$ suivante

$$\mathcal{A} = \{nx; n \in \mathbb{N}\}.$$

Elle est non vide et majorée par y. D'après l'axiome de la borne supérieure, $\mathcal{A}$ possède une borne supérieure $a \in \mathbb{R}$. En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N} : nx \leq a,$$

ce qui s'écrit aussi

$$\forall n \in \mathbb{N} : (n+1)x \leq a.$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N} : nx \leq a - x.$$

Mais alors $a - x$ est un majorant de $\mathcal{A}$ et comme $x > 0, a - x < a$. Le réel a n'est donc pas le plus petit des majorants de $\mathcal{A}$ ce qui est en contradiction avec le fait que ce soit la borne supérieure de $\mathcal{A}$. □

1.9 Partie entière

Proposition 1.3

Soit x un réel. il existe un unique entier relatif p tel que :

$$p \leq x < p + 1.$$

cet entier est appelé la partie entière de x et est noté $E(x)$ ou $[x]$.

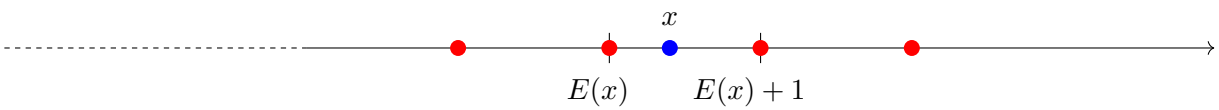


FIGURE 1.2 – Partie entière d'un réel

Exemple 1.9. $E(1.2) = 1, E(-0.6) = -1, E(\pi) = 3$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$
On considère l'ensemble $\mathbf{A} = \{n \in \mathbb{Z}, n \leq x\}$.
Montrons que la partie entière p de x existe. Cela revient à montrer que l'ensemble $\mathbf{A}$ possède un plus grand élément. On a :

1. $\mathbf{A} \neq \emptyset$, en effet, si x est positif ou nul $0 \leq x$ et donc $0 \in \mathbf{A}$. Sinon, si x est strictement négatif alors$-x \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la propriété d'Archimède, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \cdot 1 \geq -x$ et donc $-n \leq x$. D'où $-n \in \mathbf{A}$.
2. L'ensemble $\mathbf{A}$ est majoré par x et il existe, d'après la propriété d'Archimède un entier plus grand que x. Par conséquent $\mathbf{A}$ est une partie majorée de $\mathbb{Z}$.

□

Remarque 1.4. Les deux inégalités suivantes sont souvent utiles dans les exercices :

$$\forall x \in \mathbb{R}; E(x) \leq x < E(x)+1 \quad \text{et} \quad x-1 < E(x) \leq x.$$

Définition 1.7. La fonction partie entière est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout réel x associe l'entier relatif p (partie entière de x). On note cette fonction E ou $[\cdot]$.

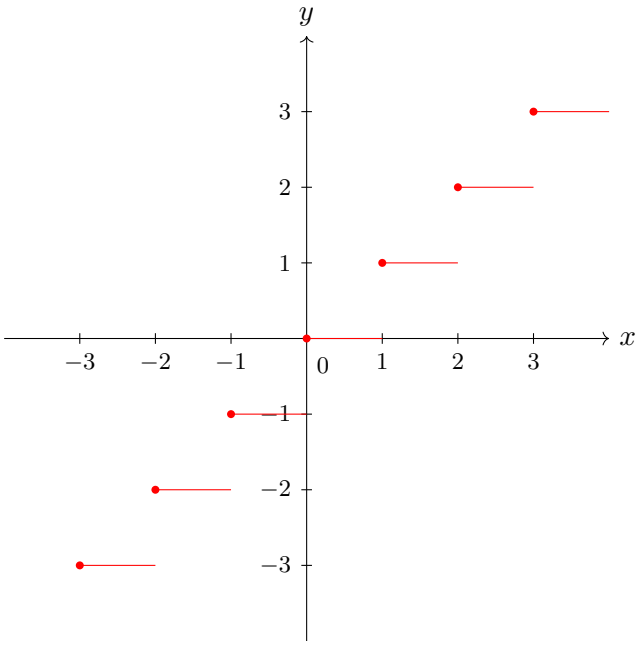


FIGURE 1.3 – Fonction partie entière

1.10 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Définition 1.8 (Partie dense)**.** Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est dense dans $\mathbb{R}$ si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists a \in A : |a-x| \leq \epsilon.$$

Théorème 1.7

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $\epsilon > 0$. Considérons un entier $q > 0$ tel que $1/q \leq \epsilon$. Posons $p = E(qx)$, on a : $p \leq qx < p+1$, d'où $p/q \leq x < (p+1)/q$. Posons $r = p/q$, le nombre r est bien rationnel et puisque : $0 \leq x - r < 1/q \leq \epsilon$, on a bien $|r-x| \leq \epsilon$. □

1.11 Exercices

Exercice 1.1. *1. Si a et b sont des réels positifs ou nuls, montrer que*

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\sqrt{2}\sqrt{a+b}.$$

2. Montrer que : $\forall a,b\in\mathbb{R},2ab\leq a^2+b^2$.

3. Déduire que : $\forall a,b,c\in\mathbb{R},ab+ac+bc\leq a^2+b^2+c^2$.

Exercice 1.2. *Trouver tous les réels x tels que*

1. $|x-1|+|x-2|=2$.
2. $|x-1|+|x+2|\leq 5$.
3. $\sqrt{x^2-6x+9}\geq|\frac{5}{2}x-1|$.

Exercice 1.3. *Déterminer les ensembles suivants, mettre chaque ensemble sous la forme d'un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une réunion d'intervalles.*

1. $A_1=\{x\in\mathbb{R};x^2\leq 1\}$
2. $A_2=\{x\in\mathbb{R};-1<\frac{2x}{x^2+1}<1\}$
3. $A_3=\{x\in\mathbb{R};-1<\frac{1}{x^2-1}<1\}$

Exercice 1.4. *1. Montrer que si $r\in\mathbb{Q}$ et $x\notin\mathbb{Q}$, alors $r+x\notin\mathbb{Q}$ et si $r\neq 0$, alors $r\cdot x\notin\mathbb{Q}$.*

2. Montrer que $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

3. En déduire que : entre deux nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel.

Exercice 1.5. *On rappelle que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel*

1. *Montrer que $\alpha=6+4\sqrt{2}$ et $\beta=6-4\sqrt{2}$ sont irrationnels.*
2. *Calculer $\sqrt{\alpha\beta}$.*
3. *Montrer que $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ est rationnel.*

Exercice 1.6. *Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. Montrer que :*

1. *Si $A\subset B$, alors : $\sup A\leq\sup B$ et $\inf B\leq\inf A$.*
2. $\sup(A\cup B)=\max\{\sup A,\sup B\}$.
3. $\inf(A\cup B)=\min\{\inf A,\inf B\}$.

Exercice 1.7. *Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. On pose*

$$-A=\{-x;x\in A\}$$
$$A+B=\{x+y;x\in A,y\in B\}$$
$$A-B=\{x-y;x\in A,y\in B\}$$

Montrer que :

1. $\sup(-A) = -\inf A$ *et* $\inf(-A) = -\sup A$
2. $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.
3. $\sup(A-B) = \sup A - \inf B$.

Exercice 1.8. *Déterminer la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément , s'ils existent, des ensembles suivants :*

$$A = [-1, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q},$$

$$B = \left\{1 + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\},$$

$$C = \left\{x \in \mathbb{R}; x^2 + x - 1 < 0\right\}.$$

Exercice 1.9. *On rappelle que* $\forall x \in \mathbb{R}; E(x) \leq x < E(x) + 1$.

1. *Montrer que* $\forall x \in \mathbb{Z}; E(x) + E(-x) = 0$.
2. *Montrer que* $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}; E(x) + E(-x) = -1$.

Exercice 1.10. *:*

1. *Montrer que pour tout réels* x *et* y *on a :* $E(x)+E(y) \leq E(x+y) \leq E(x)+E(y)+1$.
2. *Montrer que pour tout rélels* x *et* y *on a :* $E(x)+E(y)+E(x+y) \leq E(2x)+E(2y)$.
3. *Montrer que* $\forall m, n \in \mathbb{Z}; E(\frac{m+n}{2}) + E(\frac{m-n+1}{2}) = m$.
4. *Montrer que* $\forall n \in \mathbb{N}; E((\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2) = 4n + 1$.

CHAPITRE 2

CORPS DES NOMBRES COMPLEXES

Définition 2.1 (Corps des nombres complexes)**.** On appelle corps des nombres complexes, et on le note $\mathbb{C}$, l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des deux lois internes $\oplus$ et $\otimes$ définies de la façon suivante. Pour tous couples (x, y), (x', y') de $\mathbb{R}^2$, on pose

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y'),$$

$$(x, y) \otimes (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y).$$

Pour simplifier les écritures, on note $+$ et $\times$ (ou $\cdot$) les lois de composition interne $\oplus$ et $\otimes$. Pour tout nombre réel x, on identifie le nombre complexe $(x, 0)$ avec le réel x. On note i le nombre complexe $(0, 1)$. En appliquant cette convention et en utilisant la définition de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{C}$, on peut écrire pour tout nombre complexe (x, y),

$$(x, y) = x + iy.$$

En effet,

$$(x, y) = (x, 0) + y(0, 1) = x + iy.$$

La formule du produit donne

$$i^2 = (0, 1) \times (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Si $z = x + iy$ un nombre complexe, sa **partie réelle** est le réel x et on la note $Re(z)$, sa **partie imaginaire** est le réel y et on la note $Im(z)$.

2.1 Opérations algébriques sur les nombres complexes

Avec les conventions d'écriture précédentes, l'addition et la multiplication définies sur $\mathbb{R}^2$, deviennent pour tous complexes $x + iy, x' + iy'$:

$$(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y'),$$

$$(x + iy) \times (x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y).$$

2.1.1 Propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{C}$

Proposition 2.1

L'addition dans $\mathbb{C}$

1. est **associative** : $\forall z, z', z'' \in \mathbb{C} \quad (z + z') + z'' = z + (z' + z'')$,
2. est **commutative** : $\forall z, z' \in \mathbb{C} \quad z + z' = z' + z$,
3. possède un **élément neutre** 0 : $\forall z \in \mathbb{C} \quad z + 0 = z$,
4. de plus, tout nombre complexe $z = x + iy$ possède un **opposé**, $-z = -x - iy$.
   On résume ces quatre propriétés en disant que $(\mathbb{C}, +)$ est un **groupe commutatif**.

Proposition 2.2

La multiplication $\mathbb{C}$

1. est **associative** : $\forall z, z', z'' \in \mathbb{C} \quad (z \times z') \times z'' = z \times (z' \times z'')$,
2. est **commutative** : $\forall z, z' \in \mathbb{C} \quad z \times z' = z' \times z$,
3. possède un **élément neutre** 1 : $\forall z \in \mathbb{C} \quad z \times 1 = z$,
4. de plus, tout nombre complexe non nul $z = x + iy$ possède un **inverse**, z^{-1} donné par
$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$
   On résume ces quatre propriétés en disant que $(\mathbb{C}^*, +)$ est un **groupe commutatif**.

2.1.2 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 2.2. Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. On appelle **conjugué** de z que l'on note $\overline{z}$ le nombre complexe défini par $\overline{z} = x - iy$.

Proposition 2.3

Pour tous complexe z, z', on a :

1. $Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}, Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}, \overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
3. $\overline{(\frac{z}{z'})} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}, z' \neq 0$
4. $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

2.1.3 Module d'un nombre complexe

Définition 2.3. Le module de $z = x + iy$ est le réel positif $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Comme $z \times \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$, alors le module vaut aussi $|z| = \sqrt{z \times \overline{z}}$.

Proposition 2.4

Pour tous complexe z, z', on a :

1. $|z|^2 = z \times \overline{z}, |\overline{z}| = |z|, |z \times z'| = |z| \times |z'|, |\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}, z' \neq 0$

2. $|z| = 0 \iff z = 0$
3. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$, (l'inégalité triangulaire)

2.1.4 Représentation géométrique d'un nombre complexe

Le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, se nomme **plan complexe**.
A tout nombre complexe z d'écriture algébrique $z = x + iy$ correspond un unique point M du plan de coordonnées (x, y).

- ➤ On dit z est **l'affixe** de M et on note $M(z)$.
- ➤ On dit que M est **l'image** ponctuelle de z.

A tout nombre complexe z d'écriture algébrique $z = x + iy$ correspond un unique vecteur $\overrightarrow{V}$ du plan de coordonnées (x, y).
Si z est l'affixe de M alors, $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{OM}$.

- ➤ On dit z est **l'affixe** de $\overrightarrow{V}$ et on note $\overrightarrow{V}(z)$.
- ➤ On dit que $\overrightarrow{V}$ est **l'image** vectorielle de z.

Remarque 2.1.
- ➤ L'axe des abscisses $(O, \vec{i})$ est l'ensemble des images ponctuelles des nombres réels. On le nomme **l'axe réel**.
- ➤ L'axe des ordonnées $(O, \vec{j})$ est l'ensemble des images ponctuelles des imaginaires purs. On le nomme **l'axe imaginaire**.

2.2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

2.2.1 Argument d'un nombre complexe

Proposition 2.5

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul, il existe au moins un réel θ tel que

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{x}{|z|}, \\ \sin(\theta) = \frac{y}{|z|}. \end{cases}$$

Le nombre θ est appelé **un argument** de z et noté $\theta = \arg(z)$.

Cet argument est défini modulo 2π. On peut imposer à cet argument d'être unique si on rajoute la condition $\theta \in]-\pi, +\pi]$.
L'écriture $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ s'appelle la forme **trigonométrique** de z.

Proposition 2.6

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls. On a :

1. $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')(\mod 2\pi)$
2. $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z')(\mod 2\pi)$
3. $\overline{z} = \arg(\frac{1}{z}) = -arg(z)(\mod 2\pi)$
4. $\arg(z^n) = n\arg(z)(\mod 2\pi), \forall n \in \mathbb{Z}$

2.3 Formules d'Euler

Définition 2.4. Pour tout réel θ, nous appellerons **exponentielle imaginaire** de θ et nous noterons $e^{i\theta}$ le nombre complexe défini par

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Nous définissons la notation exponentielle par

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta),$$

et donc tout nombre complexe z s'écrit

$$z = re^{i\theta},$$

où $r = |z|$ est le module de z et $\theta = \arg(z)$ est un argument de z.

Proposition 2.7

Pour tout réel θ, θ', on a

1. $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
2. $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}}$
3. $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \theta' + 2k\pi$

Formules d'Euler

Théorème 2.1

Pour tout réel θ, on a

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \ \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

2.4 Racine n-ième d'un nombre complexe

Définition 2.5. Pour $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, une racine n-ième de z est un nombre complexe w tel que

$$w^n = z.$$

Proposition 2.8

Pour tous $z \in \mathbb{C}$, il y a n racine n-ième.
Si $z = re^{i\theta}$, alors les n racine n-ième ce sont :

$$w_k = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, k = 0, 1, ..., n-1.$$

2.5 Exercices

Exercice 2.1. *Mettre sous la forme $a+ib$ $(a,b\in\mathbb{R})$ les nombres :*

$$\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2+\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}.$$

Exercice 2.2. *Écrire sous la forme $a+ib$ les nombres complexes suivants :*

1. *Nombre de module 2 et d'argument $\pi/3$.*
2. *Nombre de module 3 et d'argument $-\pi/8$.*

Exercice 2.3. *Effectuer les calculs suivants :*

1. $(3+2i)(1-3i)$.
2. *Produit du nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-5\pi/6$.*
3. $\frac{3+2i}{1-3i}$.
4. *Quotient du nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-5\pi/6$.*

Exercice 2.4. *Calculer le module et l'argument de $u=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $v=1-i$. En déduire le module et l'argument de $w=\frac{u}{v}$.*

Exercice 2.5. *Déterminer le module et l'argument des nombres complexes :*

$$e^{e^{i\alpha}} \quad \textit{et} \quad e^{i\theta}+e^{2i\theta}.$$

Exercice 2.6. *Soit z un nombre complexe de module ρ, d'argument θ, et soit $\overline{z}$ son conjugué. Calculer $(z+\overline{z})(z^2+\overline{z}^2)\dots(z^n+\overline{z}^n)$ en fonction de ρ et θ.*

Exercice 2.7. *Mettre sous forme trigonométrique $1+e^{i\theta}$ où $\theta\in]-\pi,\pi[$. Donner une interprétation géométrique.*

Exercice 2.8. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3=\frac{1}{4}(-1+i)$ et montrer qu'une seule de ses solutions a une puissance quatrième réelle.*

Exercice 2.9. *Calculer $\frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}}$ algébriquement, puis trigonométriquement. En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$, $\tan\frac{\pi}{12}$, $\tan\frac{5\pi}{12}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{24}=1$.*

CHAPITRE 3

SUITES DE NOMBRES RÉELS

3.1 Définitions

Définition 3.1. Une suite réelle est une fonction $u : \mathcal{N} \subset \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. On note cette fonction sous forme indicielle $(u_n)_{n\in\mathcal{N}}$, ou tout simplement (u_n) si $\mathcal{N} = \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathcal{N}$, on note $u(n)$ par u_n et on l'appelle n-ème terme ou terme général de la suite.

Exemple 3.1. *:*

1. $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite de termes :* $0, 1, \sqrt{2}, ...$
2. $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite qui alterne :* $1, -1, 1, -1, 1, ...$
3. $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $F_0 = 1, F_1 = 1$ *et la relation de récurrence :* $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \forall n \in \mathbb{N}$*, (suite de Fibonacci). Les premiers termes sont :* $1, 1, 2, 3, 5, 8, ...$

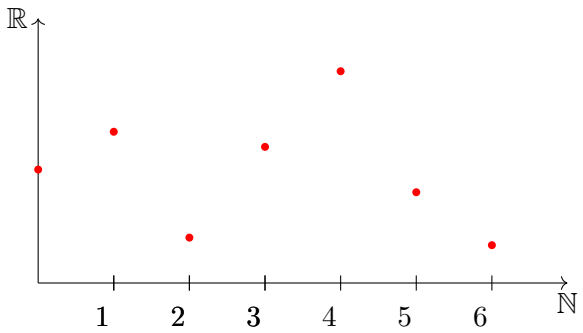


FIGURE 3.1 – Représentations d'une suite réelle

Définition 3.2 (Opérations sur les suites)**.** Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites et λ un réel, on a :

1. $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$.

2. $\lambda(u_n) = (\lambda u_n)$.
3. $(u_n) \times (v_n) = (u_n \cdot v_n)$.

Définition 3.3 (Suite majorée, minorée, bornée)**.** Soit (u_n) une suite réelle.

