République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministére de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Yahia Fares de Médéa
Faculté des Sciences
Département des Mathématiques et de l'Informatique



MEMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse et Modélisation Mathématique

par

BARKI Mohamed

Problèmes elliptiques à coercivité dégénérée

Soutenu publiquement le 17 Mai 2017 devant le jury composé de

Président :	F. MOKHTARI	*M.C.A*	Université d'Alger 1
Examinateur :	R. SOUILAH	*M.C.B*	Université de Médéa
Examinateur :	M. BENCHAA	*M.A.A*	Université de Médéa
Encadreur :	H. AYADI	*M.A.A*	Université de Médéa

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2016-2017

Table des matières

Résumé **5**

Notation **7**

Introduction **9**

1 Rappels sur les espaces fonctionnels **13**

1.1 Espaces de Lebesgue 13

1.2 Espaces de Marcinkiewicz 16

1.3 Distributions 17

1.4 Espaces de Sobolev 18

2 Équations elliptiques non linéaires **21**

2.1 L'existence de solutions 21

2.2 Régularité de solutions 30

2.2.1 Deuxième membre dans un espace de Lebesgue 34

2.2.2 Deuxième membre dans un espace de Marcinkiewicz 39

3 Problèmes elliptiques à données non régulières **42**

3.1 Approximation et estimations à priori 43

3.2 Solutions au sens des distributions 49

3.2.1 Solutions entropiques 51

4 Problèmes elliptiques à coercivité dégénérée **54**

4.1 Approximation et estimations à priori 55

4.2 Solutions dans l'espace de Sobolev 65

4.3 Solutions entropiques 67

5 Problèmes elliptques à terme d'ordre inférieur 75

5.1 Cas d'un problème coercif 75

5.2 Cas d'un problème à coercivité dégénérée 80

Conclusion 91

Dédicace

∇

♠♡♢♣*Je dédie ce travail*

à mes très chers parents, dont

le sacrifice, la tendresse, l'amour, la patience,

le soutien, l'aide et les encouragements sont le secret de ma réussite.

Sans eux, je ne serais pas ce que je suis aujourd'hui. Je dédie ce travail également

à mes frères LATRACHE Mahfoudh et GHERDAOUI Rabah

à tout mes enseignants, du primaire au niveau supérieur.

à tout mes amis♠♡♢♣

$\int$

BARKI Mohamed

Remerciements

Louange à Allah,
le miséricordieux , sans Lui rien
de tout cela n'aurait pu être. Nous
remercions Allah qui nous a orienté
au chemin du savoir et les portes de la science.
Mon encadreur AYADI Hocine , en premier pour
ses encouragements et la confiance qu'il m'a accorder et
accepter de m'encadrer, ensuite pour ses conseils judicieux m'ont
été d'une trés grande utilité et son suivi pour terminer ce travail.
Je tiens à remercier également les membres de
jury pour avoir accepter de jurer ce mémoire.
Mes remerciements les plus sincéres sont
adressés à mes enseignants, qui ont
contribué durant nos études à
notre formation et tous les
enseignants de l'Université
YAHIA Fares de Médéa
Enfin, merci à
ma famille, pour son
amour et son soutien
constant.

Résumé

Dans ce mémoire, on va étudier la question d'existence et régularité pour certains problèmes elliptiques, on commence par un problème uniformément elliptique ensuite on va abordé cette question pour un problème elliptique à coercivité dégénérée, afin de comparer les résultats et de clarifier les effets négatifs de la coercivité dégénérée sur la régularité des solutions. Enfin, on va voir comment l'ajout des termes d'ordre inférieur peuvent améliorer la régularité des solutions.

Mots-clés :
Problèmes elliptiques, coercivité dégénérée, solutions au sens des distributions , solutions entropiques, termes d'ordre inférieur.

Abstract

In this dissertation, we will study the question of existence and regularity for some elliptic problems, we start with a uniformly elliptic problem and then we will address this question for an elliptic problem with degenerate coercivity in order to compare the results and clarify the negatives effects of degenerate coercivity on the regularity of solutions. Finally, we will see how the lower order terms can improve the regularity of the solutions.

Key word : Elliptic problems , degenerate coercivity, distributional solutions, entropy solutions, lower order terms.

Notation

$\mathbb{R}^N$	L'espace Euclidien de dimension N.
Ω	Un ouvert de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$.
$\partial\Omega$	La frontière de Ω.
$\lvert E\rvert$	La mesure de Lebesgue de l'ensemble mesurable E.
p.p.	Presque partout (par rapport à la mesure de Lebesgue).
E'	Le dual topologique de E
	(l'espace des formes linéares continues sur l'espace de Banach E).
$(\cdot,\cdot)$	Produit scalaire.
$\langle\cdot,\cdot\rangle_{E'\times E}$	Le crochet de dualité entre l'espace E et son dual topologique E'.
$\lVert\cdot\rVert_2$	La norme Euclidienne dans $\mathbb{R}^N$; $\lVert x\rVert_2 = \Big(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}$.
$B_\rho(x_0)$	La boule de centre x_0 et de rayon $\rho > 0$;
	$B_\rho(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^N \ ; \ \lVert x - x_0\rVert_2 \leq \rho\}$.
$\alpha \in \mathbb{N}^N$	Un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$ de longueur $\lvert\alpha\rvert = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$.
∂_i	La i-ième dérivée partielle; $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.
∂^α	La dérivée d'ordre α; $\partial^\alpha = \frac{\partial^{\lvert\alpha\rvert}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_N^{\alpha_N}}$.
∇u	Le gradient de u, $\nabla u = \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}\Big)$.
Δu	Le laplacien de u, $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}$.
$\operatorname{div} v$	La divergence du vecteur $v = (v_1, ..., v_N)$, $\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + ... + \frac{\partial v_N}{\partial x_N}$.
χ_E	La fonction indicatrice de l'ensemble E, $\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \ x \in E \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$
$\{u \geq k\} :=$	$\{x \in \Omega, u(x) \geq k\}$ pour une fonction donnée u.
$\rightharpoonup$	La convergence faible.
$\operatorname{supp}(u) :=$	$\overline{\{x \in \Omega \ ; \ u(x) \neq 0\}}$ Support d'une fonction u.

$\underset{\Omega}{\text{sup-ess}}(u)$ Le sup essentiel d'une fonction u sur Ω,

$$\underset{\Omega}{\text{sup-ess}}(u) = \inf\{C > 0 \ ; \ u(x) \leq C \ \ p.p.\ x \in \Omega\}.$$

$\text{sign}(x)$ Le signe d'un nombre réel non nul x, $\text{sign}(x) = \frac{x}{|x|}$.

$p' = \frac{p}{p-1}$ L'exposant conjugué de l'exposant p pour $1 \leq p \leq +\infty$.

$p^* = \frac{Np}{N-p}$ L'exposant critique de Sobolev. pour $1 \leq p < N$.

$\mathcal{C}^k(\Omega)$ L'espace des fonctions k fois continûment différentiables sur Ω.

$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ L'espace des fonctions infiniment différentiables sur Ω.

$\mathcal{C}_c(\Omega)$ L'espace des fonctions continues à support compact dans Ω.

$\mathcal{D}(\Omega)$ L'espace des fonctions indéfiniments différentiables à support compact dans Ω.

$\mathcal{D}'(\Omega)$ L'espace des distributions sur Ω.

$L^p(\Omega)$ L'espace de Lebesgue,

$$L^p(\Omega) = \begin{cases} \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable } ; \ \int\limits_\Omega |u|^p < +\infty\right\}, & si \quad 1 \leq p < +\infty, \\ \underset{\Omega}{\text{sup-ess}}(u), & si \quad p = +\infty. \end{cases}$$

$W^{1,p}(\Omega)$ L'espace de Sobolev,

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{u \in L^p(\Omega) \ ; \ |\nabla u| \in L^p(\Omega)\right\}.$$

$W_0^{1,p}(\Omega)$ La ferméture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Introduction

Notre compréhension des phénomènes du monde réel et notre technologie sont aujourd'hui en grande partie basées sur les équations aux dérivées partielles, qui seront notées en abrégé EDP dans la suite. C'est en effet grâce à la modélisation de ces phénomènes à travers les EDP que l'on a pu comprendre le rôle de tel ou tel paramètre, et surtout obtenir des prévisions parfois extrêmement précises.

Ce mémoire est consacré à l'étude des problèmes non linéaires elliptiques à coercivité dégénérée. Afin d'illustrer les difficultés qui peuvent apparaître lors de l'étude de ces équations, on commence par l'étude d'une classe de problèmes non linéaires uniformément elliptiques du type

$$(P1) \qquad \begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est une fonction de Carathéodory vérifiant des hypothèses du Leray-Lions suivantes, pour presque partout $x \in \Omega$ et pour tout $(s,\xi,\eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$

$$|a(x,s,\xi)| \leq \beta(|s|^{p-1} + |\xi|^{p-1}) \ , \tag{1}$$

$$a(x,s,\xi)\cdot\xi \geq \alpha|\xi|^p \ , \tag{2}$$

$$(a(x,s,\xi) - a(x,s,\eta))\cdot(\xi-\eta) > 0 \quad \text{si} \quad \xi \neq \eta \ , \tag{3}$$

où α, β sont des constantes positives.

La préoccupation première du mathématicien confronté à une équation aux dérivées partielles est de lui donner un sens dans des espaces fonctionnels appropriés et d'y démontrer l'existence de solutions (voir [6] et [15]).

Nous verrons que la régularité de la solution dépend de la régularité de la source f. Les points de départ sont des résultats de régularité par Stampacchia. Nous supposerons que la source est une fonction f appartenant à un espace de Lebesgue ou à un espace Marcinkiewicz (voir [6]).

Lorsque la fonction a ne vérifiant pas l'hypothèse (2), on parle sur un problème à coercivité dégénérée. Dans ce contexte, nous considérons le problème modèle suivant :

$$(P2) \qquad \begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où $a : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ est une fonction de Carathéodory vérifiant, pour presque partout $x \in \Omega$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$

$$\frac{\alpha}{(1+|s|)^{\theta(p-1)}} \leq a(x,s) \leq \beta, \qquad (4)$$

où α, β et θ sont des constantes positives avec $\theta \in [0,1]$ et $f \in L^m(\Omega)$, $m \geq 1$. La difficulté principale concernant l'étude du problème (P2) est le fait que, en raison de hypothèse (4), l'opérateur différentiel $A(u) = -\operatorname{div}(a(x,u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ est bien défini de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans son dual $W^{-1,p'}(\Omega)$ mais n'est pas coercif sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ quand u est grand. Cela implique que les méthodes classiques utilisées pour prouver l'existence d'une solution pour le problème (P2) ne peuvent pas être appliquées même si la donnée f est très régulière.

Nous allons prouver l'existence de solutions pour le problème (P2), sous diverses hypothèses sur la donnée f. Pour cela, nous allons approcher le problème (P2) par un problème coercif (qui a donc une solution), et nous allons prouver des estimations a priori sur les solutions de ce problème. On remarque que la coercivité dégénérée à des effets négatifs de sur la régularité des solutions et que si $\theta = 0$, on obtient des résultats de régularité coïncident avec les résultats classiques de régularité pour des équations uniformément elliptiques (voir [6], [2] [19]). De plus, si $\theta > 1$, des phénomènes de non-existence apparaissent (voir aussi [4] et [6]).

Enfin, on va voir comment l'ajout des termes d'ordre inférieur peuvent améliorer la régularité des solutions. Afin de clarifier l'effet positive de ces termes sur l'existence et la regularité de solutions, commençons par l'étude d'un probléme uniformément elliptique

$$(P3) \qquad \begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)) + |u|^{q-1}u = f \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est une fonction de Carathéodory vérifiant des hypothèses (1), (2) et (3) (voir [6]). Ensuite on considère le probléme elliptique à coercivité dégénérée suivant :

$$(P4) \qquad \begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |u|^{q-1}u = f \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où $a : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ est une fonction de Carathéodory vérifiant, pour presque partout $x \in \Omega$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$

$$\frac{\alpha}{(1+|s|)^{\theta}} \leq a(x,s) \leq \beta, \qquad (5)$$

où $\alpha > 0$ et $\theta \geq 0$ (voir [12] et [13]). On montre que la solution appartient à $L^q(\Omega)$; et on remarque que la puissance q apparaissant dans le terme de l'ordre inférieur, a eu un effet sur la solution u, c'est-à-dire, l'effet de régularisation du terme de l'ordre inférieur.

Ce mémoire, qui est composé de cinq chapitre, présente des résultats d'existence et de régularité de solutions faibles, entropiques pour quatre problèmes (P1), (P2), (P3) et (P4) du type mentionnés ci-dessus. On va présenter ici d'une manière détaillée le contenu de chacun d'eux.

Le chapitre 1 est entièrement consacré à l'exposé des définitions et résultats nécessaire à la suite de ce travail. On rappelle tout d'abord quelques résultats de base sur les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$, Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ et Marcinkiweiz $M^p(\Omega)$.

Le chapitre 2 est consacré à l'étude des EDP non linéaire du type elliptique dans un cadre coercif et à donné régulièr.

L'objectif du troisième chapitre est de présenter un résultat d'existence et de régularité de solutions faibles et entropiques pour un problème elliptique dans un cadre coercif et à donnée régulière.

Dans le quatrième chapitre, on traite un problème elliptique à coercivité dégénérée.

Enfin, dans le dernier chapiter, on montre l'existence de solutions au sens des distributions et entropiques pour un problème elliptique à tèrme d'ordre inférieur.

Chapitre 1

Rappels sur les espaces fonctionnels

Les espaces de Sobolev sont un outil omniprésent dans l'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques. Leur compréhension est donc une étape nécessaire avant d'aborder les équations en question. Nous reprenons dans ce chapitre certains énoncés de H. Brezis [10] sur le sujet, pour une présentation plus complète des espaces de Sobolev, on pourra consulter l'ouvrage de R.A. Adams [1]. Par la suite, Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$, muni de la mesure de Lebesgue.

1.1 Espaces de Lebesgue

Définition 1.1 *On définit l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ par*
Pour $1 \leq p < +\infty$

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable } ; \quad \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$||u||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

Pour $p = +\infty$, l'espace de Lebesgue $L^\infty(\Omega)$ défini par

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable } ; \quad \sup_\Omega\text{-ess}(u) < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{\Omega}\text{-ess}(u).$$

$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq +\infty$ et de Hilbert pour $p = 2$ muni du produit scalaire

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)\, dx.$$

Proposition 1.1 (Séparabilité, réflexivité et dual de $L^p(\Omega)$)

1) *$L^p(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$ et réflexif pour $1 < p < \infty$.*

2) *Le dual de $L^p(\Omega)$ pour $1 < p < \infty$ est isomorphe à $L^{p'}(\Omega)$, avec $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$.*

3) *$L^1(\Omega)$ est séparable mais pas réflexif et son dual est $L^\infty(\Omega)$.*

4) *$L^\infty(\Omega)$ n'est pas ni séparable ni réflexif et son dual est contient strictement $L^1(\Omega)$.*

Lemme 1.2 (Inégalité de Yong) *Soient $a, b \in [0, +\infty)$ et $p, q \in (1, +\infty)$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Alors*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

Lemme 1.3 (Inégalité de Hölder généralisée) *Soient $p, q \in (1, +\infty)$ et $r \in (1, +\infty)$ avec $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Si $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$, alors $uv \in L^r(\Omega)$, et on a*

$$||uv||_{L^r(\Omega)} \leq ||u||_{L^p(\Omega)} \cdot ||v||_{L^q(\Omega)}.$$

Lemme 1.4 (Inégalité d'interpolation) *Soit $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. Si $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ alors $u \in L^r(\Omega)$ pour tout $r \in [p, q]$, et on a*

$$||u||_{L^r(\Omega)} \leq ||u||^{\theta}_{L^p(\Omega)} \cdot ||u||^{1-\theta}_{L^q(\Omega)}$$

où $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$, avec $\theta \in [0, 1]$.

Corollaire 1.5 *Soit $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. Si $|\Omega| < +\infty$ alors $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.*

Définition 1.2 (Convergence forte, convergence faible dans $L^p(\Omega)$)

Soient $p \in [1, +\infty[$, $(f_n)_n \subset L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$.

- *On dit que f_n converge fortement vers f dans $L^p(\Omega)$ et on note $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$ si*

  $$\lim_{n\to+\infty} ||f_n - f||_{L^p(\Omega)} = 0.$$

- *On dit que f_n converge faiblement vers f dans $L^p(\Omega)$ et on note $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(\Omega)$ si*
$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega (f_n - f)\cdot\varphi \ = 0, \qquad \forall\varphi \in L^{p'}(\Omega).$$
- *On dit que f_n converge faible $*$ vers f dans $L^\infty(\Omega)$ et on note $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ dans $L^\infty(\Omega)$ si*
$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega (f_n - f)\cdot\varphi \ = 0, \qquad \forall\varphi \in L^{1}(\Omega).$$

Définition 1.3 (Equi-intégrabilité) *Soient $p \geq 1$ et $(f_n)_n \subset L^p(\Omega)$. On dit que $(f_n)_n$ est equi-intégrable, si. pour tout $E \subset \Omega$ mesurable, on a*

$$\lim_{|E|\to 0}\int_E |f_n|^p = 0 \ , \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Théorème 1.1 (Vitali) *Soient $p \geq 1$, $(f_n)_n \subset L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$, on suppose que $f_n \to f$ p.p. dans Ω et que $(f_n)_n$ equi-intégrable. Alors $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$.*

Théorème 1.2 *Soient $p > 1$, $(f_n)_n \subset L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$. On suppose que $(f_n)_n$ bornée dans $L^p(\Omega)$ et que $f_n \to f$ p.p. dans Ω. Alors $f_n \to f$ dans $L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, p)$, et $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(\Omega)$.*

Théorème 1.3 (La convergence dominée de Lebesgue) *Soit $p \geq 1$, et soient $(f_n)_n \subset L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$, on suppose que $f_n \to f$ p.p. dans Ω et qu'il existe $g \in L^p(\Omega)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on : $|f_n| \leq g$ p.p. dans Ω. Alors $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$.*

Définition 1.4 (Fonction de Carathéodory) *Soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f est de Carathéodory si*

(1) *$f(\cdot, s) : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable pour tout $s \in \mathbb{R}$.*

(2) *$f(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue pour presque par tout $x \in \Omega$.*

Théorème 1.4 (Opérateur de Nemitski) *Soient $p, q \geq 1$ et $f : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory. On suppose qu'elle existe une fonction positive $a \in L^q(\Omega)$ et une constante $b > 0$, tels que*

$$|f(x, t)| \leq a(x) + b|t|^{\frac{p}{q}}. \tag{1.1.1}$$

Alors l'opérateur $\phi : u(x) \mapsto f(x, u(x))$ est continu de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.

Théorème 1.5 *Soient $p \geq 1, q > 1$ et $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory vérifiant (1.1.1). Donc, si $u_n \to u$ p.p. dans Ω et faiblement dans $L^p(\Omega)$, alors*

$$f(x, u_n) \rightharpoonup f(x, u) \quad dans \quad L^q(\Omega).$$

1.2 Espaces de Marcinkiewicz

Définition 1.5 *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $p > 0$. On définit l'espace de Marcinkiewicz $M^p(\Omega)$ par*

$$M^p(\Omega) = \Big\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \quad mesurable \ ; \quad \exists\, C > 0, \quad \forall\, \lambda > 0 \ ; \quad |\{|f| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda^p} \Big\},$$

muni de la norme

$$||f||_{M^p(\Omega)} = \left(\inf \left\{ C > 0 \ ; \quad |\{|f| > \lambda\}| \leq \frac{C}{\lambda^p} \ , \qquad \forall\, \lambda > 0 \right\} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Exemple 1.1 *Posons $\Omega = (0, 1] \subset \mathbb{R}$. La fonction $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est une fonction de l'espace de Marcinkiewicz $M^2(\Omega)$, en effet ; pour tout $x \in \Omega$, on a*

$$\left| \left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{x}} \right| > \lambda \right\} \right| = \frac{1}{\lambda^2} \ , \qquad \forall\, \lambda > 0,$$

de plus $||f||_{M^2(\Omega)} = 1$. Par contre $f \notin L^2(\Omega)$, en effet ; $\displaystyle\int_\Omega \left| \frac{1}{\sqrt{x}} \right|^2 dx = [\ln x]_0^1 = +\infty$.

Proposition 1.6 *$L^p(\Omega) \subset M^p(\Omega)$ pour tout $p \geq 1$.*

Preuve. Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $\lambda > 0$. Alors

$$|\{|f| > \lambda\}| = \frac{1}{\lambda^p} \int\limits_{\{|f|>\lambda\}} \lambda^p < \frac{1}{\lambda^p} \int\limits_{\{|f|>\lambda\}} |f|^p < \frac{||f||^p_{L^p(\Omega)}}{\lambda^p}.$$

■

Lemme 1.7 *Soient $r \geq 1$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Alors*

$$f \in L^r(\Omega) \iff \sum_{k=0}^{+\infty} k^{r-1} |\{|f| > k\}| < +\infty.$$

Proposition 1.8 *Soient $p > 1$ et $1 \leq q < p$. Alors*

$$M^p(\Omega) \subset L^q(\Omega).$$

Preuve. Soit $f \in M^p(\Omega)$, alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k^{q-1}|\{|f| > k\}| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} k^{q-1}\frac{||f||^p_{M^p(\Omega)}}{k^p} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{||f||^p_{M^p(\Omega)}}{k^{p-q+1}},$$

comme $p > q$, alors le lemme (1.7) implique le résultat. ∎

Proposition 1.9 *Soit $f \in M^p(\Omega)$, $p > 1$. Alors il existe $C > 0$ tel que pour tout $E \subset \Omega$ mesurable, on a*

$$\int_E |f| \quad \leq C\ |E|^{1-\frac{1}{p}}.$$

Lemme 1.10 (Fatou) *Soit $(f_n)_n \subset L^1(\Omega)$ une suite de fonctions positives. Alors*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to+\infty} f_n \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n.$$

1.3 Distributions

Définition 1.6 *On désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ (par fois $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$) l'espace des fonctions de classe C^∞ sur Ω à support compact, un élément de $\mathcal{D}(\Omega)$ est appelé fonction test.*
Toute forme linéaire continue T sur $\mathcal{D}(\Omega)$ est appelée une distribution sur Ω et on note

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathcal{D}(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ & \varphi & \mapsto & \langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}. \end{array}$$

$\mathcal{D}(\Omega)$ est un sous-espace dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < +\infty$.

Définition 1.7 *Soit $K \subset \Omega$ compact, on note*

$$\mathcal{D}_K(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)\ ;\ \ supp(\varphi) \subset K\}.$$

Proposition 1.11 *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Donc pour tout compact $K \subset \Omega$, ils existent $C > 0$ et $m \in \mathbb{N}$, tels que*

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C \cdot \sup_{x\in K,\ |\alpha|\leq m} |D^\alpha\varphi(x)|, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega).$$

La plus petite constante m qui vérifie l'inégalité précedente s'appelle ordre de la distribution T.

Définition 1.8 (Égalité au sens des distributions) *Soit $T, S \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On dit que T est égale à S au sens des distributions et on note $T = S$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si*

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle S, \varphi \rangle, \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Définition 1.9 (Dérivées au sens des distributions) *Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $k \in \{1...N\}$, $\alpha \in \mathbb{N}^N$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On appelle dérivé partielle de T par rapport à la k-ième variable et on la note $\dfrac{\partial T}{\partial x_k}$, la distribution définie par*

$$\langle \frac{\partial T}{\partial x_k}, \varphi \rangle = -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Par récurrence, on définit la dérivée partielle de T d'ordre α par

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

1.4 Espaces de Sobolev

Définition 1.10 *Soit $1 \leq p \leq +\infty$. On définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ par*

$$W^{1,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega)\ ; \quad |\nabla u| \in L^p(\Omega) \Big\},$$

muni de la norme

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega)} = \begin{cases} \Big(||u||^p_{L^p(\Omega)} + ||\nabla u||^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{p}} & si \quad 1 \leq p < +\infty, \\ \max \Big\{ ||u||_{L^\infty(\Omega)}, ||\nabla u||_{L^\infty(\Omega)} \Big\} & si \quad p = +\infty. \end{cases}$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq +\infty$, de plus pour $p = 2$ l'espace $W^{1,2}(\Omega)$ noté $H^1(\Omega)$ est de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}.$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < +\infty$ et réflexif pour $1 < p < +\infty$.

Définition 1.11 *On dit qu'un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ est de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}$ (respectivement Lipschitzien), si on peut trouver un nombre fini d'ouverts $\{\mathcal{O}_i\}_{0 \leq i \leq I}$ de $\mathbb{R}^N$ tels que $\overline{\mathcal{O}_0} \subset \Omega$, $\overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=0}^{I} \mathcal{O}_i$ et $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=0}^{I} \mathcal{O}_i$ et tels que pour tout $i \in \{0, ..., I\}$ il existe une application bijective ϕ_i de classe $\mathcal{C}^k$ (respectivement Lipschitzien) de $\mathcal{O}_i$ dans l'ensemble*

$$B_1(0) = \{ x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}\ ; \quad \|x\|_2 \leq 1 \},$$

et l'inverse de ϕ_i doit être de classe $\mathcal{C}^k$ (respectivement Lipschitzien) et tel que

$$\phi_i(\mathcal{O}_i \cap \Omega) = \Big\{(x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \ ; \quad \|x\|_2 \leq 1, \ x_N > 0\Big\} = B^+,$$

et

$$\phi_i(\mathcal{O}_i \cap \partial\Omega) = \Big\{(x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \ ; \quad \|x\|_2 \leq 1, \ x_N = 0\Big\} = \Gamma.$$

Les ϕ_i sont des difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^k$ (respectivement Lipschitzien).

