الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
UNIVERSITE Dr. YAHIA FARES DE MEDEA

Faculté des Sciences



Projet de fin d'étude
présenté en vue de l'obtention
du
Diplôme de Master en Recherche opérationnelle
par

TAIB Imane & LAIDANI Amel

Sujet

Sur la transformation binomial

Soutenu le 14 Juin 2017

Devant le jury composé de :

Mr. LAISSAOUI Diffalah, MCB à l'université Dr Yahia Farès de Médéa...Président
Mr. RAHMANI Mourad, MCA à l'USTHB .... Encadreur
Mme. GUETTAI Ghania, MAA à l'université Dr Yahia Farès de Médéa .. Examinatrice

2016-2017

Remerciements

Nous remercions tout d'abord, ALLAH le grand DIEU , qui nous a donné la force et le courage pour terminer nos études et élaborer ce modeste travail.

Nous tenons à remercier toutes les personnes sans lesquelles ces années d'étude n'auraient été que le pâle reflet de celles que nous avons passées.

Nos sincères remerciements à notre encadreur Mr RAHMANI Mourad qui a bien voulu nous encadrer, et de nous avoir encouragé le long de notre travail, aussi pour toute la documentation qu'il a mis à notre disposition.

Ainsi nous remercions toutes les personnes qui nous ont aidés dans la recherche de documentation.

Nos remerciements sont destinés également à tous nos enseignants de l'université Dr YAHIA-FARES de Médéa.

Table des matières

Remerciements i

Table des matières ii

Introduction **1**

1 Rappel et définitions **3**

1 Coefficient binomial 3

2 Fonctions génératrices 4

3 Les nombres de Stirling de seconde espèce 5

4 Les nombres de Bell 7

5 Les polynômes de Bell 8

6 Nombres et polynômes de Bell ordonnés 8

2 Matrices d'Euler-Seidel **10**

1 Les identités combinatoires 11

2 Fonctions génératrices 13

3 La matrice d'Euler-Seidel et les polynômes de Bell **19**

1 La matrice d'Euler-Seidel et les nombres de Stirling 19

2 La matrice d'Euler-Seidel et les nombres de Bell 20

3 La matrice d'Euler-Seidel et les polynômes de Bell 21

4 La matrice d'Euler-Seidel et les nombres de Fubini 22

5 Les polynômes de Bell ordonnés et la matrice d'Euler-Seidel 22

Conclusion **25**

Bibliographie **26**

Articles **27**

Introduction

Généralement on identifie les suites doubles avec les matrices infinies dont les entrées sont indicées par les couples d'entiers, on écrit $M_{n,m}$ pour le terme général de la matrice aussi bien que pour celui de la suite double $M(n,m)$ avec n et m dans $\mathbb{N}$. L'exemple le plus simple est la suite double des coefficients binomiaux $\binom{n}{m}$

$$\binom{n}{m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \ddots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & & & & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} & \ddots \\ \vdots & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

qui vérifie la relation de récurrence à trois termes

$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}.$$

Dans ce mémoire, nous nous proposons d'étudier la suite double $(a_{n,m})_{n,m\geq 0}$ connue dans la littérature par la transformation binomial ou tout simplement par la matrice d'Euler-Seidel et qui vérifie la récurrence suivantes :

$$a_{n+1,m} = a_{n,m} + a_{n,m+1}.$$

avec la suite initiale $a_{0,m}$.

Dans le premier chapitre nous présentons les éléments de base utilisés dans ce mémoire.

Le chapitre deux est consacré à une étude de l'article de Dominique Dumont intitulé : Matrices d'Euler-Seidel. Sémin. Lothar. Comb., 5 :b05c, 25, 1981. Nous détaillons minutieusement les preuves des nombreux résultats contenus dans cet article en y apportant des compléments et des précisons.

Le troisième chapitre porte sur une application de la transformation binomial sur des suites classique de la combinatoire énumérative, en particulier nous étudions l'article de Ayhan Dil et vali Kurt intitulé : Investigating geometric and exponential polynomials with Euler-Seidel matrices. J. Integer Seq. 14 (2011), no. 4, Article 11.4.6, 12 pp.

1

Rappel et définitions

Ce chapitre est consacré aux notations et définitions que nous avons besoin dans les chapitres qui suivent. Elles sont principalement extraites des ouvrages [1, 5]

1 Coefficient binomial

Le coefficient binomial est défini par

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ si } 0 \leq k \leq n \\ 0 \quad \text{si } k > n \end{cases}$$

est le nombre de parties de k éléments dans un ensemble de n éléments. On le note parfois C_n^k (lu combinaison de k parmi n).