1. (u_n) est majorée si :$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}; u_n \leq M$.
2. (u_n) est minorée si :$\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}; u_n \geq m$.
3. (u_n) est bornée si elle est majorée et minorée à la fois.

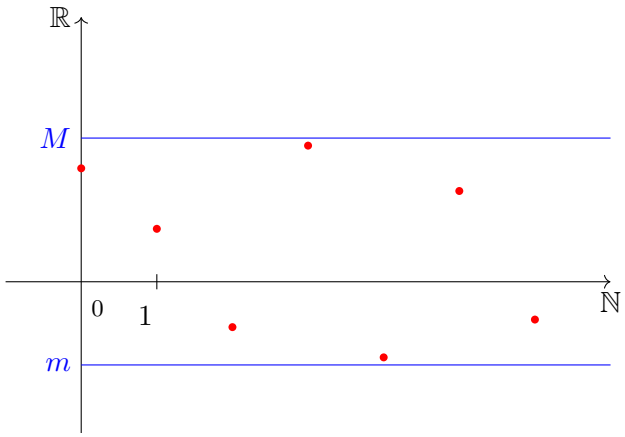


FIGURE 3.2–Suite réelle bornée

Proposition 3.1

Soit (u_n) une suite réelle. (u_n) est bornée ssi :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}; |u_n| \leq M.$$

Démonstration. Supposons que la suite (u_n) est bornée. Alors il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}; m \leq u_n \leq M$. On note $k = \max(|m|, |M|)$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq k$.
La suite $(|u_n|)$ est majorée par le réel k. Si la suite $(|u_n|)$ est majorée, il existe

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}; |u_n| \leq M,$$

et donc $\forall n \in \mathbb{N}; -M \leq u_n \leq M$. ce qui prouve que la suite (u_n) est bornée. □

Définition 3.4 (Suite croissante, décroissante, monotone)**.** Soit (u_n) une suite.

1. (u_n) est croissante si :$\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} \geq u_n$.
2. (u_n) est décroissante si :$\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} \leq u_n$.
3. (u_n) est monotone si :elle est croissante ou décroissante.
4. On dit que (u_n) est strictement croissante , strictement décroissante ou strictement monotone si l'inégalité correspondante est stricte.

Définition 3.5 (Suite constante)**.** Une suite réelle (u_n) est dite constante si :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}; u_n = \alpha.$$

Exercice 3.1. *Soit (u_n) une suite, définie par : $u_n = \frac{n}{n+1}$*

1. *Montrer que (u_n) est décroissante.*
2. *Montrer que (u_n) est bornée.*

3.2 Convergence d'une suite

Soit (u_n) une suite réelle.

Définition 3.6 (Limite finie)**.** (u_n) a pour limite $l \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; n \geq N \implies |u_n - l| \leq \epsilon.$$

C'est à dire, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier naturel N (dépend de ϵ) tel que ; si $n \geq N$, alors $|u_n - l| \leq \epsilon$. On dit aussi que la suite (u_n) tend vers l.
Et on écrit

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l.$$

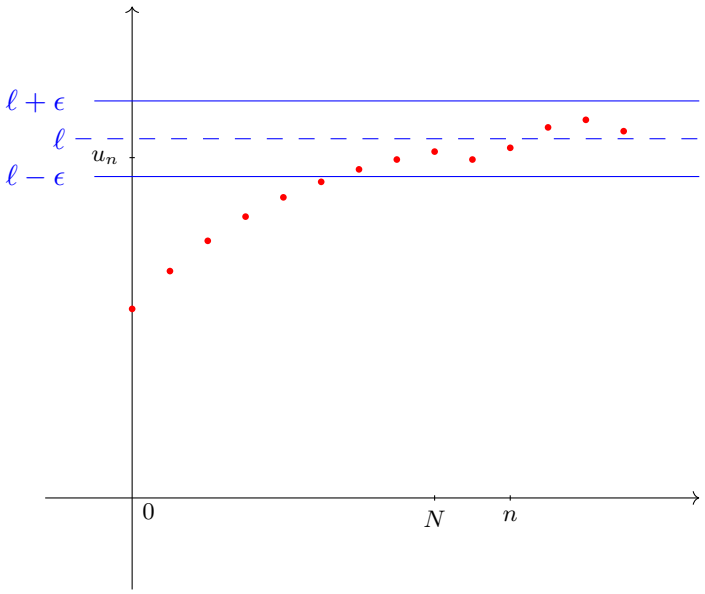


FIGURE 3.3–Limite finie d'une suite réelle

Exemple 3.2. *Montrons que* $\lim_{n \to +\infty} (\frac{1}{n}) = 0$.

Nous devons montrer que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^* : (n \geq N \implies \left| \frac{1}{n} - 0 \right| \leq \epsilon).$$

Soit $\epsilon > 0$,

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| \leq \epsilon \iff n \geq \frac{1}{\epsilon}.$$

Il suffit de choisir $N = E(\frac{1}{\epsilon}) + 1$.
CCL. $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}(= E(\frac{1}{\epsilon}) + 1), \forall n \in \mathbb{N}^* : (n \geq N \implies \left|\frac{1}{n} - 0\right| \leq \epsilon)$.

Proposition 3.2

On peut utiliser une inégalité stricte dans la définition de convergence. La suite (u_n) a pour limite $l \in \mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; n \geq N \implies |u_n - l| < \epsilon.$$

Démonstration. :

1. $\Longleftarrow$ est évidente puisqu'une inégalité stricte est à fortiori large.
2. $\Longrightarrow$ soit $\epsilon > 0$. On pose $\epsilon' = \epsilon/2 > 0$. Puisque (u_n) tend vers l, il existe un entier naturel N tel que ; si $n \geq N$, alors $|u_n - l| \leq \epsilon' < \epsilon$.

□

Définition 3.7 (Limite infinie)**.** :

1. La suite (u_n) tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \implies u_n \geq A).$$

2. La suite (u_n) tend vers $-\infty$ si :

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \implies u_n \leq -A).$$

Exemple 3.3. *Montrons que :* $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n) = +\infty$. *Nous devons montrer que :*

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N \implies \geq \ln(n) \geq A).$$

Soit $A > 0$,

$$\ln(n) \geq A \iff n \geq e^A.$$

Il suffit de choisir $N = E(e^A) + 1$.
CCL : $\forall A > 0, \exists N (= E(e^A) + 1) \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq N \implies \ln(n) \geq A)$.

Définition 3.8 (Suite convergente, suite divergente)**.** On dit que une suite (u_n) est convergente si elle admet une limite finie. Elle est divergente sinon, c-à-d soit la suite tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, soit n'admet pas de limite.

Théorème 3.1

Si une suite est convergente, alors sa limite est unique.

Démonstration. Soit (u_n) une suite convergente ayant deux limites $l \neq l'$. Choisissons $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon < |l - l'|/2$. Puisque $u_n \longrightarrow l$, il existe un entier naturel N_1 tel que ; si $n \geq N_1$, alors $|u_n - l| < \epsilon$ et puisque $u_n \longrightarrow l'$, il existe un entier naturel N_2 tel que ; si $n \geq N_2$, alors $|u_n - l'| < \epsilon$. Notons $N = \max(N_1, N_2)$, donc on a : pour tout $n \geq N$, $|u_n - l| < \epsilon$ et $|u_n - l'| < \epsilon$, mais alors, en utilisant l'inégalité triangulaire,

$$|l - l'| = |l - l' + u_n - u_n| \leq |u_n - l| + |u_n - l'| \leq 2\epsilon < |l - l'|,$$

ce qui est absurde. □

Théorème 3.2

Soit (u_n) une suite converge vers l, alors $|u_n| \longrightarrow |l|$.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Puisque (u_n) tend vers l, il existe un entier naturel N tel que ; si $n \geq N$, alors $|u_n - l| \leq \epsilon$. On a : $||u_n| - |l|| \leq |u_n - l|$. Donc si $n \geq N$, alors $||u_n| - |l|| \leq \epsilon$ □

Théorème 3.3

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. Posons $\epsilon = 1$. Puisque (u_n) tend vers l, il existe un entier naturel N tel que ; si $n \geq N$, alors $|u_n - l| \leq 1$. On a : $|u_n| - |l| \leq |u_n - l|$. Donc si $n \geq N$, alors $|u_n| \leq |l| + 1$. Les premiers termes sont en nombre fini, donc on peut poser $M = \max(|u_0|, |u_1|, ..., |u_{N-1}|, |l| + 1)$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$, ce qui montre que la suite est bornée. □

Théorème 3.4

Soient (u_n) une suite converge vers l et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < l < \beta$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\alpha \leq u_n \leq \beta$.

Démonstration. Posons $\epsilon = \min(l - \alpha, \beta - l) > 0$. Puisque (u_n) tend vers l, il existe un entier naturel N tel que ; si $n \geq N$, alors $|u_n - l| \leq \epsilon$, c-à-d $l - \epsilon \leq u_n \leq l + \epsilon$, d'où pour tout $n \geq N$, $\alpha \leq u_n \leq \beta$. □

3.2.1 Opérations sur les limites

Proposition 3.3

Soient (u_n) et (v_n).

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda l$.
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = l + l'$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \cdot v_n) = ll'$.
3. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, avec $(l \neq 0)$, alors : $u_n \neq 0$, à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l}$.
4. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = 0$.
5. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et la suite (v_n) est minorée, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.
6. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et la suite (v_n) est minorée par un réel $\lambda > 0$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \cdot v_n) = +\infty$.
7. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $u_n > 0$ pour n assez grand, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$.

Démonstration. 1. Soit $\epsilon > 0$. Posons $\epsilon' = \epsilon/|\lambda| > 0$, puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, alors $|u_n - l| \leq \epsilon'$. D'autre part on a :

$$|\lambda u_n - \lambda l| = |\lambda||u_n - l|.$$

Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, alors $|\lambda u_n - \lambda l| \leq |\lambda|\epsilon' = \epsilon$.

2. Soit $\epsilon > 0$. Posons $\epsilon' = \epsilon/2 > 0$, puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N_1$, alors $|u_n - l| \leq \epsilon'$. De même il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N_2$, alors $|v_n - l'| \leq \epsilon'$. Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Soit $n \geq N$, comme $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$:

$$|(u_n + v_n) - (l + l')| \leq |u_n - l| + |v_n - l'| \leq 2\epsilon' = \epsilon.$$

3. Soit $\epsilon > 0$. Posons $\epsilon' = |l|^2\epsilon/2 > 0$, puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N_1$, alors $|u_n - l| \leq \epsilon'$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = |l|$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N_2$, alors $|u_n| \geq |l|/2$. Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Soit $n \geq N$,

$$|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}| = \frac{|u_n - l|}{|u_n||l|} \leq \frac{\epsilon'}{|u_n||l|} \leq \epsilon.$$

4. Soit $\epsilon > 0$. Posons $A = 1/\epsilon$, puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, alors $u_n \geq A$, donc $0 \leq \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{A} = \epsilon$.

□

Proposition 3.4

Si la suite (u_n) est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \cdot v_n) = 0$.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Posons $\epsilon' = \epsilon/M$, puisque $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, alors $|v_n| \geq \epsilon'$, Mais pour $n \geq N$, on a : $|u_n \cdot v_n| = |u_n||v_n| \leq M\frac{\epsilon}{M} = \epsilon$. On a bien montré que $\lim_{n\to+\infty}(u_n \cdot v_n) = 0$.

□

Formes indéterminées Dans certaines situations, on ne peut rien dire à priori sur la limite. Ces sont dit cas indéterminées.

$$+\infty - \infty,\ 0 \times \infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0},\ 1^{\infty}.$$

Exemple 3.4.

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - n\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} = \frac{1}{2}.$$

3.2.2 Limites et inégalités

Proposition 3.5

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) des suites réelles, et $k \in \mathbb{R}$.

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et à partir d'un certain rang, $u_n \leq k$, alors : $l \leq k$.
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, $\lim_{n\to+\infty} v_n = l'$ et à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$, alors : $l \leq l'$.
3. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
4. Théorème des gendarmes : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ et à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

Démonstration. 1. On raisonne par l'absurde. Supposons que $l > k$. Posons $\epsilon = l - k > 0$, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1, \quad u_n > l - \epsilon = k$. D'autre part il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_2, \quad u_n \leq k$, on prend $N = \max(N_1, N_2)$. Soit $n \geq N$, donc on a d'une part $u_n > k$ et d'autre part $u_n \leq k$ qui est absurde.

2. Il suffit d'utiliser le résultat précédent avec la suite $(w_n) = (u_n - v_n)$ et $k = 0$.
3. Soit $A > 0$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1, \quad u_n > A$. D'autre part il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_2, \quad u_n \leq v_n$. Posons $N = \max(N_1, N_2)$, donc on a : $\forall n \geq N, v_n \geq u_n > A$. On a bien montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
4. Soit $\epsilon > 0$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1, \quad |u_n - l| \leq \epsilon$. De même, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_2, \quad |w_n - l| \leq \epsilon$. D'autre part, il existe $N_3 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_3, \quad u_n \leq v_n \leq w_n$. Posons $N = \max(N_1, N_2, N_3)$. Soit $n \geq N$, on a :

$$l - \epsilon \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq l + \epsilon.$$

On a bien montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

□

Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

Théorème 3.5

On considère une partie X non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Elle possède une borne supérieure $\sup X$. Soit $l \in \mathbb{R}$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.

1. $l = \sup X$.
2. l est un majorant de X et il existe une suite (x_n) d'éléments de X qui converge vers l.

Démonstration. 1. $\Longrightarrow$ On sait que $\sup X$ est un majorant de la partie X. On a : $\forall \epsilon > 0, \exists x \in X, \sup X - \epsilon < x \leq \sup X$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en prenant $\epsilon = 1/n > 0$ dans la propriété ci-dessus, il existe un réel $x_n \in X$, vérifiant $\sup X - 1/n < x_n \leq \sup X$. On construit ainsi une suite de points (x_n) de X qui converge vers $\sup X$ d'après le théorème des gendarmes.

2. $\Longleftarrow$ Montrons que l est le plus petit des majorants de la partie X. Soit M un majorant de X, on a $\forall x \in X, x \leq M$. d'où $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq M$. Mais puisque $x_n \longrightarrow l$, par passage à la limite dans les inégalités, on en déduit que $l \leq M$.

□

3.3 Suite extraite d'une suite

Définition 3.9. On dit qu'une suite (v_n) est une suite extraite ou une sous suite d'une suite (u_n) s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}.$$

Lemme 3.1. *Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, une application strictement croissante, alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n.$$

Démonstration. On raisonne par récurrence. Si $n = 0$, on a : $\varphi(0) \geq 0$ (car $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \in \mathbb{N}$)).
Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\varphi(n) \geq n$. Montrons que $\varphi(n+1) \geq n+1$, puisque φ, est strictement croissante, $\varphi(n+1) > \varphi(n) \implies \varphi(n+1) \geq \varphi(n) + 1 \geq n+1$. La propriété est alors prouvée par application du principe de récurrence. □

Proposition 3.6

Toute suite extraite, d'une suite convergente, est convergente vers la même limite.

Démonstration. Soient (u_n) une suite convergente vers le réel l et $(u_{\varphi(n)})$ une suite extraite de (u_n). Montrons que $(u_{\varphi(n)})$ converge vers l. Soit $\epsilon > 0$. Puisque (u_n) converge vers l, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N, |u_n - l| \leq \epsilon$. Soit $n \geq N$. D'après le lemme précédent, $\varphi(n) \geq n \geq N$, donc $|u_{\varphi(n)} - l| \leq \epsilon$. On a bien montré que $u_{\varphi(n)}$ converge vers l. □

Corollaire 3.1 (Critère de divergence d'une suite)**.** *Soit (u_n) une suite. Si elle admet deux sous-suites convergeant vers des limites distinctes, alors elle diverge.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Supposons que la suite (u_n) est converge vers le réel l. et les deux sous suites $(u_{\varphi(n)})$ et $(u_{\psi(n)})$ convergent (resp.) vers l_1 et l_2 avec $l_1 \neq l_2$. D'après la proposition précédente les deux sous suites $(u_{\varphi(n)})$ et $(u_{\psi(n)})$ convergent vers l et donc $l = l_1 = l_2$ ce qui est absurde. □

Exemple 3.5. *La suite $(u_n) = ((-1)^n)$ est divergente. En effet, la suite extraite (u_{2n}) converge vers 1, alors que la suite extraite (u_{2n+1}) converge vers -1.*

3.4 Suites monotones

Théorème 3.6

Soit (u_n) une suite croissante. On a :

1. Si la suite (u_n) est majorée, alors elle converge vers une limite finie l donnée par $l = \sup\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$.
2. Si la suite (u_n) n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.

Démonstration. :

1. Supposons que (u_n) soit une suite croissante et majorée par un réel M. L'ensemble $\mathcal{A} = \{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et majorée, donc elle admet une borne supérieure $l \in \mathbb{R}$. Montrons que (u_n) converge vers l. Soit $\epsilon > 0$. D'après la caractérisation de la borne supérieure, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $l - \epsilon < u_N \leq l$. Soit $n \geq N$. Puisque (u_n) est croissante, $l - \epsilon < u_N \leq u_n \leq l$. Mais alors $-\epsilon < u_n - l \leq 0$ ce qui montre que $|u_n - l| \leq \epsilon$.
2. Supposons que (u_n) est croissante mais non majorée. Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geq A$. Comme (u_n) est croissante, on a $\forall n \geq N, u_n \geq u_N \geq A$. Par conséquent $u_n \longrightarrow +\infty$.

□

Corollaire 3.2. *Soit (u_n) une suite décroissante. On a :*

1. *Si la suite (u_n) est minorée, alors elle converge vers une limite finie l donnée par $l = \inf\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$.*

2. *Si la suite (u_n) n'est pas minorée, alors elle diverge vers $-\infty$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la propriété précédente à la suite $(-u_n)$. □

3.5 Suites adjacentes

Définition 3.10. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) et (v_n) sont adjacentes si (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante et $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Théorème 3.7

Si les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, elles convergent vers la même limite.

Démonstration.

1. Remarquons tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$. En effet, si ce n'est pas le cas, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N - v_N > 0$. Mais alors, comme (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, il vient pour tout $n \geq N, u_n - v_n \geq u_N - v_N > 0$ ce qui est en contradiction avec le fait que $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$. On en déduit en particulier que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq v_0$ car v_n est décroissante et $v_n \geq u_n \leq u_0$ car (u_n) est croissante.
2. (u_n) est croissante et majorée par v_0, donc (u_n) converge vers une limite l_1 et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq l_1$.
3. (v_n) est décroissante et minorée par u_0, donc (v_n) converge vers une limite l_2 et pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \geq l_2$.
4. Enfin : $0 = \lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n - \lim_{n\to+\infty} v_n = l_1 - l_2$. Par conséquent $l_1 = l_2$. Les deux suites convergent donc vers la même limite.