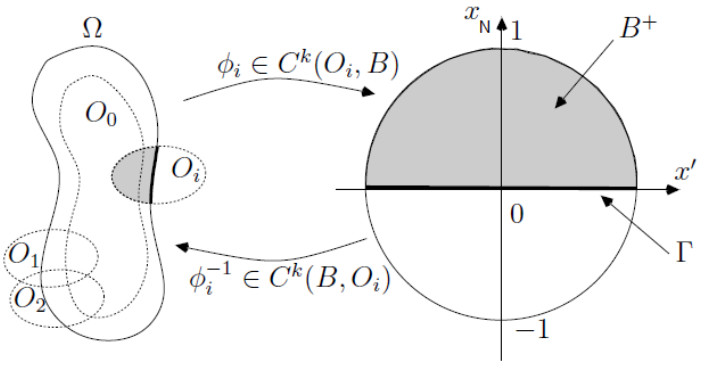


Figure : Résumé géométrique de la définition précédente

Définition 1.12 *Soit $1 < p < +\infty$. On note $W_0^{1,p}(\Omega)$ la ferméture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$, de plus, si Ω est Lipschitzien, alors*

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \Big\{u \in W^{1,p}(\Omega) \ ; \quad u_{|\partial\Omega} = 0\Big\}.$$

Si $p > 1$, on note $W^{-1,p'}(\Omega)$ au dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Théorème 1.6 (Inégalité de Poincaré) *Soient Ω un ouvert Lipschitzien de $\mathbb{R}^N$ borné au moins dans une direction et $p \in [1, +\infty)$. Alors il existe une constante positive $C = C(p, \Omega)$, tel que :*

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leq C \cdot ||\nabla u||_{L^p(\Omega)} \ , \qquad \forall \ u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Par conséquence l'application $u \mapsto ||\nabla u||_{L^p(\Omega)}$ définie une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$, équivalente à la norme usuelle.

Définition 1.13 (Convergence faible, convergence forte dans $W^{1,p}(\Omega)$)

Soient $p \in [1, +\infty[$, $(f_n)_n \subset W^{1,p}(\Omega)$ et $f \in W^{1,p}(\Omega)$.

- *On dit que f_n converge fortement vers f dans $W^{1,p}(\Omega)$ et on note $f_n \to f$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ si*

$$f_n \to f \quad dans \quad L^p(\Omega) \quad et \quad \nabla f_n \to \nabla f \quad dans \quad L^p(\Omega).$$

- *On dit que f_n converge faiblement vers f dans $W^{1,p}(\Omega)$ et on note $f_n \rightharpoonup f$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ si*

$$f_n \rightharpoonup f \quad dans \quad L^p(\Omega) \quad et \quad \nabla f_n \rightharpoonup \nabla f \quad dans \quad L^p(\Omega).$$

Théorème 1.7 (Injections de Sobolev-Rellich-Kondrachov) *Soient Ω un ouvert borné et Lipschitzien de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ et $p^* = \frac{Np}{N-p}$. Alors*

- *Si $1 \leq p < N$ alors l'injection $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compacte pour $q \in [1, p^*)$, et continue pour $q = p^*$. En particulier l'injection $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ est compacte pour tout $p \in [1, +\infty)$.*
- *Si $p = N$ alors l'injection $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compacte et continue pour $q \in [1, +\infty)$.*
- *Si $p > N$ alors l'injection $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ est compacte et continue.*

Exemple 1.2 *Soit Ω un ouvert borné et Lipschitzien de $\mathbb{R}^N$.*

1. *Si $N = 3$, les injections $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ sont compactes et continues respectivement.*
2. *Si $N = 2$, l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est compacte et continue.*
3. *Si $N = 1$, l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ est compacte et continue.*

Chapitre 2

Équations elliptiques non linéaires

Dans ce chapitre, nous décrivons certains résultats d'existence classiques pour des solutions faibles aux problèmes de Dirichlet concernant les opérateurs elliptiques non linéaires [1]. Tout d'abord, nous nous référons à certains résultats classiques impliquant les opérateurs dits pseudomonotones. Dans tout la suite Ω sera un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ et $1 < p < N$. On considère le problème elliptique non linéaire suivant :

$$(LL) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)) = f \quad dans \quad \Omega, \\ u = 0 \quad sur \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ et $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est une fonction de Carathéodory vérifiant, pour presque partout $x \in \Omega$ et pour tout $(s,\xi,\eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$

$$|a(x,s,\xi)| \leq \beta(|s|^{p-1} + |\xi|^{p-1}) \ , \tag{2.0.1}$$

$$a(x,s,\xi)\xi \geq \alpha|\xi|^p, \tag{2.0.2}$$

$$(a(x,s,\xi) - a(x,s,\eta))\,(\xi - \eta) > 0 \quad \text{si} \quad \xi \neq \eta, \tag{2.0.3}$$

où α, β sont deux constantes strictement positives, $p \in (1, +\infty)$ et $p' = \frac{p}{p-1}$.

Nous soulignons que la preuve d'existence de solutions pour le problème (LL) repose sur un résultat abstrait de surjectivité.

2.1 L'existence de solutions

Dans la suite V sera un espace de Banach muni de la norme $||\cdot||$, V' son dual muni de la norme $||\cdot||_{V'}$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le crochet de dualité entre V et V'.

Nous aurons besoin des définitions suivantes.

Définition 2.1 *Soit V un espace de Banach réflexif. Un opérateur $A : V \to V'$ est dit pseudomonotone si*

1) *A est borné, c'est-à-dire,*

$$||A(v)||_{V'} \text{ est borné lorsque } ||v|| \text{ est borné.}$$

2) *Si $u_n \rightharpoonup u$ dans V et $\limsup_{n\to\infty}\langle A(u_n), u_n - u\rangle \leq 0$, alors*

$$\liminf_{n\to\infty}\langle A(u_n), u_n - v\rangle \geq \langle A(u), u - v\rangle , \qquad \forall v \in V.$$

Définition 2.2 *Soit V un espace de Banach réflexif. Un opérateur $A : V \to V'$ est dit coercif si*

$$\frac{\langle A(v), v\rangle}{||v||} \to +\infty \quad \text{lorsque} \quad ||v|| \to +\infty.$$

On a besoin dans la suite du théorème suivant

Théorème 2.1 (Bolzano-Weierstrass) *De toute suite réelle bornée on peut extraire une sous-suite convergente.*

Théorème 2.2 (Brouwer) *Soit $T : B_1(0) \to B_1(0)$ une application continue. Alors T admet au moins un point fixe, c'est-à-dire, il existe $\xi \in B_1(0)$ tel que $T(\xi) = \xi$.*

Dans la démonstration du théorème de surjectivité, nous utilisons le lemme suivant.

Lemme 2.1 *Soit $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une application continue. On suppose qu'il existe $\rho > 0$, tel que $T(\xi) \cdot \xi \geq 0$, pour tout $\xi \in \partial B_\rho(0)$. Alors il existe $\xi \in B_\rho(0)$, tel que $T(\xi) = 0$.*

Preuve. Par contradiction, on suppose que $T(\xi) \neq 0$ pour tout $\xi \in B_\rho(0)$ et on considère l'application continue de $B_\rho(0)$ dans lui même définie par $\xi \to -\dfrac{T(\xi)\rho}{|T(\xi)|}$. D'après le théorème 2.2, on déduire qu'il existe $\xi \in B_\rho(0)$ tel que $-\dfrac{T(\xi)\rho}{|T(\xi)|} = \xi$ avec $|\xi| = \rho$, d'où $T(\xi) \cdot \xi = -|T(\xi)|\rho < 0$, contradiction avec $T(\xi) \cdot \xi \geq 0$ ■

Nous pouvons maintenant montrer le théorème de surjectivité

Théorème 2.3 (Surjectivité) *Soit V un espace de Banach, réflexif et séparable. Soit $A : V \to V'$ un opérateur pseudomonotone coercif. Alors A est surjectif, c'est-à-dire, pour tout $f \in V'$ il existe $u \in V$ tel que $A(u) = f$.*

Démonstration. Nous allons diviser la démonstration de ce théorème en trois étapes.

Étape 1 : Soit $W = \{w_1, ...w_n, ...\}$ un sous-ensemble dense et dénombrable de V. Soit V_n un sous-espace de V engendré par $\{w_1, ...w_n\}$. On définit

$$\begin{array}{rccc} T & : & V_n & \to & V_n \\ & & v & \mapsto & \langle A(v) - f, v\rangle v. \end{array}$$

Tout d'abord, nous allons montrer que T est continu, pour cela, il suffit de montrer que $v \mapsto \langle A(v), v\rangle$ est continu dans V_n. On suppose que $w_m \to w$ dans V et on montre que $\langle A(w_m), w_m\rangle \to \langle A(w), w\rangle$. Donc il suffit de montrer que $A(w_m) \rightharpoonup A(w)$ dans V'. Comme A est borné alors $||A(w_m)||_{V'}$ est uniformément bornée. Alors

$$\limsup_{m\to\infty} \langle A(w_m), w_m - w\rangle \leq 0,$$

en effet ;

$$|\langle A(w_m), w_m - w\rangle| \leq ||A(w_m)||_{V'} \cdot ||w_m - w|| \to 0.$$

La réflexivité de V' permet d'extraire une sous-suite $\{A(w_{m_k})\}$ de $\{A(w_m)\}$ telle que $A(w_{m_k}) \rightharpoonup g$ dans V', donc, par la pseudomonotonicité de A, on obtient

$$\langle g, w - v\rangle \geq \liminf_{m_k\to\infty} \langle A(w_{m_k}), w_{m_k} - v\rangle \geq \langle A(w), w - v\rangle \ , \qquad \forall v \in V.$$

Alors $g = A(w)$, d'où $A(w_{m_k}) \rightharpoonup A(w)$ dans V'.

Maintenant, on suppose que $A(w_m)$ ne converge pas faiblement vers $A(w)$ dans V'. cela contredit avec le dernier résultat. Donc $A(w_m) \rightharpoonup A(w)$ dans V'.

Étape 2 : On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $u_n \in V_n$, tel que

$$\langle A(u_n), w_j\rangle = \langle f, w_j\rangle, \qquad 1 \leq j \leq n. \tag{2.1.1}$$

On constate que T vérifiant $T(v) \cdot v \geq 0$ pour tout v avec $||v|| = \rho$, pour certain $\rho > 0$.

On a $T(v) \cdot v \geq 0$, en effet,

$$\frac{T(v) \cdot v}{||v||^3} = \frac{\langle A(v), v\rangle}{||v||} - \frac{\langle f, v\rangle}{||v||} \geq \frac{\langle A(v), v\rangle}{||v||} - ||f||_{V'} \geq 0,$$

pour ρ est suffisamment grand, alors le résultat découle de la coercivité de A.

Comme T est continu d'après l'étape 1, le lemme 2.1 est assuré l'existence de u_n avec $||u_n|| \leq \rho$.

Étape 3 : En utilisant (2.1.1), on obtient

$$\langle A(u_n), u_n\rangle = \langle f, u_n\rangle \leq ||f||_{V'} \cdot ||u_n||.$$

La coercivité de A implique que $||u_n||$ est uniformément borné. Puisque A est borné, $||A(u_n)||_{V'}$ est aussi uniformément borné.

Par conséquence, on déduire qu'il existe une sous-suite (u_{n_k}) telle que

$$\begin{cases} u_{n_k} \rightharpoonup u & \text{dans } V, \\ A(u_{n_k}) \rightharpoonup y & \text{dans } V'. \end{cases} \tag{2.1.2}$$

En passant à la limite dans (2.1.1), lorsque $n \to +\infty$, on obtient

$$\langle y, w_j\rangle = \langle f, w_j\rangle, \qquad \forall\ j \geq 1.$$

Comme W est dense dans V, alors $y = f$. Il reste à montrer que $y = A(u)$.

On constate que

$$\limsup_{n_k\to\infty} \langle A(u_{n_k}), u_{n_k} - u\rangle \leq 0. \tag{2.1.3}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, d'après le théorème de densité, il existe $u_0 \in \bigcup_m V_m$, tel que $||u - u_0|| \leq \varepsilon$. Donc

$$\begin{aligned} \langle A(u_{n_k}), u_{n_k} - u\rangle &= \langle f, u_{n_k}\rangle - \langle A(u_{n_k}), u - u_0\rangle - \langle A(u_{n_k}), u_0\rangle \\ &\leq \langle f, u_{n_k}\rangle - \langle A(u_{n_k}), u_0\rangle + ||A(u_{n_k})||_{V'} \cdot ||u - u_0|| \\ &\leq \langle f, u_{n_k}\rangle - \langle A(u_{n_k}), u_0\rangle + C \cdot \varepsilon, \end{aligned}$$

par suite, on obtient

$$\begin{aligned} \limsup_{n_k\to\infty} \langle A(u_{n_k}), u_{n_k} - u\rangle &\leq \langle f, u\rangle - \langle y, u_0\rangle + C \cdot \varepsilon \\ &\leq \langle f, u\rangle - \langle f, u_0\rangle + C \cdot \varepsilon \\ &\leq ||f||_{V'} \cdot ||u - u_0|| + C \cdot \varepsilon \\ &\leq (||f||_{V'} + C) \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

En faisant $\varepsilon \to 0$, on trouve (2.1.3). La pseudomonotonicité de A implique que

$$\langle y, u - v\rangle \geq \liminf_{n_k\to\infty} \langle A(u_{n_k}), u_{n_k} - v\rangle \geq \langle A(u), u - v\rangle\ , \qquad \forall v \in V.$$

Donc $y = A(u)$, d'où $f = A(u)$.

■

Théorème 2.4 (Leray-Lions) *Soit $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une fonction de Crathéodory, vérifiant les hypothèses (2.0.1), (2.0.2) et (2.0.3). Alors pour tout $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, il existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solution faible pour le problème (LL) vérifiant :*

$$\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla v \ = \langle f, v\rangle \ , \qquad \forall\ v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.1.4}$$

Nous appliquerons le théorème de surjectivité 2.3 à l'opérateur :

$$\begin{aligned} A : W_0^{1,p}(\Omega) &\to W^{-1,p'}(\Omega) \\ v &\mapsto -\operatorname{div}(a(x,v,\nabla v)). \end{aligned}$$

Pour démontrer que A est pseudomonotone, nous aurons besoin des les lemmes suivants.

Lemme 2.2 *Soient (u_n) une suite de fonctions de $W_0^{1,p}(\Omega)$ et u une fonction de $W_0^{1,p}(\Omega)$. Supposons que $u_n \rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, et que*

$$[a(x,u_n,\nabla u_n) - a(x,u,\nabla u)]\nabla(u_n - u) \to 0 \quad p.p.\ dans\ \ \Omega.$$

Alors $\nabla u_n \to \nabla u$ p.p. dans Ω.

Preuve. Comme $[a(x,u_n,\nabla u_n) - a(x,u,\nabla u)]\nabla(u_n - u) \to 0$ p.p. dans Ω, alors

$$\Big|[a(x,u_{n_k}(x),\nabla u_{n_k}(x)) - a(x,u(x),\nabla u(x))]\nabla(u_{n_k} - u)\Big| \le C(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega,$$

pour certaine fonction $C(x)$. L'inégalité précédente est vraie sauf sur un ensemble Z de mesure nulle.
Prouvons qu'il existe une fonction $c(x)$ telle que

$$|\nabla u_{n_k}(x)| \le c(x) \quad \text{p.p. } x \in \Omega. \tag{2.1.5}$$

En utilisant (2.0.1) et (2.0.2), on obtient

$$\begin{aligned} C(x) &\ge [a(x,u_{n_k},\nabla u_{n_k}) - a(x,u,\nabla u)]\nabla(u_{n_k} - u) \\ &\ge \alpha[|\nabla u_{n_k}|^p + |\nabla u|^p] - |\nabla u_{n_k}|[\beta(|u|^{p-1} + |\nabla u|^{p-1})] \\ &\qquad -|\nabla u|[\beta(|u_{n_k}|^{p-1} + |\nabla u_{n_k}|^{p-1})] \\ &\ge \alpha|\nabla u_{n_k}|^p - \beta|\nabla u|\cdot|\nabla u_{n_k}|^{p-1} - \beta|u_{n_k}|^{p-1}|\nabla u| \\ &\qquad -\beta(|u|^{p-1} + |\nabla u|^{p-1})|\nabla u_{n_k}|. \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

La convergence faible dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ de u_n vers u implique l'existence d'une sous-suite de (u_n) (encore notée (u_n)) et une fonction $g \in L^1(\Omega)$ tels que

$$|u_n|^{p-1}|\nabla u| \leq g \quad \text{et} \quad u_n \to u \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega.$$

Comme le membre à droite de l'inégalité (2.1.6) est un polynôme de ∇u_{n_k}, alors, on déduit (2.1.5), maintenant, nous allons montrer que

$$\nabla u_n \to \nabla u \quad \text{dans} \quad \Omega \backslash Z.$$

Par contradiction ; on suppose qu'il existe $x_0 \in \Omega \backslash Z$ tel que $\nabla u_n(x_0)$ ne converge pas vers $\nabla u(x_0)$. Le théorème 2.1 implique qu'il existe $b \in \mathbb{R}^N$ tel que $\nabla u_n(x_0) \to b$. Par un passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans

$$[a(x_0, u_n(x_0), \nabla u_n(x_0)) - a(x_0, u(x_0), \nabla u(x_0))]\nabla(u_n(x_0) - u(x_0)),$$

par suite, on obtient

$$[a(x_0, u(x_0), b) - a(x_0, u(x_0), \nabla u(x_0))](b - \nabla u(x_0)) = 0,$$

l'hypothèse (2.0.3) implique que $b = \nabla u(x_0)$, cela contredit. ∎

Lemme 2.3 *Soient (u_n) une suite de fonctions de $W_0^{1,p}(\Omega)$ et u une fonction de $W_0^{1,p}(\Omega)$. Supposons que $u_n \rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Si*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega [a(x, u_n, \nabla u_n) - a(x, u, \nabla u)]\nabla(u_n - u) = 0.$$

Alors

$$a(x, u_n, \nabla u_n) \rightharpoonup a(x, u, \nabla u) \quad \text{dans} \quad L^{p'}(\Omega).$$

Preuve. Posons

$$\gamma_n = [a(x, u_n, \nabla u_n) - a(x, u, \nabla u)]\nabla(u_n - u).$$

On veut montrer que $\gamma_n \to 0$ dans $L^1(\Omega)$. On peut écrire γ_n comme la somme de

$$\alpha_n = [a(x, u_n, \nabla u_n) - a(x, u_n, \nabla u)]\nabla(u_n - u),$$

et

$$\beta_n = [a(x, u_n, \nabla u) - a(x, u, \nabla u)]\nabla(u_n - u).$$

On observe que $\beta_n \to 0$ dans $L^1(\Omega)$, en effet, l'inégalité de Hölder donne

$$\int_\Omega |\beta_n| \leq ||a(x,u_n,\nabla u) - a(x,u,\nabla u)||_{L^{p'}(\Omega)} ||\nabla u_n - \nabla u||_{L^p(\Omega)}.$$

Comme $u_n \to u$ dans $L^p(\Omega)$, le théorème 1.4 implique que $a(x,u_n,\nabla u) \to a(x,u,\nabla u)$ dans $L^{p'}(\Omega)$, le fait que $\{\nabla u_n - \nabla u\}$ borné dans $L^p(\Omega)$, alors $\int_\Omega |\beta_n| \to 0$ d'où $\int_\Omega \beta_n \to 0$. On déduire que $\alpha_n \to 0$ et $\alpha \geq 0$ d'après l'hypothèse (2.0.3), d'où $\int_\Omega |\alpha_n| \to 0$. Par suite, $\int_\Omega |\gamma_n| \to 0$, alors $\gamma_n = [a(x,u_n,\nabla u_n) - a(x,u,\nabla u)]\nabla(u_n - u) \to 0$ p.p. dans Ω, à une sous-suite près. Le lemme 2.2 implique que $\nabla u_n \to \nabla u$ p.p. dans Ω.

En utilisant la convergence faible dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ de u_n vers u ,la dernier résultat et le théorème 1.5, on obtient le résultat. ∎

Nous pouvons maintenant prouver le théorème de Leray-Lions.

Démonstration. Nous allons montrer que l'opérateur

$$\begin{aligned} A : W_0^{1,p}(\Omega) &\to W^{-1,p'}(\Omega) \\ v &\mapsto -\operatorname{div}(a(x,v,\nabla v)), \end{aligned}$$

est coercif et pseudomonotone. Le résultat découlera du théorème 2.3.

Nous allons diviser la démonstration en quatre étapes.

Étape 1 : A est coercif. En utilisant l'hypothèse (2.0.2) et l'inégalité de Poincaré, on obtient, pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \langle A(v), v\rangle &= \int_\Omega a(x,v,\nabla v)\nabla v \geq \alpha \int_\Omega |\nabla v|^p \\ &\geq \alpha ||\nabla v||^p_{L^p(\Omega)}, \end{aligned}$$

par suite, on obtient

$$\frac{\langle A(v), v\rangle}{||v||_{W_0^{1,p}(\Omega)}} \geq C||v||^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)},$$

d'où $\dfrac{\langle A(v), v\rangle}{||v||_{W_0^{1,p}(\Omega)}} \to +\infty$ si $||v||_{W_0^{1,p}(\Omega)} \to +\infty$.

Étape 2 : A est borné.

Soient $v, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$, en utilisant l'hypothèse (2.0.2) et l'inégalité de Hölder avec

l'exposant p, on obtient

$$\begin{aligned}
|\langle A(v),w\rangle| &= \left|\int_\Omega a(x,v,\nabla v)\nabla w\right| \leq \int_\Omega |a(x,v,\nabla v)|\,|\nabla w| \\
&\leq \beta\left[\int_\Omega |v|^{p-1}|\nabla w| + \int_\Omega |\nabla v|^{p-1}|\nabla w|\right] \\
&\leq \beta\left(||v||^{p-1}_{L^p(\Omega)}||\nabla w||_{L^p(\Omega)} + ||\nabla v||^{p-1}_{L^p(\Omega)}||\nabla w||_{L^p(\Omega)}\right) \\
&\leq \beta||\nabla w||_{L^p(\Omega)}\left(||v||^{p-1}_{L^p(\Omega)} + ||\nabla v||^{p-1}_{L^p(\Omega)}\right) \\
&\leq 2\beta||w||_{W_0^{1,p}(\Omega)}||v||^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

On a

$$||A(v)||_{W^{-1,p'}(\Omega)} = \sup\{|\langle A(v),w\rangle| \ ; \ \ ||w||_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq 1\} \leq 2\beta||v||^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)},$$

donc $||A(v)||_{W^{-1,p'}(\Omega)}$ est borné si $||v||_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ est borné.

Étape 3 : On suppose que $u_n \rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et que $\limsup_{n\to\infty}\langle A(u_n),u_n-u\rangle \leq 0$ et on montre que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega [a(x,u_n,\nabla u_n) - a(x,u,\nabla u)]\nabla(u_n-u) = 0. \tag{2.1.7}$$

D'une part, on a

$$\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega [a(x,u_n,\nabla u_n) - a(x,u,\nabla u)]\nabla(u_n-u) \leq 0, \tag{2.1.8}$$

en effet ;

$$\begin{aligned}
\int_\Omega [a(x,u_n,\nabla u_n) - a(x,u,\nabla u)]\nabla(u_n-u) &= \int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla(u_n-u) \\
&\quad - \int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla(u_n-u),
\end{aligned}$$

avec

$$\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla(u_n-u) = \limsup_{n\to\infty}\langle A(u_n),u_n-u\rangle \leq 0$$

et

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla(u_n-u) = \lim_{n\to\infty}\langle A(u),u_n-u\rangle = 0.$$

D'autre part, on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega [a(x,u_n,\nabla u_n) - a(x,u,\nabla u)]\nabla(u_n-u) \geq 0 \tag{2.1.9}$$

en effet, l'hypothèse (2.0.3) implique que

$$\int_\Omega [a(x,u_n,\nabla u_n)-a(x,u,\nabla u)]\nabla(u_n-u) \geq \int_\Omega [a(x,u_n,\nabla u)-a(x,u,\nabla u)]\nabla(u_n-u),$$

et $\int_\Omega [a(x,u_n,\nabla u)-a(x,u,\nabla u)]\nabla(u_n-u) \to 0$, car l'opérateur $v \mapsto a(x,v,\nabla u(x))$ est continu de $L^p(\Omega)$ dans $L^{p'}(\Omega)$ (d'après le théorème 1.4), donc le lemme 2.3 implique que $a(x,u_n,\nabla u) \to a(x,u,\nabla u)$ dans $L^{p'}(\Omega)$, c'est-à-dire,

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla w \to \int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla w, \qquad \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.1.10}$$

Étape 4 : A est pseudomonotone. On a déjà montré que A est borné dans l'étape 2.

D'abord, on suppose que $u_n \rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et que $\limsup_{n\to\infty}\langle A(u_n),u_n-u\rangle \leq 0$ et on montre que

$$\liminf_{n\to\infty}\langle A(u_n),u_n-w\rangle \geq \langle A(u),u-w\rangle, \qquad \forall w \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

L'hypothèse (2.0.2) implique que $a(x,u_n,\nabla u_n) \to a(x,u,\nabla u)$ p.p. dans Ω. Le lemme de Fatou donne

$$\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n \geq \int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla u. \tag{2.1.11}$$

En combinant (2.1.10) et (2.1.11), on obtient

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty}\langle A(u_n),u_n-w\rangle &= \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla(u_n-w)\\
&\geq \liminf_{n\to\infty}\left(\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n - \int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla w\right)\\
&\geq \int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla u - \int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla w\\
&\geq \int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla(u-w)\\
&\geq \langle A(u),u-w\rangle.
\end{aligned}$$

■

2.2 Régularité de solutions

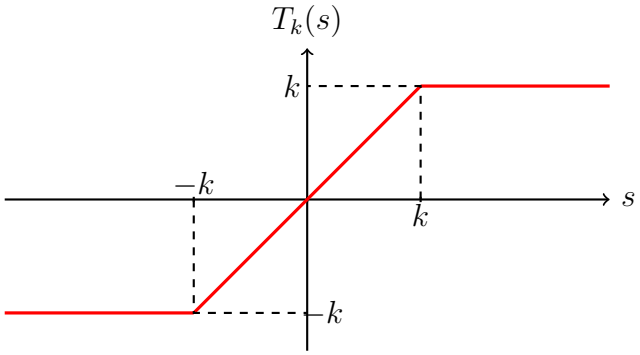
Dans cette section, on va étudier la régularité de solutions du problème (LL) dans le cas régulier, c'est-à-dire, le cas où $f \in L^m(\Omega)$ avec $m \geq p^{*'}$, ou $f \in M^m(\Omega)$ avec $m > p^{*'}$. Dans ce cas, l'injection de Sobolev assure que $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, donc d'après la section précédente, le problème (LL) admet au moins une solution faible $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Nous résumons les résultats dans le tableau suivant (voir [6]) :

$f \in L^m(\Omega)$	$m > N/p$	$u \in L^\infty(\Omega)$
	$N/p > m \geq p^{*'}$	$u \in L^{m_1}(\Omega)$
	$m = N/p$	$\forall\ \lambda > 0 : \quad e^{\lambda\|u\|} \in L^{p^*}(\Omega)$
$f \in M^m(\Omega)$	$m > N/p$	$u \in L^\infty(\Omega)$
	$N/p > m > p^{*'}$	$u \in M^{m_1}(\Omega)$
	$m = N/p$	$\exists\ \beta > 0 : \quad e^{\beta\|u\|} \in L^1(\Omega)$

où $m_1 = \frac{N(p-1)m}{N-pm}$, $p^* = \frac{Np}{N-p}$ et $p^{*'} = \frac{Np}{(p-1)N+p}$.