Les coefficients binomiaux satisfont :

1. Formule de Pascal :
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1},$$
avec $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, pour tous $n \geq 0$.
2. Formule multiplicative :
$$\binom{n}{k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n-i+1}{i}.$$

3. Formule du pion
$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

4. -1Transformation
$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}.$$

5. $-\frac{1}{2}$Transformation
$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}}\binom{2k}{k}.$$

6. Transformation trinomiale
$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}.$$

7. Théorème binomial (Formule du binôme de Newton)
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

2 Fonctions génératrices

Les séries génératrices sont un outil algébrique qui permet de reformuler des problèmes de combinatoire afin de les transformer en des problèmes de manipulation d'expressions algébriques. En particulier, en combinatoire, il s'agit souvent de déterminer le nombre d'objets d'un certain type qui sont de taille n, ce qui donne lieu à une suite $(a_n)_n$ dont on cherche à déterminer le n-ième terme. La fonction génératrice associée à la suite a_n est la série (''somme infinie'') formelle

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{k \geq 0} a_k x^k.$$

En particulier, la série génératrice d'une suite finie est un polynôme.

Il y a deux points de vue pour voir une série : d'une part le point de vue algébrique et formel que nous utilisons ici, où x n'est qu'une variable sans aucun sens particulier, de sorte que finalement, une série génératrice, c'est juste une autre manière de noter une suite, de sorte à ce que les opérations que nous allons définir plus bas apparaissent naturellement. D'autre part, on peut voir une série du point de vue analytique, et regarder pour quelles valeurs réelles de x la série ''converge'', c'est-à-dire que la suite de ses sommes partielles

$$\sum_{k=0}^{n} a_n x^n$$

converge, ce qui est équivalent à dire que la suite des ''restes''

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_n x^n$$

tend vers 0.

Un exemple fondamental de série génératrice est la série génératrice de la suite constante égale à 1. D'une part, elle est clairement égale à

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} x^n$$

On l'appelle la série géométrique (car c'est la somme des termes d'une suite géométrique). On remarque alors que $A(x) - 1 = xA(x)$, donc $(1-x)A(x) = 1$. Cela signifie que la série formelle $A(x)$ a un inverse : la série formelle $1 - x$. On notera cela d'une manière un peu plus suggestive :

$$\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}. \tag{1.1}$$

où $\frac{1}{1-x}$ est ce qu'on appelle une fraction rationnelle. La formule de la somme des termes d'une suite géométrique nous dit que pour tout $N \geq 0$,

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^N = \frac{1 - x^{N+1}}{1-x}$$

Lorsque $x > 1$ ou $x \leq -1$, cette somme diverge quand N tend vers l'infini, donc nous ne pouvons pas en faire grand chose. Mais que se passe-t-il si $x \in]-1, 1[$? Alors x^{N+1} tend vers 0, donc le côté droit de la formule ci-dessus tend vers $\frac{1}{1-x}$. Nous venons de voir que la série $\sum_{n\geq 0} x^n$ converge sur l'intervalle $]-1, 1[$ et que sur cet intervalle la fonction $x \mapsto \sum_{n\geq 0} x^n$ coïncide avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$. On cherchera souvent à trouver ce genre de "formes closes" pour les séries génératrices.

On définit la somme et le produit de deux séries formelles respectivement par :

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right) + \left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n\right) = \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n)\, x^n$$

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} b_n x^n\right) = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n$$

3 Les nombres de Stirling de seconde espèce

Pour $1 \leq k \leq n$, on note $\left\{ {n \atop k} \right\}$ le nombre de partitions de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ en k blocs, c'est à dire en k sous ensembles non vides de $\{1, 2, \ldots, n\}$, disjoints deux à deux, de réunion $\{1, 2, \ldots, n\}$.

On peut aussi définir algébriquement ces nombres comme étant, les coordonnées du monôme x^n dans la base $(x)_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$ avec $(x)_0 = 1$

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (x)_k$$

Ou encore comme la différence d'ordre k en $x = 0$ du monôme x^n à un facteur $k!$ près. En d'autres termes

$$\left\{ n \atop k \right\} = \frac{1}{k!} \Delta^k \left(x^n \right) |_{x=0},$$

où Δ se réfère à l'opérateur de différence.

Propriétés :

1. **Formule explicite** : elle s'écrit

$$\left\{ n \atop k \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n,$$

   avec la convention $0^0 = 1$.