□

3.6 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Corollaire 3.3 (Théorème des segments emboîtés)**.** *Soit (I_n) une suite de segments $I_n = [a_n, b_n]$ tels que ils sont emboîtés c-à-d : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n$, et leur diamètre tend vers 0 c-à-d : $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$. Alors il existe un réel l tel que $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{l\}$.*

Démonstration. :

1. ($\supset$) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, l \in I_n$. Puisque (a_n) et (b_n) sont adjacentes et convergent vers l, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq l \leq b_n$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}, l \in I_n$, c-à-d : $l \in \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.
2. ($\subset$) Soit $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Montrons que $x = l$. On a $\forall n \in \mathbb{N}, x \in a_n \leq x \leq b_n$, par passage à la limite dans les inégalités, on en tire que : $x = l$.

□

Théorème 3.8

De toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.

Démonstration. On procède par dichotomie. L'ensemble des valeurs de la suite est par hypothèse contenu dans un intervalle $[a, b]$. Posons $a_0 = a, b_0 = b, \varphi(0) = 0$. Au moins l'un des deux intervalles $[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$ ou $[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$ contient u_n pour une infinité d'indices n. On note $[a_1, b_1]$ un tel intervalle, et on note $\varphi(1)$ un entier $\varphi(1) > \varphi(0)$ tel que $u_{\varphi(1)} \in [a_1, b_1]$ En itérant cette construction, on construit pour tout entier naturel n un intervalle $[a_n, b_n]$

, de longueur $\frac{b-a}{2^n}$, et un entier $\varphi(n) > \varphi(n-1)$ tel que $u_{\varphi(n)} \in [a_n, b_n]$. Notons que par construction la suite (a_n) est croissante et la suite (b_n) est décroissante. Comme de plus $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$, les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et donc convergent vers une même limite l. On a : $a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n$, par passage à la limite dans les inégalités, on en tire que : $lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = l$. □

3.7 Limite supérieure, limite inférieure

Définition 3.11. Soit (u_n) une suite réelle bornée. La limite supérieure (resp. inférieure), notée $\limsup u_n$ (resp. $\liminf u_n$), est la plus grande (resp. petite) valeur d'adhérence de la suite (u_n).

Exemple 3.6. *Soit* $u_n = (-1)^n$*, donc* $\limsup u_n = 1$ *et* $\liminf u_n = -1$.

Proposition 3.7

Soit (u_n) une suite réelle bornée. On considère la suite a_n définit par

$$a_n = \sup\{u_p, p \geq n\}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} \sup u_n = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{p\geq n} u_p = \inf \sup_{p\geq n} u_p.$$

On considère la suite b_n définit par

$$b_n = \inf\{u_p, p \geq n\}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} \inf u_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{p\geq n} u_p = \sup \inf_{p\geq n} u_p.$$

De plus on a

$$\lim_{n\to+\infty} \inf u_n \leq \lim_{n\to+\infty} \sup u_n.$$

Démonstration. La suite (u_n) est bornée, et les ensembles $A_n = \{u_p, p \geq n\}$ sont non vides et bornés, donc ils admettent des bornes supérieures et des bornes inférieures et les suites (a_n) et (b_n) sont bien définies. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$ et donc $\sup A_{n+1} \leq \sup A_n$ et $\inf A_{n+1} \geq \inf A_n$. Ainsi la suite (a_n) est décroissante et la suite (b_n) est croissante. D'où (a_n) converge vers $\inf a_n$ et (b_n) converge vers $\sup b_n$.
Montrons maintenant que $\liminf u_n \leq \limsup u_n$.
Comme $b_n \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$, par passage à la limite, on obtient $\sup b_n \leq \inf a_n$, d'où le résultat.
□

Proposition 3.8

Une suite (u_n) converge, si et seulement si, sa limite inférieure est égale à sa limite supérieure.

Démonstration. Démontrons d'abord la condition suffisante. Par construction, la suite (u_n) est encadrée par les suites (a_n) et (b_n),

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n \leq u_n \leq a_n.$$

Si les deux suites (a_n) et (b_n) ont la même limite, alors (u_n) converge vers cette limite, par le théorème des gendarmes.
Réciproquement, si la suite (u_n) converge, vers $\in \mathbb{R}$, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier n_0 à partir duquel tous les ensembles $\{u_p, p \geq n\}$ sont inclus dans l'intervalle $[l-\epsilon, l+\epsilon]$, ce qui implique :

$$l - \epsilon \leq b_n \leq a_n \leq l + \epsilon.$$

Donc

$$l - \epsilon \leq \liminf u_n \leq \limsup u_n \leq l + \epsilon.$$

Cet encadrement étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, il entraîne :

$$l = \liminf u_n = \limsup u_n.$$

□

3.8 Suites de Cauchy

Définition 3.12. Soit (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n) est de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 : (p \geq N, q \geq N) \implies |u_p - u_q| < \epsilon.$$

Une suite qui n'est pas de Cauchy est caractérisée par :

$$\exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists (p,q) \in \mathbb{N}^2 : (p \geq N, q \geq N) \quad \text{et} \quad |u_p - u_q| \geq \epsilon.$$

Exemple 3.7.

1. *La suite géométrique (a^n), pour $0 < a < 1$ est de Cauchy. On a pour $p > n > 0$, $|a^n - a^p| = a^n|1 - a^{p-n}|$. Donc, en prenant $N = [\ln(\epsilon)/\ln(a)] + 1$, on obtient*
$$p > n \geq N, |a^n - a^p| < \epsilon.$$
2. *La suite $(\ln n)_{n\geq 1}$ n'est pas une suite de Cauchy. On a pour $p > n > 0$,*
$$0 < \ln p - \ln n = \ln\left(\frac{p}{n}\right),$$
donc si $p = 2n$, on a $\ln p - \ln n = \ln 2$. Donc, pour $\epsilon = \ln 2$ et pour tout entier positif N, il existe des entiers $p = 2n$ et n supérieurs à N tels que $\ln p - \ln n = \ln 2$.

Théorème 3.9

Toute suite de Cauchy est bornée.

Démonstration. Soit (u_n) une suite de Cauchy, donc on a

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p,q \in \mathbb{N} : (p \geq N, q \geq N) \implies |u_p - u_q| \leq \epsilon.$$

On fixe $\epsilon = 1$. De ce qui précède on peut déduire qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ fixé tel que pour tout $n \geq N_1$:

$$|u_n - u_{N_1}| \leq 1,$$

on a donc pour tout $n \geq N_1$:

$$-1 + u_{N_1} \leq u_n \leq 1 + u_{N_1}.$$

On pose $M = \max\{|u_0|, |u_1|, \cdots, |u_{N_1-1}|, 1+|u_{N_1}|\}$. Ainsi on a pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$. □

Théorème 3.10

Toute suite convergente est de Cauchy.

Démonstration. Soit (u_n) une suite convergente est de limite l. Soit $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - l| \leq \epsilon/2$ pour tout $n \geq N$. Soient $p \geq N$ et $q \geq N$, on a

$$|u_p - u_q| = |u_p - u_q + l - l| \leq |u_p - l| + |u_q - l| \leq \epsilon.$$

Ainsi (u_n) est bien une suite de Cauchy. □

Théorème 3.11

Toute suite (u_n) de Cauchy de nombres réels est convergente vers un nombre réel l.

Démonstration. On a d'abord, (u_n) est bornée d'après le théorème 2.10.
On pose $A_n = \{u_k, k \geq n\}$. On a montré que A_n est bornée, elle admet donc une borne inférieure a_n et une borne supérieure b_n et

$$A_{n+1} \subset A_n \implies [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n].$$

Pour n fixé supérieure à N, il résulte de la définition des bornes

$$\begin{aligned} &\exists p \geq n \quad \text{tel que} \quad u_p \leq a_n + \epsilon, \\ &\exists q \geq n \quad \text{tel que} \quad u_q \geq b_n - \epsilon, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} b_n - a_n =& (b_n - u_q) + (u_q - u_p) + (u_p - a_n), \\ |b_n - a_n| \leq& |b_n - u_q| + |u_q - u_p| + |u_p - a_n| \leq 3\epsilon. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \geq N, |b_n - a_n| \leq 3\epsilon.$$

Les suites (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes. Elles sont donc convergentes vers la même limite $l \in \mathbb{R}$: D'autre part et puisque $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$a_n \leq u_n \leq b_n,$$

le théorème des gendarmes montre que la suite (u_n) est aussi convergente et vers la même limite l. □

3.9 Suites récurrentes

3.9.1 Suite récurrente définie par une fonction

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Une suite récurrente est définie par son premier terme et une relation de récurrence permettant de calculer les termes de proche en proche :

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour} \quad n \geq 0.$$

Définition 3.13 (Intervalle stable)**.** On dit que un intervalle I est stable par la fonction f, si, $f(I) \subset I$, c-à-d, $\forall x \in I, f(x) \in I$.

Proposition 3.9

La suite récurrente reste dans un intervalle stable.

Démonstration. On raisonne par récurrence. Pour $n = 0$, on a $u_0 \in I$. Supposons la propriété vraie au rang $n, u_n \in I$. Puisque $u_{n+1} = f(u_n)$ et que I est stable par f, $f(u_n) \in I$. □

Proposition 3.10

Si la suite (u_n) converge vers une limite finie l, et si la fonction f est continue au point l, alors l est un point fixe de la fonction f, c-à-d, $f(l) = l$.

Démonstration. Si (u_n) converge vers l, alors la suite extraite (u_{n+1}) converge vers la même limite l. De plus, comme la fonction f est continue au point l, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(l)$. Par unicité de la limite, on doit avoir $l = f(l)$. □

Cas d'une fonction croissante

Proposition 3.11

On suppose que la fonction f est continue et croissante sur un intervalle I stable et que $u_0 \in I$.

1. Si $u_0 \leq f(u_0)$, alors la suite (u_n) est croissante.
2. Si $u_0 \geq f(u_0)$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration. :

1. Supposons que $u_0 \leq f(u_0)$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$. La propriété est vraie pour $n = 0$ par hypothèse. Supposons-la vraie au rang $n : u_n \leq u_{n+1}$. Puisque f est croissante sur I, $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ c-à-d : $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.
2. Le même raisonnement pour le deuxième point.

□

Remarque 3.1. Sous les hypothèses de proposition 3.11, si de plus l'intervalle I est borné, alors la suite (u_n) converge et sa limite est un point fixe de f.

Exemple 3.8. *Étudions la suite définie par*

$$\begin{cases} u_0 \geq 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n}. \end{cases}$$

Introduisons la fonction f définie de $[0, +\infty[$ dans lui même par : $f(x) = \sqrt{4 + 3x}$. Elle est continue sur $[0, +\infty[$ et admet 4 comme l'unique point fixe. Les intervalles $[0, 4]$ et $[0, +\infty[$ sont stables par la fonction f.

1. *Si $u_0 \in [0, 4]$, puisque $u_0 \leq \sqrt{4 + 3u_0} = f(u_0)$. la suite (u_n) est croissante. Puisque elle est majorée par 4, elle converge vers le point fixe 4.*

2. *Si* $u_0 \in [4, +\infty[$, *puisque* $u_0 \geq \sqrt{4+3u_0} = f(u_0)$. *la suite* (u_n) *est décroissante. Puisque elle est minorée par* 4, *elle converge vers le point fixe* 4.

Nous avons donc montré que $\forall u_0 \geq 0, u_n \longrightarrow 4$.

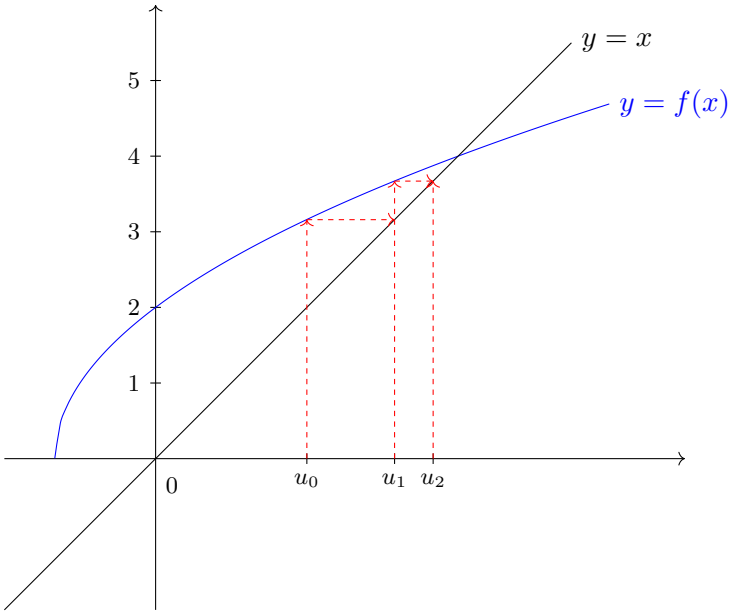


FIGURE 3.4–Cas d'une fonction croissante

Remarque 3.2. Dans l'étude d'une suite récurrente, il est intéressant d'étudier le signe de la fonction définie par $g(x) = f(x) - x$ qui donne la position du graphe de f par rapport à la première bissectrice et qui permet de connaître le signe de $f(u_0) - u_0$.

Cas d'une fonction décroissante

Proposition 3.12

On suppose que la fonction f est continue et décroissante sur un intervalle I stable et que $u_0 \in I$. Alors les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraire.

Démonstration. Notons $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. On a :

$$\begin{cases} v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f \circ f(u_{2n}) = f \circ f(v_n) \\ \text{et} \quad w_{n+1} = f \circ f(w_n) \end{cases}$$

Les deux suites vérifient la même relation de récurrence associée à la fonction $g = f \circ f$. Puisque la fonction f est décroissante sur I, la fonction g est croissante sur I et les deux suites (v_n) et (w_n) sont monotones. Si $u_0 \leq f \circ f(u_0)$, alors $u_1 \geq f \circ f(u_1)$ et donc la suite (v_n) est croissante et la suite (w_n) est décroissante. Si par contre $u_0 \geq f \circ f(u_0)$, alors $u_1 \leq f \circ f(u_1)$ et donc la suite (v_n) est décroissante et la suite (w_n) est croissante. □

Exemple 3.9. *Étudions la suite définie par*

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}. \end{cases}$$

Introduisons la fonction f définie de $[1,3]$ dans lui même par :

$$f(x) = 1 + \frac{2}{x}.$$

Elle est continue et décroissante sur $[1,3]$ et admet $l = 2$ comme l'unique point fixe.
On pose : $g(x) = (f \circ f)(x)$, puis

$$g(x) - x = \frac{x^2 - x - 2}{x + 2}.$$

L'unique poins fixe de g dans $[1,3]$ est 2.
Puisque $g(u_0) \geq u_0$, la suite (u_{2n}) est croissante et la suite (u_{2n+1}) est décroissante. Elles convergent toutes les deux vers 2. Ce qui montre que (u_n) converge vers 2.

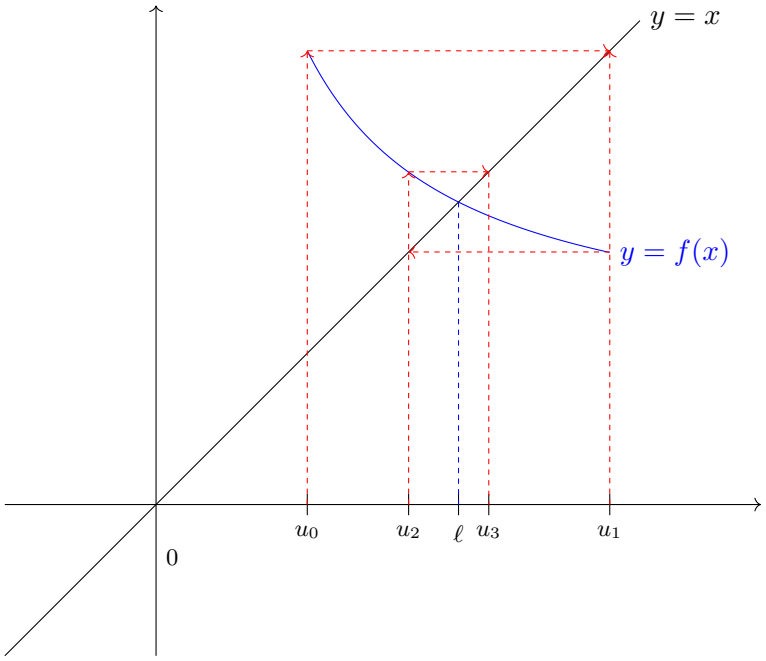


FIGURE 3.5–Cas d'une fonction décroissante

3.10 Exercices

Exercice 3.1. *En utilisant la définition de la limite, montrer que :*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{\sin n}{n+1}\right) = 0$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 + (-1)^n n) = +\infty$

Exercice 3.2. *Soit une suite réelle (u_n) telle que :$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{Z}$. Montrer que si la suite (u_n) converge, alors elle est constante á partir d'un certain rang.*
Indication : On pourra envisager la suite (v_n) définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$.

Exercice 3.3. *Déterminer les limites, lorsque n tend vers l'infini, des suites ci-dessous.*

1. $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$
2. $u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}$
3. $u_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$
4. $u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots + \frac{(-1)^n}{3^n}$
5. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
6. $u_n = \frac{n\sin(n!)}{n^2+1}$
7. $u_n = \sqrt[n]{2^n - n}$
8. $u_n = \frac{1\times3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times\cdots\times(2n)}$

Exercice 3.4. *Soit $(u_n)_{n\geq1}$ une suite définie par*

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{n-1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$$

On pose $v_n = ln(u_n)$

1. *Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 1+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$*
2. *Montrer que pour tout $x \geq 0, x - \frac{x^2}{2} \leq ln(1+x) \leq x$.*
3. *En déduire que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq v_n \leq \frac{n+1}{2n}$.*
4. *Déterminer la limite de (v_n).*
5. *En déduire la limite de la suite (u_n).*

Exercice 3.5. *Supposons que $lim|\frac{u_n+1}{u_n}| = r$, Montrer que :*

1. *Si $r > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$*
2. *Si $r < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$*

Exercice 3.6. *On considère la suite $(s_n)_{n\geq1}$ définie par*

$$s_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}.$$

Montrer que pour tout $n \geq 1$, $s_{2n} - s_n \geq \frac{1}{2}$. En déduire que la suite $(s_n)_{n\geq1}$ est divergente.

Exercice 3.7. *:*

1. *Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ est divergente.*

2. *La meme question pour la suite (v_n) définie par $v_n = cos(\frac{2n\pi}{q})$, où q est un entier naturel tel que $q \geq 2$.*

Exercice 3.8. *On considère la suite (u_n) de terme général*

$$u_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}$$

Montrer que les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire que la suite (u_n) converge.