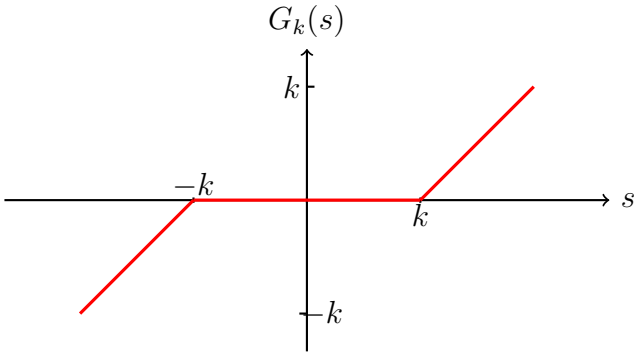
Dans toute la suite, pour tout $k > 0$, on note

$$T_k(s) = \begin{cases} -k, & s < -k, \\ s, & |s| \leq k, \\ k, & s > k, \end{cases}$$



et

$$G_k(s) = s - T_k(s) = \begin{cases} s + k, & s < -k, \\ 0, & |s| \leq k, \\ s - k, & s > k. \end{cases}$$



De plus si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable, on note

$$g(k) = \int_\Omega |G_k(f)|, \quad A_k = \{|f| > k\} \quad \text{et} \quad C_k = \{|f| \leq k\}.$$

Pour établir des estimations sur les solutions des problèmes elliptiques que nous étudierons, nous serons amenés à considérer $\varphi(u)$ comme fonction test, avec $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Des hypothèses sur φ nous permettent d'assurer que $\varphi(u)$ est encore dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 2.5 (Stampacchia) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leq p < +\infty$. Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, C^1 par morceaux telle que $\varphi(0) = 0$ et φ' est bornée sur $\mathbb{R}$. Alors $\varphi(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, et*

$$\nabla\varphi(u) = \nabla u \cdot \varphi'(u) \quad p.p. \text{ dans } \Omega.$$

Démonstration. voir [18] ■

Lemme 2.4 *Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Alors $\nabla G_k(u) = \nabla u \cdot \chi_{A_k}$ et $\nabla T_k(u) = \nabla u \cdot \chi_{C_k}$ p.p. dans Ω.*

Preuve. On a : $G_k(0) = T_k(0) = 0$, $G_k'(s) = \chi_{\{|s|>k\}}(s)$ et $T_k'(s) = \chi_{\{|s|\leq k\}}(s)$, et comme $G_k(s)$ et $T_k(s)$ sont lipschitziennes, alors le théorème 2.5 implique le résultat. ■

Lemme 2.5 *Soit $f \in L^1(\Omega)$. Alors $g(k)$ est différentiable p.p. et $g'(k) = -|A_k|$.*

Preuve. Posons $A_k^+ = \{w > k\}$, $A_k^- = \{w < k\}$, $g_1(k) = \int\limits_{A_k^+} (w-k)$ et $g_2(k) = \int\limits_{A_k^-} (w-k)$. Les fonctions g_1 et g_2 sont monotones, donc elles sont différentiables p.p., d'où g est différentiable p.p.. Soit $h \in \mathbb{R}_+$, alors

$$\begin{aligned}\frac{g_1(k+h)-g_1(k)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int\limits_{A^+_{k+h}}(w-k-h)-\int\limits_{A^+_k}(w-k)\right)\\ &= -\int\limits_{\Omega}\chi_{A^+_{k+h}}-\frac{1}{h}\int\limits_{\{k<w\leq k+h\}}(w-k).\end{aligned}$$

Par conséquence,

$$g_1'(k)=\lim_{h\to 0}\frac{g_1(k+h)-g_1(k)}{h}=-\lim_{h\to 0}\int\limits_{\Omega}\chi_{A^+_{k+h}}=-|A^+_k|.$$

De même, on obtient que $g_2'(k)=-|A^-_k|$, d'où $g'(k)=-|A_k|$. ∎

Lemme 2.6 *Soit $f\in L^1(\Omega)$. On suppose qu'il existe $\alpha>1$, $C>0$ et $k_0\in\mathbb{N}$ tels que pour tout $k\geq k_0$, on a $g(k)\leq C|A_k|^\alpha$. Alors $f\in L^\infty(\Omega)$.*

Preuve. En utilisant le lemme 2.5, on obtient

$$g(k)\leq C[-g'(k)]^\alpha,$$

c'est-à-dire,

$$g'(k)[g(k)]^{-\frac{1}{\alpha}}\leq -\frac{1}{C^{\frac{1}{\alpha}}}. \tag{2.2.1}$$

Par l'intégration sur (k_0,k), on obtient

$$-\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{k-k_0}{C^{\frac{1}{\alpha}}}\geq g(k)^{1-\frac{1}{\alpha}}-g(k_0)^{1-\frac{1}{\alpha}}.$$

Par suite, pour $k>k_0$, on obtient

$$g(k)^{1-\frac{1}{\alpha}}\leq g(k_0)^{1-\frac{1}{\alpha}}-\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{k-k_0}{C^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Pour $h_0=k_0+\frac{C^{\frac{1}{\alpha}}g(k_0)^{1-\frac{1}{\alpha}}}{1-\frac{1}{\alpha}}$, on a $g(h_0)=0$, c'est-à-dire,

$$|f|\leq h_0=k_0+\frac{C^{\frac{1}{\alpha}}g(k_0)^{1-\frac{1}{\alpha}}}{1-\frac{1}{\alpha}}.$$

D'où

$$||f||_{L^\infty(\Omega)}\leq h_0=k_0+\frac{C^{\frac{1}{\alpha}}g(k_0)^{1-\frac{1}{\alpha}}}{1-\frac{1}{\alpha}}<+\infty.$$

∎

Proposition 2.7 *Soient f une fonction mesurable définie sur Ω et $\beta > 0$. Alors*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{\beta k}|A_k| < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \int_{\Omega} e^{\beta|f|} < +\infty.$$

Preuve. On observe que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{\beta k}|A_k| = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{\beta k} \sum_{i=k}^{+\infty} |B_i| = \sum_{i=0}^{+\infty} |B_i| \sum_{k=0}^{i} e^{\beta k}, \tag{2.2.2}$$

où $B_i = \{i < |f| < i+1\}$. Puisque $t \mapsto e^{\beta t}$ croissante et continue, alors

$$\sum_{k=k_0}^{n} e^{\beta k} \leq \int_{k_0}^{n+1} e^{\beta t}\, dt. \tag{2.2.3}$$

En combinant (2.2.2) et (2.2.3), on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} e^{\beta k}|A_k| &= \sum_{i=0}^{+\infty} |B_i| \sum_{k=0}^{i} e^{\beta k} \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} |B_i| \sum_{j=-1}^{i-1} e^{\beta(j+1)} \\
&\geq \sum_{i=0}^{+\infty} |B_i| \int_{-1}^{i} e^{\beta t}\, dt \\
&\geq \sum_{i=0}^{+\infty} |B_i| \Big[\frac{e^{i\beta} - e^{\beta}}{\beta}\Big] \\
&\geq \frac{1}{\beta} \sum_{i=0}^{+\infty} \int_{|B_i|} [e^{\beta(|f|-1)} - e^{-\beta}] \\
&\geq \frac{e^{-\beta}}{\beta} \int_{\Omega} [e^{\beta|f|} - 1],
\end{aligned}$$

et donc $\displaystyle\int_{\Omega} e^{\beta|f|} < +\infty$. ∎

Proposition 2.8 *Soit f une fonction mesurable définie sur Ω. On suppose qu'il existe $\gamma, \theta > 0$, $k_0 \in \mathbb{N}$, tels que*

$$|A_k| \leq \frac{\theta}{k e^{\gamma k}}\ , \qquad \forall\ k \geq k_0. \tag{2.2.4}$$

Alors pour tout $\beta < \gamma$, on a

$$\int_{\Omega} e^{\beta|f|} < \infty.$$

Preuve. L'hypothèse (2.2.4), implique

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} e^{\beta k}|A_k| \leq \sum_{k=k_0}^{+\infty} e^{\beta k}\frac{\theta}{ke^{\gamma k}} < +\infty,$$

par suite, la proposition 2.7 implique le résultat. ■

Proposition 2.9 *Soit $p \in]1, +\infty)$. Alors pour tout $t \geq 0$, $Q > 1$, on a*

$$(Q-1)|t^p - 1| \leq Q(Q-1)|t-1|^p + 1.$$

Proposition 2.10 *Soit $a, b > 0$. Alors pour tout $\alpha > 0$, on a*

$$(a+b)^\alpha \leq \max\{1, 2^{\alpha-1}\}(a^\alpha + b^\alpha).$$

2.2.1 Deuxième membre dans un espace de Lebesgue

Dans cette section, on va montrer les résultats de la régularité pour le problème (LL), pour $f \in L^m(\Omega)$ avec $m \geq p^{*'}$.

Théorème 2.6 *Soit $f \in L^m(\Omega)$ avec $m > N/p$. Alors toute solution $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ du problème (LL) est bornée.*

Démonstration. On prend $v = G_k(u)$ comme une fonction test dans (2.1.4), on obtient

$$\int_\Omega a(x, u, \nabla u)\nabla G_k(u) = \int_\Omega f\ G_k(u). \tag{2.2.5}$$

D'une part, en utilisant l'hypothèse (2.0.2) et l'inégalité de Sobolev, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega a(x, u, \nabla u)\nabla G_k(u) &= \int_\Omega a(x, u, \nabla u)\nabla u \cdot \chi_{A_k} \\
&\geq \alpha \int_\Omega |\nabla u|^p \chi_{A_k} \\
&\geq \alpha \int_\Omega |\nabla G_k(u)|^p \\
&\geq \alpha S^p ||G_k(u)||^p_{L^{p^*}(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

D'autre part, par deux applications de l'inégalité de Hölder, l'une avec l'exposant p^* et l'autre avec $\frac{m}{p^{*\prime}}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f\ G_k(u) &\leq \int_{A_k} |f|\ |G_k(u)| \\
&\leq \left(\int_\Omega |G_k(u)|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \left(\int_{A_k} |f|^{p^{*\prime}}\right)^{\frac{1}{p^{*\prime}}} \\
&\leq ||G_k(u)||_{L^{p^*}(\Omega)} \left(\int_\Omega |f|^{p^{*\prime}} \chi_{A_k}\right)^{\frac{1}{p^{*\prime}}} \\
&\leq ||G_k(u)||_{L^{p^*}(\Omega)} \left(\int_\Omega |f|^{p^{*\prime}\frac{m}{p^{*\prime}}}\right)^{\frac{1}{p^{*\prime}}\frac{p^{*\prime}}{m}} |A_k|^{[1-\frac{p^{*\prime}}{m}]\frac{1}{p^{*\prime}}} \\
&\leq ||G_k(u)||_{L^{p^*}(\Omega)} ||f||_{L^m(\Omega)} |A_k|^{[\frac{1}{p^{*\prime}}-\frac{1}{m}]}.
\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

En combinant (2.2.5), (2.2.6) et (2.2.7), on obtient

$$||G_k(u)||_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \left(\frac{||f||_{L^m(\Omega)}}{\alpha S^p}\right)^{\frac{1}{p-1}} |A_k|^{[\frac{1}{p^{*\prime}}-\frac{1}{m}]\frac{1}{p-1}}. \tag{2.2.8}$$

En utilisant (2.2.8) et l'inégalité de Hölder avec l'exposant p^*, on obtient

$$\begin{aligned}
g(k) &= \int_\Omega |G_k(u)| = \int_\Omega |G_k(u)|\chi_{A_k} \\
&\leq \left(\int_\Omega |G_k(u)|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} |A_k|^{\frac{1}{p^{*\prime}}} \\
&\leq ||G_k(u)||_{L^{p^*}(\Omega)} |A_k|^{\frac{1}{p^{*\prime}}} \\
&\leq \left(\frac{||f||_{L^m(\Omega)}}{\alpha S^p}\right)^{\frac{1}{p-1}} |A_k|^{1+\frac{1}{p-1}(\frac{p}{N}-\frac{1}{m})}.
\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Si on pose $C = \left(\frac{1}{\alpha S^p}||f||_{L^m(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p-1}} > 0$ et $\gamma = 1 + \frac{1}{p-1}(\frac{p}{N} - \frac{1}{m}) > 1$, on obtient

$$g(k) \leq C\ |A_k|^\gamma.$$

Donc le lemme 2.6 assure le résultat. ■

Remarque 2.1 *On observe que, si u vérifiant*

$$\alpha \int_{A_k} |\nabla u|^p \leq \int_{A_k} f\ G_k(u).$$

alors u est bornée.

Remarque 2.2 *Dans le théorème 2.6, la condition $m > N/p$, implique*

$$1+\frac{1}{p-1}\Big(\frac{p}{N}-\frac{1}{m}\Big)>1.$$

Théorème 2.7 *Soit $f \in L^m(\Omega)$ avec*

$$N/p > m \geq p^{*'}. \tag{2.2.10}$$

Alors toute solution $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ du problème (LL), vérifiant

$$||u||^{p-1}_{L^{m_1}(\Omega)} \leq C\ ||f||_{L^m(\Omega)}, \qquad o\grave{u}\ \ m_1=\frac{N(p-1)m}{N-pm}.$$

Démonstration. Soit $\lambda > 0$, en prenant $v = |T_k(u)|^{p\lambda}T_k(u)$ comme une fonction test dans (2.1.4), on obtient

$$\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla(|T_k(u)|^{p\lambda}T_k(u)) \ = \int_\Omega f|T_k(u)|^{p\lambda}T_k(u). \tag{2.2.11}$$

D'une part, en utilisant l'hypothèse (2.0.2), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla(|T_k(u)|^{p\lambda}T_k(u)) &= (p\lambda+1)\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla u|T_k(u)|^{p\lambda}\chi_{C_k}\\
&\geq \alpha(p\lambda+1)\int_\Omega |T_k(u)|^{p\lambda}|\nabla u|^p\chi_{C_k}\\
&\geq \alpha(p\lambda+1)\int_\Omega \Big||T_k(u)|^{\lambda}\nabla T_k(u)\Big|^p\\
&\geq \alpha\frac{p\lambda+1}{(\lambda+1)^p}\int_\Omega \Big|\nabla(|T_k(u)|^{\lambda}T_k(u))\Big|^p,
\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Sobolev, on obtient

$$\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla(|T_k(u)|^{p\lambda}T_k(u)) \geq \frac{\alpha S^p(p\lambda+1)}{(\lambda+1)^p}\left(\int_\Omega |T_k(u)|^{(\lambda+1)p^*}\right)^{\frac{p}{p^*}}. \tag{2.2.12}$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Hölder avec l'exposant m, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f|T_k(u)|^{p\lambda}T_k(u) &\leq \left(\int_\Omega \Big||T_k(u)|^{p\lambda}T_k(u)\Big|^{m'}\right)^{\frac{1}{m'}}||f||_{L^m(\Omega)}\\
&\leq \left(\int_\Omega |T_k(u)|^{(p\lambda+1)m'}\right)^{\frac{1}{m'}}||f||_{L^m(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.2.13}$$

En combinant (2.2.11), (2.2.12) et (2.2.13), on obtient

$$\left(\int_\Omega |T_k(u)|^{(\lambda+1)p^*}\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \frac{(\lambda+1)^p}{\alpha S^p(p\lambda+1)} \left(\int_\Omega |T_k(u)|^{(p\lambda+1)m'}\right)^{\frac{1}{m'}} ||f||_{L^m(\Omega)}. \tag{2.2.14}$$

En prenant $\lambda = \frac{p^*-m'}{m'p-p^*}$ dans l'inégalité (2.2.14), on obtient

$$\left(\int_\Omega |T_k(u)|^{m_1}\right)^{\frac{p-1}{m_1}} \leq \frac{(\lambda+1)^p}{\alpha S^p(p\lambda+1)} ||f||_{L^m(\Omega)},$$

et alors

$$||T_k(u)||^{p-1}_{L^{m_1}(\Omega)} \leq C\ ||f||_{L^m(\Omega)}\ , \qquad \forall\ k \geq 0.$$

La semi-continuité inférieure de $||\cdot||_{L^{m_1}(\Omega)}$ implique le résultat. ∎

Remarque 2.3 *Dans le théorème 2.7, on a la condition (2.2.10) implique*

$$m_1 = \frac{N(p-1)m}{N-pm} > 1,$$

et

$$\lambda = \frac{p^*-m'}{m'p-p^*} > 0.$$

Théorème 2.8 *Soit $f \in L^{\frac{N}{p}}(\Omega)$. Alors pour toute solution $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ du problème (LL), on a*

$$e^{\lambda|u|} \in L^{p^*}(\Omega)\ , \qquad \forall\ \lambda > 0.$$

Démonstration. On prend $v = [e^{p\lambda|G_k(u)|} - 1]\,\mathrm{sign}(G_k(u))$ comme une fonction test dans (2.1.4). D'une part, l'hypothèse (2.0.2) implique

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla([e^{p\lambda|G_k(u)|}-1]\,\mathrm{sign}(G_k(u))) &= p\lambda\int_\Omega a(x,u,\nabla u)(\nabla G_k(u))e^{p\lambda|G_k(u)|}\\ &\geq \alpha p\lambda\int_\Omega |\nabla G_k(u)|^p e^{p\lambda|G_k(u)|}\\ &\geq \frac{\alpha p}{\lambda^{p-1}}\int_\Omega \left|\nabla(e^{\lambda|G_k(u)|}-1)\right|^p.\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Sobolev, on obtient

$$\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla([e^{p\lambda|G_k(u)|}-1]\,\mathrm{sign}(G_k(u))) \geq \frac{\alpha p S^p}{\lambda^{p-1}}\left(\int_\Omega \left|e^{\lambda|G_k(u)|}-1\right|^{p^*}\right)^{\frac{p}{p^*}} \tag{2.2.15}$$

D'autre part, on utilise la proposition 2.9 et l'inégalité de Hölder avec l'exposant N/p, donc pour tout $Q > 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f\,[e^{p\lambda|G_k(u)|}-1]\,\mathrm{sign}(G_k(u)) &\leq \int_\Omega |f|\,|e^{p\lambda|G_k(u)|}-1| \\
&\leq \int_{A_k} |f|\left(Q|e^{\lambda|G_k(u)|}-1|^p+\frac{1}{Q-1}\right) \\
&\leq Q\int_{A_k}|f|\,|e^{\lambda|G_k(u)|}-1|^p+\frac{1}{Q-1}\int_\Omega |f| \\
&\leq Q||f||_{L^{\frac{N}{p}}(A_k)}\left(\int_{A_k}|e^{\lambda|G_k(u)|}-1|^{\frac{Np}{N-p}}\right)^{\frac{N-p}{N}}+\int_\Omega\frac{|f|}{Q-1} \\
&\leq Q||f||_{L^{\frac{N}{p}}(A_k)}\left(\int_\Omega|e^{\lambda|G_k(u)|}-1|^{p^*}\right)^{\frac{p}{p^*}}+\frac{1}{Q-1}\int_\Omega|f|.
\end{aligned}$$

En combinant (2.2.15) et la dernière inégalité, on obtient

$$\left(\frac{\alpha p S^p}{\lambda^{p-1}}-Q||f||_{L^{\frac{N}{p}}(A_k)}\right)\left(\int_\Omega\left|e^{\lambda|G_k(u)|}-1\right|^{p^*}\right)^{\frac{p}{p^*}}\leq\frac{1}{Q-1}\int_\Omega|f|. \tag{2.2.16}$$

Comme $\lim\limits_{k\to\infty}||f||_{L^{\frac{N}{p}}(A_k)}\to 0$, alors il existe k_λ, tel que

$$\frac{\alpha p S^p}{\lambda^{p-1}}-Q||f||_{L^{\frac{N}{p}}(A_k)}>0\ ,\qquad\forall\ k\geq k_\lambda.$$

Donc, pour tout $k\geq k_\lambda$, la suite $\{e^{\lambda|G_k(u)|}-1\}$ est bornée dans $L^{p^*}(\Omega)$. D'abord, on va montrer que $e^{\lambda|u|}\in L^{p^*}(\Omega)$. Pour $k\geq k_\lambda$, on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega\left(e^{\lambda|u|}\right)^{p^*} &= \int_\Omega\left(e^{\lambda|T_k(u)+G_k(u)|}\right)^{p^*} \\
&\leq \int_\Omega\left(e^{\lambda k}[e^{\lambda|G_k(u)|}-1]+e^{\lambda k}\right)^{p^*}
\end{aligned}$$

en utilisant la proposition 2.10, on obtient

$$\int_\Omega\left(e^{\lambda|u|}\right)^{p^*}\leq 2^{p^*-1}e^{\lambda k p^*}\int_\Omega\left(e^{\lambda|G_k(u)|}-1\right)^{p^*}+2^{p^*-1}e^{\lambda k p^*}|\Omega|<+\infty.$$

D'où le résultat. ■

2.2.2 Deuxième membre dans un espace de Marcinkiewicz

Maintenant, on va montrer les résultats de la régularité pour le problème (LL), dans le cas où $f \in M^m(\Omega)$ avec $m > p^{*'}$.

Théorème 2.9 *Soit $f \in M^m(\Omega)$ avec $m > N/p$. Alors toute solution $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ du problème (LL) est bornée.*

Démonstration. Soit $q \in (\frac{N}{p}, m)$. Comme $f \in M^m(\Omega)$ et $1 \leq q < m$, la proposition 1.8 implique que $f \in L^q(\Omega)$, et comme $q > N/p$, le théorème 2.6 implique le résultat. ∎

Théorème 2.10 *Soit $f \in M^m(\Omega)$ avec $N/p > m > p^{*'}$. Alors toute solution $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ du problème (LL) est contenant dans $M^{m_1}(\Omega)$, où $m_1 = \frac{N(p-1)m}{N-pm}$.*

Démonstration. On prend $v = G_k(u)$ comme une fonction test dans (2.1.4). On constate que $|f|^{p^{*'}} \in M^{\frac{m}{p^{*'}}}(\Omega)$. Lemme 2.6 assure l'existence d'un constant $c > 0$ dépend de m, $||f||_{M^m(\Omega)}$ et p, tel que

$$\left(\int_{A_k} |f|^{p^{*'}}\right)^{\frac{1}{p^{*'}}} \leq c|A_k|^{\frac{1}{p^{*'}}-\frac{1}{m}}. \tag{2.2.17}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder avec l'exposant p^* et (2.2.17), on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega f\, G_k(u) &\leq \int_{A_k} |f|\, |G_k(u)| \\ &\leq \left(\int_\Omega |G_k(u)|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \left(\int_{A_k} |f|^{p^{*'}}\right)^{\frac{1}{p^{*'}}} \\ &\leq c||G_k(u)||^p_{L^{p^*}(\Omega)} |A_k|^{\frac{1}{p^{*'}}-\frac{1}{m}}. \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

En combinant (2.2.5), (2.2.6) et (2.2.18), on obtient

$$||G_k(u)||_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \left(\frac{c}{\alpha S^p}\right)^{\frac{1}{p-1}} |A_k|^{[\frac{1}{p^{*'}}-\frac{1}{m}]\frac{1}{p-1}}. \tag{2.2.19}$$

L'inégalité de Hölder avec l'exposant p^*, implique

$$\begin{aligned} g(k) &= \int_\Omega |G_k(u)| = \int_\Omega |G_k(u)|\chi_{A_k} \\ &\leq \left(\int_\Omega |G_k(u)|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} |A_k|^{\frac{1}{p^{*'}}} \\ &\leq ||G_k(u)||_{L^{p^*}(\Omega)} |A_k|^{\frac{1}{p^{*'}}}, \end{aligned}$$

en utilisant (2.2.19), on obtient

$$g(k) \leq \left(\frac{c}{\alpha S^p}\right)^{\frac{1}{p-1}} |A_k|^{1+\frac{1}{p-1}(\frac{p}{N}-\frac{1}{m})}. \tag{2.2.20}$$

Posons $\frac{1}{r} = 1 + \frac{p}{N(p-1)} - \frac{1}{m(p-1)} < 1$. Le lemme 2.5, implique

$$g'(k)g(k)^{-r} \leq -\left(\frac{\alpha S^p}{c}\right)^{\frac{r}{p-1}}.$$

En intégrant sur $[0,k]$, on obtient

$$g(k)^{1-r} - g(0)^{1-r} \leq (r-1)\left(\frac{\alpha S^p}{c}\right)^{\frac{r}{p-1}} k,$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} g(k) &\leq \left[(r-1)\left(\tfrac{\alpha S^p}{c}\right)^{\frac{r}{p-1}} k + g(0)^{1-r}\right]^{\frac{1}{1-r}} \\ &\leq \left[\min\left(\tfrac{r-1}{2}\left(\tfrac{\alpha S^p}{c}\right)^{\frac{r}{p-1}}, ||u||^{1-r}_{L^1(\Omega)}\right)(2k+1)\right]^{\frac{1}{1-r}} \\ &\leq \left[\min\left(\tfrac{r-1}{2}\left(\tfrac{\alpha S^p}{c}\right)^{\frac{r}{p-1}}, ||u||^{1-r}_{L^1(\Omega)}\right)(2k)\right]^{\frac{1}{1-r}}. \end{aligned}$$

En posant $\gamma = 2\left[\min\left(\tfrac{r-1}{2}\left(\tfrac{\alpha S^p}{c}\right)^{\frac{r}{p-1}}, ||u||^{1-r}_{L^1(\Omega)}\right)\right]^{\frac{1}{1-r}}$, on obtient

$$g(k) \leq \frac{\gamma}{2(2k)^{\frac{1}{r-1}}}.$$

Or $A_{2k} \subset A_k$, alors

$$g(k) = \int_{A_k} |G_k(u)| \geq \int_{A_{2k}} (|u| - k) \geq k\,|A_{2k}|, \tag{2.2.21}$$

en combinant les deux dernières inégalités, on obtient

$$|A_{2k}| \leq \frac{\gamma}{(2k)^{\frac{r}{r-1}}}.$$

On constate que $\frac{r}{r-1} = \frac{N(p-1)m}{N-pm} = m_1$ et en posant $\lambda = 2k$, on obtient

$$|\{|u| > \lambda\}| \leq \frac{\gamma}{\lambda^{m_1}},$$

d'où $u \in M^{m_1}(\Omega)$. ∎

Théorème 2.11 *Soit $f \in M^{\frac{N}{p}}(\Omega)$. Alors pour toute $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solution du problème (LL), il existe $\beta > 0$, tel que*

$$e^{\beta|u|} \in L^1(\Omega).$$

Démonstration. On prend $v = G_k(u)$ comme une fonction test dans (2.1.4). En utilisant la démonstration du théorème 2.10, on obtient

$$\left(\frac{\alpha S^p}{c}\right)^{\frac{1}{p-1}} \leq -\frac{g'(k)}{g(k)}.$$

En intégrant sur $[0,k]$, on obtient

$$\left(\frac{\alpha S^p}{c}\right)^{\frac{1}{p-1}} k \leq -[\ln g(k) - \ln g(0)] = \ln\left(\frac{||u||_{L^1(\Omega)}}{g(k)}\right),$$

d'où

$$e^{k(\alpha S^p/c)^{\frac{1}{p-1}}} \leq \frac{||u||_{L^1(\Omega)}}{g(k)}, \tag{2.2.22}$$

en combinant (2.2.21) et (2.2.22), on obtient

$$|A_{2k}| \leq \frac{||u||_{L^1(\Omega)}}{ke^{k(\alpha S^p/c)^{\frac{1}{p-1}}}}, \tag{2.2.23}$$

on pose $h = 2k, \theta = 2||u||_{L^1(\Omega)}$ et $\gamma = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha S^p}{c}\right)^{\frac{1}{p-1}}$, donc (2.2.23) devient

$$|A_h| \leq \frac{\theta}{he^{\gamma h}}\ , \qquad \forall\ h \geq 1. \tag{2.2.24}$$

Donc la proposition 2.8 assure le résultat. ■

Chapitre 3

Problèmes elliptiques à données non régulières

Dans ce chapitre, on va étudier l'existence et la régularité de solutions pour le problème :

$$(LLN) \qquad \begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)) = f \quad dans \quad \Omega, \\ u = 0 \quad sur \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$). On suppose que $1 < p < N$ et $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est une fonction de Carathéodory vérifiant (2.0.1), (2.0.2) et (2.0.3) et $f \in L^m(\Omega) \quad (1 \leq m < p^{*'})$. Donc, on peut rien dire sur l'appartenance de f à $W^{-1,p'}(\Omega)$. Par conséquence, le théorème 2.4 ne peut pas être appliqué directement. Pour surmonter cette difficulté, nous allons approcher le problème (LLN) par un problème régulier qui peut être résolu facilement en appliquant le théorème 2.4. Ensuite, nous allons montrer des estimations uniformes. Enfin, nous passons à la limite dans le problème approché afin d'obtenir une solution au problème (LLN).