2. **Récurrence triangulaire** : la formule explicite donne

$$\left\{ n \atop 0 \right\} = \left\{ 0 \atop k \right\} = 1.$$

   La formule de récurrence triangulaire

$$\left\{ n \atop k \right\} = \left\{ n-1 \atop k-1 \right\} + k \left\{ n-1 \atop k \right\},$$

   permet de calculer les premières valeurs des nombres $\left\{ n \atop k \right\}$

$n \diagdown k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	1	1								
3	1	3	1							
4	1	7	6	1						
5	1	15	25	10	1					
6	1	31	90	65	15	1				
7	1	63	301	350	140	21	1			
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
9	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	
10	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1

   On a aussi une récurrence verticale donnée par

$$\left\{ n+1 \atop k \right\} = \sum_{j=0}^{n-k+1} k^j \left\{ n-j \atop k-j \right\}.$$

3. **Les fonctions génératrices** : les $\left\{ {n \atop k} \right\}$ ont pour fonction génératrice double

$$\sum_{n,k\geq 0} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{x^n}{n!} u^k = \exp\left(u\left(e^x - 1\right)\right),$$

pour fonction génératrice ordinaire

$$\sum_{n\geq k} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{n-k} = \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{(1-jx)}$$

et pour fonction génératrice exponentielle

$$\sum_{n\geq k} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{x^n}{n!} = \frac{\left(e^x - 1\right)^k}{k!}.$$

4 Les nombres de Bell

Les nombres

$$\mathcal{B}_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\},$$

s'appellent les nombres de Bell $\mathcal{B}_n$ est le nombre total de partition de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$. Les premières valeurs sont données dans le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\mathcal{B}_n$	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975	678570	4213597	27644437

Propriétés :

1. **Relation de récurrence**

$$\mathcal{B}_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \mathcal{B}_j.$$

2. **Fonction génératrice**

$$\sum_{n\geq 0} \mathcal{B}_n \frac{x^n}{n!} = \exp\left(e^x - 1\right).$$

3. **Formule de Dobinski**

$$\mathcal{B}_n = \frac{1}{e} \sum_{k\geq 0} \frac{k^n}{k!}.$$

5 Les polynômes de Bell

Les polynômes de Bell $\phi_n(x)$ sont définies par :

$$\phi_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\} x^k. \tag{1.2}$$

Les premiers polynômes de Bell sont :

$\phi_0(x) = 1,$
$\phi_1(x) = x,$
$\phi_2(x) = x + x^2,$
$\phi_3(x) = x + 3x^2 + x^3,$
$\phi_4(x) = x + 7x^2 + 6x^3 + x^4.$

(1.3)

La fonction génératrice exponentielle des polynômes de Bell est définie par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x) \frac{t^n}{n!} = e^{x\left(e^t - 1\right)}. \tag{1.4}$$

On remarque alors que les nombres de Bell

$$\mathcal{B}_n = \phi_n(1).$$

6 Nombres et polynômes de Bell ordonnés

Les polynômes de Bell ordonnés $F_n(x)$ (les polynômes de Fubini) sont définies par :

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\} k! x^k. \tag{1.5}$$

En particulier pour $x = 1$, dans (1.5) on obtient les nombres de Fubini F_n

$$F_n := F_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\} k!. \tag{1.6}$$

Le nombre de Bell ordonné, compte le nombre de partitions ordonnées de $\{1, 2, \cdots, n\}$. C'est aussi le nombre de façons de placer n boules indiscernables dans une ou plusieurs urnes indiscernables.

La fonction génératrice exponentielle des polynômes de Bell ordonnés est donnée par :

$$\frac{1}{1 - x\left(e^t - 1\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x) \frac{t^n}{n!}. \tag{1.7}$$

On donne dans la table suivante les premières valeurs des polynômes de Bell ordonnés :

$F_0(x) = 1,$
$F_1(x) = x,$
$F_2(x) = x + 2x^2,$
$F_3(x) = x + 6x^2 + 6x^3,$
$F_4(x) = x + 14x^2 + 36x^3 + 24x^4.$

et les premières valeurs des nombres de Bell ordonnés :

$$F_0 = 1,\ F_1 = 1,\ F_2 = 3,\ F_3 = 13,\ F_4 = 75.$$

La relation entre les polynômes de Fubibi et les polynômes de Bell est donnée par :

$$F_n(x) = \int_0^\infty \phi_n(x\lambda)\, e^{-\lambda} d\lambda. \tag{1.8}$$

2

Matrices d'Euler-Seidel

Soit $(a_m)_{m\geq 0}$ une suite de nombres. On appelle matrice d'Euler-Seidel associée à la suite (a_m), la suite double $(a_{n,m})_{n\geq 0, m\geq 0}$ donnée par

$$\begin{aligned} a_{0,m} &= a_m, \\ a_{n+1,m} &= a_{n,m} + a_{n,m+1},\ n \geq 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,m} & & a_{0,m+1} & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{n,m} & + & a_{n,m+1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \downarrow & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{n+1,m} & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

La suite $(a_{0,m})$, première ligne de la matrice, est la suite initiale. La suite $(a_{n,0})$, première colonne de la matrice, est la suite finale.