Exercice 3.9. *: Soit (u_n) une suite réelle. On dit que le réel ℓ est valeur d'adhérence de la suite s'il existe une suite extraite de (u_n) qui converge vers ℓ.*

1. *Quelles sont les valeurs d'adhérence d'une suite convergente ?*
2. *Quelles sont les valeurs d'adhérence de la suite $((-1)^n)$? de la suite $(cos(\frac{n\pi}{3}))$?*
3. *Donner un exemple de suite qui ne converge pas et qui possède une unique valeur d'adhérence.*
4. *Prouver que si (u_n) est bornée et est divergente, elle admet toujours (au moins) deux valeurs d'adhérence distinctes.*

Exercice 3.10. *Les suites suivantes sont-elles de Cauchy ?*

1. $u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \cdots + \frac{n^2}{4^n}$ *(montrer d'abord que $\forall n \geq 5, 4^n > n^4$).*
2. $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.
3. $u_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n}{(n+1)^2}$.

Exercice 3.11. *Soit la suite (u_n) définie par*

$$u_0 = 2 \quad \textit{et} \quad u_{n+1} = 5 - \frac{1}{u_n}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 < u_n < 4$.*
2. *Montrer que (u_n) est converge et trouver sa limite.*
3. *Donner $\sup E$ et $\inf E$ où $E = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.*

Exercice 3.12. *Étudier la suite (u_n) définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = -u_n^2 + u_n$.*

CHAPITRE 4

FONCTIONS RÉELLES D'UNE VARIABLE RÉELLE

4.1 Généralités

4.1.1 Définitions

Définition 4.1. Une fonction d'un ensemble E dans un ensemble F est une relation, qui à toute élément x de E associé au plus un élément y de F. On notera la fonction

$$f : E \longrightarrow F,\ x \longmapsto y = f(x)$$

$f(x)$ est appelé l'image de x par la fonction f.

Définition 4.2. L'ensemble de définition de la fonction f est l'ensemble de tout les éléments de E qui possèdent une image dans F.

Définition 4.3. Une application d'un ensemble E dans un ensemble F est une relation, qui à toute élément x de E associé un élément et un seul y de F.

Définition 4.4. On appelle fonction numérique sur un ensemble E ; toute fonction de E dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Si E est lui-même une partie de $\mathbb{R}$, on dit que f est une fonction numérique d'une variable réelle, ou encore, une fonction réelle d'une variable réelle.

Définition 4.5. Le graphe d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, est la partie Γ_f de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = f(x)\}.$$

Dans tout ce qui suit, I désigne un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ (c'est à dire non vide et non réduit à un point). On considère l'ensemble $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

4.1.2 Opérations sur les fonctions

Définition 4.6. Dans l'ensemble $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, on définit les lois suivantes :

1. Addition. Si $(f,g)\in\mathcal{F}(I,\mathbb{R})^2$, on définit l'application $(f+g)\in\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ par
$$\forall x\in I,(f+g)(x)=f(x)+g(x).$$
2. Multiplication par un réel. Si $(\lambda,f)\in\mathbb{R}\times\mathcal{F}(I,\mathbb{R})^2$, on définit l'application $\lambda f\in\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ par
$$\forall x\in I,(\lambda f)(x)=\lambda f(x).$$
3. Multiplication de deux fonctions. Si $(f,g)\in\mathcal{F}(I,\mathbb{R})^2$, on définit l'application $(fg)\in\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ par
$$\forall x\in I,(fg)(x)=f(x)g(x).$$
4. Valeur absolue d'une fonction. Si $f\in\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, on définit l'application $|f|\in\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ par
$$\forall x\in I,|f|(x)=|f(x)|.$$
5. Maximum, Minimum de deux fonctions. Si $(f,g)\in\mathcal{F}(I,\mathbb{R})^2$, on définit les deux application $\sup(f,g),\inf(f,g)\in\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ par
$$\forall x\in I,\sup(f,g)(x)=\sup(f(x),g(x)),\inf(f,g)(x)=\inf(f(x),g(x)).$$

Remarque 4.1. La relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$ s'étend naturellement à $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ en posant, pour $(f,g)\in\mathcal{F}(I,\mathbb{R})^2$
$$f\leq g\iff\forall x\in I,f(x)\leq g(x).$$

Proposition 4.1

Soit $(f,g)\in\mathcal{F}(I,\mathbb{R})^2$. On a :

1. $|f|=\sup(f,-f)$
2. $\sup(f,g)=\frac{f+g+|f-g|}{2}$
3. $\inf(f,g)=\frac{f+g-|f-g|}{2}$
4. $f^+=\sup(f,0)$
5. $f^-=\sup(-f,0)$

4.1.3 Fonctions bornées

Définition 4.7. Soit $f\in\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$. On dit que f est

1. Majorée s'il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)\leq M$ pour tout $x\in I$.
2. Minorée s'il existe $m\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)\geq m$ pour tout $x\in I$.
3. Bornée si elle est majorée et minorée.

Proposition 4.2

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. La fonction f est bornée si

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I : |f(x)| \leq \alpha.$$

Définition 4.8. Soient $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $x_0 \in I$.

1. On dit que f admet un maximum en x_0, si : $\forall x \in I, f(x) \leq f(x_0)$.
2. On dit que f admet un maximum local en x_0, si :

$$\exists h > 0,\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < h \implies f(x) \leq f(x_0).$$

3. On définit de manière analogue la notion de minimum et de minimum local.

4.1.4 Fonctions monotones

Définition 4.9. Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. On dit que

1. f est croissante si : $\forall x, y \in I,\ x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$.
2. f est décroissante si : $\forall x, y \in I,\ x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$.
3. f est monotone si f est croissante ou décroissante.

On dit de plus que f est strictement croissante , strictement décroissante ou strictement monotone si l'inégalité correspondante est stricte.

Proposition 4.3

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions monotones telles que $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f$ est monotone et on a

1. Si f et g ont le même sens de variation, alors $g \circ f$ est croissante.
2. Si f et g ont deux sens de variations contraires, alors $g \circ f$ est décroissante.

Démonstration. Supposons, par exemple, f croissante sur I et g décroissante sur J. Montrons que $g \circ f$ est décroissante.
Soient $x, y \in I$ tels que $x \leq y$. Comme f est croissante, $f(x) \leq f(y)$ et puisque g est décroissante, $g(f(x)) \geq g(f(y))$ et donc $g \circ f(x) \geq g \circ f(y)$. □

Proposition 4.4

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ strictement monotone sur I et soit $J = f(I)$, alors f réalise une bijection de I dans J et sa bijection réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est strictement monotone de même sens que f.

Démonstration. Supposons, par exemple, la fonction f strictement croissante sur I.
Puisque $J = f(I)$, par définition de l'image directe d'une fonction, la fonction f est surjective de I vers J.
Montrons maintenant que f est injective.
Soient $x, y \in I$ tels que $f(x) = f(y)$, montrons que $x = y$ par l'absurde. Si l'on avait $x \neq y$, on aurait $x < y$ ou $y < x$, mais alors, puisque f est strictement croissante, on aurait $f(x) < f(y)$ ou $f(y) < f(x)$ ce qui est absurde. Elle réalise donc une bijection de I vers J.
Vérifions que la fonction f^{-1} est également strictement croissante. Soient $X, Y \in J$ tels que

$X < Y$. Notons $x = f^{-1}(X)$ et $y = f^{-1}(Y)$. Si l'on avait $y \leq x$, puisque f est croissante, on aurait $f(y) \leq f(x)$ et donc $Y \leq X$ ce qui est faux. On en déduit que $x < y$ donc que $f^{-1}(X) < f^{-1}(Y)$. □

4.1.5 Parité, périodicité

Définition 4.10. Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, avec I est symétrique par rapport à 0. On dit que

1. f est paire si $\forall x \in I,\ f(-x) = f(x)$.
2. f est impaire si $\forall x \in I,\ f(-x) = -f(x)$.

Exemple 4.1. *1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^{2n}$ $(n \in \mathbb{N})$ est paire.*
2. La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^{2n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ est impaire.
3. La fonction $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est paire. La fonction $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est impaire.

Définition 4.11. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite périodique s'il existe $T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x + T) = f(x).$$

On dit que T est une période de f et que f est T-périodique.

Exemple 4.2. *Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques. La fonction tangente est π-périodique.*

4.2 Limites

4.2.1 Définitions

a) Limite en un point

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit $x_0 \in \overline{I}$ (c-à-d x_0 est un point de I ou une extrémité de I).

Définition 4.12. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en x_0 si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0; \forall x \in I : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

On note $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

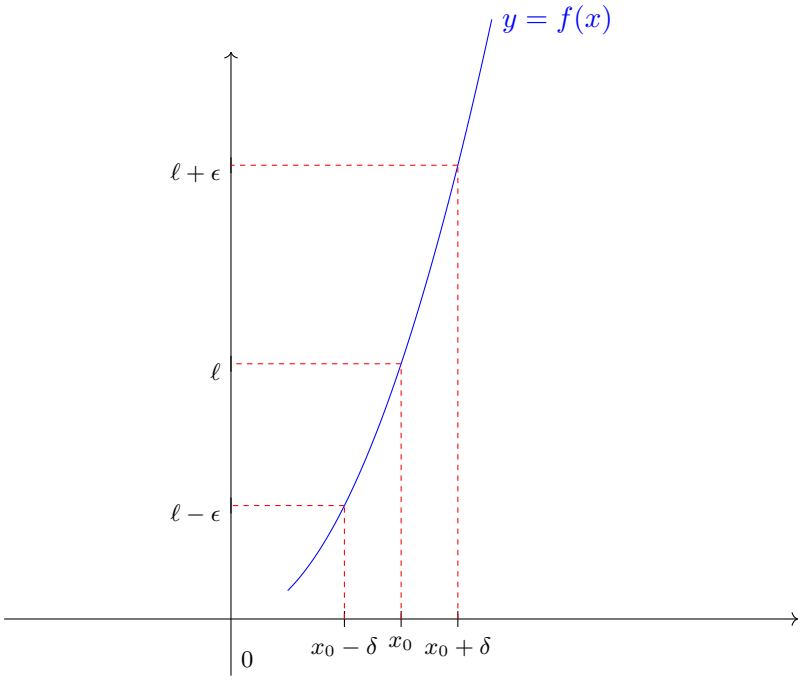


FIGURE 4.1–Illustration de la définition de la limite en un point

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

Définition 4.13. .

1. On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 si

$$\forall A > 0,\ \exists \delta > 0; \forall x \in I : |x - x_0| < \delta \implies f(x) \geq A.$$

2. On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 si

$$\forall A > 0,\ \exists \delta > 0; \forall x \in I : |x - x_0| < \delta \implies f(x) \leq -A.$$

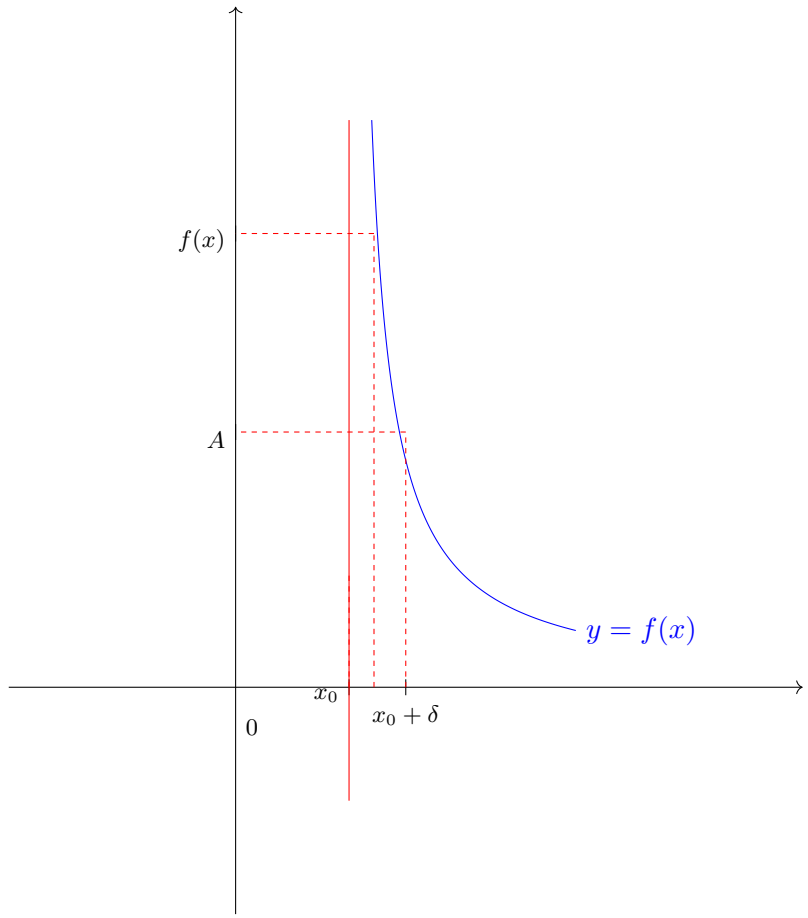


FIGURE 4.2–Illustration de la définition de $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

b) Limite en l'infini

Soient $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, avec I de la forme $]a, +\infty[$ et $\ell \in \mathbb{R}$,

Définition 4.14. On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$, et on note $\lim_{n \to +\infty} f(x) = \ell$.
si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists B > 0; \forall x \in I : x \geq B \implies |f(x) - \ell| \leq \epsilon.$$

On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, et on note $\lim_{n \to +\infty} f(x) = +\infty$,
si

$$\forall A > 0,\ \exists B > 0; \forall x \in I : x \geq B \implies f(x) \geq A.$$

On définit de la même manière la limite en $-\infty$ pour f définie sur un intervalle de type $]-\infty, a[$.

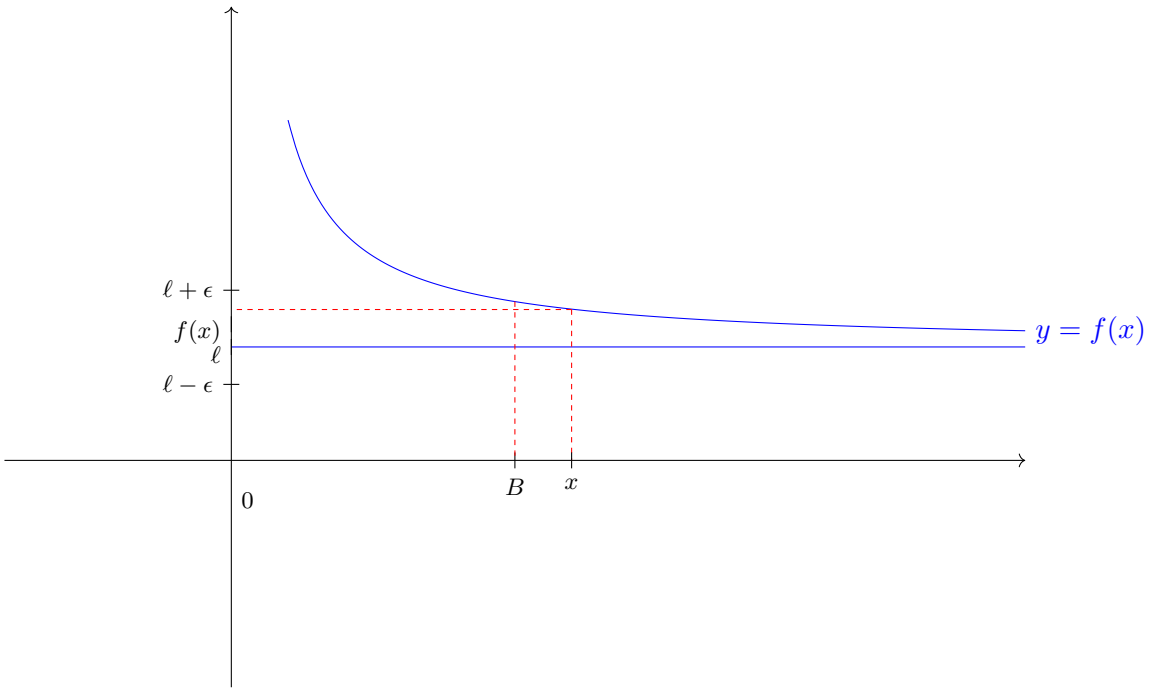


FIGURE 4.3–Illustration de la définition de $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$

4.2.2 Limite à gauche et à droite

Soit $f\in\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, avec I de la forme $]a,x_0[\cup]x_0,b[$.

Définition 4.15.

1. On appelle limite à droite en x_0 de f, la limite de la fonction $f_{|]x_0,b[}$ en x_0 et on la note $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to x_0}} f(x)$.
2. On appelle limite à gauche en x_0 de f, la limite de la fonction $f_{|]a,x_0[}$ en x_0 et on la note $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{<\\ x\to x_0}} f(x)$.
3. Dire que f a pour limite $\ell\in\mathbb{R}$ à droite en x_0 signifie
$$\forall\epsilon>0,\ \exists\delta>0;\forall x\in]x_0,b[:\ 0<x-x_0<\delta \implies |f(x)-\ell|<\epsilon.$$
4. On définit de la même manière la limite de f à gauche en x_0.
5. Si f a une limite à gauche et une limite à droite en x_0 et si ces limites sont égaux, alors f admet une limite en x_0.

4.2.3 Propriétés

Proposition 4.5

Si une fonction admet une limite, alors cette limite est unique.

Proposition 4.6

Soient f et g deux fonctions. On suppose que $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$.
Si
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\ell\in\mathbb{R},\ \lim_{x\to x_0} g(x)=\ell'\in\mathbb{R},$$

alors

$$\lim_{x\to x_0}(\lambda f(x)) = \lambda\ell, \forall\lambda\in\mathbb{R}, \quad \lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \ell+\ell', \quad \lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \ell\ell',$$

si $\ell \neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell}$. De plus, si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, alors $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = 0$.

Proposition 4.7

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell, \lim\limits_{x\to\ell} g(x) = \ell'$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} g\circ f(x) = \ell'$,

Proposition 4.8

1. Si $f \leq g$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell'$, alors $\ell \leq \ell'$.
2. Si $f \leq g$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.
3. Si $g \leq f \leq h$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

4.2.4 Notation de Landau

Définition 4.16 (Négligeabilité, o)**.** Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a s'il existe une fonction ϵ définie au voisinage de a telle que

$$f(x) = \epsilon(x)g(x), \text{ au voisinage de } a \text{ et } \lim_{x\to a}\epsilon(x) = 0.$$

On note alors $f(x) = o\left(g(x)\right)$.