Définition 3.1 *Soit $f \in L^m(\Omega)$. On dit que $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ est une solution au sens des distributions du problème si*

$$\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla\varphi = \int_\Omega f\varphi, \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\ . \tag{3.0.1}$$

Définition 3.2 *On définit l'ensemble $\mathcal{T}^{1,p}(\Omega)$ par :*

$$\mathcal{T}^{1,p}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \quad mesurable\ et\ finie\ p.p.\ ; \quad T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \forall\ k > 0\}.$$

Définition 3.3 *Soit $f \in L^1(\Omega)$. On dit que $u \in \mathcal{T}^{1,p}(\Omega)$ est une solution entropique du problème (LLN) si pour tout $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, on a :*

$$\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla T_k(u-\varphi) \leq \int_\Omega f\ T_k(u-\varphi)\ , \qquad \forall\ k>0. \tag{3.0.2}$$

Remarque 3.1 *Telle fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ vérifiant*

$$\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla v = \int_\Omega f\ v, \qquad \forall\ v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

est une solution entropique du problème (LLN), c'est-à-dire, toute solution faible est une solution entropique.

Remarque 3.2 *Soit $u \in \mathcal{T}^{1,p}(\Omega)$ une solution entropique du problème (LLN). Alors u est une solution au sens des distributions.*

Les résultats de régularité de solutions du pronlème (LLN) sont résumés dans le tableau suivant :

$f \in L^1(\Omega)$	$1<p<N$	$u \in M^{p_1}(\Omega), \quad \lvert\nabla u\rvert \in M^{p_2}(\Omega)$ solution entropique
	$p > 2-\frac{1}{N}$	$u \in W_0^{1,q}(\Omega) \quad q<p_2$ solution au sens des distributions
$f \in L^m(\Omega)$	$1<m<p^{*'}$	$u \in W_0^{1,m_2}(\Omega)$ solution au sens des distributions

Où $p_1 = \frac{N(p-1)}{N-p}$, $p_2 = \frac{N(p-1)}{N-1}$ et $m_2 = \frac{N(p-1)m}{N-m}$.

3.1 Approximation et estimations à priori

On considère le problème approché :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,u_n,\nabla u_n)) = f_n & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

où $(f_n) \subset W^{-1,p'}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ telle que $f_n \to f$ dans $L^m(\Omega)$ $m \geq 1$, $||f_n||_{L^m(\Omega)} \leq ||f||_{L^m(\Omega)}$ et $|f_n| \leq |f|$ pp dans Ω. L'existence de solution u_n, pour tout n est assurée par le théorème 2.4.

On rappelle que la suite de solutions u_n vérifiant la formulation faible suivante :

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla v \;=\int_\Omega f_n v\;,\qquad \forall\; v\in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.1.2}$$

Lemme 3.1 *Soient $p>2-\frac{1}{N}$ et $f\in L^1(\Omega)$. Alors la suite de solution u_n du problème (3.1.1) est bornée dans $W_0^{1,q}(\Omega)$, pour tout $q<p_2=\frac{N(p-1)}{N-1}$.*

Preuve. Soit $\lambda<\frac{p-1}{p}$, en prenant $v_n=[(1+|u_n|)^{p(\lambda-1)+1}-1]\,\mathrm{sign}(u_n)$ comme une fonction test dans (3.1.2). D'une part, on a : $|v_n|\le 1$, d'où

$$\int_\Omega f_n v_n\le\int_\Omega |f_n|=||f_n||_{L^1(\Omega)}\le||f||_{L^1(\Omega)}. \tag{3.1.3}$$

D'autre part, l'hypothèse (2.0.2), donne

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla v_n &= [p(\lambda-1)-1]\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n(1+|u_n|)^{p(\lambda-1)}\\ &\ge [p(\lambda-1)-1]\alpha\int_\Omega|\nabla u_n|^p(1+|u_n|)^{p(\lambda-1)}\\ &\ge [p(\lambda-1)-1]\alpha\int_\Omega\frac{|\nabla u_n|^p}{(1+|u_n|)^{p(1-\lambda)}}\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

En combinant (3.1.2), (3.1.3) et (3.1.4), on obtient

$$\int_\Omega\frac{|\nabla u_n|^p}{(1+|u_n|)^{p(1-\lambda)}}\le\frac{||f||_{L^1(\Omega)}}{(p(1-\lambda)-1)\alpha}=C. \tag{3.1.5}$$

Soit $1<q<p$, en utilisant l'inégalité de Sobolev et de Hölder avec l'exposant $\frac{p}{q}$, on obtient

$$\begin{aligned}S^q\left(\int_\Omega|u_n|^{q^*}\right)^{\frac{q}{q^*}} &\le \int_\Omega|\nabla u_n|^q\\ &\le \int_\Omega\frac{|\nabla u_n|^q}{(1+|u_n|)^{q(1-\lambda)}}(1+|u_n|)^{q(1-\lambda)}\\ &\le \left(\int_\Omega\frac{|\nabla u_n|^p}{(1+|u_n|)^{p(1-\lambda)}}\right)^{\frac{q}{p}}\left(\int_\Omega(1+|u_n|)^{\frac{pq(1-\lambda)}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{p}}.\end{aligned}$$

L'inégalité (3.1.5) et la proposition 2.10 impliquent que

$$S^q\left(\int_\Omega|u_n|^{q^*}\right)^{\frac{q}{q^*}}\le\int_\Omega|\nabla u_n|^q\le C^{\frac{q}{p}}|\Omega|^{\frac{p-q}{p}}+C^{\frac{q}{p}}\left(\int_\Omega|u_n|^{\frac{pq(1-\lambda)}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{p}}. \tag{3.1.6}$$

En prenant $\lambda = \frac{q(N-p)}{p(N-q)}$ avec $q < p_2$ dans L'inégalité (3.1.6), on obtient

$$S^q \left(\int_\Omega |u_n|^{q^*} \right)^{\frac{q}{q^*}} \leq \int_\Omega |\nabla u_n|^q \leq C_1 + C_2 \left(\int_\Omega |u_n|^{q^*} \right)^{\frac{p-q}{p}}. \tag{3.1.7}$$

L'inégalité (3.1.7) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, et comme $\frac{q}{q^*} > \frac{p-q}{p}$, alors la suite $\int_\Omega |u_n|^{q^*}$ est bornée, par conséquent (u_n) est bornée dans $W_0^{1,q}(\Omega)$. ∎

Remarque 3.3 *Dans le lemme 3.1, la condition $p > 2 - \frac{1}{N}$, implique*

$$p_2 = \frac{N(p-1)}{N-1} > 1,$$

et le fait que $q < p_2$, donne

$$\lambda = \frac{q(N-p)}{p(N-q)} < \frac{p-1}{p}.$$

Corollaire 3.2 *Soient $p > 2 - \frac{1}{N}$ et $f \in L^1(\Omega)$. Alors, si u_n est une suite de solutions du problème (3.1.1), alors il existe $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ avec $q < p_2$, telle que $u_n \to u$ p.p. dans Ω, à une sous-suite près.*

Preuve. Soit $q < p_2$, et soit u_n une suite de solutions du problème (3.1.1), alors d'après le théorème 3.1, u_n est bornée dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ qui est réflexif, donc on peut extraire une sous-suite de u_n (notée encore u_n), telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,q}(\Omega)$, et alors $u_n \to u$ dans $L^q(\Omega)$, grâce à l'injection compacte de $W_0^{1,q}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$. Maintenant, il suffit d'utiliser la réciproque partielle de Lebesgue pour avoir le résultat. ∎

Lemme 3.3 *Soit $f \in L^m(\Omega)$, avec m vérifiant*

$$1 < m < p^{*'}. \tag{3.1.8}$$

Alors la suite de solutions u_n du problème (3.1.1) est bornée dans $W_0^{1,m_2}(\Omega)$ où $m_2 = \frac{N(p-1)m}{N-m}$.

Preuve. Soit $\lambda > \frac{p-1}{p}$, on prend $v_n = [(1 + |u_n|)^{p(\lambda-1)+1} - 1] \operatorname{sign}(u_n)$ comme une fonction test dans (3.1.2).

Étape 1 D'une part, on a

$$\int_\Omega f_n v_n \leq \int_\Omega |f|[(1+|u_n|)^{p(\lambda-1)+1}-1] \leq \int_\Omega |f|[(1+|u_n|)^{p(\lambda-1)+1}+1].$$

En utilisant l'inégalité de Hölder avec l'exposant m, on obtient

$$\int_\Omega f_n v_n \leq ||f||_{L^1(\Omega)} + ||f||_{L^m(\Omega)} \left(\int_\Omega (1+|u_n|)^{(p(\lambda-1)+1)m'} \right)^{\frac{1}{m'}}. \tag{3.1.9}$$

D'autre part, l'hypothèse (2.0.1), implique

$$\begin{aligned} \int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla v_n &= [p(\lambda-1)+1] \int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n (1+|u_n|)^{p(\lambda-1)} \\ &\geq [p(\lambda-1)+1]\alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^p (1+|u_n|)^{p(\lambda-1)} \\ &\geq \frac{[p(\lambda-1)+1]\alpha}{\lambda^p} \int_\Omega \left|\nabla (1+|u_n|)^\lambda\right|^p. \end{aligned}$$

L'inégalité de Sobolev, implique

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla v_n \geq \frac{[p(\lambda-1)+1]\alpha S^p}{\lambda^p} \left(\int_\Omega (1+|u_n|)^{\lambda p^*} \right)^{\frac{p}{p^*}}. \tag{3.1.10}$$

En combinant (3.1.2), (3.1.9) et (3.1.10), on obtient

$$\begin{aligned} &||f||_{L^1(\Omega)} + ||f||_{L^m(\Omega)} \left(\int_\Omega (1+|u_n|)^{[p(\lambda-1)+1]m'} \right)^{\frac{1}{m'}} \\ &\geq [p(\lambda-1)+1]\alpha \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{(1+|u_n|)^{p(1-\lambda)}} \\ &\geq \frac{[p(\lambda-1)+1]\alpha S^p}{\lambda^p} \left(\int_\Omega (1+|u_n|)^{\lambda p^*} \right)^{\frac{p}{p^*}}. \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

En prenant $[p(\lambda-1)+1]m' = \lambda p^* = m_1$ i.e. $\lambda = \frac{(p-1)m'}{pm'-p^*}$, on obtient

$$\left(\int_\Omega (1+|u_n|)^{m_1} \right)^{\frac{p}{p^*}} \leq C_1 + C_2 \left(\int_\Omega (1+|u_n|)^{m_1} \right)^{\frac{1}{m'}}.$$

La dernière inégalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, et comme $\frac{p}{p^*} > \frac{1}{m'}$, alors la suite $\{(1+|u_n|)^{m_1}\}$ est bornée. L'inégalité (3.1.11) implique que la suite $\left\{ \frac{|\nabla u_n|^p}{(1+|u_n|)^{p(1-\lambda)}} \right\}$ est bornée dans $L^1(\Omega)$.

Étape 2 L'inégalité de Hölder avec l'exposant $\frac{p}{m_2}$, implique

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_n|^{m_2} &= \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^{m_2}}{(1+|u_n|)^{p(1-\lambda)\frac{m_2}{p}}}(1+|u_n|)^{p(1-\lambda)\frac{m_2}{p}} \\ &\leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{(1+|u_n|)^{p(1-\lambda)}}\right)^{\frac{m_2}{p}} \left(\int_\Omega (1+|u_n|)^{\frac{pm_2(1-\lambda)}{p-m_2}}\right)^{\frac{p-m_2}{p}} \\ &\leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{(1+|u_n|)^{p(1-\lambda)}}\right)^{\frac{m_2}{p}} \left(\int_\Omega (1+|u_n|)^{m_1}\right)^{\frac{p-m_2}{p}},\end{aligned}$$

par suite, la première étape, donne

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{m_2} \leq C.$$

L'inégalité de Poincaré implique que u_n est bornée dans $W_0^{1,m_2}(\Omega)$.

■

Remarque 3.4 *Dans le lemme 3.3, la condition (3.1.8), donne*

$$m_2 = \frac{N(p-1)m}{N-m} < p.$$

Corollaire 3.4 *Soit $f \in L^m(\Omega)$, $1 < m < p^{*'}$. Si u_n est une suite de solutions du problème (3.1.1), alors il existe $u \in W_0^{1,m_2}(\Omega)$, telle que $u_n \to u$ p.p. dans Ω, à une sous-suite près.*

Preuve. Soit u_n une suite de solutions du problème (3.1.1), alors d'après le théorème 3.3, u_n est bornée dans $W_0^{1,m_2}(\Omega)$ qui est réflexif, donc on peut extraire une sous-suite de u_n (notée encore u_n), telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,m_2}(\Omega)$, et par conséquent $u_n \to u$ dans $L^{m_2}(\Omega)$, grâce à l'injection compacte de $W_0^{1,m_2}(\Omega)$ dans $L^{m_2}(\Omega)$. Maintenant il suffit d'utiliser la réciproque partielle de Lebesgue pour avoir le résultat. ■

Lemme 3.5 *Soit $f \in L^1(\Omega)$. Si $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est une solution du problème (3.1.1), alors il existe $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$, avec $q < p_2$ telle que $\nabla u_n \to \nabla u$ p.p. dans Ω, à une sous-suite près. De plus si $f \in L^m(\Omega)$, avec $1 < m < p^{*'}$, alors, $u \in W_0^{1,m_2}(\Omega)$.*

Preuve. Soit u_n une suite de solutions du problème (3.1.1), alors d'après le corollaire 3.2, il existe $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ avec $q < p_2$, telle que $u_n \to u$ p.p. dans Ω, à une sous-suite près. De

plus si $f \in L^m(\Omega)$, avec $1 < m < p^{*'}$, alors, $u \in W_0^{1,m_2}(\Omega)$, d'après le corollaire 3.4.

Maintenant, pour démontrer le résultat, il suffit de montrer que pour $\theta \in (0, \frac{q}{2p})$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \Big([a(x,u_n,\nabla u_n) - a(x,u,\nabla u)]\nabla(u_n - u)\Big)^\theta = 0. \tag{3.1.12}$$

Étape 1 En utilisant l'hypothèse (2.0.1), la proposition 2.10 et l'inégalité de Hölder avec les exposants 2, $\frac{q}{2(p-1)\theta}$ et $\frac{q}{2\theta}$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{A_k} \Big([a(x,u_n,\nabla u_n) - a(x,u,\nabla u)]\nabla(u_n - u)\Big)^\theta \\
&\quad\le \int_{A_k} \Big|a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla(u_n - u)\Big|^\theta + \int_{A_k} \Big|a(x,u,\nabla u)\nabla(u_n - u)\Big|^\theta \\
&\quad\le \beta^\theta \int_{A_k} \left(|u_n|^{(p-1)\theta} + |\nabla u_n|^{(p-1)\theta} + |u|^{(p-1)\theta} + |\nabla u|^{(p-1)\theta}\right)\left(|\nabla u_n|^\theta + |\nabla u|^\theta\right) \\
&\quad\le \beta^\theta \left(||u_n||^{\theta(p-1)}_{L^{2\theta(p-1)}} + ||\nabla u_n||^{\theta(p-1)}_{L^{2\theta(p-1)}} + ||u||^{\theta(p-1)}_{L^{2\theta(p-1)}} + ||\nabla u||^{\theta(p-1)}_{L^{2\theta(p-1)}}\right) \\
&\qquad\qquad \left(||\nabla u_n||^\theta_{L^{2\theta}} + ||\nabla u||^\theta_{L^{2\theta}}\right)|A_k|^{\frac12} \\
&\quad\le C|A_k|^{\frac12}.
\end{aligned}$$

Étape 2 Posons $V_j = \{|u_n - T_k(u)| > j\}$, alors par l'inégalité de Hölder avec l'exposant $1/\theta$ et l'étape 1, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_{C_k} \Big([a(x,u_n,\nabla u_n) - a(x,u,\nabla u)]\nabla(u_n - u)\Big)^\theta \\
&\quad= \int_\Omega \Big([a(x,u_n,\nabla u_n) - a(x,u,\nabla T_k(u))]\nabla(u_n - T_k(u))\Big)^\theta \\
&\quad= \int_\Omega \Big([a(x,u_n,\nabla u_n) - a(x,u,\nabla T_k(u))]\nabla T_j(u_n - T_k(u))\Big)^\theta \\
&\qquad+ \int_{V_j} \Big([a(x,u_n,\nabla u_n) - a(x,u,\nabla T_k(u))]\nabla(u_n - T_k(u))\Big)^\theta \\
&\quad\le |\Omega|^{1-\theta}\left(\int_\Omega [a(x,u_n,\nabla u_n) - a(x,u,\nabla T_k(u))]\nabla T_j(u_n - T_k(u))\right)^\theta + C|V_j|^{\frac12}.
\end{aligned}$$

D'une part, en prenant $T_j(u_n - T_k(u))$ comme une fonction teste dans (3.1.2) et en utilisant le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla T_j(u_n - T_k(u)) = \int_\Omega f\, T_j(u - T_k(u)) \tag{3.1.13}$$

D'autre part, par la convergence en mesure de u_n vers u, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} |V_j| = |\{|u - T_k(u)| > j\}|,$$

et on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega a(x,u,\nabla T_k(u))\nabla T_j(u_n-T_k(u))=\int_\Omega a(x,u,\nabla T_k(u))\nabla T_j(u-T_k(u)), \tag{3.1.14}$$

en effet, $T_j(u_n-T_k(u))\rightharpoonup T_j(u-T_k(u))$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, puisque, $T_j(u_n-T_k(u))$ est bornée dans $L^p(\Omega)$ et converge vers $T_j(u-T_k(u))$ p.p. dans Ω.

En combinant (3.1.13) et (3.1.14), on obtient

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\int_{C_k}\Big|[a(x,u_n,\nabla u_n)-a(x,u,\nabla u)]\nabla(u_n-u)\Big|^\theta\\
&\leq |\Omega|^{1-\theta}\left(\int_\Omega |f\ T_j(u-T_k(u))-a(x,u,\nabla T_k(u))\nabla T_j(u-T_k(u))|\right)^\theta\\
&\quad +C|\{|u-T_k(u)|>j\}|^{\frac12}.
\end{aligned}$$

Étape 3 En utilisant l'étape (1) et (2), on obtient

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\Big|[a(x,u_n,\nabla u_n)-a(x,u,\nabla u)]\nabla(u_n-u)\Big|^\theta\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{A_k}\Big|[a(x,u_n,\nabla u_n)-a(x,u,\nabla u)]\nabla(u_n-u)\Big|^\theta\\
&\quad +\lim_{n\to\infty}\int_{C_k}\Big|[a(x,u_n,\nabla u_n)-a(x,u,\nabla u)]\nabla(u_n-u)\Big|^\theta\\
&\leq |\Omega|^{1-\theta}\left(\int_\Omega |f\ T_j(u-T_k(u))-a(x,u,\nabla T_k(u))\nabla T_j(u-T_k(u))|\right)^\theta\\
&\quad +C|\{|u-T_k(u)|>j\}|^{\frac12}+C|A_k|^{\frac12}.
\end{aligned}$$

En faisant $k\to+\infty$, pour avoir (3.1.12). La réciproque partielle de Lebesgue permet d'extraire d'une sous-suite près, telle que

$$[a(x,u_n,\nabla u_n)-a(x,u,\nabla u)]\nabla(u_n-u)\to 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Maintenant, il suffit d'applique le lemme 2.2, pour avoir le résultat.

■

3.2 Solutions au sens des distributions

Théorème 3.1 *Soit $p>2-\frac{1}{N}$ et $f\in L^1(\Omega)$. Alors il existe $u\in W_0^{1,q}(\Omega)$ solution au sens des distributions du problème (LLN), pour tout $q<p_2=\frac{N(p-1)}{N-1}$.*

Démonstration. Soit $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solution du problème (3.1.1). Alors u_n est bornée dans $W_0^{1,q}$ pour tout $q < p_2$ grâce au lemme 3.1. Le corrollaire 3.2 et le lemme 3.5 impliquent qu'il existe $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$, telle que $u_n \to u$ p.p. dans Ω et $\nabla u_n \to \nabla u$ p.p. dans Ω, et comme $a(\cdot,\cdot,\cdot)$ est de Carathéodory, alors $a(x,u_n,\nabla u_n) \to a(x,u,\nabla u)$ p.p. dans Ω, à une sous-suite près.