Inversement, étant donnée une suite finale $(a_n)_{n\geq 0}$ la matrice d'Euler-Seidel associé à (a_n), la suite $(a_{n,m})$ donnée par

$$\begin{aligned} a_{n,0} &= a_n \\ a_{n,m+1} &= a_{n+1,m} - a_{n,m},\ m \geq 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{pmatrix} a_{0,0} & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,0} & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,0} & \cdot & \cdot & a_{n,m} & \longrightarrow & a_{n,m+1} & \cdot & \cdot \\ & & & \uparrow - & & & & \\ a_{n+1,0} & \cdot & \cdot & a_{n+1,m} & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

1 Les identités combinatoires

Théorème 2.1. *Etant donnée une suite initiale $(a_m)_{m\geq 0}$, définissant la suite $(a_{n,m})_{n\geq 0,m\geq 0}$ par (2.1), alors :*

$$a_{n,m} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{0,m+k}.$$

Démonstration. Montrons cette propriété par récurrence sur n. Initialisation. Pour $n = 0$, la propriété est vraie. Montrons que si la propriété est vraie pour n, alors elle reste vraie pour $n+1$. On a

$$\begin{aligned} a_{n,m} + a_{n,m+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{0,m+k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{0,m+k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{0,m+k} + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a_{0,m+j} \\ &= a_{0,m} = +\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_{0,m+k} + a_{0,m+n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a_{0,m+k} \\ &= a_{0,m} + a_{0,m+n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a_{0,m+k} \\ &= a_{0,m} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a_{0,m+k} + a_{0,m+n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a_{0,m+k}. \\ &= a_{n+1,m} \end{aligned}$$

□

Théorème 2.2. *Etant donnée une suite finale* $(a_n)_{m\geq 0}$*, définissant la suite* $(a_{n,m})_{n\geq 0,m\geq 0}$ *par (2.2), alors :*

$$a_{n,m} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} a_{n+k,0}.$$

Démonstration. Montrons cette propriété par récurrence sur m. Initialisation. Pour $m = 0$, la propriété est vraie. Montrons que si la propriété est vraie pour m, alors elle reste vraie pour $m+1$. On a

$$\begin{aligned}
a_{n+1,m} - a_{n,m} &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} a_{n+k+1,0} - \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} a_{n+k,0} \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{m-k+1} \binom{m}{k-1} a_{n+k,0} - \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} a_{n+k,0} \\
&= a_{n+m+1,0} + \sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k+1} \binom{m}{k-1} a_{n+k,0} - \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} a_{n+k,0} - (-1)^m a_{n,0} \\
&= a_{n+m+1,0} - (-1)^m a_{n,0} + \sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k+1} \left[\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} \right] a_{n+k,0} \\
&= (-1)^{m-1} a_{n,0} + \sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k+1} \binom{m+1}{k} a_{n+k,0} + a_{n+m+1,0} \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{m-k+1} \binom{m+1}{k} a_{n+k,0} \\
&= a_{n,m+1}.
\end{aligned}$$

□

Corollaire 2.3. *Pour tous* $n, m \geq 0$*, on a*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{0,m+k} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} a_{n+k,0}.$$

Exemple 2.4 (Matrice de Leibniz)**.** *Prenons la suite initiale* $a_{0,m} = \frac{(-1)^m}{m+1}$ *dans (2.1), on obtient*

$$a_{n,m} = \begin{pmatrix}
1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\
\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{20} & & \\
\frac{1}{3} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{30} & & & \\
\frac{1}{4} & -\frac{1}{20} & & & & \\
\frac{1}{5} & & & & & \\
\vdots & & & & &
\end{pmatrix}$$

d'où la suite finale $a_{n,0} = \frac{1}{n+1}$. *D'après le Corollaire 2.3, on a*

$$a_{n,m} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{m+k}}{m+k+1} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} \frac{1}{n+k+1}.$$

Et plus généralement, on montre que

$$a_{n,m} = \frac{(-1)^n \binom{n+m}{m}^{-1}}{n+m+1}.$$

Exemple 2.5. *Prenons la suite finale*

$$a_{n,0} = \frac{n!}{x\,(x+1)\cdots(x+n)}$$

dans (2.2)

$$a_{n,m} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -\frac{1}{x+1} & \frac{1}{x+2} & -\frac{1}{x+3} & \cdots \\ \frac{1}{x(x+1)} & -\frac{1}{(x+1)(x+2)} & \frac{1}{(x+2)(x+3)} & & \\ \frac{2}{x(x+1)(x+2)} & -\frac{2}{(x+1)(x+2)(x+3)} & \frac{2}{(x+2)(x+3)(x+4)} & & \\ \frac{6}{x(x+1)(x+2)(x+3)} & -\frac{6}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} & & & \\ \frac{24}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} & & & & \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

on obtient la suite initiale $a_{0,m} = \frac{(-1)^m}{x+m}$. *D'ou*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{m+k}}{x+m+k} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} \frac{(n+k)!}{x\,(x+1)\cdots(x+n+k)}.$$