Proposition 4.9

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage I de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que la fonction g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$. Alors

$$f(x) = o\left(g(x)\right) \iff \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Exemple 4.3. *Au voisinage de* $+\infty$

1. $\ln x = o\left(x^\alpha\right)\ (\alpha > 0)$
2. $x^\alpha = o\left(e^x\right)\ (\alpha \in \mathbb{R})$

Au voisinage de 0

1. $\ln x = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)\ (\alpha > 0)$
2. $x^b = o\left(x^a\right)\ (a < b)$

4.3 Continuité

Définition 4.17 (Continuité en un point)**.** Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$. On dit que la fonction f est continue au point a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, ce qui se traduit avec des quantificateurs par

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0; \forall x \in I : |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

f est continue à droite (resp. à gauche) en a si $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to x_0}} f(x) = f(a)$ (resp. $\lim\limits_{\substack{<\\ x\to x_0}} f(x) = f(a)$).

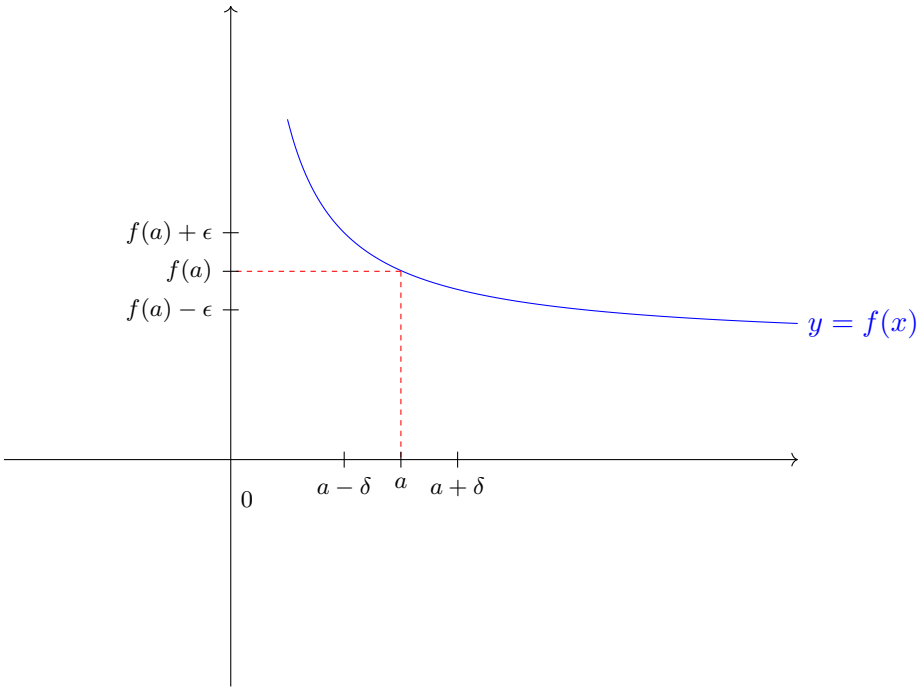


FIGURE 4.4–Continuité en a

Remarque 4.2. Évidemment, la continuité de f à droite et à gauche en a entraîne la continuité de f en a.

Exemple 4.4. *Soit la fonction réelle f définie par*

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}), \textit{si } x \neq 0, \\ 0, \textit{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrons que f est continue en 0.
Soit $\epsilon > 0$, on a

$$\left| x\sin(\frac{1}{x}) \right| \leq |x| \leq \epsilon.$$

Donc il suffit de prendre $\eta = \epsilon$. Ainsi

$$|x| \leq \eta \implies \left| x\sin(\frac{1}{x}) \right| \leq \epsilon.$$

Donc f est continue au point 0.

Voici une fonctions qui n'est pas continue en a

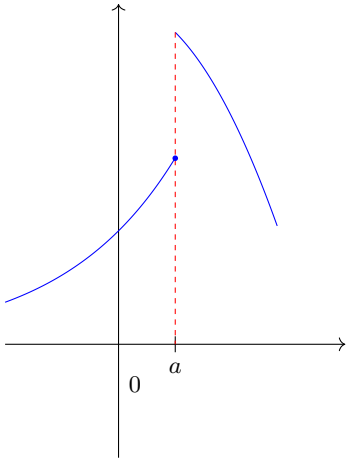


FIGURE 4.5–Discontinuité en a

Remarque 4.3. Un réel a est un point de discontinuité de première espèce de la fonction f, s'il est point de discontinuité de f et si f admet une limite à gauche et à droite en a. Les autres points de discontinuité sont des points de discontinuité de deuxième espèce.

Définition 4.18 (Continuité sur un intervalle)**.** Une fonction définie sur un intervalle I est dite continue sur I si elle est continue en tout point de I. L'ensemble des fonctions continues sur I se note $\mathscr{C}(I)$.

Exemples

Les fonctions suivantes sont continues

1. Une fonction constante sur un intervalle.
2. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$.
3. Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sur $\mathbb{R}$.
4. La fonction $\exp$ sur $\mathbb{R}$.
5. La fonction $\ln$ sur $]0, +\infty[$.

Définition 4.19. On dit que la fonction f est prolongeable par continuité au point $x_0 \in I$ si elle admet en ce point une limite finie notée ℓ, la fonction définie par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), \text{si } x \neq x_0, \\ \ell, \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

est dite prolongement par continuité de f au point x_0.

Exemple 4.5. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.*
On a : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, donc f est prolongeable par continuité au point 0 et la fonction

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, si\, x \neq x_0, \\ 1, si\, x = x_0. \end{cases}$$

est le prolongement par continuité de f au point 0.

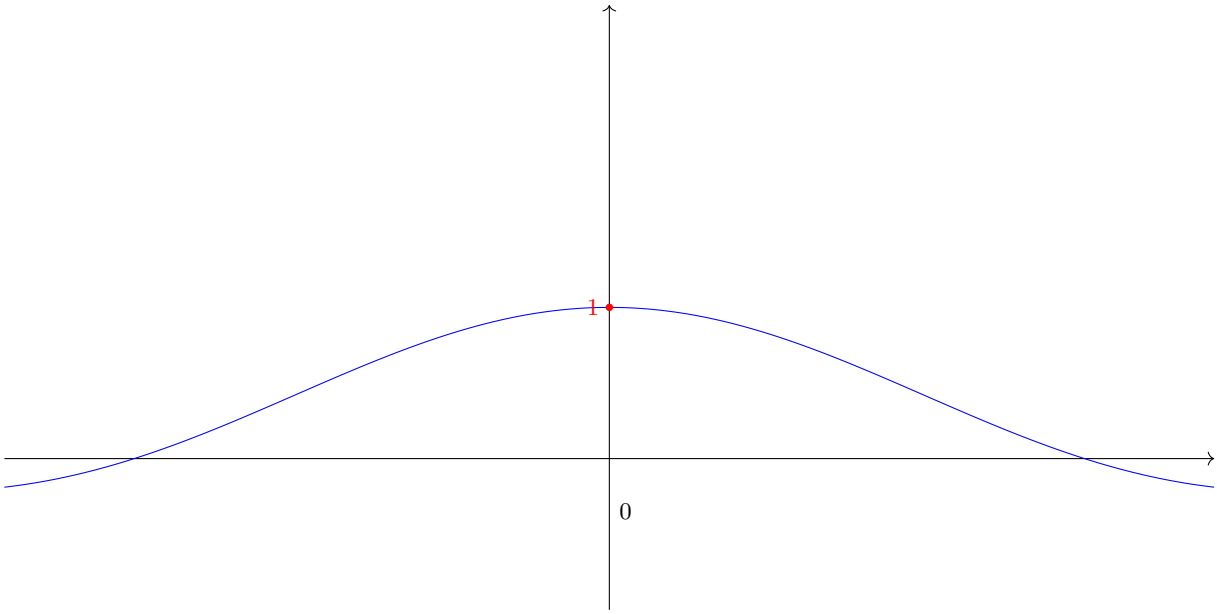


FIGURE 4.6–Prolongement par continuité de f au point 0

Définition 4.20 (Continuité uniforme)**.** La fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est dite uniformément continue sur l'intervalle I si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0; \forall x, y \in I : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Exemple 4.6. *La fonction f définie par $f(x) = x^2$ est uniformément continue sur l'intervalle $[0, 2]$.*
En effet, pour tous réel $\epsilon > 0$ et $x, y \in [0, 2]$, on a

$$|x^2 - y^2| = |x - y|.|x + y| \leq (|x| + |y|)(|x - y|) \leq 4|x - y|.$$

On peut prendre $\delta = \epsilon/4$.

Exemple 4.7. *La fonction f définie par $f(x) = x^2$ n'est uniformément continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$.*
En effet, considérons les suites $x_n = n + \frac{1}{n}$ et $y_n = n$. On a toujours

$$|f(x_n) - f(y_n)| = 2 + \frac{1}{n^2} > 2$$

bien que $|x_n - y_n| = \frac{1}{n}$. Aucun nombre δ ne peut correspondre à $\epsilon = 2$.

Définition 4.21 (Fonction lipschitzienne)**.** Soient k un réel positif et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
On dit que f est k-lipschitzienne sur I si

$$\forall x, y \in I : |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Proposition 4.10

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
f lipschitzienne sur $I \implies f$ uniformément continue sur $I \implies f$ continue sur I.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

1. Supposons f lipschitzienne sur I, il existe $k \geq 0$ tel que

$$\forall x, y \in I : |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Montrons que f est uniformément continue sur I. Soit $\epsilon > 0$. Posons $\delta = \epsilon/k > 0$.
Soient $(x, y) \in I^2$ tels que $|x - y| \leq \delta$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \leq k\delta = \epsilon.$$

2. Supposons f uniformément continue sur I et montrons que f est continue sur I.
Soit $a \in I$, montrons que la fonction f est continue au point a.
Soit $\epsilon > 0$. Puisque f est uniformément continue sur I, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in I^2, |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

Soit $x \in I$ tel que $|x - a| \leq \delta$, on a bien $|f(x) - f(a)| \leq \epsilon$.

□

Théorème 4.1

Une fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.

4.3.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 4.2

Si la fonction f est continue sur $[a, b]$ et si $f(a).f(b) < 0$, alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

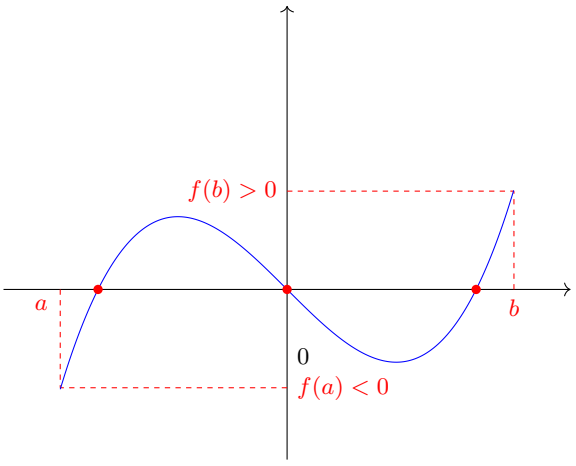


FIGURE 4.7–Théorème des valeurs intermédiaires

Remarque 4.4. 1. Le réel c pour lequel $f(c) = 0$ n'est pas nécessairement unique
2. Si f est strictement monotone sur $[a, b]$, alors le point c est unique.

Exemple 4.8. *Montrons que l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0, 1]$. On définie la fonction f sur l'intervalle $[0, 1]$ par : $f(x) = x^3 + x - 1$, f est continue sur l'intervalle $[0, 1]$ et $f(0) = -1$, $f(1) = 1$. Donc il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f(c) = 0$.*

La figure suivante montre l'indispensabilité de la continuité

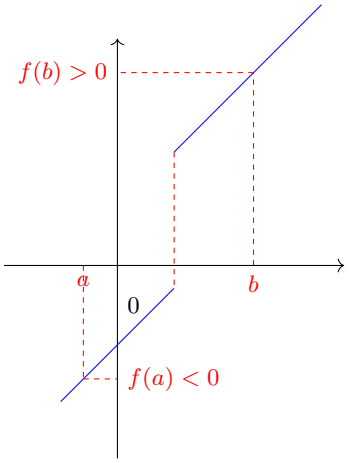


FIGURE 4.8–L'indispensabilité de la continuité

Théorème 4.3

Si la fonction f est continue sur $[a, b]$, alors : pour tout réel λ strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = \lambda$.

Démonstration. Supposons $f(a) < f(b)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(a) < \lambda < f(b)$$

Considérons la fonction g définie, sur $[a, b]$, par : $g(x) = f(x) - \lambda$.
g est continue sur $[a, b]$, $g(a) = f(a) - \lambda < 0$ et $g(b) = f(b) - \lambda > 0$. Il existe donc un point $c \in]a, b[$ tel que $g(c) = 0$ c-à-d $f(c) = \lambda$. □

Corollaire 4.1. *L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.*

Démonstration. Exercice. □

Théorème 4.4

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue. Alors la fonction f est bornée et atteint ses bornes.

Corollaire 4.2. *L'image d'un segment $[a, b]$ par une application continue est un segment.*

Proposition 4.11

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et strictement croissante (resp. strictement décroissante), alors f est une bijection de $[a, b]$ dans $[f(a), f(b)]$. La bijection réciproque f^{-1} est continue et strictement croissante (resp. décroissante).

Remarque 4.5 (Graphe de f^{-1})**.** Le graphe de f est l'ensemble des points $(x, f(x))$ de $\mathbb{R}^2$ pour $x \in [a, b]$. Le graphe de f^{-1} est l'ensemble des points $(y, f^{-1}(y))$ pour $y \in [f(a), f(b)]$ ou, ce qui revient au même, l'ensemble des points $(f(x), x)$ pour x dans $x \in [a, b]$.
Les points $(x, f(x))$ et $(f(x), x)$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice (si l'on a pris une base orthonormale). Donc les deux graphes sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

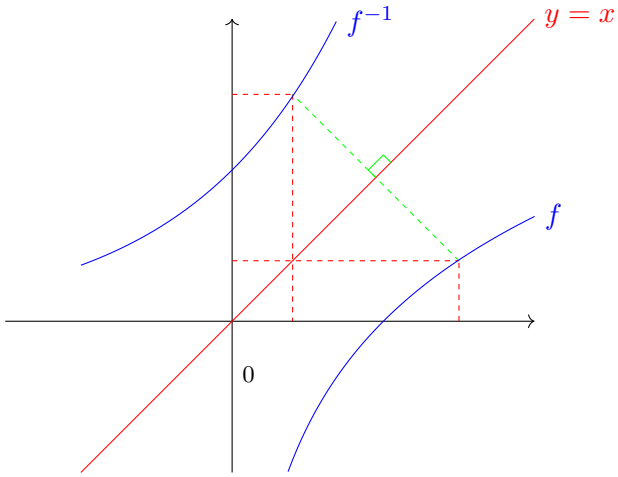


FIGURE 4.9–Fonction réciproque

4.4 Exercices

Exercice 4.1 (Ensemble de définition)**.** *Donner l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :*

- $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$
- $f(x) = \ln|x^2 - 1|$
- $f(x) = \ln(x + 1) - \sqrt{1 - x}$
- $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x+3}}$

Exercice 4.2 (Opérations sur la parité)**.** *Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ deux fonctions impaires. Que dire de la parité de $f + g, fg, f \circ g$?*

Exercice 4.3 (Parité et périodicité)**.** *Soit f la fonction définie par*

$$f(x) = \ln\left(\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right|\right)$$

Quel est le domaine de définition de f ? La fonction f est-elle paire ? impaire ? périodique ?

Exercice 4.4 (Calcule des limites). *Déterminer les limites suivantes, lorsque celles-ci existent :*

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x},\quad \lim_{x\longrightarrow 0}(1+x)^{1/x},\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x}}{x+\ln(x)},$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}x[\frac{1}{x}],\quad \lim_{x\to+\infty}e^{x-\sin x},\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x\cos(e^x)}{x^2+1}.$$

Exercice 4.5 (Fonction de Dirichlet). *Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, définie par*

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{si } x\in\mathbb{Q},\\ 0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

Montrer que f est totalement discontinue.

Exercice 4.6 (Continuité). *Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, définie par*

$$f(x)=\begin{cases}x+\frac{\sqrt{x^2}}{x}, & \text{si } x\neq 0,\\ 0, & \text{si } x=0.\end{cases}$$

Déterminer l'ensemble des points où elle est continue.

Exercice 4.7 (TVI). *Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, définie, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par*

$$f_n(x)=\ln(1+x^n)+x-1$$

1. *Montrer qu'il existe $c_n\in]0,1[$ tel que $f_n(c_n)=0$.*
2. *Montrer que f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, en déduire que c_n est unique.*

Exercice 4.8 (Point fixe). *Soient a et b deux réels tels que $a<b$ et f une fonction de $[a,b]$ dans $[a,b]$?*

1. *On suppose que pour tout $(x,y)\in[a,b]^2$ on a*

$$|f(x)-f(y)|\leq|x-y|.$$

Montrer que f est continue sur $[a,b]$.
En déduire qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=c$.

2. *On suppose maintenant que pour tout $(x,y)\in[a,b]^2$ avec $x\neq y$ on a*

$$|f(x)-f(y)|<|x-y|.$$

Montrer qu'il existe un unique $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=c$.

CHAPITRE 5

FONCTIONS DÉRIVABLES

5.1 Dérivée d'une fonction en un point

Définition 5.1. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$; Soient $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$. On dit que f est dérivable au point a ; si le taux d'accroissement

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

possède une limite finie quand x tend vers a. Cette limite s'appelle la dérivée de f en a et se note $f'(a)$. Ainsi

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Exemple 5.1. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. La dérivée de f en un point $a \in \mathbb{R}$ est*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = \lim_{x \to a} (x + a) = 2a.$$

Remarque 5.1. La définition précédente permet d'écrire

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) + \epsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0,$$

d'où

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\epsilon(x), \text{ avec } \lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0,$$

Remarque 5.2. En posant $x = a + h, h \neq 0$, On a

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

On peut encore écrire

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\epsilon(h), \text{ avec } \lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0,$$

Exemple 5.2. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. La dérivée de f en un point $a \in \mathbb{R}$ est*

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2a + h) = 2a.$$

5.1.1 Interprétation géométrique

Soient $M_0 = (a, f(a))$ et $M(x, f(x))$ deux points de $\mathcal{C}_f$, la quantité $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ représente la pante de la droite (M_0M). Si ce quotient a une position limite quand $x \to a, x \neq a$, la droite (M_0M) tend vers une limite appelée tangente à $\mathcal{C}_f$ en M_0 et la pente de cette tangente est $f'(a)$. L'équation de cette tangente est donc

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

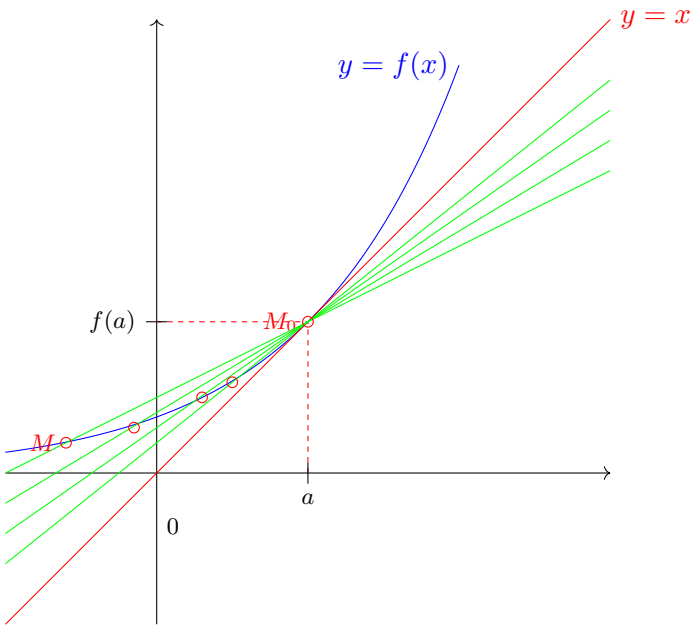


FIGURE 5.1–Interprétation géométrique

Exemple 5.3. *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

La pante de la tangente au point $M_0(0, 1)$ est

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x} = 0.$$

La tangente à C_f au point M_0 est la droite d'équation $y = 1$.