Soit $r = \frac{q}{p-1} > 1$, en utilisant l'hypothèse (2.0.1) et la proposition 2.10 , on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |a(x,u_n,\nabla u_n)|^r &\leq \beta^r \int_\Omega \Big(|u_n|^{p-1} + |\nabla u_n|^{p-1}\Big)^r \\
&\leq \beta^r 2^{r-1} \left(\int_\Omega |u_n|^{(p-1)r} + \int_\Omega |\nabla u_n|^{(p-1)r} \right) \\
&\leq \beta^r 2^{r-1} |\Omega| \Big(||u_n||^q_{L^q(\Omega)} + ||\nabla u_n||^q_{L^q(\Omega)} \Big) \\
&\leq (2\beta)^r |\Omega| \; ||u_n||^q_{W_0^{1,q}(\Omega)} < +\infty
\end{aligned}$$

d'où $a(x,u_n,\nabla u_n)$ est bornée dans $(L^r(\Omega))^N$, donc le théorème 1.2, implique que

$$a(x,u_n,\nabla u_n) \rightharpoonup a(x,u,\nabla u) \quad \text{dans} \quad (L^r(\Omega))^N,$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla\varphi = \int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla\varphi \;, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{3.2.1}$$

Or $f_n \to f$ dans $L^1(\Omega)$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n\varphi = \int_\Omega f\varphi \;, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{3.2.2}$$

En combinant (3.2.1) et (3.2.2), on obtient

$$\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla\varphi = \int_\Omega f\varphi \;, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

■

Théorème 3.2 *Soit $f \in L^m(\Omega)$, avec m vérifiant (3.1.8). Alors il existe $u \in W_0^{1,m_2}(\Omega)$ solution au sens des distributions du problème (LLN), où $m_2 = \frac{N(p-1)m}{N-m}$.*

Démonstration. Soit $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solution du problème (3.1.1). Alors u_n est bornée dans W_0^{1,m_2} grâce au lemme 3.3. Le corrollaire 3.4 et le lemme 3.5 impliquent qu'il existe $u \in W_0^{1,m_2}(\Omega)$, tels que $u_n \to u$ p.p. dans Ω et $\nabla u_n \to \nabla u$ p.p. dans Ω, donc $a(x,u_n,\nabla u_n) \to a(x,u,\nabla u)$ p.p. dans Ω. Maintenant, on utilise la démonstration du théorème 3.1 , pour avoir le résultat. ■

3.2.1 Solutions entropiques

Proposition 3.6 *Soit $u \in \mathcal{T}^{1,p}(\Omega)$ une solution entropique du problème (LLN). Alors $u \in M^{p_1}(\Omega)$ où $p_2 = \frac{N(p-1)}{N-1}$.*

Preuve. On prend $\varphi = 0$, dans (3.0.2), on obtient

$$\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla T_k(u) \leq \int_\Omega f\ T_k(u), \qquad \forall\ k > 0. \tag{3.2.3}$$

D'une part, en utilisant l'hypothèse (2.0.2) et l'inégalité de Sobolev, on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla T_k(u) &= \int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla u \chi_{C_k} \\ &\geq \alpha \int_\Omega |\nabla u|^p \chi_{C_k} \\ &\geq \alpha \int_\Omega |\nabla T_k(u)|^p. \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

D'autre part, on a

$$\int_\Omega f\ T_k(u) \leq k \int_\Omega |f|. \tag{3.2.5}$$

En combinant (3.2.4) et (3.2.5), on obtient

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^p \leq \left(\frac{||f||_{L^1(\Omega)}}{\alpha}\right) k, \qquad \forall\ k > 0. \tag{3.2.6}$$

L'inégalité de Sobolev implique que

$$\int_\Omega |T_k(u)|^{p^*} \leq \left(\frac{||f||_{L^1(\Omega)}}{\alpha}\right)^{\frac{p^*}{p}} k^{\frac{p^*}{p}}, \qquad \forall\ k > 0. \tag{3.2.7}$$

Soit $0 < h < 2k$, alors par (3.2.7), on obtient

$$\begin{aligned} h^{p^*}|\{|u| > h\}| &= \int_{\{|u|>h\}} h^{p^*} < \int_{\{|u|>h\}} |u|^{p^*} \\ &\leq \int_{\{|u|\leq 2k\}} |u|^{p^*} \\ &\leq \int_\Omega |u|^{p^*} \cdot \chi_{C_{2k}} \\ &\leq \int_\Omega |T_{2k}(u)|^{p^*} \\ &\leq \left(\frac{2||f||_{L^1(\Omega)}}{\alpha S^p}\right)^{\frac{p^*}{p}} k^{\frac{p^*}{p}}. \end{aligned}$$

On prend $h = k$ et on constate que $p^* - \frac{p^*}{p} = p_1$, on résult que

$$|\{|u| > k\}| \leq \left(\frac{2||f||_{L^1(\Omega)}}{\alpha S^p}\right)^{\frac{p^*}{p}} k^{-p_1} , \qquad \forall\ k > 0. \tag{3.2.8}$$

D'où $u \in M^{p_1}(\Omega)$. ■

Proposition 3.7 *Soit $u \in \mathcal{T}^{1,p}(\Omega)$ une solution entropique du problème (LLN). Alors $|\nabla u| \in M^{p_2}(\Omega)$ où $p_2 = \frac{N(p-1)}{N-1}$*

Preuve. On prend $\varphi = 0$, dans (3.0.2). Soit $t > 0$, alors par (3.2.6), on obtient

$$\begin{aligned} t^p|\{|u| \leq k\ ,\ |\nabla u| > t\}| &\leq \int\limits_{\{|u|\leq k\ ,\ |\nabla u|>t\}} |\nabla u|^p \leq \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^p \chi_{C_k} \\ &\leq \int\limits_{\Omega} |\nabla T_k(u)|^p \\ &\leq \left(\frac{||f||_{L^1(\Omega)}}{\alpha}\right) k, \qquad \forall\ k > 0. \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

En combinant (3.2.8) et (3.2.9), on obtient

$$|\{|u| \leq k\ ,\ |\nabla u| > t\}| + |\{|u| > k\}| \leq \left(\frac{||f||_{L^1(\Omega)}}{\alpha}\right)\frac{k}{t^p} + \left(\frac{2||f||_{L^1(\Omega)}}{\alpha S^p}\right)^{\frac{p^*}{p}} k^{-p_1} , \quad \forall\ k > 0.$$

Posons $C = \max\left\{\frac{||f||_{L^1(\Omega)}}{\alpha}, \left(\frac{2||f||_{L^1(\Omega)}}{\alpha S^p}\right)^{\frac{p^*}{p}}\right\}$, alors

$$|\{|\nabla u| > t\}| \leq C\left(\frac{k}{t^p} + \frac{1}{k^{p_1}}\right) , \quad \forall\ k > 0.$$

En prenant $k = t^{\frac{p}{1+p_1}}$, on obtient

$$|\{|\nabla u| > t\}| \leq \frac{2C}{t^{p_2}} , \quad \forall\ t > 0.$$

D'où $|\nabla u| \in M^{p_2}(\Omega)$. ■

Théorème 3.3 *Soit $f \in L^1(\Omega)$. Alors il existe $u \in \mathcal{T}^{1,p}(\Omega)$ solution entropique du problème (LLN), tels que $u \in M^{p_1}(\Omega)$ et $|\nabla u| \in M^{p_2}(\Omega)$. De plus si $f \in L^m(\Omega)$, $m \geq 1$, alors $u \in W^{1,m_2}(\Omega)$ où $p_1 = \frac{N(p-1)}{N-p}$, $p_2 = \frac{N(p-1)}{N-1}$ et $m_2 = \frac{N(p-1)m}{N-m}$.*

Démonstration. Soit $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et soit $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ une solution du problème (3.1.1). On prend $T_k(u_n - \varphi)$ comme une fonction test dans (3.1.2). Alors il existe $u \in W_0^{1,q}$

pour tout $q < p_2$, si $m = 1$ ou $u \in W_0^{1,m_2}$ sinon, telle que $\nabla u_n \to \nabla u$ p.p. dans Ω, grâce au lemme 3.5, et donc $a(x, u_n, \nabla u_n) \to a(x, u, \nabla u)$ p.p. dans Ω, à une sous-suite près, et pour tout $k > 0$ on a $T_k(u_n - \varphi) \to T_k(u - \varphi)$ p.p. dans Ω. Lemme de Fatou implique que

$$\int_\Omega a(x, u, \nabla u) T_k(u - \varphi) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n) T_k(u_n - \varphi) \ , \tag{3.2.10}$$

le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, implique

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f \ T_k(u_n - \varphi) = \int_\Omega f \ T_k(u - \varphi), \tag{3.2.11}$$

En combinant (3.2.10) et (3.2.11), on obtient

$$\int_\Omega a(x, u, \nabla u) T_k(u - \varphi) \leq \int_\Omega f \ T_k(u - \varphi).$$

Maintenant, il suffit de montrer que $u \in \mathcal{T}^{1,p}(\Omega)$, c'est-à-dire, $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \forall \ k > 0$. On prend $T_k(u_n)$ comme une fonction test dans (3.1.2). Alors l'hypothèse (2.0.2) implique que

$$\alpha \int_\Omega \left|\nabla T_k(u_n)\right|^p \leq k||f||_{L^\infty(\Omega)}.$$

Comme $\nabla u_n \to \nabla u$ p.p. dans Ω, alors, en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient

$$\alpha \int_\Omega \left|\nabla T_k(u)\right|^p \leq k||f||_{L^\infty(\Omega)}.$$

L'inégalité de Poincaré implique que $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad \forall \ k > 0$. Enfin, pour avoir le résultat, il suffit d'utiliser les propositions 3.6 et 3.7 si $m = 1$ et le lemme 3.3 si $m > 1$. ∎

Chapitre 4

Problèmes elliptiques à coercivité dégénérée

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un problème associé à un opérateur elliptique à coercivité dégénérée, c'est-à-dire, un opérateur qui ne vérifie pas l'hypothèse (2.0.2). Pour cela, on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.0.1}$$

où Ω est un ouvert régulièr de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$, $1 < p < N$ et $f \in L^m(\Omega)$, avec $m \geq 1$. On suppose que $a : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory vérifiant, pour presque partout $x \in \Omega$, et pour tout $s \in \mathbb{R}$

$$\frac{\alpha}{(1+|s|)^{\theta(p-1)}} \leq a(x,s) \leq \beta, \tag{4.0.2}$$

où $\alpha, \beta > 0$ et $0 \leq \theta \leq 1$.

En raison de l'hypothèse (4.0.2), l'opérateur différentiel

$$A(v) = -\operatorname{div}(a(x,v)|\nabla v|^{p-2}\nabla v),$$

est bien défini de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans son dual, mais il ne parvient pas à être coercif si u est grand. Ce fait pose une difficulté majeure dans le traitement du problème (4.0.1) par la théorie classique des opérateurs elliptiques où l'hypothèse de la coercivité (2.0.2) est cruciale. Pour surmonter ce problème, nous procéderons par approximation au moyen d'une troncature dans $a(x,s)$ pour obtenir un opérateur différentiel coercif sur $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Définition 4.1 *Soit $f \in L^m(\Omega)$ $m > 1$. On dit que $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ est une solution au sens des distributions pour le problème (4.0.1) si*

$$\int_\Omega a(x,u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega f\varphi, \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\ . \tag{4.0.3}$$

Définition 4.2 *Soit $f \in L^1(\Omega)$. On dit que $u \in \mathcal{T}^{1,p}(\Omega)$ est une solution entropique pour le problème (4.0.1), si pour tout $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega a(x,u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla T_k(u-\varphi) \leq \int_\Omega f T_k(u-\varphi)\ , \qquad \forall\ k > 0.$$

Dans ce cas, les résultat d'existence et de régularité sont résumés dans le tableau suivant :

$0 \leq \theta \leq 1$	$m > \frac{N}{p}$	$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ solution faible
$0 \leq \theta < 1$	$\frac{Np}{(1-\theta)(p-1)(N-p)+p^2} < m < \frac{N}{p}$	$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^{\theta_1}(\Omega)$ solution faible
	$\frac{N\tilde{p}}{(1-\theta)(p-1)(N-\tilde{p})+p\tilde{p}} < m \leq \frac{Np}{(1-\theta)(p-1)(N-p)+p^2}$	$u \in W_0^{1,\theta_2}(\Omega)$ au sens des distributions
	$1 \leq m \leq \max\left\{1, \frac{N\tilde{p}}{(1-\theta)(p-1)(N-\tilde{p})+p\tilde{p}}\right\}$	$u \in M^{\theta_1}(\Omega)$, $\lvert\nabla u\rvert \in M^{\theta_2}(\Omega)$ entropique

où $\tilde{p} = \max(1, p-1)$, $\theta_1 = \frac{(1-\theta)(p-1)Nm}{N-pm}$ et $\theta_2 = \frac{(1-\theta)(p-1)Nm}{N-[1+\theta(p-1)]m}$.

4.1 Approximation et estimations à priori

On considère le problème :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n) = f_n \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u_n = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.1.1}$$

où $(f_n) \subset W^{-1,p'}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ telle que $f_n \to f$ dans $L^m(\Omega)$ $m \geq 1$, $||f_n||_{L^m(\Omega)} \leq ||f||_{L^m(\Omega)}$ et $|f_n| \leq |f|$ *p.p.* dans Ω, on peut prendre $f_n = T_n(f)$. Le problème (4.1.1) est coercif pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc l'existence de solutions faible $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ est assurée par le théorème 2.4 et 3.3.

Lemme 4.1 *Soit $0 \leq \theta \leq 1$ et soit $f \in L^m(\Omega)$ avec $m > N/p$. On suppose que u_n est une suite de solutions du problème (4.1.1). Alors u_n est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.*

Preuve. On définit, pour $s \in \mathbb{R}$, la fonction :

$$H(s) = \int_0^s \frac{dt}{(1+|t|)^\theta}. \tag{4.1.2}$$

Pour $k > 0$. On prend $v_n = G_k(H(u_n))$ comme une fonction teste dans (4.1.1).

D'une part, l'hypothèse (4.0.2) implique

$$\begin{aligned}
\int_\Omega a(x,T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla v_n &= \int_\Omega a(x,T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla (H(u_n))\chi_{\{|H(u_n)|>k\}} \\
&\geq \alpha \int_{\{|H(u_n)|>k\}} \frac{|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n}{(1+|T(u_n)|)^{\theta(p-1)}} \frac{\nabla u_n}{(1+|u_n|)^{\theta}} \\
&\geq \alpha \int_{\{|H(u_n)|>k\}} \frac{|\nabla u_n|^{p}}{(1+|u_n|)^{p\theta}} \\
&\geq \alpha \int_{\{|H(u_n)|>k\}} \Big|\frac{\nabla u_n}{(1+|u_n|)^{\theta}}\Big|^{p}
\end{aligned}$$

par suite, on obtient

$$\int_\Omega a(x,T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla v_n \geq \alpha \int_\Omega |\nabla G_k(H(u_n))|^p. \tag{4.1.3}$$

D'autre part, on a

$$\int_\Omega f_n v_n = \int_\Omega f_n G_k(H(u_n)). \tag{4.1.4}$$

En combinant (4.1.3) et (4.1.4), on obtient

$$\alpha \int_\Omega |\nabla G_k(H(u_n))|^p \leq \int_\Omega f_n G_k(H(u_n)).$$

la remarque 2.1 implique l'existence d'une constante positive C, tel que

$$||H(u_n)||_{L^\infty(\Omega)} \leq C.$$

comme $\lim\limits_{s\to+\infty} H(s) = -\lim\limits_{s\to-\infty} H(s) = +\infty$, on déduit que

$$||u_n||_{L^\infty(\Omega)} \leq C. \tag{4.1.5}$$

Maintenant, on prend $v_n = u_n$ comme une fonction test dans (4.1.1), en combinant (4.0.2) et (4.1.5), on obtient

$$\frac{\alpha}{(1+C)^{\theta(p-1)}} \int_\Omega |\nabla u_n|^p \leq \int_\Omega f u_n \leq C||f||_{L^1(\Omega)}.$$

D'où ∇u_n est bornée dans $L^p(\Omega)$. L'inégalité de Poincaré implique que u_n est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

Lemme 4.2 *Soit $0 \leq \theta < 1$ et soit $f \in L^m(\Omega)$ avec*

$$\frac{Np}{(1-\theta)(p-1)(N-p)+p^2} < m < \frac{N}{p}. \tag{4.1.6}$$

Soit u_n une suite de solution du problème (4.1.1). Alors u_n est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^{\theta_1}(\Omega)$ où $\theta_1 = \frac{(1-\theta)(p-1)Nm}{N-pm}$.

Preuve. On prend $v_n = [(1+|u_n|)^q - 1]\,\mathrm{sign}(u_n)$, $q > 0$, comme une fonction test dans (4.1.1).

D'une part, en utilisant l'hypothèse (4.0.2) et l'inégalité de Sobolev, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega a(x,T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla v_n &= q\int_\Omega a(x,T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u_n (1+|u_n|)^{q-1} \\
&\geq q\alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^p (1+|u_n|)^{q-1-\theta(p-1)} \\
&\geq q\alpha \int_\Omega \left|(1+|u_n|)^{\frac{q-1-\theta(p-1)}{p}}\nabla u_n\right|^p \\
&\geq \frac{q\alpha}{(\frac{q-1-\theta(p-1)}{p}+1)^p}\int_\Omega \left|\nabla[(1+|u_n|)^{\frac{q-1-\theta(p-1)}{p}+1}-1]\right|^p \\
&\geq \frac{q\alpha S^p}{(\frac{q-1-\theta(p-1)}{p}+1)^p}\left(\int_\Omega \left|(1+|u_n|)^{\frac{q-1-\theta(p-1)}{p}+1}-1\right|^{p^*}\right)^{\frac{p}{p^*}},
\end{aligned}$$

posons

$$\frac{q-1-\theta(p-1)}{p}+1 > 1, \tag{4.1.7}$$

alors

$$\int_\Omega a(x,T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla v_n \geq C\left(\int_\Omega |u_n|^{\frac{[q+(1-\theta)(p-1))]p^*}{p}}\right)^{\frac{p}{p^*}}. \tag{4.1.8}$$

D'autre part, la proposition 2.9, donne pour tout $Q > 1$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f_n\, v_n &\leq \int_\Omega |f|\cdot|(1+|u_n|)^q - 1| \\
&\leq Q\int_\Omega |f|\cdot|u_n|^q + \frac{1}{Q-1}\int_\Omega |f|,
\end{aligned}$$

l'inégalité de Hölder avec l'exposant m, implique

$$\int_\Omega f_n v_n \leq Q||f||_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega |u_n|^{qm'}\right)^{\frac{1}{m'}} + \frac{1}{Q-1}||f||_{L^1(\Omega)}. \tag{4.1.9}$$

Soit $\theta_1 > 1$, posons

$$qm' = \frac{[q+(1-\theta)(p-1)]p^*}{p} = \theta_1, \tag{4.1.10}$$

c'est-à-dire, $\frac{(1-\theta)(p-1)Nm}{N-pm} = \theta_1$, en combinant (4.1.8) , (4.1.9) et (4.1.10), on obtient

$$\begin{aligned} C\left(\int_\Omega |u_n|^{\theta_1}\right)^{\frac{p}{p^*}} &\leq \int_\Omega |\nabla u_n|^p (1+|u_n|)^{q-1-\theta(p-1)} \\ &\leq Q||f||_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega |u_n|^{\theta_1}\right)^{\frac{1}{m'}} + \frac{1}{Q-1}||f||_{L^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

comme $\frac{p}{p^*} > \frac{1}{m'}$ d'après (4.1.6), alors u_n est bornée dans $L^{\theta_1}(\Omega)$. La dernière inégalité implique que la suite $|\nabla u_n|^p(1+|u_n|)^{q-1-\theta(p-1)}$ est bornée dans $L^1(\Omega)$. Comme $q-1-\theta(p-1) > 0$ d'après (4.1.7), alors ∇u_n est bornée dans $L^p(\Omega)$. L'inégalité de Poincaré implique que u_n est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. ∎

Remarque 4.1 *Dans le lemme 4.2, la condition (4.1.6) et* $0 \leq \theta < 1$, *implique*

$$p > \theta_1 = \frac{(p-1)(1-\theta)Nm}{N-pm} > 1,$$

et

$$q = \frac{(p-1)(1-\theta)N(m-1)}{N-pm} > 1+\theta.$$

Lemme 4.3 *Soit* $0 \leq \theta < 1$ *et soit* $f \in L^m(\Omega)$ *avec*

$$\frac{N\tilde{p}}{(1-\theta)(p-1)(N-\tilde{p})+p\tilde{p}} < m \leq \frac{Np}{(1-\theta)(p-1)(N-p)+p^2}. \tag{4.1.11}$$

Soit u_n *une suite de solutions du problème(4.1.1). Alors* u_n *est bornée dans* $W_0^{1,\theta_2}(\Omega)$ *où* $\theta_2 = \frac{(1-\theta)(p-1)Nm}{N-[1+\theta(p-1)]m}$.

Preuve. Posons $A_k = \{|u_n| > k\}$ et $B_k = \{k < |u_n| \leq k+1\}$. On prend $v_n = T_1(G_k(u_n))$ comme une fonction test dans (4.1.1). D'une part, en utilisant l'hypothèse (4.0.2), on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega a(x,T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla v_n &= \int_\Omega a(x,T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u_n \chi_{B_k} \\ &\geq \alpha \int_{B_k} \frac{|\nabla u_n|^p}{(1+|T_n(u_n)|)^{\theta(p-1)}} \\ &\geq \frac{\alpha}{(2+k)^{\theta(p-1)}} \int_{B_k} |\nabla u_n|^p \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

D'autre part, on a

$$\int_\Omega f_n\, v_n \le \int_{A_k} |f|\,|v_n| \le \int_{A_k} |f| \tag{4.1.13}$$

En combinant (4.1.12) et (4.1.13), on obtient

$$\alpha \int_{B_k} |\nabla u_n|^p \le (2+k)^{\theta(p-1)} \int_{A_k} |f| \tag{4.1.14}$$

Soit $\lambda > 0$, en utilisant (4.1.14), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{(1+|u_n|)^\lambda} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{B_k} \frac{|\nabla u_n|^p}{(1+|u_n|)^\lambda} \\
&\le \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+k)^\lambda} \int_{B_k} |\nabla u_n|^p \\
&\le \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} (2+k)^{\theta(p-1)} (1+k)^{-\lambda} \int_{A_k} |f| \\
&\le \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} (2+k)^{\theta(p-1)-\lambda} \sum_{h=k}^{+\infty} \int_{B_h} |f| \\
&\le \frac{1}{\alpha} \sum_{h=0}^{+\infty} \int_{B_h} |f| \sum_{k=0}^{h} (2+k)^{\theta(p-1)-\lambda} \\
&\le C \sum_{h=0}^{+\infty} (3+h)^{\theta(p-1)-\lambda+1} \int_{B_h} |f| \\
&\le C \sum_{h=0}^{+\infty} \int_{B_h} |f| (3+|u_n|)^{\theta(p-1)-\lambda+1}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder avec l'exposant m, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{(1+|u_n|)^\lambda} &\le C \int_\Omega |f| (3+|u_n|)^{\theta(p-1)-\lambda+1} \\
&\le C ||f||_{L^m(\Omega)} \left(\int_\Omega (3+|u_n|)^{(1+\theta(p-1)-\lambda)m'} \right)^{\frac{1}{m'}} \\
&\le C_1 + C_2 \left(\int_\Omega |u_n|^{(1+\theta(p-1)-\lambda)m'} \right)^{\frac{1}{m'}}.
\end{aligned} \tag{4.1.15}$$

Soit $1 < \theta_2 < p$, en utilisant l'inégalité de Sobolev et de Hölder avec l'exposant $\frac{p}{\theta_2}$, on obtient

$$\begin{aligned} S^{\theta_2}\left(\int_\Omega |u_n|^{\theta_2^*}\right)^{\frac{\theta_2}{\theta_2^*}} &\leq \int_\Omega |u_n|^{\theta_2} \\ &\leq \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^{\theta_2}}{(1+|u_n|)^{\frac{\lambda\theta_2}{p}}}(1+|u_n|)^{\frac{\lambda\theta_2}{p}} \\ &\leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{(1+|u_n|)^\lambda}\right)^{\frac{\theta_2}{p}} \left(\int_\Omega (1+|u_n|)^{\frac{\lambda\theta_2}{p-\theta_2}}\right)^{\frac{p-\theta_2}{p}}. \end{aligned} \tag{4.1.16}$$

L'inégalité (4.1.16) est vraie pour tout $\lambda > 0$, donc, on peut prendre λ pour lequel

$$(1+\theta(p-1)-\lambda)m' = \frac{\lambda\theta_2}{p-\theta_2} = \theta_2^*,$$

c'est-à-dire, $\theta_2 = \frac{(1-\theta)(p-1)Nm}{N-[1+\theta(p-1)]m}$, en combinant (4.1.15) et (4.1.16), on obtient

$$\left(\int_\Omega |u_n|^{\theta_2^*}\right)^{\frac{\theta_2}{\theta_2^*}} \leq \left(C_1 + C_2\left(\int_\Omega |u_n|^{\theta_2^*}\right)^{\frac{1}{m'}}\right)\left(C_3 + \left(\int_\Omega |u_n|^{\theta_2^*}\right)^{\frac{p-\theta_2}{p}}\right)$$

on constate que $\frac{\theta_2}{\theta_2^*} > \frac{\theta_2}{pm'} + \frac{p-\theta_2}{p}$, donc la suite u_n est bornée dans $L^{\theta_2^*}(\Omega)$. (4.1.16) implique que la suite ∇u_n est bornée dans $L^{\theta_2}(\Omega)$. L'inégalité de Poincaré implique que u_n est bornée dans $W_0^{1,\theta_2}(\Omega)$. ■

Remarque 4.2 *Dans le lemme 4.3, la condition (4.1.11) et* $0 \leq \theta < 1$, *implique*

$$p - 1 < \theta_2 = \frac{(p-1)(1-\theta)Nm}{N-[1+\theta(p-1)]m} < p.$$

Lemme 4.4 *Soit u_n une suite de solution du problème (4.1.1). Alors $T_k(u_n)$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ pour tout $k > 0$.*

Preuve. On prend $v_n = T_k(u_n)$ comme une fonction test dans (4.1.1). D'une part, on a

$$\begin{aligned} \int_\Omega a(x,T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla v_n &= \int_\Omega a(x,T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u_n \chi_{C_k} \\ &= \int_\Omega a(x,T_n(u_n))|\nabla u_n|^p \chi_{C_k} \\ &= \int_\Omega a(x,T_n(u_n))|\nabla T_k(u_n)|^p, \end{aligned} \tag{4.1.17}$$

en utilisant l'hypothèse (4.0.2), on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(x,T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla v_n &\geq \alpha\int_\Omega \frac{|\nabla T_k(u_n)|^p}{(1+|T_k(u_n)|)^{\theta(p-1)}}\\ &\geq \frac{\alpha}{(1+k)^{\theta(p-1)}}\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^p.\end{aligned} \tag{4.1.18}$$

D'autre part, on a

$$\int_\Omega f_n v_n = \int_\Omega f_n T_k(u_n) \leq k||f_n||_{L^1(\Omega)}, \tag{4.1.19}$$

en combinant (4.1.18) et (4.1.19), on obtient

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^p \leq \alpha(1+k)^{\theta(p-1)}k||f||_{L^1(\Omega)} < +\infty.$$

D'où le résultat. ■

Théorème 4.1 *Soit u_n une suite de solution du problème (4.1.1). On suppose que*

(i) *$T_k(u_n)$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, pour tout $k>0$.*

(ii) *$u_n \to u$ p.p. dans Ω, où $u \in \mathcal{T}^{1,p}(\Omega)$.*

(iii) *il existe $r_1>0$ tels que u_n est bornée dans $M^{r_1}(\Omega)$ et $u \in M^{r_1}(\Omega)$.*

(iv) *il existe $r_2>1$ et $\gamma>0$ tels que $|\nabla u_n|^\gamma$ est bornée dans $L^{r_2}(\Omega)$ et $|\nabla u|^\gamma \in L^{r_2}(\Omega)$.*

Alors, $\nabla u_n \to \nabla u$ p.p. dans Ω, à une sous-suite près.