2 Fonctions génératrices

Théorème 2.6. *Soit*

$$A_r(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{0,k+r} z^k.$$

La fonction génératrice ordinaire de la suite $a_{0,m+r}$ *. Alors la fonction génératrice ordinaire de la suite* $a_{n,r}$ *de (2.1)*

$$\overline{A}_r(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,r} z^n$$

est donnée par

$$\overline{A}_r(z) = \frac{1}{1-z} A_r\left(\frac{z}{1-z}\right). \tag{2.3}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\overline{A}_r(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,r} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{0,r+k} \right) z^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{0,r+k} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} z^n \right).\end{aligned}$$

Comme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} z^n = \frac{z^k}{(1-z)^{k+1}}$$

on obtient

$$\begin{aligned}\overline{A}_r(z) &= \frac{1}{1-z} \sum_{k=0}^{\infty} a_{0,r+k} \left(\frac{z}{1-z} \right)^k \\ &= \frac{1}{1-z} A_r \left(\frac{z}{1-z} \right).\end{aligned}$$

□

Exemple 2.7 (Matrice d'Euler). *Prenons la suite initiale* $a_{0,m} = \frac{(-1)^m}{2m+1}$ *dans (2.1)*

$$a_{n,m} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{9} & \cdots \\ \frac{2}{1.3} & -\frac{2}{3.5} & \frac{2}{5.7} & -\frac{2}{7.9} & & \\ \frac{2.4}{1.3.5} & -\frac{2.4}{3.5.7} & \frac{2.4}{5.7.9} & & & \\ \frac{2.4.6}{1.3.5.7} & -\frac{2.4.6}{3.5.7.9} & & & & \\ \frac{2.4.6.8}{1.3.5.7.9} & & & & & \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix}$$

On constate rapidement que la suite finale

$$a_{n,0} = \frac{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n+1)}.$$

Comme application, on montre que le développement en série de la fonction $x \longmapsto \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ *est*

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n \geq 0} \frac{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n+1)} x^{2n}.$$

En effet, la fonction généatrice ordinaire de la suite initiale est

$$\begin{aligned} A_0(z) &= \sum_{m\geq 0} \frac{(-1)^m}{2m+1} z^m \\ &= \frac{\arctan\sqrt{z}}{\sqrt{z}}. \end{aligned}$$

D'après le théorème 2.6, on a

$$\begin{aligned} \overline{A}_0(z) &= \sum_{n\geq 0} a_{n,0} z^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{z(1-z)}} \arctan\sqrt{\frac{z}{1-z}}. \end{aligned}$$

En posant $z = x^2$, et en observant que

$$\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x,$$

on obtient le résultat.

Théorème 2.8. *Soit*

$$\mathcal{A}_r(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{0,k+r} \frac{z^k}{k!}.$$

La fonction génératrice exponentielle de la suite $a_{0,m+r}$. Alors la fonction génératrice exponentielle de la suite $a_{n,r}$ de (2.1)

$$\widetilde{\mathcal{A}}_r(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,r} \frac{z^n}{n!}$$

est donnée par

$$\widetilde{\mathcal{A}}_r(z) = e^z \mathcal{A}_r(z). \tag{2.4}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{A}}_r(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,r} \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{0,r+k} \right) \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{0,r+k} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{z^n}{n!} \right). \end{aligned}$$

Comme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{z^n}{n!} = e^z \frac{z^k}{k!}$$

on obtien

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{A}}_r(z) &= e^z \sum_{k=0}^{\infty} a_{0,r+k} \frac{z^k}{k!} \\ &= e^z \mathcal{A}_r(z).\end{aligned}$$

□

Théorème 2.9. *Soit*

$$\overline{A}_r(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{r+k,0} z^k.$$

La fonction génératrice ordinaire de la suite $a_{n+r,0}$ *. Alors la fonction génératrice ordinaire de la suite* $a_{r,m}$ *de (2.2)*

$$A_r(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{r,m} z^m,$$

est donnée par

$$A_r(z) = \frac{1}{1+z} \overline{A}_r\left(\frac{z}{1+z}\right). \tag{2.5}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}A_r(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_{r,m} z^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} a_{r+k,0} \right) z^m \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} z^m \right) a_{r+k,0}.\end{aligned}$$

Comme

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} z^m = \frac{z^k}{(1+z)^{k+1}},$$

on obtient

$$\begin{aligned}A_r(z) &= \frac{1}{1+z} \sum_{k=0}^{\infty} a_{r+k,0} \left(\frac{z}{1+z}\right)^k \\ &= \frac{1}{1+z} \overline{A}_r\left(\frac{z}{1+z}\right).\end{aligned}$$

□

Théorème 2.10. *Soit*

$$\widetilde{\mathcal{A}}_r(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{r+k,0} \frac{z^k}{k!}.$$