Définition 5.2 (Dérivée à droite, dérivée à gauche)**.** Si le rapport $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite (finie) à droite (resp. à gauche), on dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) de f au point a.
La dérivé de f à droite en a :

$$f'_d(a) = \lim_{\substack{>\\ x\to a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

La dérivé de f à gauche en a :

$$f'_g(a) = \lim_{\substack{<\\ x\to a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Remarque 5.3. f est dérivable en a si et seulement si, f est dérivable à droite en a, f est dérivable à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Théorème 5.1

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Remarque 5.4. La réciproque de ce théorème est inexacte. Une fonction peut être définie et continue en un point sans être dérivable en ce point. Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x|$ est continue en 0, mais n'est pas dérivable en ce point.

5.1.2 Fonction dérivée

Définition 5.3. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, avec I un ouvert de $\mathbb{R}$.
On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point $a \in I$. On définit alors la fonction dérivée

$$\begin{aligned} f' : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x). \end{aligned}$$

Dérivée de fonctions usuelles

Le tableau suivant est un résumé des principales formules à connaître, x est une variable.

Fonction	Dérivée	Fonction	Dérivée
x^n	$nx^{n-1} (n \in \mathbb{Z})$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\cos x$	$-\sin x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sin x$	$\cos x$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1} (\alpha \in \mathbb{R})$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
e^x	e^x		

Opérations sur les dérivées

Théorème 5.2

Soient f et g deux fonctions dérivables au points $a \in I$. Soient α et β deux réels.

1. La fonction $\alpha f + \beta g$ est dérivable au point a et
$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a).$$
2. La fonction fg est dérivable en a et
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$
3. Si $g(a) \neq 0$, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Dérivation des fonctions composées

Théorème 5.3

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(a) \in J$. On suppose que f dérivable en a et g dérivable en $f(a)$. Alors la fonction gof est dérivable en a et
$$(gof)'(a) = f'(a)g'(f(a)).$$

Dérivation de la bijection réciproque

Théorème 5.4

Soient I, J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow J$ une bijection. Si f est dérivable en $a \in I$ et si $f'(a) \neq 0$, alors l'application réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est dérivable en $b = f(a)$ et
$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

5.2 Dérivées successives

Définition 5.4. Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, avec I un ouvert de $\mathbb{R}$, dérivable sur I et soit f' sa dérivée. Si la fonction f' est aussi dérivable sur I on note $f'' = (f')'$ la dérivée seconde de f sur I. Plus généralement on note
$$f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(2)} = f'', \cdots, f^{(n)} = (f^{(n-1)})'.$$

Exemple 5.4. *Voici les dérivées successives de la fonction* sin *:*
$$\sin^{(0)} x = \sin x, \sin^{(1)} x = \cos x, \sin^{(2)} x = -\sin x, \cdots, \sin^{(n)} x,$$

avec

$$\sin^{(n)} x = \begin{cases} (-1)^k \sin x, & \text{si } n = 2k, \\ (-1)^k \cos x, & \text{si } n = 2k+1. \end{cases}$$

Proposition 5.1

Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables sur I alors il en est du même du produit fg et on a la formule de Leibniz qui permet d'exprimer la dérivée n-ième du produit

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Démonstration. Par récurrence. □

Fonctions de classe $\mathscr{C}^n$

Définition 5.5. On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, avec I un ouvert de $\mathbb{R}$, est de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle I si f est n fois dérivable sur I, et la fonction $f^{(n)}$ est continue sur I.

Notations. On note

1. $\mathscr{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^0$ sur I, c'est à dire l'ensemble des fonctions continues sur I.
2. Pour $n \geq 1$, $\mathscr{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.
3. $\mathscr{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur I.

5.3 Théorème des accroissements finis

Extremum Local

Définition 5.6. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit a un point de I.

1. On dit que a est un point critique de f si $f'(a) = 0$.
2. On dit que f admet un maximum local en a (resp. un minimum local en a) s'il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que

$$\forall x \in J \cap I,\ f(x) \leq f(a)$$

(resp. $f(x) \geq f(a)$).

3. On dit que f admet un extremum local en a si f admet un maximum local ou un minimum local en ce point.

Proposition 5.2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit a un point de I tel que

1. Le point a est intérieur à l'intervalle I, c'est à dire

$$\exists \alpha > 0,\ ]a - \alpha, a - \alpha[\subset I$$

2. Le point a est un extremum local de la fonction f sur I.

3. La fonction f est dérivable au point a.

Alors

$$f'(a) = 0.$$

Théorème de Rolle

Théorème 5.5

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si

1. f est continue sur $[a, b]$
2. f est dérivable sur $]a, b[$
3. $f(a) = f(b)$

Alors il existe $c \in]a, b[$, tel que $f'(c) = 0$.

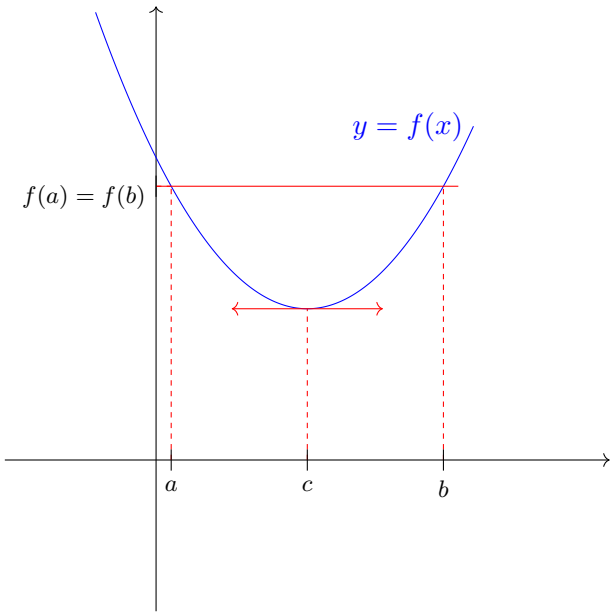


FIGURE 5.2–Interprétation géométrique du théorème de Rolle

Démonstration. Comme f est continue sur le segment $[a, b]$, l'image de ce segment est un segment $[m, M]$ avec $m \leq M$.
• Si m = M alors f est constante sur $[a, b]$ et sa dérivée est nulle sur $]a, b[$.
• Sinon, alors $m < M$. Comme $f(a) = f(b)$ l'un des deux est différent de m ou M. On peut supposer que $f(a) \neq m$. Le minimum de f sur $[a, b]$ est donc atteint en un point $c \in [a, b]$ différent de a et de b, donc en un point intérieur de l'intervalle $[a, b]$. D'après la proposition précédente, on a $f'(c) = 0$. □

Théorème 5.6

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si

1. f est continue sur $[a, b]$
2. f est dérivable sur $]a, b[$.

Alors il existe $c \in]a, b[$, tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Démonstration. Définissons la fonction ϕ sur $[a, b]$ par

$$\phi(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

La fonction ϕ est continue sur le segment $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle $]a, b[$ et on calcule $\phi(a) = \phi(b) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe un point intérieur $c \in]a, b[$ tel que $\phi'(c) = 0$, c'est à dire

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

□

Interprétation géométrique

Soit C_f la courbe de la fonction f d'extrémités $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$. Il existe au moins un point $M = (c, f(c))$ où la tangente à C_f soit parallèle à la corde AB.

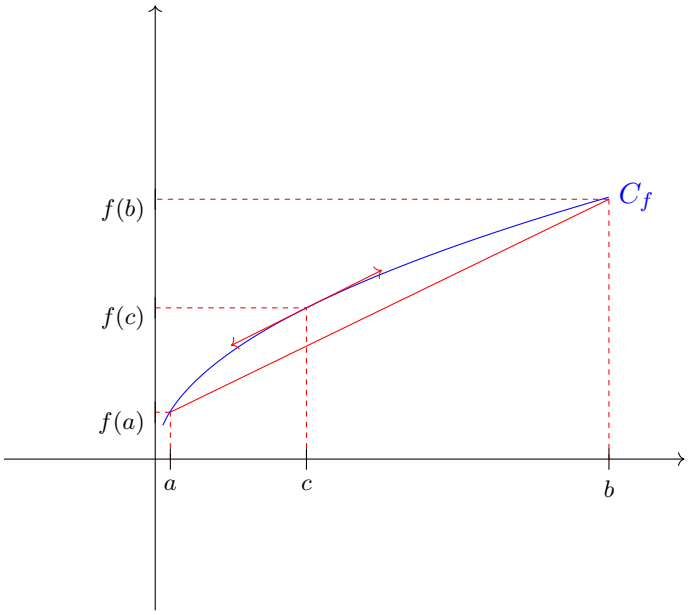


FIGURE 5.3–Interprétation géométrique du T.A.F

Corollaire 5.1 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l' intervalle I ouvert. S'il existe une constante M telle que pour tout $x \in I, |f(x)| \leq M$ alors*

$$\forall x, y \in I : |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Exemple 5.5. *Soit $f(x) = \sin(x)$. Comme $f'(x) = \cos x$ alors $|f'(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'inégalité des accroissements finis s'écrit alors :*
pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|.$$

En particulier si l'on fixe $y = 0$ alors on obtient

$$|\sin x| \leq |x|.$$

Accroissements finis généralisés

Théorème 5.7

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ telles que $g'(x) \neq 0$ sur cet intervalle et $g(a) \neq g(b)$. Il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Corollaire 5.2 (Règle de l'Hospital)**.** *Soient f et g deux fonctions dérivables sur $]a,b[$ et soit $x_0 \in]a,b[$ tels que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et g' ne s'annule pas sur $]a,b[$*

$$\textit{Si } \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell, \textit{ alors } \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Exemple 5.6.

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(x)}{2} = -\frac{1}{2}$$

Exemple 5.7.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (x-\frac{\pi}{2})\tan(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cot(x)} = \lim_{x\to 0}(-\sin^2(x)) = -1$$

5.4 Fonctions convexe

Définition 5.7. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est convexe si

$$\forall (x,y) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Remarque 5.5. Cela signifie géométriquement que le graphe de f est situé en dessous de toutes les cordes joignant deux points de ce graphe.

Remarque 5.6. On dit que la fonction f est concave si

$$\forall (x,y) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Remarque 5.7. Les fonctions qui sont à la fois convexes et concaves sont les fonctions affines.

Caractérisation des fonctions convexes dérivables

Théorème 5.8

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.

1. Si f est dérivable sur I, alors

$$(f \text{ convexe}) \iff (f' \text{ croissante sur } I).$$

2. Si f est deux fois dérivable sur I, alors

$$(f \text{ convexe}) \iff (f'' \geq 0 \text{ sur } I).$$

Définition 5.8 (Point d'inflexion)**.** Un point d'inflexion est un point où la représentation graphique d'une fonction traverse sa tangente

Théorème 5.9

Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et $a \in I$.
Si $f''(a) = 0$ et f'' change de signe en x, alors la courbe change de convexité et traverse sa tangente en a. On dit que $(a, f(a))$ est un point d'inflexion de la courbe de f.

5.5 Formules de Taylor

La formule de Taylor, du nom du mathématicien Brook Taylor qui l'établit en 1715, permet l'approximation d'une fonction plusieurs fois dérivable au voisinage d'un point par un polynôme dont les coefficients dépendent uniquement des dérivées de la fonction en ce point. La première étape est la formule

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\epsilon(h)$$

qui montre que, si f est dérivable, alors f est approchée par un polynôme de degré 1 (une droite). Comment faire pour augmenter le degré ?
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point intérieur à I, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On fixe un entier naturel n.

Formule de Taylor-Young

Théorème 5.10

Supposons que f de classe $\mathscr{C}^n$ sur I. Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h$ appartienne à I on peut écrire

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + h^n\epsilon(h),$$

où $\epsilon(h)$ est une fonction qui tend vers 0 quand h tend vers 0.

Définition 5.9. Le polynôme

$$T_n(h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0).$$

s'appelle le polynôme de Taylor de f à l'ordre n au point x_0.

Remarque 5.8. Une autre façon d'écrire un développement de Taylor au point x_0 consiste à poser $x = x_0 + h$. Le théorème de Taylor-Young s'énonce alors de la façon suivante : si f soit de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors pour tout $x \in I$ on peut écrire

$$f(x) = f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\cdots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+(x-x_0)^n\epsilon(x-x_0),$$

où $\epsilon(x-x_0)$ est une fonction qui tend vers 0 quand x tend vers x_0.
Et le polynôme de Taylor de f à l'ordre n au point x_0

$$T_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0).$$

Exemple 5.8. *La formule de Taylor-Young de* $\exp$ *à l'ordre* n *au point* 0.
La fonction $f(x) = \exp(x)$ *est de classe* $\mathscr{C}^n$ *sur* $\mathbb{R}$ *pour tout* n. *Comme* $f'(x) = \exp(x)$, $f'(x) = \exp(x), \cdots, f^{(n)}(x) = \exp(x)$, *alors pour tout* $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x).$$

Voici donc les premiers polynômes de Taylor :

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = 1 + x, \quad T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

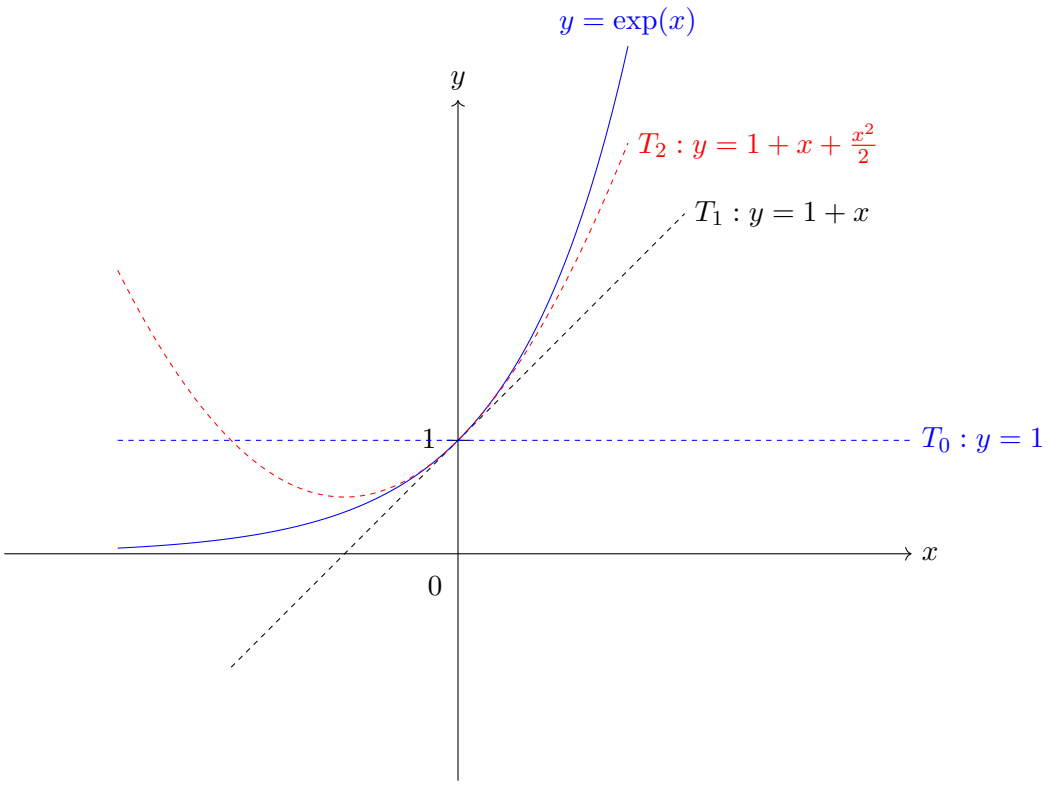


FIGURE 5.4–Exponentielle et polynome de Taylor

Sur le dessin les graphes des polynômes T_0, T_1, T_2 s'approchent de plus en plus du graphe de f.

Formule de Taylor-Lagrange

Théorème 5.11

Supposons que la fonction f soit de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I et soit $x_0 \in I$. Alors, pour tout $x \in I$, il existe c entre x et x_0 tel que

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

Exemple 5.9. *Soit $x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe c entre x et 0 tel que*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c.$$

Dans la plupart des cas on ne connaîtra pas ce c. Mais ce théorème permet d'encadrer le reste. Ceci s'exprime par le corollaire suivant :

Corollaire 5.3. *Si en plus la fonction $|f^{(n+1)}|$ est majorée sur I par un réel M, alors pour tout $x_0, x \in I$, on a :*

$$|f(x) - T_n(x)| \leq M\frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Exemple 5.10. *Approximation de* $\sin(0.01)$
Soit $f(x) = \sin x$. *Alors* $f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f^{(3)}(x) = -\cos x, f^{(4)}(x) = \sin x$. *On obtient donc* $f'(0) = 1, f''(0) = 0, f^{(3)}(0) = -1, f^{(4)}(0) = 0$. *La formule de Taylor ci-dessus en* $x_0 = 0$ *à l'ordre* 3 *devient :*

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\sin(c),$$

pour un certain c *entre* 0 *et* x. *Appliquons ceci pour* $x = 0.01$. *Le reste étant petit on trouve alors*

$$\sin(0,01) \approx 0,01 - \frac{(0,01)^3}{6} = 0,0099\cdots$$

Remarque 5.9. Pour $n = 0$ c'est exactement l'énoncé du théorème des accroissements finis : il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$.