Démonstration. On définit les deux fonctions $a_n : \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ par $a_n(x,s,\xi) = a(x,T_n(s))|\xi|^{p-2}\xi$ et $a : \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ par $a(x,s,\xi) = a(x,s)|\xi|^{p-2}\xi$, il est clair que a_n et a vérifiennent les hypothèses (2.0.1), (2.0.2) et (2.0.3). On définit aussi pour $\lambda \in (0,1)$ et $k>0$:

$$I(n) = \int_\Omega \Big([a_n(x,u_n,\nabla u_n) - a_n(x,u_n,\nabla u)]\nabla(u_n-u)\Big)^\lambda,$$

et

$$I_1(n,k) = \int_{A_k} \Big([a_n(x,u_n,\nabla u_n) - a_n(x,u_n,\nabla u)]\nabla(u_n-u)\Big)^\lambda,$$

et

$$I_2(n,k) = \int_{C_k} \Big([a_n(x,u_n,\nabla u_n) - a_n(x,u_n,\nabla u)]\nabla(u_n-u)\Big)^\lambda.$$

D'une part, en utilisant l'hypothèse (4.0.2) et l'inégalité de Hölder avec l'exposant p, on obtient

$$\begin{aligned} I_1(n,k) &\leq \beta^\lambda \int\limits_{A_k} \Big[|\nabla u_n|^{(p-1)\lambda} |\nabla u_n|^{\lambda p} + |\nabla u_n|^{(p-1)\lambda} |\nabla u|^{\lambda p} + |\nabla u|^{(p-1)\lambda} |\nabla u_n|^{\lambda p} \\ &\qquad + |\nabla u|^{(p-1)\lambda} |\nabla u|^{\lambda} \Big] \\ &\leq \beta^{\lambda p} \left[\left(\int\limits_{A_k} |\nabla u_n|^{(p-1)\lambda p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_{A_k} |\nabla u_n|^{\lambda p} \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_{A_k} |\nabla u_n|^{(p-1)\lambda p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_{A_k} |\nabla u|^{\lambda p} \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int\limits_{A_k} |\nabla u|^{(p-1)\lambda p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_{A_k} |\nabla u_n|^{\lambda p} \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_{A_k} |\nabla u|^{(p-1)\lambda p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_{A_k} |\nabla u|^{\lambda p} \right)^{\frac{1}{p}} \right]. \end{aligned}$$

par suite, en prenant $\lambda = \frac{\gamma}{p}$, et en utilisant l'inégalité de Hölder avec l'exposant r_2, on obtient

$$\begin{aligned} I_1(n,k) &\leq \beta^\lambda \left[\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u_n|^{\gamma r_2} \right)^{\frac{1}{p' r_2}} \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u_n|^{\gamma r_2} \right)^{\frac{1}{p r_2}} + \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u_n|^{\gamma r_2} \right)^{\frac{1}{p' r_2}} \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{\gamma r_2} \right)^{\frac{1}{p r_2}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{\gamma r_2} \right)^{\frac{1}{p' r_2}} \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u_n|^{\gamma r_2} \right)^{\frac{1}{p r_2}} + \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{\gamma r_2} \right)^{\frac{1}{p' r_2}} \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^{\gamma r_2} \right)^{\frac{1}{p r_2}} \right] |A_k|^{1-\frac{1}{r_2}} \\ &\leq C \cdot |A_k|^{1-\frac{1}{r_2}}. \end{aligned}$$

De (iii), on obtient

$$\lim_{k \to +\infty} \limsup_{n \to +\infty} I_1(n,k) = 0. \tag{4.1.20}$$

D'autre part, on a : $u = T_k(u)$ sur C_k, donc

$$I_2(n,k) \leq I_3(n,k) = \int\limits_{\Omega} \Big([a_n(x,u_n,\nabla u_n) - a_n(x,u_n,\nabla T_k(u))] \nabla (u_n - u) \Big)^\lambda.$$

On pose pour $h > 0$: $V_h = \{|u_n - T_k(u)| > h\}$ et $V_h' = \{|u_n - T_k(u)| \leq h\}$.

On définit aussi :

$$I_4(n,k,h) = \int\limits_{V_h} \Big([a_n(x,u_n,\nabla u_n) - a_n(x,u_n,\nabla T_k(u))] \nabla (u_n - T_k(u)) \Big)^\lambda,$$

et

$$I_5(n,k,h) = \int\limits_{V_h'} \Big([a_n(x,u_n,\nabla u_n) - a_n(x,u_n,\nabla T_k(u))] \nabla (u_n - T_k(u)) \Big)^\lambda.$$

On utilise le même raisonnement que dans (4.1.20), pour montrer que

$$\lim_{h\to+\infty}\lim_{k\to+\infty}\limsup_{n\to+\infty} I_4(n,k,h)=0. \tag{4.1.21}$$

Puisque $\nabla(u_n-T_k(u))=\nabla T_h(u_n-T_k(u))$ sur V_h', alors

$$I_5(n,k,h)=\int_\Omega \Big([a_n(x,u_n,\nabla u_n)-a_n(x,u_n,\nabla T_k(u))]\nabla T_h(u_n-T_k(u))\Big)^\lambda.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder avec l'exposant $\frac{1}{\lambda}$, on obtient

$$I_5(n,k,h)\le |\Omega|^{1-\lambda}\left(\int_\Omega [a_n(x,u_n,\nabla u_n)-a_n(x,u_n,\nabla T_k(u))]\nabla T_h(u_n-T_k(u))\right)^\lambda.$$

Maintenant, on définit :

$$I_6(n,k,h)=\int_\Omega [a_n(x,u_n,\nabla u_n)-a_n(x,u_n,\nabla T_k(u))]\nabla T_h(u_n-T_k(u)),$$

et

$$I_7(n,k,h)=\int_\Omega a_n(x,u_n,\nabla u_n)\nabla T_h(u_n-T_k(u)),$$

et

$$I_8(n,k,h)=\int_\Omega a_n(x,u_n,\nabla T_k(u))\nabla T_h(u_n-T_k(u)).$$

L'intégrale dans $I_8(n,k,h)$ est définie sur l'ensemble V_h', c'est-à-dire, le sous-ensemble où $|u_n|\le k+h$, en utilisant l'hypothèse (4.0.2), et la convergence presque par tout dans Ω de u_n vers u, on obtient

$$a_n(x,u_n,\nabla T_k(u))\to a(x,u,\nabla T_k(u)) \quad \text{dans} \quad \Big(L^{p'}(\Omega)\Big)^N,$$

maintenant, comme $\nabla T_h(u_n-T_k(u))\rightharpoonup \nabla T_h(u-T_k(u))$ dans $(L^p(\Omega))^N$ d'après (i) et (ii), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} I_8(n,k,h)=\int_\Omega a(x,u,\nabla T_k(u))\nabla T_h(u-T_k(u))=0,$$

en effet, $\nabla T_h(u-T_k(u))=0$ sur A_k.

D'abord, en prenant $T_h(u_n-T_k(u))$ comme une fonction test dans (5.1.2), on obtient

$$I_7(n,k,h)=\int_\Omega f_n T_h(u_n-T_k(u)).$$

Or $f_n \to f$ dans $L^m(\Omega)$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} I_7(n,k,h) = \int_\Omega f T_h(u - T_k(u)),$$

d'où

$$\lim_{k\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} I_7(n,k,h) = 0, \tag{4.1.22}$$

en combinant (4.1.20), (4.1.21) et (4.1.22), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} I(n) = 0$$

d'où

$$[a_n(x,u_n,\nabla u_n) - a_n(x,u_n,\nabla u)]\nabla(u_n - u) \to 0 \ \text{ dans } \ L^1(\Omega).$$

En utilisant la réciproque partielle de Lebesgue, on obtient

$$[a_n(x,u_n,\nabla u_n) - a_n(x,u_n,\nabla u)]\nabla(u_n - u) \to 0 \ \text{ p.p. dans } \ L^1(\Omega). \tag{4.1.23}$$

Maintenant, on va vérifier que $\nabla u_n \to \nabla u$ p.p. dans Ω. Premièrement, on constate que la suite ∇u_n est bornée p.p. dans Ω. Par contradiction, il existe une sous-suite de ∇u_n (notée encore ∇u_n), tel que

$$|\nabla u_n - \nabla u| > 1, \qquad \frac{\nabla u_n - \nabla u}{|\nabla u_n - \nabla u|} \to \xi^* \neq 0 \quad \text{ p.p. dans } \ \Omega.$$

D'une part, en utilisant l'hypothèse (2.0.3), on obtient

$$\left(a_n(x,u_n,\nabla u_n) - a_n(x,u_n,\nabla u + \frac{\nabla u_n - \nabla u}{|\nabla u_n - \nabla u|})\right)(\nabla u_n - \nabla u - \frac{\nabla u_n - \nabla u}{|\nabla u_n - \nabla u|}) \geq 0,$$

c'est-à-dire,

$$\left(a_n(x,u_n,\nabla u_n) - a_n(x,u_n,\nabla u + \frac{\nabla u_n - \nabla u}{|\nabla u_n - \nabla u|})\right)\frac{\nabla u_n - \nabla u}{|\nabla u_n - \nabla u|} \geq 0. \tag{4.1.24}$$

D'autre part, on remarque que

$$\begin{aligned}
&\left(a_n(x,u_n,\nabla u + \frac{\nabla u_n - \nabla u}{|\nabla u_n - \nabla u|}) - a_n(x,u_n,\nabla u)\right)\frac{\nabla u_n - \nabla u}{|\nabla u_n - \nabla u|} \\
&\quad = \left(a_n(x,u_n,\nabla u + \frac{\nabla u_n - \nabla u}{|\nabla u_n - \nabla u|}) - a_n(x,u_n,\nabla u_n)\right)\frac{\nabla u_n - \nabla u}{|\nabla u_n - \nabla u|} \\
&\qquad + (a_n(x,u_n,\nabla u_n) - a_n(x,u_n,\nabla u))\frac{\nabla u_n - \nabla u}{|\nabla u_n - \nabla u|} \\
&\quad \leq (a_n(x,u_n,\nabla u_n) - a_n(x,u_n,\nabla u))\frac{\nabla u_n - \nabla u}{|\nabla u_n - \nabla u|} \\
&\quad \leq (a_n(x,u_n,\nabla u_n) - a_n(x,u_n,\nabla u))\,\nabla(u_n - u),
\end{aligned}$$

en combinant (4.1.23) et (4.1.24), on obtient

$$\left(a_n(x,u_n,\nabla u+\frac{\nabla u_n-\nabla u}{|\nabla u_n-\nabla u|})-a_n(x,u_n,\nabla u)\right)\frac{\nabla u_n-\nabla u}{|\nabla u_n-\nabla u|}\to 0,$$

d'où

$$[a(x,u,\nabla u+\xi^*)-a(x,u,\nabla u)]\xi^*=0.$$

Cela contredit. Donc le théorème 2.1 implique que $\nabla u_n(x)\to\xi$. De (4.1.23), on obtient

$$[a(x,u(x),\xi)-a(x,u(x),\nabla u(x))](\xi-\nabla u(x))=0.$$

Donc $\xi=\nabla u(x)$, d'où $\nabla u_n\to\nabla u$ p.p. dans Ω. ∎

4.2 Solutions dans l'espace de Sobolev

Théorème 4.2 *Soient $0\le\theta\le 1$ et $f\in L^m(\Omega)$ avec $m>N/p$. Alors il existe $u\in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ solution faible du problème (4.0.1).*

Démonstration. Soit u_n une suite de solutions du problème (4.1.1), alors d'après le lemme 4.1 u_n est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ qui est réflexif, donc, il existe $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ tel que $u_n\rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, à une sous-suite près. Comme $W_0^{1,p}(\Omega)$ s'injecte dans $L^p(\Omega)$ compactement, alors $u_n\to u$ dans $L^p(\Omega)$. La réciproque partielle de Lebesgue implique que $u_n\to u$ p.p. dans Ω. Puisque u_n est bornée dans $L^\infty(\Omega)$, la semi-continuité inférieure de $||\cdot||_{L^\infty(\Omega)}$ implique que $u\in L^\infty(\Omega)$. Or $\nabla u_n\to\nabla u$ p.p. dans Ω d'après le théorème 4.1, alors $a(x,T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\to a(x,u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u$ p.p. dans Ω, à une sous-suite près.
D'une part, en utilisant l'hypothèse (4.0.2), on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega |a(x,T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n|^{p'} &\le \beta^{p'}\int_\Omega |\nabla u_n|^{(p-1)p'}\\ &\le \beta^{p'}\int_\Omega |\nabla u_n|^p\\ &< +\infty.\end{aligned}$$

Donc $a(x,T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n$ est bornée dans $L^{p'}(\Omega)$, le théorème 1.2 implique que

$$a(x,T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\rightharpoonup a(x,u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \quad\text{dans}\quad L^{p'}(\Omega),$$

c'est-à-dire ,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x,T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\varphi=\int_\Omega a(x,u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi\ ,\qquad\forall\ \varphi\in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{4.2.1}$$

D'autre part, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n\ \varphi=\int_\Omega f\ \varphi\ ,\qquad\forall\ \varphi\in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{4.2.2}$$

en combinant (4.2.1) et (4.2.2), on obtient

$$\int_\Omega a(x,u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi=\int_\Omega f\varphi\ ,\qquad\forall\ \varphi\in W_0^{1,p}(\Omega).$$

■

Théorème 4.3 *Soient $0\le\theta<1$ et $f\in L^m(\Omega)$ avec m vérifiant (4.1.11). Alors il existe $u\in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^{\theta_1}(\Omega)$ solution faible du problème (4.0.1), où $\theta_1=\frac{(1-\theta)(p-1)Nm}{N-pm}$.*

Démonstration. On utilise même technique de celle de démonstration du théorème 4.2. ■

Théorème 4.4 *Soient $0\le\theta<1$ et $f\in L^m(\Omega)$ avec m vérifiant (4.1.6). Alors il existe $u\in W_0^{1,\theta_2}(\Omega)$ solution au sens des distributions du problème (4.0.1).*

Démonstration. D'une part, on utilise la démonstration du théorème 4.2 pour montrer qu'il existe $u\in W^{\theta_2}(\Omega)$, tel que $u_n\to u$ et $a(x,T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\to a(x,u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u$ p.p. dans Ω, à une sous-suite près. D'autre part, en posant $r=\frac{\theta_2}{p-1}>1$ et en utilisant l'hypothèse (4.0.2), on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega|a(x,T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n|^r &\le \beta^r\int_\Omega|\nabla u_n|^{(p-1)r}\\ &\le \beta^r\int_\Omega|\nabla u_n|^{\theta_2}\\ &< +\infty.\end{aligned}$$

Donc $a(x,T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n$ est bornée dans $L^r(\Omega)$, le théorème 1.2 implique que $a(x,T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\rightharpoonup a(x,u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u$ dans $L^r(\Omega)$, c'est-à-dire,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x,T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\varphi=\int_\Omega a(x,u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi\ ,\qquad\forall\ \varphi\in\mathcal{D}(\Omega). \tag{4.2.3}$$

Par ailleur, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall\ \varphi\in\mathcal{D}(\Omega). \tag{4.2.4}$$

En combinant (4.2.1) et (4.2.2), on obtient

$$\int_\Omega a(x,u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi = \int_\Omega f\varphi\ , \qquad \forall\ \varphi\in\mathcal{D}(\Omega).$$

■

4.3 Solutions entropiques

Proposition 4.5 *Soient $a,b\in\mathbb{R}$ et $p>1$. Alors*

$$p|b|^{p-1}(a-b)+|b|^p\le|a|^p.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème des accroissements finies sur la fonction $x\mapsto|x|^p$.

■

Lemme 4.6 *Soit (v_n) une suite des fonctions mesurables et (u_n) une suite des fonctions telles que $v_n\rightharpoonup v$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, $u_n\to u$ p.p. dans Ω. Alors*

$$\int_\Omega a(x,u)|\nabla v|^p\le\liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x,T_n(u_n))|\nabla v_n|^p.$$

Preuve. En utilisant la proposition 4.5 , on obtient

$$p\int_\Omega a(x,T_n(u_n))|\nabla v|^{p-1}\nabla(v_n-v)+\int_\Omega a(x,T_n(u_n))|\nabla v|^p\le\int_\Omega a(x,T_n(u_n))|\nabla v_n|^p$$

Comme $a(\cdot,\cdot)$ est bornée et de Carathéodory, donc par les hypothèses sur u_n et v_n, on obtient

$$\int_\Omega a(x,T_n(u_n))|\nabla v|^{p-1}\nabla(v_n-v)\to 0,$$

et

$$\int_\Omega a(x,T_n(u_n))|\nabla v|^p\to\int_\Omega a(x,u)|\nabla v|^p.$$

D'où le résultat. ■

Lemme 4.7 *Soit $u \in M^s(\Omega)$, $s > 0$. Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que*

$$\int_\Omega |T_k(u_n)|^p \leq ck^r \ , \qquad \forall\ k > k_0,$$

où $k_0 \geq 0$. Alors $|\nabla u| \in M^{\frac{ps}{r+s}}(\Omega)$.

Preuve. Soit $\lambda, k > 0$, alors

$$\begin{aligned} |\{|\nabla u| > \lambda\}| &= |\{|\nabla u| > \lambda, |u| \leq k\}| + |\{|\nabla u| > \lambda, |u| > k\}| \\ &\leq |\{|\nabla u| > \lambda, |u| \leq k\}| + |\{|u| > k\}| \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^p + \frac{c_1}{k^s} \\ &\leq c\frac{k^r}{\lambda} + \frac{c_1}{k^s}, \end{aligned}$$

cette inégalité est vraie pour tout $k > 0$, donc elle reste vraie pour $k = \lambda^{\frac{p}{r+s}}$, en posant $c_2 = \max(c, c_1)$, on obtient

$$|\{|\nabla u| > \lambda\}| \leq \frac{c_2}{\lambda^{\frac{ps}{r+s}}}.$$

D'où le résultat. ■

Lemme 4.8 *Soit $0 \leq \theta < 1$ et soit $f \in L^m(\Omega)$, avec m satisfisant*

$$1 \leq m \leq \max\left(1, \frac{N\tilde{p}}{(1-\theta)(p-1)(N-\tilde{p}) + p\tilde{p}}\right), \tag{4.3.1}$$

supposons que $u \in \mathcal{T}^{1,p}(\Omega)$, tel que

$$\int_\Omega \frac{|T_k(u)|^p}{(1+|u|)^{\theta(p-1)}} \leq c\int_\Omega |f| \cdot |T_k(u)| \ , \qquad \forall\ k > 0. \tag{4.3.2}$$

Alors $u \in M^{\theta_1}(\Omega)$ et $|\nabla u| \in M^{\theta_2}(\Omega)$.

Preuve. En appliquant l'inégalité de Hölder avec l'exposant m dans l'inégalité (4.3.2), on obtient

$$\int_\Omega \frac{|T_k(u)|^p}{(1+|u|)^{\theta(p-1)}} \leq c||f||_{L^m(\Omega)} \left(\int_\Omega |T_k(u)|^{m'}\right)^{\frac{1}{m'}}, \qquad \forall\ k > 0. \tag{4.3.3}$$

On déstingue trois cas possibles : $m > p^{*'}$, $1 < m < p^{*'}$ et $m = 1$.

Si $m > p^{*'}$, alors $m' < p^*$, donc il existe $\rho < p$ tel que $\rho^* = m'$.

D'une part, en utilisant l'inégalité de Sobolev et de Hölder avec l'exposant $\frac{p}{\rho}$, on obtient

$$\begin{aligned} S^\rho \left(\int_\Omega |T_k(u)|^{\rho^*} \right)^{\frac{\rho}{\rho^*}} &\leq \int_\Omega |\nabla T_k(u)|^\rho \\ &= \int_\Omega \frac{|\nabla T_k(u)|^\rho}{(1+|T_k(u)|)^{\frac{\rho\theta(p-1)}{p}}} (1+|T_k(u)|)^{\frac{\rho\theta(p-1)}{p}} \\ &\leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla T_k(u)|^p}{(1+|T_k(u)|)^{\theta(p-1)}} \right)^{\frac{\rho}{p}} \left(\int_\Omega (1+|T_k(u)|)^{\frac{\rho\theta(p-1)}{p-\rho}} \right)^{\frac{p-\rho}{p}} \\ &\leq c \left(\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^{m'} \right)^{\frac{\rho}{pm'}} \left(\int_\Omega (1+|T_k(u)|)^{\frac{\rho\theta(p-1)}{p-\rho}} \right)^{\frac{p-\rho}{p}}, \end{aligned}$$

par suite, on obtient

$$\left(\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^{m'} \right)^{\frac{1}{m'}} \leq C \left(\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^{m'} \right)^{\frac{\rho}{pm'}} \left(\int_\Omega (1+|T_k(u)|)^{\frac{\rho\theta(p-1)}{p-\rho}} \right)^{\frac{p-\rho}{p\rho}}. \tag{4.3.4}$$

On suppose que

$$\frac{\rho\theta(p-1)}{p-\rho} > m'. \tag{4.3.5}$$

Donc pour tout $k \geq 1$, on a

$$\int_\Omega (1+|T_k(u)|)^{\frac{\rho\theta(p-1)}{p-\rho}} \leq Ck^{\frac{\rho\theta(p-1)}{p-\rho}-m'} \int_\Omega (1+|T_k(u)|)^{m'}. \tag{4.3.6}$$

En combinant (4.3.4) (4.3.6), on obtient

$$\left(\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^{m'} \right)^{\frac{p-1}{pm'}} \leq Ck^{\frac{\theta(p-1)}{p}-\frac{(p-\rho)m'}{p\rho}} \left(\int_\Omega (1+|T_k(u)|)^{\frac{\rho\theta(p-1)}{p-\rho}} \right)^{\frac{p-\rho}{p\rho}},$$

par suite, on obtient

$$\left(\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^{m'} \right)^{\frac{p-1}{pm'}-\frac{p-\rho}{p\rho}} \leq Ck^{\frac{\theta(p-1)}{p}-\frac{(p-\rho)m'}{p\rho}}, \tag{4.3.7}$$

comme $|T_k(u)| = k$ sur A_k, alors

$$k^{\frac{p-1}{p}-\frac{(p-\rho)m'}{p\rho}} |A_k|^{\frac{p-1}{pm'}-\frac{p-\rho}{p\rho}} \leq Ck^{\frac{\theta(p-1)}{p}-\frac{(p-\rho)m'}{p\rho}},$$

d'où $|A_k| \leq Ck^{-\theta_1}$. Donc $u \in M^{\theta_1}(\Omega)$.

D'autre part, en utilisant (4.3.7), on obtient

$$\left(\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^{m'}\right)^{\frac{1}{m'}} \leq Ck^{\frac{\theta(p-1)N(m-1)+Np-pm+(1-p)Nm}{N-pm}},$$

en combinant (4.3.3) et (4.3.7), on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla T_k(u)|^p &\leq C(1+k)^{\theta(p-1)} \left(\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^{m'}\right)^{\frac{1}{m'}} \\ &\leq Ck^{\frac{\theta(p-1)(N-p)m+Np-pm+(1-p)Nm}{N-pm}}, \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

posons $r = \frac{\theta(p-1)(N-p)m+Np-pm+(1-p)Nm}{N-pm}$, on constate que $\frac{p\theta_1}{r+\theta_1} = \theta_2$, donc, le lemme 4.7 implique que $|\nabla u| \in M^{\theta_2}(\Omega)$.

Maintenant, on étudie le cas où $1 < m \leq p^{*'}$.

D'une part, puisque $m' \geq p^*$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \left(\int_\Omega |T_k(u)|^{m'}\right)^{\frac{1}{m'}} &= \left(\int_\Omega |T_k(u)|^{p^*} |T_k(u)|^{m'-p^*}\right)^{\frac{1}{m'}} \\ &\leq k^{1-\frac{p^*}{m'}} \left(\int_\Omega |T_k(u)|^{m'-p^*}\right)^{\frac{1}{m'}}. \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

En combinant (4.3.8), (4.3.9) et en utilisant l'inégalité de Sobolev, on obtient

$$\begin{aligned} S^p \left(\int_\Omega |T_k(u)|^{p^*}\right)^{\frac{p}{p^*}} &\leq \int_\Omega |\nabla T_k(u)|^p \\ &\leq c(1+k)^{\theta(p-1)} \left(\int_\Omega |T_k(u)|^{m'}\right)^{\frac{1}{m'}} \\ &\leq c(1+k)^{1+\theta(p-1)-\frac{p^*}{m'}} \left(\int_\Omega |T_k(u)|^{p^*}\right)^{\frac{1}{m'}}, \end{aligned}$$

par suite, on obtient

$$\left(\int_\Omega |T_k(u)|^{p^*}\right)^{\frac{p}{p^*}-\frac{1}{m'}} \leq C(1+k)^{1+\theta(p-1)-\frac{p^*}{m'}},$$

comme $|T_k(u)| = k$ sur A_k, alors

$$k^{p-\frac{p^*}{m'}}|A_k|^{\frac{p}{p^*}-\frac{1}{m'}} \leq C(1+k)^{1+\theta(p-1)-\frac{p^*}{m'}},$$

puisque $\frac{p}{p^*} - \frac{1}{m'} = \frac{(1-\theta)(p-1)}{\theta_1}$, alors pour tout $k \geq 1$, on a : $|A_k| \leq Ck^{-\theta_1}$, d'où $u \in M^{\theta_1}(\Omega)$. D'autre part, en combinant (4.3.3), (4.3.9) et en utilisant l'inégalité de Sobolev, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^p &\leq c(1+k)^{1+\theta(p-1)-\frac{p^*}{m'}} \left(\int_\Omega |T_k(u)|^{p^*}\right)^{\frac{1}{m'}} \\ &\leq c(1+k)^{1+\theta(p-1)-\frac{p^*}{m'}} \left(\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^p\right)^{\frac{p^*}{pm'}},\end{aligned}$$

si $k \geq 1$, on revient à (4.3.8), d'où $|\nabla u| \in M^{\theta_2}$.