La fonction génératrice exponentielle de la suite $a_{n+r,0}$. Alors la fonction génératrice exponentielle de la suite $a_{r,m}$ de (2.2)

$$\mathcal{A}_r(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{r,m} \frac{z^m}{m!},$$

est donnée par

$$\mathcal{A}_r(z) = e^{-z} \widetilde{\mathcal{A}}_r(z). \tag{2.6}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_r(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_{r,m} \frac{z^m}{m!} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} a_{r+k,0} \right) \frac{z^m}{m!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} \frac{z^m}{m!} \right) a_{r+k,0}.
\end{aligned}$$

Comme

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} \frac{z^m}{m!} = e^{-z} \frac{z^k}{k!},$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_r(z) &= e^{-z} \sum_{k=0}^{\infty} a_{r+k,0} \frac{z^k}{k!} \\
&= e^{-z} \widetilde{\mathcal{A}}_r(z).
\end{aligned}$$

□

Exemple 2.11. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la suite de Fibonacci F_n par la récurrence linéaire*

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \text{ et } F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

La série génératrice exponentielle de la suite de Fibonacci

$$\sum_{n \geq 0} F_n \frac{z^n}{n!} = \frac{e^{az} - e^{bz}}{a - b}$$

avec $a + b = 1$ et $ab = -1$.Si la fonction généatrice exponentielle de la suite finale est

$$\widetilde{\mathcal{A}}_0(z) = \sum_{n \geq 0} F_n \frac{z^n}{n!}$$

alors d'après le théorème (2.10) la fonction généatrice exponentielle de la suite initiale est donnée par

$$\begin{aligned} A_0(z) &= \sum_{m\geq 0} a_{0,m}\frac{z^m}{m!} \\ &= e^{-z}\widetilde{\mathcal{A}}_0(z) \\ &= e^{-z}\frac{e^{az}-e^{bz}}{a-b} \\ &= \frac{e^{(a-1)z}-e^{(b-1)z}}{a-b} \\ &= \frac{e^{-bz}-e^{-az}}{a-b} \\ &= -\widetilde{\mathcal{A}}_0(-z) \end{aligned}$$

d'où la suite initiale est

$$a_{0,m} = (-1)^{m+1} F_m$$

avec

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_{m+k} = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}F_{n+k}$$

$$a_{n,m} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & -3 & 5 & -8 & \cdots \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & -3 & 5 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & -3 & \cdots \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & \cdots \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & \cdots \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\ 8 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 13 & 8 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Ceci permet de définir les nombres de Fibonacci pour des valeurs négatives de n par :

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$$

3

La matrice d'Euler-Seidel et les polynômes de Bell

Nous nous intéressons, dans ce chapitre, à l'application de l'algorithme d'Euler-Seidel sur les polynômes de Bell et les polynômes de Bell ordonnés.

1 La matrice d'Euler-Seidel et les nombres de Stirling

On construit la matrice d'Euler-Seidel en prenant la suite initiale $a_{0,m} = \left\{ {m \atop i} \right\}$ avec i un entier fixe. On obtient la fonction génératrice exponentielle de la première ligne

$$\mathcal{A}_0(t) = \frac{\left(e^t - 1\right)^i}{i!}.$$

D'ou

$$a_{n,0} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\{ {k \atop i} \right\}. \tag{3.1}$$

D'après le théorème (2.10) la fonction généatrice exponentielle de la suite finale est donnée par

$$\widetilde{\mathcal{A}}_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,0} \frac{t^n}{n!} = e^t \frac{\left(e^t - 1\right)^i}{i!}.$$

On constate que

$$\widetilde{\mathcal{A}}_0(t) = \frac{d}{dt}\frac{\left(e^t-1\right)^{i+1}}{(i+1)!}. \tag{3.2}$$

d'ou

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left\{ k \atop i \right\} = \left\{ n+1 \atop i+1 \right\}. \tag{3.3}$$

On a aussi d'après le Corollaire 2.3,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left\{ m+k \atop i \right\} = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}\left\{ n+k+1 \atop i+1 \right\}.$$

2 La matrice d'Euler-Seidel et les nombres de Bell

On construit la matrice d'Euler-Seidel en prenant la suite initiale $(a_{0,m})_{m\geq 0} = (\mathcal{B}_m)_{m\geq 0}$. On obtient

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 & 15 & 52 & \cdots \\ 2 & 3 & 7 & 20 & \cdots & & \\ 5 & 10 & 27 & \cdots & & & \\ 15 & 37 & \cdots & & & & \\ 52 & \cdots & & & & & \\ \cdots & & & & & & \end{bmatrix}$$