5.5.1 Opérations sur les polynômes de Taylor

Théorème 5.12

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, et soit $x_0 \in I$. Soit P (resp. Q) le polynôme de Taylor de f (resp. g) à l'ordre n au point x_0. Alors

1. le polynôme de Taylor de $f + g$ à l'ordre n en x_0 est $P + Q$.
2. le polynôme de Taylor de fg à l'ordre n en x_0 est PQ tronqué en degré n.
3. le polynôme de Taylor de $\frac{f}{g}$ à l'ordre n en x_0 est le quotient de P par Q selon les puissances croissantes à l'ordre n.

Exemple 5.11. *On écrit la formule de Taylor-Young à l'ordre* 3 *en* 0 *de la fonction* f *définie par :* $f(x) = e^x + \sin x$
On a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\epsilon(x),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\epsilon(x).$$

Donc

$$f(x) = 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + x^3\epsilon(x).$$

Exemple 5.12. *On écrit la formule de Taylor-Young à l'ordre* 3 *en* 0 *de la fonction* g *définie par :* $f(x) = e^x \sin x$
On a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + x^3\epsilon(x),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\epsilon(x).$$

Donc

$$g(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right)\left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + x^3\epsilon(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon(x).$$

Remarque 5.10.

1. PQ est un polynôme de degré au plus $2n$, son tronqué en degré n est le polynôme obtenu en supprimant tous les termes de degré strictement supérieur à n. Dans la pratique, ce ne sera même pas la peine de calculer ces termes.
2. La division selon les puissances croissantes de P par Q à l'ordre n est définie comme suit : si $Q(0) \neq 0$, alors il existe un unique couple (A, B) de polynômes tel que l'on ait
$$P(X) = Q(X)A(X) + X^{n+1}B(X)$$
avec $deg(A) \leq n$.
On dit que A est le quotient de P par Q selon les puissances croissantes à l'ordre n, et que B est le reste. Cette division, contrairement à la division euclidienne des polynômes, a pour effet d'augmenter le degré du reste, au lieu de le diminuer. Ainsi, il n'y a pas une seule division selon les puissances croissantes, il y en a une pour chaque ordre n. Plus n augmente, plus le degré du quotient et du reste augmentent.

Polynôme de Taylor pour la composition

Théorème 5.13

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^n telles que $f(I) \subset J$, et soit $x_0 \in I$. Soit P le polynôme de Taylor de f à l'ordre n au point x_0, et soit Q le polynôme de Taylor de g à l'ordre n au point $f(x_0)$. Alors le polynôme de Taylor de $g \circ f$ à l'ordre n au point x_0 est le polynôme composé $Q \circ P$ tronqué en degré n.

Exemple 5.13. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$h(x) = e^{\sin x}$$

On écrit la formule de Taylor-Young de la fonction h à l'ordre 3 en 0. On a bien $h = g \circ f$, avec $g(u) = e^u$ et $f(x) = \sin x$. On a

$$g(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + u^3\epsilon(u),$$

et

$$f(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x).$$

Donc

$$h(x) = 1 + (x - \frac{x^3}{6}) + \frac{(x - \frac{x^3}{6})^2}{2} + \frac{(x - \frac{x^3}{6})^3}{6} + x^3\epsilon(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3\epsilon(x).$$

Citons quelques applications des formules de Taylor :

— Calcul de valeurs approchées de fonctions usuelles

— Calcul de limites

— Position du graphe d'une courbe par rapport à sa tangente

5.6 Exercices

Exercice 5.1. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & \textit{si } x \neq 0, \\ 0, & \textit{si } x = 0. \end{cases}$$

1. *Montrer que f est dérivable au point $x = 0$.*
2. *Étudier la continuité de f' au point $x = 0$.*

Exercice 5.2. *Soient deux réels a et b. On définit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, par*

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x}, & \textit{si } x < 1, \\ bx^2 + 1, & \textit{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Trouver les valeurs de a et b pour lesquelles f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Exercice 5.3. *Déterminer toute les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Exercice 5.4. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par*

$$f(x) = e^{x\sqrt{3}} \sin x$$

Montrer que

$$f^{(n)}(x) = 2^n e^{x\sqrt{3}} \sin\left(x + \frac{n\pi}{6}\right)$$

Exercice 5.5. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable, on suppose que f' ne s'annule pas. Montrer que f ne peut être périodique.*

Exercice 5.6. *À l'aide du théorème des accroissements finis déterminer*

$$\lim_{x \to +\infty} \left((x + 1) e^{\frac{1}{x+1}} - x e^{\frac{1}{x}} \right)$$

Exercice 5.7. *En utilisant le théorème des accroissements finis, établir les inégalités suivantes*

1. $\forall x \in [0, +\infty[, \ \frac{x}{1+x} \leq \ln(x + 1) \leq x$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \ |\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$.

Exercice 5.8. *Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.*

1. *À l'aide du TAF. Montrer que*

$$\frac{b - a}{b} < \ln(b) - \ln(a) < \frac{b - a}{a}$$

2. *Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et deux fois dérivable sur $]0,1[$ telle que*

$$f(0) = 0, f(1) = 0, f'(0) > 0, f'(1) < 0.$$

De plus on supposera que : $\forall x \in]0,1[,\ f''(x) < 0$.

— *Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [0,\alpha[$, $f'(x) > 0$.*

— *Montrer que $f(x) > 0$.*

— *On suppose qu'il existe $\beta \in]0,1[$ tel que $f(\beta) = 0$, montrer qu'il existe $c_1 \in]0,\beta[$ et $c_2 \in]\beta,1[$ tel que $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$, en déduire une contradiction.*

— *Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout $x \in]0,1[$.*

3. *On considère la fonction f définie par :*

$$f(x) = \ln(xa + (1-x)b) - x\ln(a) - (1-x)\ln(b)$$

Montrer que f vérifie les hypothèses du 2 (En particulier on vérifiera que f est bien définie $[0,1]$. Puis que pour tout $x \in]0,1[$

$$\ln(xa + (1-x)b) > x\ln(a) + (1-x)\ln(b)$$

Exercice 5.9. *: Ecrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 4 pour les fonctions suivantes :*

1. $x \longmapsto 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$, *au voisinage de* -2.
2. $x \longmapsto tanx$, *au voisinage de* 0.
3. $x \longmapsto chx$, *au voisinage de* 0.
4. $x \longmapsto \sqrt{1-x}$, *au voisinage de* 1.

Exercice 5.10. *: Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$*

1. *Montrer que*
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(a).$$
2. *En déduire*
$$\lim_{x\to 0} \frac{2cosx - 2}{x^2}$$

Exercice 5.11. *Appliquer la formule de Taylor-Lagrange pour calculer la valeur approchée de $\sqrt{e}$ à 10^{-4} prés.*

Exercice 5.12.
1. *Ecrire la formule de de Taylor-Lagrange à l'ordre 5 en 0 pour la fonction $x \longmapsto sinx$.*
2. *Quelle est la valeur de :*
$$\lim_{x\to 0} \frac{sinx - x}{x^2}.$$
3. *Montrer que : $\forall x \geq 0$,*
$$x - \tfrac{x^3}{3} \leq sinx \leq x - \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^5}{120}.$$
Que se passe t-il lorsque x est négatif ?

CHAPITRE 6

FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES

6.1 Logarithme et exponentielle

6.1.1 Logarithme népérien

Proposition 6.1

Il existe une unique fonction, notée $\ln$ définie sur $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

et

$$\ln(1) = 0$$

De plus cette fonction vérifie (pour tout $a, b > 0$) :

1. $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$
2. $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$
3. $\ln(a^n) = n\ln(a),\ \forall n \in \mathbb{N}$
4. $\ln$ est une fonction continue, strictement croissante et définit une bijection de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$,
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
6. la fonction $\ln$ est concave et $\ln(x) \leq x - 1$ (pour tout $x > 0$).

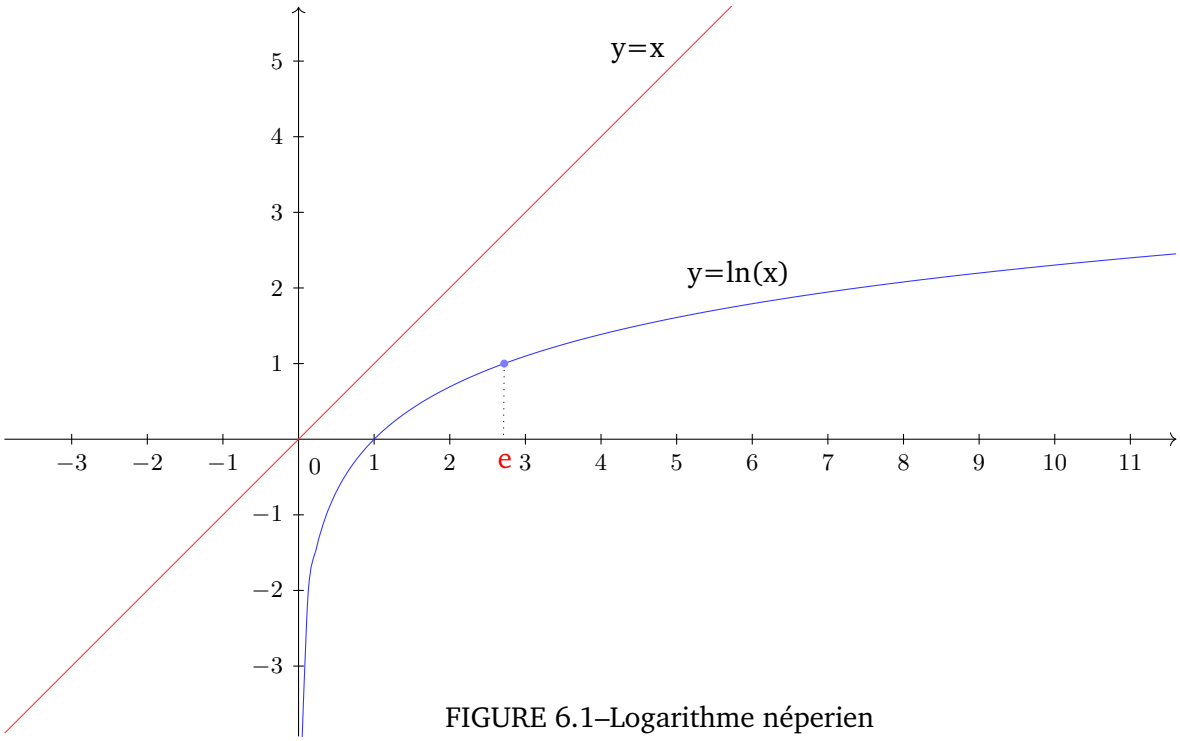


FIGURE 6.1–Logarithme néperien

6.1.2 Exponentielle

Définition 6.1. La bijection réciproque de $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ s'appelle la fonction exponentielle, notée $\exp$ et définie sur $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$ par

$$\exp(x) = e^x$$

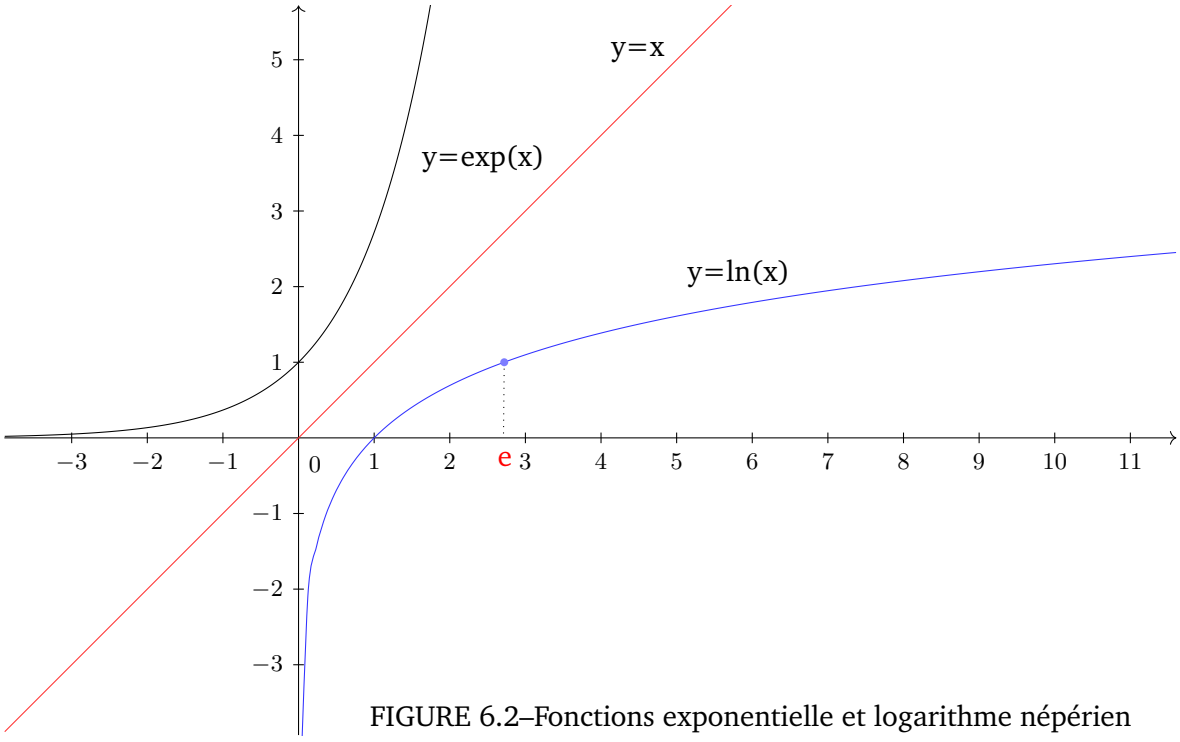


FIGURE 6.2–Fonctions exponentielle et logarithme népérien

Proposition 6.2

La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall x > 0, \exp(\ln(x)) = x$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(\exp(x)) = x$
2. $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$
3. $\exp(nx) = (exp(x))^n, \forall n \in \mathbb{N}$
4. $\exp$ est une fonction continue, strictement croissante vérifiant $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$
5. La fonction exponentielle est dérivable et $\exp'(x) = \exp(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Elle est convexe et $\exp(x) \geq 1 + x$.

6.1.3 Logarithme de base quelconque

Définition 6.2. Soit a un réel strictement positif et différent de 1. On appelle logarithme de base a l'application notée $\log_a$ définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Remarque 6.1.

1. Si $a = 10$, on obtient le logarithme décimal qu'on note $\log$.
2. Si $a = e$, on obtient le logarithme népérien $\log_a = \ln$.
3. $\log_a(1) = 0$, $\log_a(a) = 1$.

Proposition 6.3

Soit a un réel strictement positif et différent de 1. Pour $x, y \in]0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a

1. $\log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
2. $\log_a(\frac{1}{x}) = -\log_a(x)$
3. $\log_a(x^n) = n \log_a(x)$
4. $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$

Proposition 6.4

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. La fonction $\log_a$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x \in]0, +\infty[, \log_a'(x) = \frac{1}{x \ln a}.$$

1. Si $x \in]1, +\infty[$, alors la fonction $\log_a$ est strictement croissante et concave.
2. Si $x \in]0, 1[$, alors la fonction $\log_a$ est strictement décroissante et convexe.

6.1.4 Fonction puissance

Par définition, pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$

$$a^b = \exp(b \ln(a))$$

Remarque 6.2. Pour $a > 0$, on a

1. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = \exp(\frac{1}{2}\ln(a))$
2. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = \exp(\frac{1}{n}\ln(a))$ (la racine n-ème de a)
3. On note aussi $\exp(x)$ par e^x ce qui se justifie par le calcul :
$$e^x = \exp(x \ln e) = \exp(x)$$
4. Les fonctions $x \mapsto a^x$ s'appellent aussi des fonctions exponentielles et se ramènent systématiquement à la fonction exponentielle classique par l'égalité $a^x = \exp(x \ln a)$. Il ne faut surtout pas les confondre avec les fonctions puissances $x \mapsto x^a$.

Proposition 6.5

Soit $x, y > 0$ et $a, b \in \mathbb{R}$

- $x^{a+b} = x^a x^b$
- $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$
- $(xy)^a = x^a y^a$
- $(x^a)^b = x^{ab}$
- $\ln(x^a) = a \ln(x)$

Comparons les fonctions $\ln x$, $\exp x$ avec x :

Proposition 6.6

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty$$

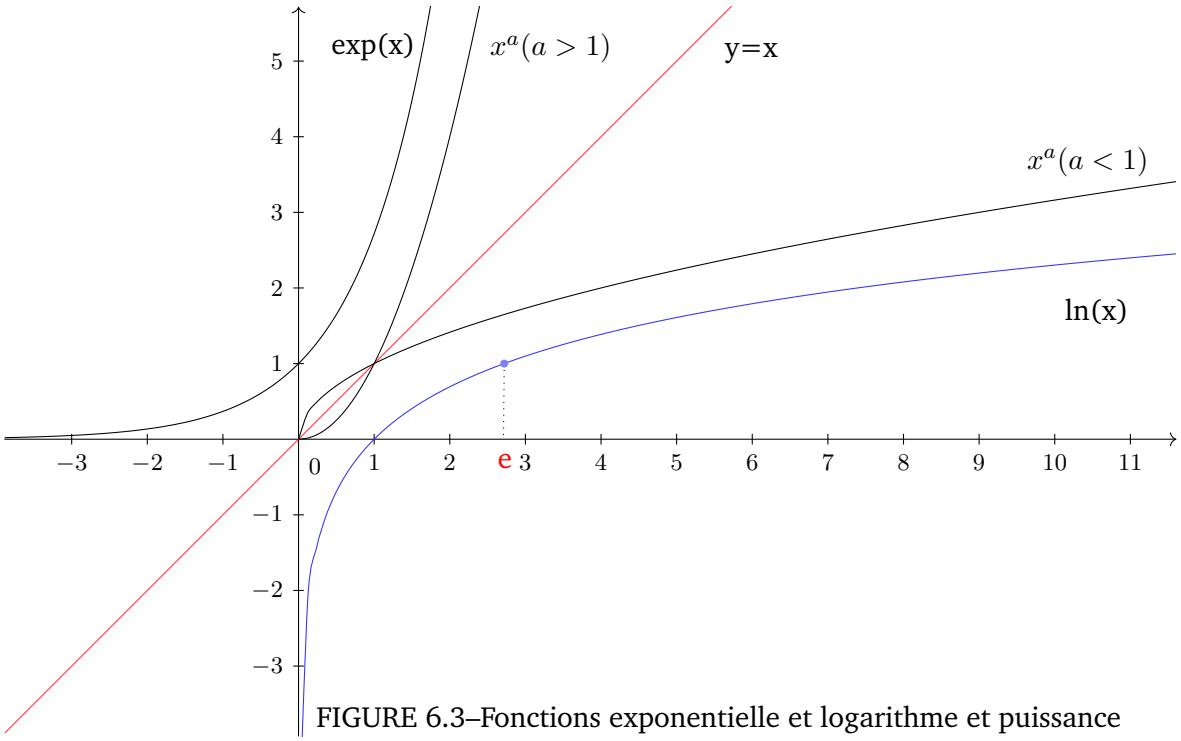


FIGURE 6.3–Fonctions exponentielle et logarithme et puissance

6.2 Fonctions trigonométrique réciproques

6.2.1 Arccosinus

Considérons la fonction cosinus, $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1], x \mapsto \cos x$. Pour obtenir une bijection à partir de cette fonction, il faut considérer la restriction de cosinus à l'intervalle $[0, \pi]$. Sur cet intervalle la fonction cosinus est continue et strictement décroissante, donc la restriction