Finalement, si $m = 1$. D'une part, de (4.3.2), on déduire que pour tout $k \geq 1$, on a

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^p \leq ck^{1+\theta(p-1)}, \tag{4.3.10}$$

en utilisant l'inégalité de Sobolev, on obtient

$$k^p|A_k|^{\frac{p}{p^*}} \leq \left(\int_\Omega |T_k(u)|^{p^*}\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq ck^{1+\theta(p-1)},$$

donc pour tout $k \geq 1$, on a : $|A_k| \leq Ck^{-\theta_1}$, d'où $u \in M^{\theta_1}(\Omega)$.
D'autre part, on constate que $\frac{p\theta_1}{1+\theta(p-1)+\theta_1} = \theta_2$, donc, de (4.3.10), le lemme 4.7 implique que $|\nabla u| \in M^{\theta_2}$. ■

Lemme 4.9 *Soit (u_n) une suite des fonctions mesurables telle que $T_k(u_n)$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ pour tout $k > 0$. Alors il existe $u \in \mathcal{T}^{1,p}(\Omega)$ tel que*

$$T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u) \quad \text{dans } W_0^{1,p}(\Omega), \quad u_n \to u \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

à une sous-suite près.

Preuve. On va montrer que $u_n \to u$ en mesure. D'abord, on vérifie que pour $t, \varepsilon > 0$, on a

$$\{|u_n - u_m| > t\} \subset \{|u_n| > k\} \cup \{|u_m| > k\} \cup \{|T_k(u_n) - T_k(u_m)| > t\}.$$

D'où

$$|\{|u_n - u_m| > t\}| \leq |\{|u_n| > k\}| + |\{|u_m| > k\}| + |\{|T_k(u_n) - T_k(u_m)| > t\}|,$$

pour k plus grand, on obtient

$$|\{|u_n| > k\}| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |\{|u_m| > k\}| < \varepsilon.$$

On peut supposer que la suite $T_k(u_n)$ est de Cauchy dans $L^q(\Omega)$ pour tout $q < p^*$. Alors

$$|\{|T_k(u_n) - T_k(u_m)| > t\}| \leq t^{-q} \int_\Omega |T_k(u_n) - T_k(u_m)|^q \leq \varepsilon \ , \qquad \forall\ n, m \geq n_0(k,t).$$

D'où

$$|\{|u_n - u_m| > t\}| \leq \varepsilon,$$

ce résultat implique que u_n est de Cauchy en mesure dans Ω. D'où, il existe une fonction mesurable u tel que $u_n \to u$ en mesure. Alors $u_n \to u$ p.p. dans Ω, et donc $T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u)$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. ∎

Théorème 4.5 *Soit $f \in L^m(\Omega)$, avec m satisfisant (4.3.1). Alors il existe $u \in \mathcal{T}^{1,p}(\Omega)$ solution entropique du problème (4.0.1), telle que*

$$u \in M^{\theta_1}(\Omega) \quad et \quad |\nabla u| \in M^{\theta_2}(\Omega), \quad où \quad \theta_1 = \tfrac{(1-\theta)(p-1)Nm}{N-pm} \quad et \quad \theta_2 = \tfrac{(1-\theta)(p-1)Nm}{N-[1+\theta(p-1)]m}.$$

Démonstration. Soit u_n une suite de solution du problème (4.1.1), alors le lemme 4.4 implique que $T_k(u_n)$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, pour tout $k > 0$, donc le lemme (4.9) assure l'existence de $u \in \mathcal{T}^{1,p}(\Omega)$ tel que $u_n \to u$ p.p. dans Ω et $T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u)$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, à une sous-suite près. En prenant $T_k(u_n)$ comme une fonction teste dans (4.1.1) et en utilisant (4.1.17), on obtient

$$\int_\Omega a(x, T_n(u_n))|\nabla T_k(u_n)|^p = \int_\Omega f_n T_k(u_n).$$

En appliquant le théorème 4.6, on obtient

$$\int_\Omega a(x,u)|\nabla T_k(u)|^p = \int_\Omega f T_k(u).$$

D'où

$$\int_\Omega \frac{|\nabla T_k(u)|^p}{(1+|u|)^{\theta(p-1)}} = \int_\Omega |f|\ |T_k(u)|,$$

le lemme 4.8 implique que $u \in M^{\theta_1}(\Omega)$ et $|\nabla u| \in M^{\theta_2}(\Omega)$.

Maintenant, on va montrer que u est une solution entropique pour le problème (4.0.1). Soit $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. On prend $T_k(u_n - \varphi)$ $(k > 0)$ comme une fonction teste dans (4.1.1).

D'une part, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(x,T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla T_k(u_n-\varphi) &= \int_{\{|u_n-\varphi|\le k\}} a(x,T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u_n \\ &\quad - \int_{\{|u_n-\varphi|\le k\}} a(x,T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla \varphi \\ &= \int_{\{|u_n-\varphi|\le k\}} a(x,T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p} \\ &\quad - \int_{\{|u_n-\varphi|\le k\}} a(x,T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla \varphi,\end{aligned}$$

Le fait que la deuxième intégrale est définit sur un sous-ensemble où $|u_n| \le k + \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} = M$, on peut l'écrire $(n > M)$ comme

$$\int_{\{|u_n-\varphi|\le k\}} a(x,T_M(u_n))|\nabla T_M(u_n)|^{p-2}\nabla T_M(u_n)\nabla\varphi.$$

Comme $\nabla u_n \to \nabla u$ p.p. dans Ω d'après le théorème 4.1, alors

$$a(x,T_M(u_n))|\nabla T_M(u_n)|^{p-2}\nabla T_M(u_n) \to a(x,T_M(u))|\nabla T_M(u)|^{p-2}\nabla T_M(u) \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

et puisque $|a(x,T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n|$ est bornée dans $L^{p'}(\Omega)$, alors

$$a(x,T_M(u_n))|\nabla T_M(u_n)|^{p-2}\nabla T_M(u_n) \rightharpoonup a(x,T_M(u))|\nabla T_M(u)|^{p-2}\nabla T_M(u) \quad \text{dans } \big(L^{p'}(\Omega)\big)',$$

d'où,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\{|u_n-\varphi|\le k\}} a(x,T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\varphi = \int_{\{|u_n-\varphi|\le k\}} a(x,u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla T\varphi. \quad (4.3.11)$$

En utilisant le lemme 4.6, on obtient

$$\int_{\{|u_n-\varphi|\le k\}} a(x,u)|\nabla u|^p \le \liminf_{n\to+\infty} \int_{\{|u_n-\varphi|\le k\}} a(x,T_n(u_n))|\nabla u_n|^p \quad (4.3.12)$$

D'autre part, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n T_k(u_n-\varphi) = \int_\Omega f T_k(u-\varphi) \quad (4.3.13)$$

En combinant (4.3.12), (4.3.11) et (4.3.13), on obtient

$$\int_{\Omega} a(x,u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla T_k(u-\varphi) \leq \int_{\Omega} fT_k(u-\varphi).$$

D'où le résultat. ■

Chapitre 5

Problèmes elliptques à terme d'ordre inférieur

L'objectif de ce chapitre est l'étude des effets de la presence du terme d'ordre inférieur sur de la régularité de solutions d'un problème non linéaire de type elliptique dans deux cas ; le cas d'un operateur coercif et le cas d'un operateur à coercivité dégénérée, afin de comparer les résultats. Dans la suite Ω sera un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ et $1 < p < N$.

5.1 Cas d'un problème coercif

Dans cette section, on va étudier le probléme :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)) + |u|^{q-1}u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.1.1}$$

où $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est une fonction de Carathéodory vérifiant les hypothèses (2.0.1), (2.0.2) et (2.0.3),$f \in L^m(\Omega)$ $(m \geq 1)$ et $q \geq 1$. Dans ce cas, on obtient quelques résultats d'existence et de régularité résumés par le tableau suivant :

<table>
<tr><td>$f \in L^1(\Omega)$</td><td colspan="2">$u \in W^{1,r}(\Omega), \quad r < \frac{pq}{1+q}$ solustion au sens des distributions</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$f \in L^m(\Omega)$
$m > 1$</td><td>$q \geq \frac{1}{m-1}$</td><td>$u \in W_0^{1,p}(\Omega)$
solustion au sens des distributions</td></tr>
<tr><td>$1 < q < \frac{1}{m-1}$</td><td>$u \in W_0^{1,r}(\Omega), \quad r < \frac{pqm}{1+qm}$
solustion au sens des distributions</td></tr>
</table>

Nous allons procéder par approximation. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,u_n,\nabla u_n)) + |T_n(u_n)|^{q-1}T_n(u_n) = f_n & dans \quad \Omega \\ u_n = 0 & sur \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{5.1.2}$$

où $(f_n) \subset W^{-1,p'}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ telle que $f_n \to f$ dans $L^m(\Omega)$ $m \geq 1$, $||f_n||_{L^m(\Omega)} \leq ||f||_{L^m(\Omega)}$ et $|f_n| \leq |f|$ pp dans Ω (on peut prendre $f_n = T_n(f)$). L'existence de solution $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$, pour tout n est assurée par le théorème 2.4.

Lemme 5.1 *Soit $f \in L^m(\Omega)$, $m \geq 1$. Supposons que u_n est une suite de solution du problème (5.1.2). Alors*

$$\int_\Omega |T_n(u_n)|^{qm} \leq \int_\Omega |f|^m.$$

Preuve. Si $m > 1$, en prenant $|T_n(u_n)|^{q(m-1)}\operatorname{sign}(u_n)$ comme une fonction test dans (5.1.2) et en utilisant l'inégalité de Hölder avec l'exposant m, on obtient

$$\int_\Omega |T_n(u_n)|^{qm} \leq \int_\Omega |f| \cdot |T_n(u_n)|^{q(m-1)} \leq \left(\int_\Omega |f|^m\right)^{\frac{1}{m}} \left(\int_\Omega |T_n(u_n)|^{qm}\right)^{1-\frac{1}{m}}.$$

Maintenant, si $m = 1$, en prenant $\frac{T_k(u_n)}{k}$, $k > 0$, comme une fonction test dans (5.1.2), on obtient

$$\int_\Omega |T_n(u_n)|^{q-1}T_n(u_n)\frac{T_k(u_n)}{k} \leq \int_\Omega |f|.$$

En faisant k tend vers 0 et en utilisant le lemme de Fatou, on obtient le résultat. ∎

Lemme 5.2 *Soit $f \in L^m(\Omega)$, $m \geq 1$. Supposons que u_n une suite de solution du problème (5.1.2). Alors*

(1) *Si $m > 1$ et $q \geq \frac{1}{m-1}$, alors $T_n(u_n)$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

(2) *Si $m > 1$ et $q < \frac{1}{m-1}$, alors $T_n(u_n)$ est bornée dans $W_0^{1,r}(\Omega)$, pour tout $r < \frac{pqm}{1+qm}$.*

(3) *Si $m = 1$, alors $T_n(u_n)$ est bornée dans $W_0^{1,r}(\Omega)$, pour tout $r < \frac{pq}{1+q}$.*

Preuve. D'une part, si $m > 1$ et $q \geq \frac{1}{m-1}$, en prenant $T_n(u_n)$ comme une fonction test dans (5.1.2) et en utilisant le lemme 5.1 , l'hypothèse (2.0.2) et l'inégalité de Hölder avec

l'exposant qm, on obtient

$$\begin{aligned}\alpha\int_\Omega |\nabla T_n(u_n)|^p &\leq \int_\Omega f_n\cdot T_n(u_n)\\ &\leq \left(\int_\Omega |T_n(u_n)|^{qm}\right)^{\frac{1}{qm}}\left(\int_\Omega |f|^{(qm)'}\right)^{\frac{1}{(qm)'}}\\ &\leq \left(\int_\Omega |f|^{m}\right)^{\frac{1}{qm}}\left(\int_\Omega |f|^{(qm)'}\right)^{\frac{1}{(qm)'}},\end{aligned}$$

On a $\nabla T_n(u_n)$ est bornée dans $L^p(\Omega)$, si $(qm)' = \frac{qm}{qm-1} \leq m$, i.e. $q \geq \frac{1}{m-1}$. L'inégalité de Poincaré implique que $T_n(u_n)$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

D'autre part, si $m > 1$ et $q < \frac{1}{m-1}$, en prenant $[(1+|T_n(u_n)|)^{p(\lambda-1)-1} - 1]\,\mathrm{sign}(u_n)$, $\lambda < \frac{p-1}{p}$, comme une fonction teste dans (5.1.2), on obtient

$$\int_\Omega \frac{|\nabla T_n(u_n)|^p}{(1+|T_n(u_n)|)^{p(1-\lambda)}} \leq \int_\Omega \frac{||f||_u}{[1+p(1-\lambda)]\alpha} = C. \tag{5.1.3}$$

D'abord, soit $r < p$. En utilisant (5.1.3) et l'inégalité de Hölder avec l'exposant $\frac{p}{r}$, on obtient

$$\begin{aligned}\alpha\int_\Omega |\nabla T_n(u_n)|^r &= \int_\Omega \frac{|\nabla T_n(u_n)|^r}{(1+|T_n(u_n)|)^{r(1-\lambda)}}(1+|T_n(u_n)|)^{r(1-\lambda)}\\ &\leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla T_n(u_n)|^p}{(1+|T_n(u_n)|)^{p(1-\lambda)}}\right)^{\frac{r}{p}}\left((1+|T_n(u_n)|)^{\frac{(1-\lambda)pr}{p-r}}\right)^{1-\frac{r}{p}}\\ &\leq C\left((1+|T_n(u_n)|)^{\frac{(1-\lambda)pr}{p-r}}\right)^{1-\frac{r}{p}}.\end{aligned}$$

On déduire que $\nabla T_n(u_n)$ est bornée dans $L^r(\Omega)$ si $\frac{(1-\lambda)pr}{p-r} \leq qm$, i.e. $q < \frac{1}{m-1}$, c'est-à-dire, $\lambda \geq 1 - \frac{(p-r)qm}{pr}$, donc $r < \frac{pqm}{1+qm}$.

Par ailleurs, $m = 1$, on prend $[(1+|T_n(u_n)|)^{p(\lambda-1)-1} - 1]\,\mathrm{sign}(u_n)$, $\lambda < \frac{p-1}{p}$, comme une fonction test dans (5.1.2). Soit $r < p$, en utilisant (5.1.3) et l'inégalité de Hölder avec l'exposant $\frac{p}{r}$, on obtient

$$\alpha\int_\Omega |\nabla T_n(u_n)|^r \leq C\left((1+|T_n(u_n)|)^{\frac{(1-\lambda)pr}{p-r}}\right)^{1-\frac{r}{p}}.$$

On déduire que $\nabla T_n(u_n)$ est bornée dans $L^r(\Omega)$ si $\frac{(1-\lambda)pr}{p-r} \leq q$, c'est-à-dire, $\lambda \geq 1 - \frac{(p-r)q}{pr}$, donc $r < \frac{pq}{1+q}$. ∎

Corollaire 5.3 *Soit $f \in L^m(\Omega)$, $m \geq 1$. Supposons que u_n est une suite de solution du problème (5.1.2), alors il existe $u \in W_0^{1,r}(\Omega)$ $r < \frac{pqm}{1+qm}$, telle que $T_n(u_n) \to u$ p.p. dans Ω, à une sous-suite près. De plus si $m > 1$ et $q > \frac{1}{m-1}$, alors $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Preuve. Soient $r < \frac{pqm}{1+qm}$ et $f \in L^m(\Omega)$, $m \geq 1$. Soit u_n une suite de solution du problème (5.1.2), alors d'après le lemme 5.2, u_n est bornée dans $W_0^{1,r}(\Omega)$ qui est réflexif, donc on peut extraire une sous-suite de u_n (notée la même), telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,r}(\Omega)$, comme $W_0^{1,r}(\Omega)$ s'injecte compactement dans $L^r(\Omega)$, alors $u_n \to u$ dans $L^r(\Omega)$. La réciproque partielle de Lebesgue implique le résultat. De plus si $m > 1$ et $q > \frac{1}{m-1}$, alors $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

■

Théorème 5.1 *Soit $f \in L^m(\Omega)$, $m \geq 1$. Alors*

(1) *Si $m > 1$ et $q \geq \frac{1}{m-1}$, alors il existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solution au sens des distributions pour le problème (5.1.1).*

(2) *Si si $m > 1$ et $q < \frac{1}{m-1}$, alors il existe $u \in W_0^{1,r}(\Omega)$ solution au sens des distributions pour le problème (5.1.1), pour tout $r < \frac{pqm}{1+qm}$.*

(3) *Si $m = 1$, alors il existe $u \in W_0^{1,r}(\Omega)$ solution au sens des distributions pour le problème (5.1.1), pour tout $r < \frac{pq}{1+q}$.*

Démonstration. Soit u_n une suite de solution pour le problème (5.1.2), alors le corrolaire 5.3 implique que $T_n(u_n) \to u$ p.p. dans Ω, à une sous-suite près, où $u \in W_0^{1,r}(\Omega)$ $r < \frac{pqm}{1+qm}$. De plus si $m > 1$ et $q > \frac{1}{m-1}$, alors $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. On remarque que u_n vérifiant

$$-\operatorname{div}(a(x, u_n, \nabla u_n)) = g_n,$$

où $g_n = f_n - |T_n(u_n)|^{q-1}T_n(u_n)$. Puisque $g_n \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc le lemme 3.5 implique que $\nabla u_n \to \nabla u$ p.p. dans Ω. En utilisant la démonstration du théorème 3.3, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla\varphi = \int_\Omega a(x, u, \nabla u)\nabla\varphi \ , \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{5.1.4}$$

D'autre part, soit $t > 0$, en prenant $\operatorname{sign}(T_n(u_n))\chi_{\{|T_n(u_n)|>t\}}$, $t > 0$, comme une fonction test dans (5.1.2), on obtient

$$\int_{\{|T_n(u_n)|>t\}} |T_n(u_n)|^q \leq \int_{\{|T_n(u_n)|>t\}} |f|. \tag{5.1.5}$$

Maintenant, soit $E \subset \Omega$ mesurable, en utilisant (5.1.5), on obtient

$$\int_E |T_n(u_n)|^q \leq t^q|E| + \int_{E\cap\{|T_n(u_n)|>t\}} |T_n(u_n)|^q \leq t^q|E| + \int_{\{|T_n(u_n)|>t\}} |f|.$$

Lemme 5.1 implique que $T_n(u_n)$ est bornée dans $M^{qm}(\Omega)$. Par ailleur $f \in L^1(\Omega)$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $t_\varepsilon > 0$, tel que

$$\int_{\{|T_n(u_n)|>t_\varepsilon\}} |f| \leq \varepsilon.$$

D'où

$$\int_E |T_n(u_n)|^q \leq t_\varepsilon^q|E| + \varepsilon,$$

par suite, on obtient

$$\lim_{|E|\to+\infty} \int_E |T_n(u_n)|^q \leq \varepsilon \ , \qquad \forall\ \varepsilon > 0.$$

En faisant ε tend vers 0, on obtient

$$\lim_{|E|\to+\infty} \int_E |T_n(u_n)|^q = 0 \ , \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Théorème de Vitali implique que $|T_n(u_n)|^{q-1}T_n(u_n) \to |u|^{q-1}u$ dans $L^1(\Omega)$, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |T_n(u_n)|^{q-1}T_n(u_n)\varphi \to \int_\Omega |u|^{q-1}u\varphi \ , \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{5.1.6}$$

Or $f_n \to f$ dans $L^m(\Omega)$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n\varphi = \int_\Omega f\varphi \ , \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{5.1.7}$$

En combinant (5.1.4), (5.1.6) et (5.1.7), on obtient

$$\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla\varphi + \int_\Omega |u|^{q-1}u\varphi = \int_\Omega f\varphi \ , \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

D'où le résultat. ■

5.2 Cas d'un problème à coercivité dégénérée

Dans cette section, on va étudier le probléme :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |u|^{q-1}u = f \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.2.1}$$

où $f \in L^m(\Omega)$ $(m \geq 1)$, $q \geq 0$ et $a : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory vérifiant, pour presque partout $x \in \Omega$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$

$$\frac{\alpha}{(1+|s|)^\theta} \leq a(x,s) \leq \beta, \tag{5.2.2}$$

où $\alpha, \beta > 0$ et $\theta \geq 0$.

Dans ce cas, on obtient quelques résultats d'existence et de la régularité résumés par le tableau suivant :

$f \in L^1(\Omega)$	$q > \frac{(1+\theta)\tilde{p}}{p-\tilde{p}}$	$u \in W_0^{1,r}(\Omega) \cap L^q(\Omega), \quad r < \tilde{\theta}$ solustion au sens des distributions
	$0 < q \leq \frac{(1+\theta)\tilde{p}}{p-\tilde{p}}$	$\lvert u\rvert^q \in L^1(\Omega)$ et $\lvert\nabla u\rvert \in M^{\tilde{\theta}}(\Omega)$ solution entropique
$f \in L^m(\Omega)$ $m > 1$	$q \geq \frac{1+\theta}{m-1}$	$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^{qm}(\Omega)$ solustion au sens des distributions
	$\frac{(1+\theta)\tilde{p}}{pm-\tilde{p}} < q < \frac{1+\theta}{m-1}$	$u \in W_0^{1,r}(\Omega) \cap L^{qm}(\Omega), \quad r < m\tilde{\theta}$ solustion au sens des distributions
	$0 < q \leq \frac{(1+\theta)\tilde{p}}{pm-\tilde{p}}$	$\lvert u\rvert^{qm} \in L^1(\Omega)$ et $\lvert\nabla u\rvert \in M^{m\tilde{\theta}}(\Omega)$ solution entropique

où $\tilde{\theta} = \frac{pq}{q+1+\theta}$ et $\tilde{p} = \max(1, p-1)$.

On veut utiliser l'approximation pour montrer l'existence des solutions aux sens des distributions pour le problème (5.2.1). Pour cela, on considère le problème :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n) + |u_n|^{q-1}u_n = f_n \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u_n = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.2.3}$$

où $(f_n) \subset W^{-1,p'}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ telle que $f_n \to f$ dans $L^m(\Omega)$ $m \geq 1$, $||f_n||_{L^m(\Omega)} \leq ||f||_{L^m(\Omega)}$ et $|f_n| \leq |f|$ $p.p.$ dans Ω (on peut prendre $f_n = T_n(f)$).

Lemme 5.4 *Soit $f \in L^m(\Omega)$, $m \geq 1$. Alors le problème (5.2.3) admet une solution $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tel que*

$$\int_\Omega |u_n|^{qm} \leq \int_\Omega |f|^m, \tag{5.2.4}$$

et la solution u_n vérifiant

$$\int_\Omega a(x, T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\varphi + \int_\Omega |u_n|^{q-1}u_n\varphi = \int_\Omega f_n\varphi \ , \qquad \forall\ \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \tag{5.2.5}$$

Preuve. On considère le problème :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, T_n(u_{n_k}))|\nabla u_{n_k}|^{p-2}\nabla u_{n_k}) + T_k(|u_{n_k}|^{q-1}u_{n_k}) = f_n & \text{dans } \Omega, \\ u_{n_k} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.2.6}$$

L'opérateur $v_{n_k} \mapsto -\operatorname{div}(a(x, T_n(v_{n_k}))|\nabla v_{n_k}|^{p-2}\nabla v_{n_k}) + T_k(|v_{n_k}|^{q-1}v_{n_k})$ satisfait l'hypothèse du théorème 2.4, d'où, le problème (5.2.6) admet une solution $u_{n_k} \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tel que

$$\int_\Omega a(x, T_n(u_{n_k}))|\nabla u_{n_k}|^{p-2}\nabla u_{n_k} \nabla\varphi + \int_\Omega T_k(|u_{n_k}|^{q-1}u_{n_k})\varphi = \int_\Omega f_n\varphi \ , \qquad \forall\ \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{5.2.7}$$

En prenant u_{n_k} comme une fonction test dans (5.2.7) et en utilisant l'hypothèse (5.2.2), on obtient

$$C\int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^p \leq C_1 \int_\Omega |u_{n_k}|.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder avec l'exposant p et de Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u_{n_k}| &\leq C_2 \left(\int_\Omega |u_{n_k}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C_2 \left(\int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

et donc

$$\int_\Omega |\nabla u_{n_k}|^p \leq C_3 \ , \qquad \forall\ k > 0.$$

Par suite, il existe $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tel que

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \ \text{ dans } \ W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{et} \quad u_{n_k} \to u \ \text{ p.p. dans } \ \Omega. \tag{5.2.8}$$

Maintenant, en prenant $u_{n_k} - u_n$ comme une fonction test dans (5.2.7), on obtient

$$\int_\Omega a(x, T_n(u_{n_k}))|\nabla u_{n_k}|^{p-2}\nabla u_{n_k}\nabla(u_{n_k} - u_n) + \int_\Omega T_k(|u_{n_k}|^{q-1}u_{n_k})(u_{n_k} - u_n) = \int_\Omega f_n(u_{n_k} - u_n).$$

Par suite, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(x, T_n(u_{n_k}))[|\nabla u_{n_k}|^{p-2}\nabla u_{n_k} - |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n]\nabla(u_{n_k} - u_n) \\ = \int_\Omega f_n(u_{n_k} - u_n) - \int_\Omega T_k(|u_{n_k}|^{q-1}u_{n_k})(u_{n_k} - u_n) \\ + \int_\Omega a(x, T_n(u_{n_k}))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla(u_{n_k} - u_n).\end{aligned} \tag{5.2.9}$$

D'une part, en utilisant (5.2.8), on obtient

$$\int_\Omega f_n(u_{n_k} - u_n) \to 0 \quad \text{lorsque} \quad k \to +\infty. \tag{5.2.10}$$

D'autre part, en utilisant [8], on obtient

$$\int_{\{|u_{n_k}|>t\}} |T_k(|u_{n_k}|^{q-1}u_{n_k})| \leq \int_{\{|u_{n_k}|>t\}} |f_n|.$$

D'où, pour tout ensemble $E \subset \Omega$ mesurable, on obtient

$$\begin{aligned}\int_E |T_k(|u_{n_k}|^{q-1}u_{n_k})| &\leq t^q|E| + \int_{E\cap\{|u_{n_k}|>t\}} |T_k(|u_{n_k}|^{q-1}u_{n_k})| \\ &\leq t^q|E| + \int_{\{|u_{n_k}|>t\}} |f_n|.\end{aligned}$$

Puisque $f \in L^1(\Omega)$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $t_\varepsilon > 0$, tel que

$$\int_{\{|u_{n_k}|>t_\varepsilon\}} |f_n| \leq \varepsilon.$$

En faisant $\varepsilon, |E| \to 0$ et en utilisant le lemme de Vitali, on obtient

$$T_k(|u_{n_k}|^{q-1}u_{n_k}) \to |u_n|^{q-1}u_n \quad \text{dans} \quad L^1(\Omega), \tag{5.2.11}$$

en utilisant (5.2.8), on obtient

$$\int_\Omega T_k(|u_{n_k}|^{q-1}u_{n_k})(u_{n_k} - u_n) \to 0, \tag{5.2.12}$$

et

$$T_k(|u_{n_k}|^{q-1}u_{n_k}) \rightharpoonup |u_n|^{q-1}u_n \quad \text{dans} \quad L^{p'}(\Omega) \quad \text{lorsque} \quad k \to +\infty. \tag{5.2.13}$$

Par ailleurs, soit $E \subset \Omega$ un ensemble mesurable, on a

$$\int_E \Big|a(x, T_n(u_{n_k})))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\Big|^{p'} \to 0 \quad \text{lorsque} \quad |E| \to 0.$$

En constatant que $a(x, T_n(u_{n_k}))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \to a(x, T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n$ p.p. dans Ω lorsque $k \to +\infty$ et en utilisant le théorème de Vitali, on obtient, lorsque $k \to +\infty$

$$a(x, T_n(u_{n_k}))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \to a(x, T_n(u_{n_k}))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \quad \text{dans} \quad L^{p'}(\Omega). \tag{5.2.14}$$

En utilisant (5.2.8), on obtient

$$\int_\Omega a(x, T_n(u_{n_k}))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla(u_{n_k} - u_n) \to 0. \tag{5.2.15}$$

En combinant (5.2.9), (5.2.10), (5.2.12) et (5.2.15), on obtient

$$\int_\Omega a(x, T_n(u_{n_k}))[|\nabla u_{n_k}|^{p-2}\nabla u_{n_k} - |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n]\nabla(u_{n_k} - u_n) \to 0 \quad \text{lorsque} \quad k \to +\infty.$$

L'hypothèse (5.2.2) implique que

$$\int_\Omega (|\nabla u_{n_k}|^{p-2}\nabla u_{n_k} - |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n)\nabla(u_{n_k} - u_n) \to 0 \quad \text{lorsque} \quad k \to +\infty.$$

On utilise le fait que $\forall \eta, \xi \in \mathbb{R}^N$

$$(|\eta|^{p-2}\eta - |\xi|^{p-2}\xi)(\eta - \xi) \geq \begin{cases} (p-1)\dfrac{|\eta - \xi|^2}{(|\eta| + |\xi|)^{\frac{p-2}{p}}}, & \text{si } 1 < p < 2, \\ (\dfrac{1}{2})^p |\eta - \xi|^p, & \text{si } p \geq 2, \end{cases} \tag{5.2.16}$$

par conséquence, $\nabla u_{n_k} \to \nabla u_n$ dans $L^p(\Omega)$. D'où

$$\nabla u_{n_k} \to \nabla u_n \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega \quad \text{lorsque} \quad k \to +\infty.$$

Maintenant, on va montrer l'équation (5.2.5) par un passage à la limite dans (5.2.7) lorsque $k \to +\infty$.