En remarque que $a_{n,0} = \mathcal{B}_{n+1}$. La fonction génératrice exponentielle de la suite initiale est $(a_{0,m})_{m\geq 0} = (\mathcal{B}_n)_{m\geq 0}$. Alors

$$\mathcal{A}_0(t) = e^{e^t-1}.$$

le théorème 2.10 permi d'écrire

$$\widetilde{\mathcal{A}}(t) = e^{e^t+t-1} = \frac{d}{dt}\left(e^{e^t-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{B}_{n+1}\frac{t^n}{n!}. \tag{3.4}$$

d'ou

$$a_{n,0} = \mathcal{B}_{n+1}. \tag{3.5}$$

Proposition 3.1. *On a*

$$\mathcal{B}_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathcal{B}_k \tag{3.6}$$

et

$$\mathcal{B}_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\mathcal{B}_{k+1}. \tag{3.7}$$

3 La matrice d'Euler-Seidel et les polynômes de Bell

Lorsqu'on pose $a_{0,m} = \phi_m(x)$ dans (2.1), alors,

$$\begin{bmatrix} 1 & x & x+x^2 & x+3x^2+x^3 & \cdots \\ 1+x & 2x+x^2 & 2x+4x^2+x^3 & \cdots & \\ 1+3x+x^2 & 4x+5x^2+x^3 & \cdots & & \\ 1+7x+6x^2+x^3 & \cdots & & & \\ \cdots & & & & \end{bmatrix}$$

La suite finale de cette matrice est $xa_{n,0} = \phi_{n+1}(x)$. En effet,

$$\widetilde{\mathcal{A}}_0(t) = e^t e^{x\left(e^t-1\right)} = \frac{1}{x}\frac{d}{dt}e^{x\left(e^t-1\right)}. \tag{3.8}$$

Par comparaison des coefficients dans (3.8) donne le résultat.

$$xa_{0,n} = \phi_{n+1}(x) \tag{3.9}$$

Proposition 3.2. *On a*

$$\phi_{n+1}(x) = x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\phi_k(x) \tag{3.10}$$

et

$$x\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\phi_{k+1}(x). \tag{3.11}$$

Proposition 3.3. *On a*

$$\phi_{n+1}(x) = x\left(\phi_n(x) + \phi_n'(x)\right) \tag{3.12}$$

Démonstration. Par la dérivation des deux côtés de l'équation (1.4) par rapport à x on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n'(x)\frac{t^n}{n!} = e^t e^{x\left(e^t-1\right)} - e^{x\left(e^t-1\right)}$$

de plus (3.8) donne

$$\sum_{n=0}^{\infty}\phi_n'(x)\frac{t^n}{n!} = \widetilde{\mathcal{A}}_0(t) - \mathcal{A}_0(t).$$

d'ou le résultat par comparaison des coefficients. □

Corollaire 3.4. *On a*

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-1)^k\phi_k(x) = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k-1}\phi_k'(x). \tag{3.13}$$

Démonstration. Par (3.12) dans l'équation (3.11), on obtient (3.13). □

4 La matrice d'Euler-Seidel et les nombres de Fubini

Lorsqu'on pose $(a_{0,m})_{m\geq 0} = (F_m)_{m\geq 0}$ dans (2.1), alors on obtient

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 13 & 75 & \cdots \\ 2 & 3 & 7 & 20 & \cdots & \\ 6 & 10 & 27 & \cdots & & \\ 26 & 37 & \cdots & & & \\ 150 & \cdots & & & & \\ \cdots & & & & & \end{bmatrix}$$

Nous observons que $a_{n,0} = 2F_n$, $n \geq 1$. En effet, le théorème 2.10 permi d'écrire

$$\widetilde{\mathcal{A}}_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,0}\frac{t^n}{n!} = \frac{e^t}{2-e^t} = 2\frac{1}{2-e^t} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} 2F_n\frac{t^n}{n!} + 1.$$

Par comparaison des coefficients on obtient $a_{n,0} = 2F_n$ avec $n \geq 1$.

Finalement on a :

Proposition 3.5.

$$2F_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k \text{ ou } F_n = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}F_k \tag{3.14}$$

et

$$F_n = 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}F_k. \tag{3.15}$$

5 Les polynômes de Bell ordonnés et la matrice d'Euler-Seidel

On construit la matrice d'Euler-Seidel en prenant la suite initiale $(a_{0,m})_{m\geq 0} = (F_m(x))_{m\geq 0}$. Le théorème 2.10 permi d'écrire

$$\mathcal{A}_0(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{1-x(e^t-1)}$$

et

$$\widetilde{\mathcal{A}}_0(t,x) = \frac{e^t}{1-x(e^t-1)}. \tag{3.16}$$

La dérivation par rapport à t donne

$$\widetilde{\mathcal{A}}_0(t,x) = \left[\frac{1}{x} - (e^t-1)\right]\frac{d}{dt}\mathcal{A}_0(t,x)$$

finalement

$$\widetilde{\mathcal{A}}_0(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{F_{n+1}(x)}{x} + F_{n+1}(x) - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{k+1}(x) \right] \frac{t^n}{n!}.$$

Par comparaison des coefficients on obtient

$$a_{n,0} = \frac{F_{n+1}(x)}{x} - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} F_k(x). \tag{3.17}$$

Le théorème suivant donne la relation de récurrence pour les polynômes de Bell ordonnés.