$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction arccosinus :

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

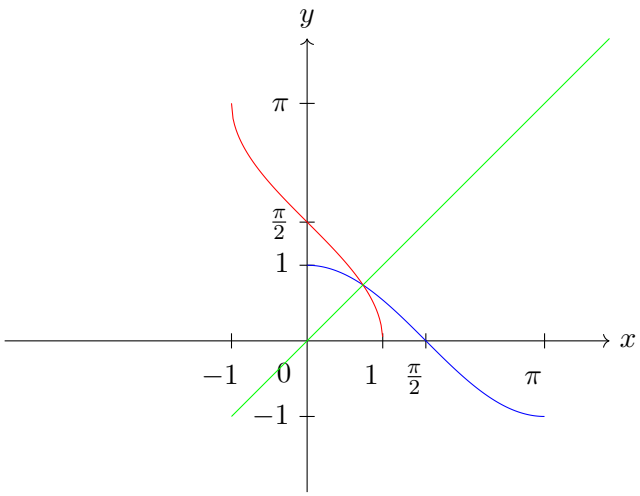


FIGURE 6.4–Fonctions cosinus et arccosinus

On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\forall x \in [-1,1], \cos(\arccos(x)) = x,$$
$$\forall x \in [0,\pi], \arccos(\cos(x)) = x.$$

Proposition 6.7

$\forall x \in]-1,1[$,

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

6.2.2 Arcsinus

Considérons la fonction sinus, $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1], x \mapsto \sin x$. Pour obtenir une bijection à partir de cette fonction, il faut considérer la restriction de sinus à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Sur cet intervalle la fonction sinus est continue et strictement décroissante, donc la restriction

$$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction arcsinus :

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$

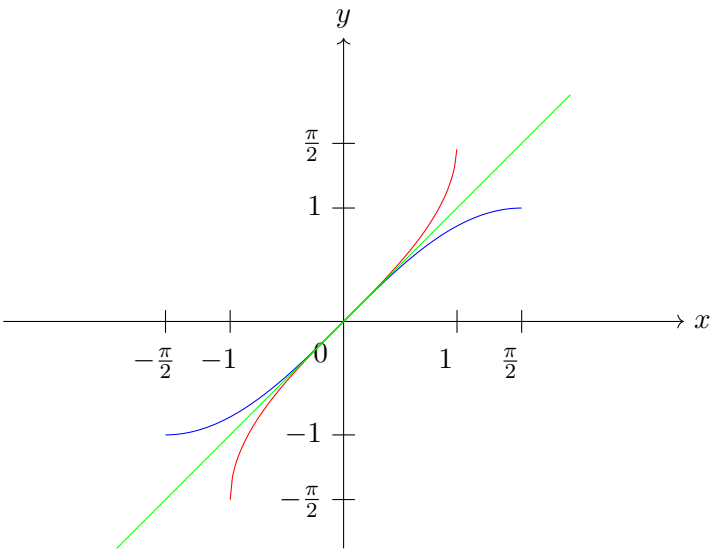


FIGURE 6.5–Fonctions sinus et arcsinus

On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\forall x \in [-1,1], \sin(\arcsin(x)) = x,$$
$$\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \arcsin(\sin(x)) = x.$$

Proposition 6.8

$\forall x \in]-1,1[$,

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

6.2.3 Arctangente

La restriction

$$\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction arctangente :

$$\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

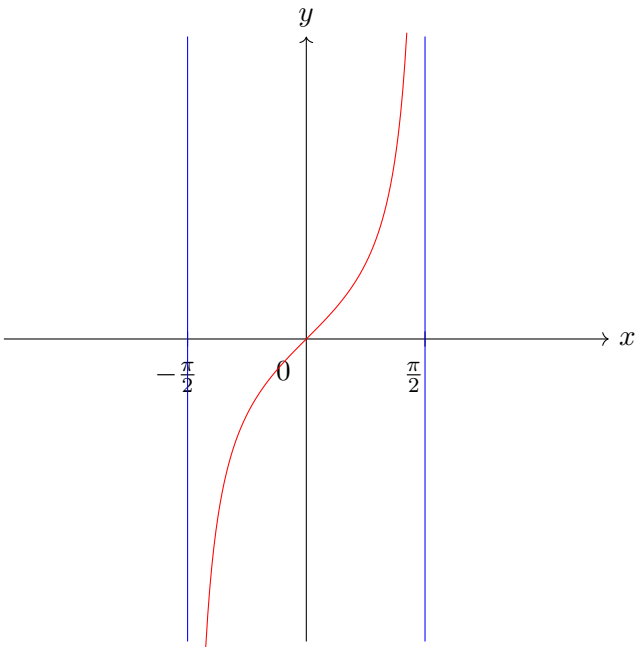


FIGURE 6.6–Fonction tangente

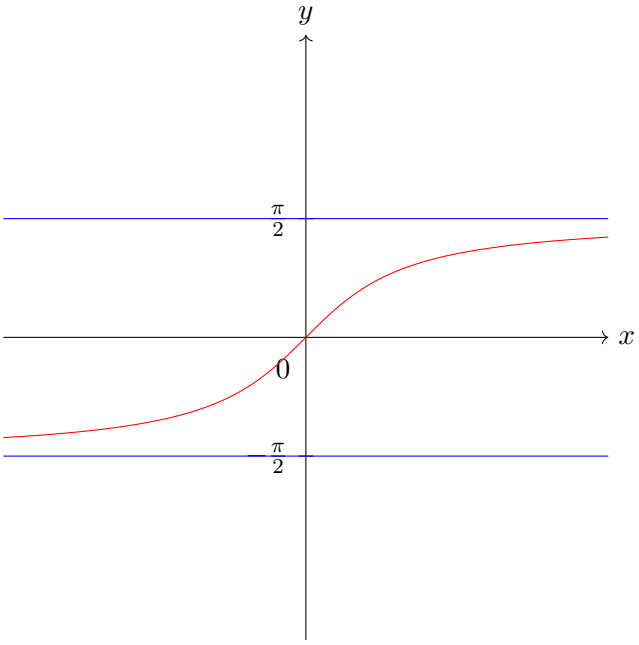


FIGURE 6.7–Fonction arctangente

On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = x,$$

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \arctan(\tan(x)) = x.$$

Proposition 6.9

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

6.3 Fonctions hyperboliques et hyperboliques réciproques

6.3.1 Cosinus et sinus hyperboliques

Définition 6.3. Les fonctions **cosinus hyperbolique** et **sinus hyperbolique** sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \ \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Proposition 6.10

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

1. $\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = e^x$
2. $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = e^{-x}$
3. $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$

Proposition 6.11

Les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x), \ \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x).$$

Proposition 6.12

La fonction ch est paire, strictement positive sur $\mathbb{R}$, strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(x) \geq 1.$$

La fonction sh est impaire, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, strictement négative sur $]-\infty, 0[$ et strictement positive sur $]0, +\infty[$ et s'annule en 0.

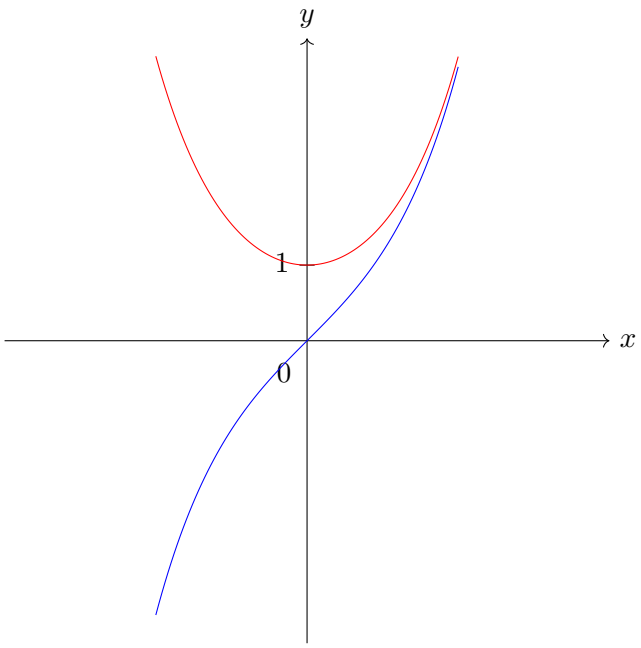


FIGURE 6.8–Fonctions cosinus et sinus hyperboliques

6.3.2 Tangente hyperbolique

Définition 6.4. La fonction **tangente hyperbolique**, notée th, est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}.$$

Remarque 6.3. La fonction th est bien définie car la fonction ch est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Proposition 6.13

La fonction th est impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x).$$

Par conséquent, th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 0.

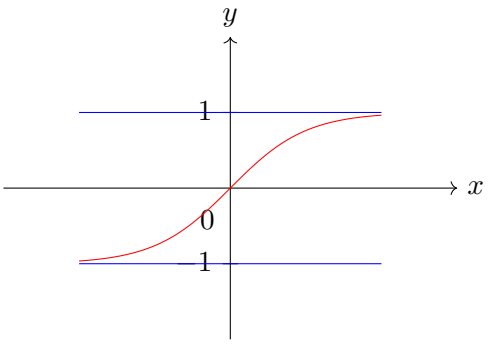


FIGURE 6.9–Fonction tangente hyperbolique

6.3.3 Fonctions hyperboliques réciproques

Argument cosinus hyperbolique

Proposition 6.14

La restriction de la fonction cosinus hyperbolique définie une bijection de $[0,+\infty[$ sur son image $[1,+\infty[$. L'application réciproque est appelée fonction **argument cosinus hyperbolique** et notée argch :

$$\operatorname{argch} : [1,+\infty[\to [0,+\infty[$$

On a : $\forall x \in [1,+\infty[, \operatorname{ch}(\operatorname{argch}(x)) = x. \forall x \in [0,+\infty[, \operatorname{argch}(\operatorname{ch}(x)) = x.$
La fonction argch est continue sur $[1,+\infty[$, dérivable sur $]1,+\infty[$ et :

$$\forall x \in]1,+\infty[, \operatorname{argch}'(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$

et donc, strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

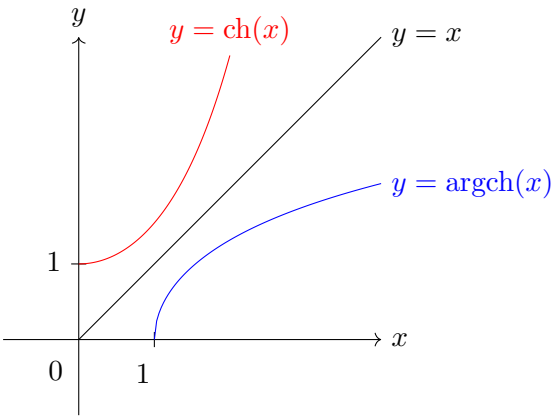


FIGURE 6.10–Fonctions ch et argch

Argument sinus hyperbolique

Proposition 6.15

La fonction sinus hyperbolique définie une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image $\mathbb{R}$. L'application réciproque est appelée fonction **argument sinus hyperbolique** et notée argsh :

$$\operatorname{argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(\operatorname{argsh}(x)) = x. \forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{argsh}(\operatorname{sh}(x)) = x.$
La fonction argsh est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{argsh}'(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

et donc, strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

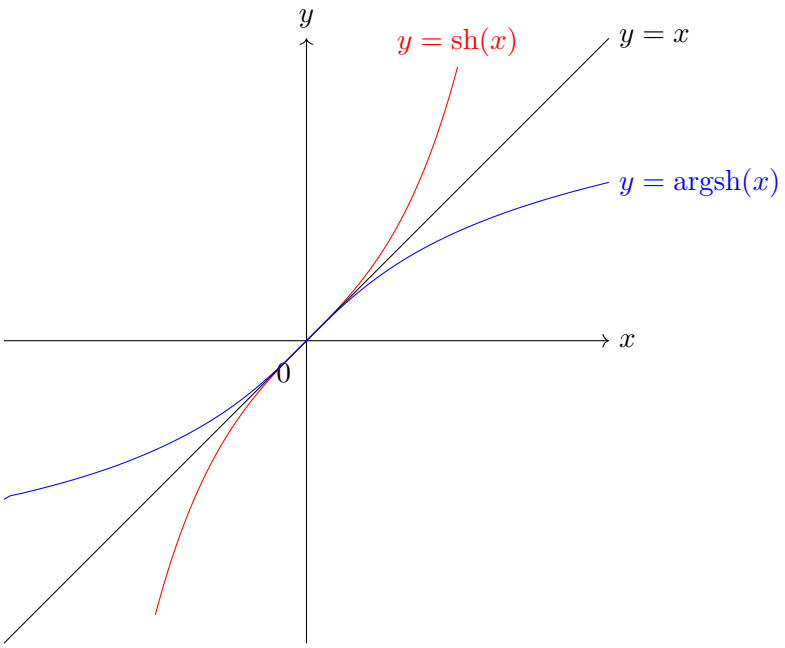


FIGURE 6.11–Fonctions sh et argsh

Argument tangente hyperbolique

Proposition 6.16

La fonction tangente hyperbolique définie une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image $]-1,1[$. L'application réciproque est appelée fonction **argument tangente hyperbolique** et notée argth :

$$\mathrm{argth} :]-1,1[\to \mathbb{R}$$

On a : $\forall x \in]-1,1[, \mathrm{th}(\mathrm{argth}(x)) = x. \forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{argth}(\mathrm{th}(x)) = x.$
La fonction argth est continue sur $]-1,1[$, dérivable sur $]-1,1[$ et :

$$\forall x \in]-1,1[, \mathrm{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2},$$

et donc, strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

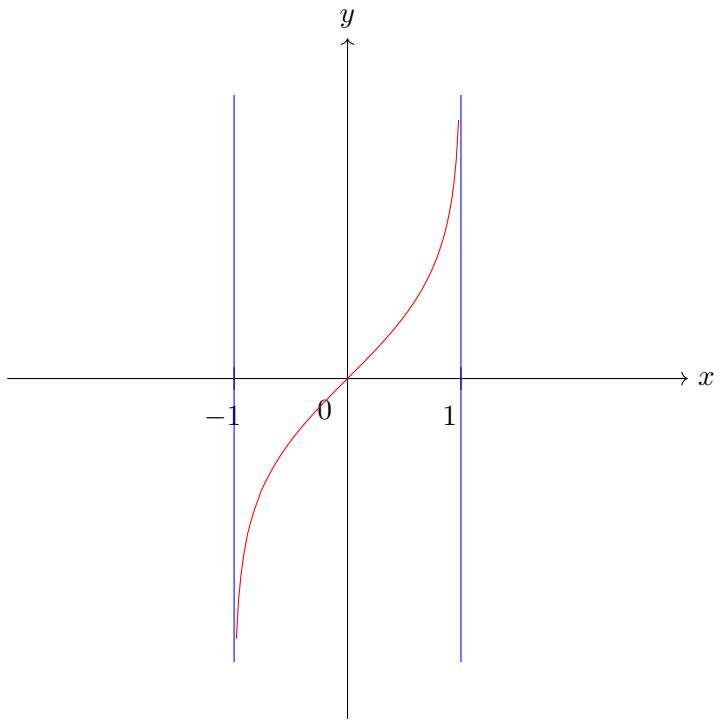


FIGURE 6.12–Fonction argument tangente hyperbolique

6.4 Exercices

Exercice 6.1. *Démontrer les inégalités suivantes :*

$$\arcsin a > \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \quad si\ 0 < a < 1;$$

$$\arctan a > \frac{a}{1+a^2} \quad si\ a > 0.$$

Exercice 6.2. *Écrire sous forme d'expression algébrique*

$$\sin(\arccos x), \quad \cos(\arcsin x), \quad \sin(3\arctan x).$$

Exercice 6.3. *Résoudre les équation suivantes :*

$$\arcsin x = \arcsin\frac{2}{5} + \arcsin\frac{3}{5}, \quad \arccos x = 2\arccos\frac{3}{4},$$

$$\arctan x = 2\arctan\frac{1}{2}.$$

Exercice 6.4. *Vérifier*

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \qquad \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = sgn(x)\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 6.5. *1. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : [1; +\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(\mathrm{ch}(x)) = e^x.$$

2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(e^x) = \mathrm{ch}(x).$$

Préciser le nombre de solutions.

3. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(e^x) = \mathrm{ch}(x).$$

Préciser le nombre de solutions ; y a t-il des solutions continues sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 6.6. *Calculer :*

$$\lim_{x\to\infty} e^x(\mathrm{ch}^3 x - \mathrm{sh}^3 x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty} (x - \ln(\mathrm{ch}(x)).$$

Exercice 6.7. *Les réels x et y étant liés par*

$$x = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right),$$

calculer $\mathrm{ch}(x), \mathrm{sh}(x)$ et $\mathrm{th}(x)$ en fonction de y.

Exercice 6.8. *Résoudre l'équation $x^y = y^x$ où x et y sont des entiers positifs non nuls.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. Allab, Eléments d'Analyse, OPU, Alger, (1984).

[2] S. Balac et F. Sturm, Algèbre et analyse : Cours de mathématiques première année, Presse polytechniques et universitaires romande 2009.

[3] Y. Bougrov et S. Nikolski, Cours de Mathématiques Supérieures, Editions Mir, Moscou, (1983).

[4] B. Calvo, J. Doyen, A. Calvo, F. Boschet, Cours d'analyse, Librairie Armand Colin, Paris, (1976).

[5] Cours de mathématiques première année, http ://exo7.emath.fr/cours/livre-analyse-1.pdf

[6] J. Lelong-Ferrand et J. M. Arnaudiès, Cours de mathématiques, tome 2, Edition Dunod, (1978).

[7] J.-M. Monier, Analyse PCSI-PTSI, Dunod, Paris (2003).

[8] N. Piskounov, Calcul différentiel et intégral, Tome 1, Editions Mir, Moscou, (1980).

[9] A. Soyeur, F. Capaces et E. Vieillard-Baron, Cours de Mathématiques Sup MPSI PCSI PTSI TSI, (2011).