Soit $E \subset \Omega$ un ensemble mesurable, on a

$$\int_E \Big|a(x, T_n(u_{n_k})))|\nabla u_{n_k}|^{p-2}\nabla u_{n_k}\Big|^{p'} \to 0 \quad \text{lorsque} \quad |E| \to 0, \quad \forall\ k > 0.$$

En constatant que $a(x,T_n(u_{n_k}))|\nabla u_{n_k}|^{p-2}\nabla u_{n_k} \to a(x,T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n$ p.p. dans Ω lorsque $k \to 0$ et en utilisant le théorème de Vitali, on obtient, lorsque $k \to +\infty$

$$a(x,T_n(u_{n_k}))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \to a(x,T_n(u_{n_k}))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \quad \text{dans} \quad L^{p'}(\Omega). \tag{5.2.17}$$

c'est-à-dire, pour $k \to +\infty$, on obtient

$$a(x,T_n(u_{n_k}))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \rightharpoonup a(x,T_n(u_{n_k}))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \quad \text{dans} \quad L^{p'}(\Omega). \tag{5.2.18}$$

En combinant (5.2.13) et (5.2.18), on obtient le résultat.

D'abord, on peut montrer (5.2.4), donc, on considère les cas $m > 1$ et $m = 1$.

Cas $m > 1$. En prenant $|u_n|^{q(m-1)}\,\mathrm{sign}(u_n)$ comme une fonction test dans (5.2.5) et en utilisant l'inégalité de Hölder avec l'exposant m, on obtient

$$\int_\Omega |u_n|^{qm} \le \int_\Omega |f|\,|u_n|^{q(m-1)} \le \left(\int_\Omega |f|^m\right)^{\frac{1}{m}} \left(\int_\Omega |u_n|^{qm}\right)^{1-\frac{1}{m}}.$$

Cas $m = 1$. En prenant $\frac{T_k(u_n)}{k}$, $k > 0$, comme une fonction test dans (5.2.5), on obtient

$$\int_\Omega |u_n|^{q-1}u_n\frac{T_k(u_n)}{k} \le \int_\Omega |f|.$$

En faisant k tend vers 0 et en utilisant le lemme de Fatou, on obtient le résultat.

■

Théorème 5.2 *Soit $f \in L^1(\Omega)$. Alors*

(1) *Si $q > \frac{(1+\theta)\tilde{p}}{p-\tilde{p}}$, alors le problème (5.2.1) admet une solution $u \in W_0^{1,r}(\Omega)\cap L^q(\Omega)$, $(r < \tilde{\theta})$ au sens des distributions.*

(2) *Si $0 < q \le \frac{(1+\theta)\tilde{p}}{p-\tilde{p}}$, alors le problème (5.2.1) admet une solution entropique u, tel que*

$$|u|^q \in L^1(\Omega) \quad et \quad |\nabla u| \in M^{\tilde{\theta}}(\Omega).$$

Démonstration. La démonstration procédé par deux étapes.

Étape 1. si $q > \frac{(1+\theta)\tilde{p}}{p-\tilde{p}}$, soit $\lambda > 0$, en prenant $[(1+|u_n|)^{1-\lambda}-1]\,\mathrm{sign}(u_n)$ comme une fonction test dans (5.2.3) et en utilisant l'hypothèse (5.2.2), on obtient

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{(1+|u_n|)^{\theta+\lambda}} \le \frac{||f||_{L^1(\Omega)}}{(\lambda-1)\alpha} = C. \tag{5.2.19}$$

Soit $r \in (p-1,p)$, en utilisant (5.2.19) et l'inégalité de Hölder avec l'exposant $\frac{p}{r}$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_n|^r &= \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^r}{(1+|u_n|)^{(\theta+\lambda)\frac{p}{r}}}(1+|u_n|)^{(\theta+\lambda)\frac{p}{r}} \\ &\leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{(1+|u_n|)^{(\theta+\lambda)\frac{p}{r}}}\right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_\Omega (1+|u_n|)^{(\theta+\lambda)\frac{r}{p-r}}\right)^{1-\frac{r}{p}} \\ &\leq C\left(\int_\Omega (1+|u_n|)^{(\theta+\lambda)\frac{r}{p-r}}\right)^{1-\frac{r}{p}},\end{aligned}$$

le lemme 5.4 implique que ∇u_n est bornée dans $L^r(\Omega)$, si

$$(\theta+\lambda)\frac{r}{p-r} \leq q \quad \text{i.e.} \quad r \leq \frac{pq}{q+\lambda+\theta} < \tilde{\theta}.$$

Par suite, en utilisant l'inégalité de Poincaré, on obtient que u_n est bornée dans $W_0^{1,r}(\Omega)$, donc il existe $u \in W_0^{1,r}(\Omega)$, tel que $u_n \to u$ p.p. dans Ω, à une sous-suite près. on remarque que u_n vérifiant

$$-\operatorname{div}(a(x,T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n) = g_n,$$

où $g_n = f_n - T_n(|u_n|^{q-1}u_n)$. Puisque $g_n \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $g_n \to f - |u|^{q-1}u$ dans $L^1(\Omega)$, donc le théorème 4.1 implique que $\nabla u_n \to \nabla u$ p.p. dans Ω. Puisque $|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n$ est bornée dans $L^{\frac{r}{p-1}}(\Omega)$, on obtient

$$|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \rightharpoonup |\nabla u|^{p-2}\nabla u \ \text{ dans } \ L^{\frac{r}{p-1}}(\Omega).$$

Le théorème de Vitali implique

$$a(x,T_n(u_n)) \to a(x,u) \ \text{ dans } \ L^{(\frac{r}{p-1})'}(\Omega).$$

D'où

$$a(x,T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\varphi \to a(x,u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \ \text{ dans } \ L^1(\Omega). \tag{5.2.20}$$

Maintenant, en utilisant la démonstration du théorème 5.1, on obtient

$$|u_n|^{q-1}u_n \to |u|^{q-1}u \ \text{ dans } \ L^1(\Omega). \tag{5.2.21}$$

En rappelant que $f_n \to f$ dans $L^1(\Omega)$ et en combinant (5.2.20) et (5.2.21), on obtient le résultat.

Étape 2. si $q \leq \frac{[1+\theta]\tilde{p}}{p-\tilde{p}}$, en prenant $T_k(u_n)$ comme une fonction teste dans (5.2.3) et en utilisant l'hypothèse (5.2.2), on obtient

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^p \leq \frac{1}{\alpha} k(1+k)^\theta. \tag{5.2.22}$$

Donc le lemme (4.9) implique l'existence d'une fonction $u \in \mathcal{T}^{1,p}(\Omega)$, tel que à une sous-suite près, on a

$$u_n \to u \text{ p.p. dans } \Omega \text{ et } T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u) \text{ dans } W_0^{1,p}(\Omega), \quad \forall\, k > 0. \tag{5.2.23}$$

En utilisant la semi-continuité inférieure de $||\cdot||_{L^q(\Omega)}$ et le lemme 5.4, on obtient que $u \in L^q(\Omega)$. D'où, en passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans (5.2.22), on obtient

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^p \leq Ck(1+k)^\theta.$$

En constatant que $\frac{pq}{1+\theta+q} = \tilde{\theta}$, donc le lemme (4.7) implique que $|\nabla u|\ M^{m\tilde{\theta}}(\Omega)$.

Maintenant, on va montrer que u est une solution entropique pour (5.2.1). Pour cela, soit $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, en prenant $T_k(u_n - \varphi)$ comme une fonction test dans (5.2.3), on obtient

$$\int_\Omega a(x, T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla T_k(u_n - \varphi) + \int_\Omega |u_n|^{q-1}u_n T_k(u_n - \varphi) = \int_\Omega f_n T_k(u_n - \varphi). \tag{5.2.24}$$

D'abord, on constate que $T_k(u_n) \to T_k(u)$ p.p. dans Ω. En prenant $T_k(u_n) - T_k(u)$ comme une fonction test dans (5.2.3), on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(x, T_n(T_k(u_n)))|\nabla T_k(u_n)|^{p-2}\nabla T_k(u_n)\nabla(T_k(u_n) - T_k(u)) \\ + \int_\Omega |u_n|^{q-1}u_n(T_k(u_n) - T_k(u)) = \int_\Omega f_n(T_k(u_n) - T_k(u)).\end{aligned}$$

Par suite, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(x, T_n(T_k(u_n)))[|\nabla T_k(u_n)|^{p-2}\nabla T_k(u_n) - |\nabla T_k(u)|^{p-2}\nabla T_k(u)]\nabla(T_k(u_n) - T_k(u)) \\ = \int_\Omega f_n(T_k(u_n) - T_k(u)) - \int_\Omega |u_n|^{q-1}u_n(T_k(u_n) - T_k(u)) \\ + \int_\Omega a(x, T_n(T_k(u_n)))|\nabla T_k(u)|^{p-2}\nabla T_k(u)\nabla(T_k(u_n) - T_k(u)).\end{aligned} \tag{5.2.25}$$

D'une part, sachant que $f_n \to f$ dans $L^1(\Omega)$ et en utilisant (5.2.23), on obtient

$$\int_\Omega f_n(T_k(u_n) - T_k(u)) \to 0, \tag{5.2.26}$$

et

$$\int_\Omega f_n T_k(u_n - \varphi) \to \int_\Omega f T_k(u - \varphi). \tag{5.2.27}$$

D'autre part, l'étape 1 implique que $|u_n|^{q-1}u_n \to |u|^{q-1}u$ dans $L^1(\Omega)$, en utilisant (5.2.23), on obtient

$$\int_\Omega |u_n|^{q-1}u_n(T_k(u_n) - T_k(u)) \to 0, \tag{5.2.28}$$

et

$$\int_\Omega |u_n|^{q-1}u_n(T_k(u_n) - T_k(u)) \to \int_\Omega |u|^{q-1}u T_k(u - \varphi). \tag{5.2.29}$$

Par ailleurs, soit $E \subset \Omega$ un ensemble mesurable, on a

$$\int_E \left|a(x, T_n(T_k(u_n)))|\nabla T_k(u)|^{p-2}\nabla T_k(u)\right|^{p'} \leq \beta^{p'}k^p|E| \to 0 \quad \text{lorsque} \quad |E| \to 0.$$

En constatant que

$$a(x, T_n(T_k(u_n)))|\nabla T_k(u)|^{p-2}\nabla T_k(u) \to a(x, T_n(T_k(u_n)))|\nabla T_k(u)|^{p-2}\nabla T_k(u)$$

p.p. dans Ω et en utilisant le théorème de Vitali, on obtient

$$\int_\Omega a(x, T_n(T_k(u_n)))|\nabla T_k(u)|^{p-2}\nabla T_k(u) \to \int_\Omega a(x, T_k(u))|\nabla T_k(u)|^{p-2}\nabla T_k(u)$$

dans $L^{p'}(\Omega)$. En utilisant (5.2.23), on obtient

$$\int_\Omega a(x, T_n(T_k(u_n)))|\nabla T_k(u)|^{p-2}\nabla T_k(u)\nabla(T_k(u_n) - T_k(u)) \to 0. \tag{5.2.30}$$

En combinant (5.2.25), (5.2.26), (5.2.28) et (5.2.30), on obtient que l'intégrale

$$\int_\Omega a(x, T_n(T_k(u_n)))[|\nabla T_k(u_n)|^{p-2}\nabla T_k(u_n) - |\nabla T_k(u)|^{p-2}\nabla T_k(u)]\nabla(T_k(u_n) - T_k(u))$$

est converge vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$. On utilise (5.2.16), on obtient

$$\nabla T_k(u_n) \to \nabla T_k(u) \quad \text{dans} \quad L^p(\Omega).$$

D'où

$$\nabla T_k(u_n) \to \nabla T_k(u) \quad \text{p.p. dans} \quad \Omega.$$

Soit $M = k + |\varphi|$. Alors

$$\int_\Omega a(x, T_n(u_n))|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla T_k(u_n - \varphi) = \int_\Omega a(x, T_n(u_n))|\nabla T_M(u_n)|^{p-2}\nabla T_M(u_n)\nabla T_k(u_n - \varphi)$$

Puisque $\nabla T_M(u_n) \to \nabla T_M(u)$ p.p. dans Ω, lemme de Fatou implique

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega a(x, T_n(u_n))|\nabla T_M(u_n)|^{p-2}\nabla T_M(u_n)\nabla T_k(u_n - \varphi) \geq \int_\Omega a(x,u)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla T_k(u - \varphi). \tag{5.2.31}$$

En combinant (5.2.24), (5.2.27), (5.2.29) et (5.2.31), on obtient le résultat.

■

Remarque 5.1 *Dans le théorème 5.2, la condition $q > \frac{(1+\theta)\tilde{p}}{p-\tilde{p}}$, implique*

$$p > \tilde{\theta} = \frac{pq}{q+1+\theta} > \max(1, p-1) = \tilde{p}.$$

Théorème 5.3 *Soit $f \in L^m(\Omega)$, $m > 1$. Alors*

(1) *Si $q \geq \frac{1+\theta}{m-1}$, alors le problème (5.2.1) admet une solution $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^{qm}(\Omega)$ au sens des distributions.*

(2) *Si $\frac{(1+\theta)\tilde{p}}{pm-\tilde{p}} < q < \frac{1+\theta}{m-1}$, alors le problème (5.2.1) admet une solution u au sens des distributions, tel que*

$$u \in W_0^{1,r}(\Omega) \cap L^{qm}(\Omega)\ , \qquad r < m\tilde{\theta}.$$

(3) *Si $0 < q \leq \frac{(1+\theta)\tilde{p}}{pm-\tilde{p}}$, alors le problème (5.2.1) admet une solution entropique u, tel que*

$$|u|^{qm} \in L^1(\Omega) \quad et \quad |\nabla u| \in M^{m\tilde{\theta}}(\Omega).$$

Démonstration. La démonstration procédé par trois étapes.

Étape 1. si $q > \frac{1+\theta}{m-1}$, en prenant $[(1+|u_n|)^{1+\theta}-1]\,\mathrm{sign}(u_n)$ comme une fonction test dans (5.2.3) et en utilisant l'hypothèse (5.2.2), on obtient

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^p \leq \frac{1}{(1+\theta)\alpha}\int_\Omega |f|\,|u_n|^{1+\theta}. \tag{5.2.32}$$

En utilisant (5.2.32) et l'inégalité de Hölder avec l'exposant m, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_n|^p &\leq \frac{1}{(1+\theta)\alpha}||f||_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega |u_n|^{(1+\theta)m'}\right)^{\frac{1}{m'}}\\ &\leq C\left(\int_\Omega |u_n|^{(1+\theta)m'}\right)^{\frac{1}{m'}},\end{aligned}$$

comme $q > \frac{1+\theta}{m-1}$, alors $(1+\theta)m' \leq qm$. En utilisant le lemme 5.4 et l'inégalité de Poincaré, on obtient que u_n est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, d'où il existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tel que $u_n \to u$ p.p. dans Ω, à une sous-suite près. en utilisant la semi-continuité inférieure de $||\cdot||_{L^{qm}(\Omega)}$ et le lemme 5.4, on obtient que $u \in L^{qm}(\Omega)$.

Maintenant, en utilisant l'étape 1 de la démonstration du théorème 5.2, on obtient le résultat.

Étape 2. si $\frac{(1+\theta)\tilde{p}}{pm-\tilde{p}} < q < \frac{1+\theta}{m-1}$, en prenant $[(1+|u_n|)^{q(m-1)}]\,\mathrm{sign}(u_n)$ comme une fonction test dans (5.2.3) et en utilisant l'hypothèse (5.2.2), le lemme 5.4 et l'inégalité de Hölder avec l'exposant m, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{(1+|u_n|)^{1+\theta-q(m-1)}} &\leq \frac{1}{q(m-1)\alpha}\int_\Omega |f|\,|u_n|^{q(m-1)}\\ &\leq \frac{1}{q(m-1)\alpha}||f||_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega |u_n|^{qm}\right)^{\frac{1}{m'}}\\ &\leq C.\end{aligned} \tag{5.2.33}$$

Soit $1 < r < p$, en utilisant (5.2.33) et l'inégalité de Hölder avec l'exposant $\frac{p}{r}$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_n|^r &= \int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^r}{(1+|u_n|)^{[1+\theta-q(m-1)]\frac{r}{p}}}(1+|u_n|)^{[1+\theta-q(m-1)]\frac{r}{p}}\\ &\leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{(1+|u_n|)^{1+\theta-q(m-1)}}\right)^{\frac{r}{p}}\left(\int_\Omega (1+|u_n|)^{[1+\theta-q(m-1)]\frac{r}{p-r}}\right)^{1-\frac{r}{p}}.\end{aligned}$$

par suite,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^r \leq C \left(\int_\Omega (1+|u_n|)^{[1+\theta-q(m-1)]\frac{r}{p-r}} \right)^{1-\frac{r}{p}}. \tag{5.2.34}$$

En constatant que $[1+\theta-q(m-1)]\frac{r}{p-r} \leq qm$ (i.e. $r < \frac{pqm}{q+1+\theta} = m\tilde{\theta}$) et en utilisant le lemme 5.4 et l'inégalité de Poincaré, on obtient que u_n est bornée dans $W_0^{1,r}(\Omega)$, d'où il existe $W_0^{1,r}(\Omega)$, tel que $u_n \to u$ p.p. dans Ω, à une sous-suite près. en utilisant la semi-continuité inférieure de $||\cdot||_{L^{qm}(\Omega)}$ et le lemme 5.4, on obtient que $u \in L^{qm}(\Omega)$. Maintenant, en utilisant l'étape 1 de la démonstration du théorème 5.2, on obtient le résultat.

Étape 3. Soit $0 < q \leq \frac{(1+\theta)\tilde{p}}{pm-\tilde{p}}$, en utilisant (5.2.34), on obtient

$$\int_{\Omega\cap\{|u_n|<k\}} |\nabla u_n|^r \leq C \left(\int_\Omega (1+|u_n|)^{[1+\theta-q(m-1)]\frac{r}{p-r}} \right)^{1-\frac{r}{p}},$$

par suite, on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^p &= \int_{\Omega\cap\{|u_n|<k\}} \frac{|\nabla u_n|^p}{(1+|u_n|)^{1+\theta-q(m-1)}} (1+|u_n|)^{1+\theta-q(m-1)} \\ &\leq C(1+k)^{1+\theta-q(m-1)}. \end{aligned} \tag{5.2.35}$$

Donc le lemme (4.9) implique l'existence d'une fonction $u \in \mathcal{T}^{1,p}(\Omega)$, tel que à une sous-suite près, on a

$$u_n \to u \text{ p.p. dans } \Omega \text{ et } T_k(u_n) \rightharpoonup T_k(u) \text{ dans } W_0^{1,p}(\Omega), \quad \forall\, k > 0.$$

D'où, en passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans (5.2.35), on obtient

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^p \leq C(1+k)^{1+\theta-q(m-1)}.$$

Puisque $q \leq \frac{1+\theta}{pm-1} < \frac{1+\theta}{m-1}$, on obtient que $1+\theta-q(m-1) > 0$. En constatant que $\frac{pqm}{1+\theta-q(m-1)+qm} = m\tilde{\theta}$, donc le lemme (4.7) implique que $|\nabla u| \in M^{m\tilde{\theta}}(\Omega)$. En utilisant l'étape 2 de la démonstration du théorème 5.2, on obtient le résultat.

■

Remarque 5.2 *Dans le lemme 5.2, la condition* $q > \frac{(1+\theta)\tilde{p}}{pm-\tilde{p}}$, *implique*

$$p > m\tilde{\theta} = \frac{pqm}{q+1+\theta} > \max(1, p-1) = \tilde{p}.$$

Conclusion

Je me suis intéressée dans ce mémoire de Master ; à l'étude des problèmes elliptiques non linéaires dans le cadre coercif et non coercif dans l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$, dont l'espace de Lebesgue L^p et l'espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ jouent un rôle très important. De plus ; l'existence et la rgularité des solutions d'un problème à coercivité dégénérée nécessite l'approximation du problème par une suite de problèmes à données régulières. Ce travail m'a ouvert un champ sur l'étude :

- La différence entre le cas coercif et à coercivité dégénérée.
- Les solutions entropiques.
- Les problème à termes d'ordre inférieur.

Plusieurs chercheurs s'intéressent à ce type de problémes. Nous espérons à l'avenir pouvoir continuer à travailler dans ce domaine.

Bibliographie

[1] R. A. Adams, Sobolev spaces. New York : Academic Press, (1975).

[2] A. Alvino, L. Boccardo, V. Ferone, L. Orsina, and G. Trombetti, Existence results for nonlinear elliptic equations with degenerate coercivity. Ann. Mat. Pura Appl. 182, (2003), 53-79.

[3] D. Blanchard et O. Guibé, Infinite valued solutions of non uniformly elliptic problems, Anal. Appl. (Singap.) 2, no. 3, (2004), 227-246.

[4] L. Boccardo, Some elliptic problems with degenerate coercivity. Adv. Nonlinear Stud. 6, n.1, (2006), 1–12.

[5] L. Boccardo, H. Brezis : Some remarks on a class of elliptic equations with degenerate coercivity ; Boll. Unione Mat. Ital. 6, (2003), 521–530.

[6] L. Boccardo, G. Croce, Elliptic partial differential equations. Existence and regularity of distributional solutions, De Gruyter Studies in Mathematics, 55, De Gruyter, Berlin, (2014).

[7] L. Boccardo, A. Dall'Aglio, L. Orsina : Existence and regularity results for some elliptic equations with degenerate coercivity ; Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 46 (1998), 51–81.

[8] L. Boccardo and T. Gallouët, Nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data, J. Funct. Anal. 87 (1), (1989), 149–169.

[9] L. Boccardo, F. Murat, and J. P. Puel, Existence of bounded solutions for nonlinear elliptic unilateral problems, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 152 (1), (1988), 183–196.

[10] H. Bresis, Analyse fonctionnelle : Théorie et appliccations, Masson, (1983).

[11] H. Bresis, functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equation, Springer, New York, (2011).

[12] G. Chen, Nonlinear elliptic equation with lower order term and degenerate coercivity, Math. Notes 93 (2013), 224-237.

[13] G. Croce, The regularizing effects of some lower order terms in an elliptic equation with degenerate coercivity ; Rendiconti di Matematica 27 (2007), 299–314.

[14] H. Le Dret, Equations aux dérivées partielles non linéaires, vol 72, Springer, (2013).

[15] J. Leray and J.-L. Lions, Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder. Bull. Soc. Math. Fr. 93, (1965), 97–107.

[16] J.-L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problemes aux limites non linéaires. Vol. 31. Paris : Dunod, (1969).

[17] K. Sbihi, Etude de quelques E.D.P. non linéaires dans L^1 avec des conditions générales sur le bord, Thesis, University of Strasbourg, France,2006.

[18] G. Stampacchia, Equation elliptique du second ordre à coefficients discontinus, seminaire j. Leray, n^o3 (1963-1964), 1-77.

[19] X. Zhang and Y. Q. Fu, Solutions for nonlinear elliptic equations with variable growth and degenerate coercivity, Ann. Mat. Pura Appl. 193, (2014), 133-161.