Proposition 3.6. *$F_n(x)$ polynômes de Bell ordonnés satisfont la relation de récurrence suivante :*

$$F_n(x) = x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} F_k(x). \tag{3.18}$$

Remarque 3.7. *En particulier, on obtient (3.14) lorsque $x = 1$ dans (3.18).*

Corollaire 3.8.

$$F_{n+1}(x) = \frac{x}{1+x} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[F_k(x) + F_{k+1}(x) \right]. \tag{3.19}$$

Maintenant, nous donnons deux autres relations de récurrences pour les polynômes de Bell ordonnés.

Proposition 3.9. *On a*

$$F_{n+1}(x) = x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[F_k(x) + xF_k'(x) \right]. \tag{3.20}$$

Démonstration. D'après (1.8) et (3.10) on constate que

$$F_{n+1}(x) = x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^{\infty} \phi_k(x\lambda)\, \lambda e^{-\lambda} d\lambda$$

d'ou

$$F_{n+1}(x) = x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{r=0}^{k} \left\{ {k \atop r} \right\} (r+1)! x^r.$$

Cela peut aussi bien être écrite au moyen des dérivés comme

$$F_{n+1}(x) = x \frac{d}{dx} x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k(x)$$

□

On a aussi ce résultat

Corollaire 3.10.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x F_k'(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} F_k(x) \tag{3.21}$$

Démonstration. La proposition (3.6) et la proposition (3.9) donne (3.21) . □

Conclusion

Le sujet de notre travail a été consacré a l'étude de la transformation binomial par une approche matricielle.

Tout au long de ce mémoire, nous avons énonces dans le chapitre deux quelques résultats sur les matrices d'Euler-Seidel.

Dans le troisième chapitre, nous avons donné des applications de l'algorithme d'Euler-Seidel aux nombres et polynômes de Bell.

Différentes étapes de travail ont été nécessaires pour chaque chapitre. Tout d'abord, un travail de documentation c'est-à-dire de lecture et d'étude d'articles, de notes de cours, ensuite un travail de programmation avec le logiciel Maple et enfin l'expérimentation et la démonstration des formules.

Bibliographie

[1] L. Comtet. Advanced combinatorics. The art of finite and infinite expansions. Translated from the French by J. W. Nienhuys. Rev. and enlarged ed. Dordrecht, Holland - Boston, U.S.A. : D. Reidel Publishing Company. X, 343 p. Dfl. 65.00 (1974)., 1974.

[2] A. Dil and V. Kurt. Investigating geometric and exponential polynomials with Euler-Seidel matrices. *J. Integer Seq.*, 14(4) :article 11.4.6, 12, 2011.

[3] D. Dumont. Matrices d'Euler-Seidel. *Sémin. Lothar. Comb.*, 5 :b05c, 25, 1981.

[4] H. W. Gould. Series transformations for finding recurrences for sequences. *Fibonacci Quart.*, 28(2) :166–171, 1990.

[5] J. Quaintance and H. W. Gould. *Combinatorial identities for Stirling numbers*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2016. The unpublished notes of H. W. Gould, With a foreword by George E. Andrews.

Articles

Séminaire Lotharingien de Combinatoire, B05c (1981)

MATRICES D'EULER-SEIDEL

PAR

DOMINIQUE DUMONT

1. Introduction. — Cet article est un recueil de tables de calculs aux différences finies. Ce que nous nommons matrice d'Euler-Seidel, c'est ce que des mathématiciens d'autrefois comme Leibniz, Euler ou Seidel, construisaient lorsque partant d'une suite de nombres, ils considéraient la suite des différences entre termes consécutifs, notant Δ l'opération effectuée et itéraient le processus [18].

Nous exposons d'abord les deux théorèmes d'Euler et de Seidel, un peu oubliés quoique très élémentaires, puis les appliquons aux exemples qui nous ont paru les plus intéressants. Les exemples intéressants sont ceux où la matrice d'Euler-Seidel permet un calcul rapide (extrêmement facile à programmer sur ordinateur) de la suite d'entiers initiale, qui par ailleurs a une interprétation combinatoire. Pour chaque exemple nous donnons la table des premières valeurs, selon un principe cher aux praticiens des dénombrements.

2. Définition et propriétés élémentaires.

Définition. — Soit $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ une suite d'éléments d'un anneau commutatif A (en fait ici des nombres, des polynômes ou des fractions rationnelles). On appelle *matrice d'Euler-Seidel* associée à (a_n) la suite double (a_n^k) $(n \geq 0, k \geq 0)$ donnée par la récurrence

$$\begin{aligned} a_n^0 &= a_n \qquad\qquad (n \geq 0), \\ a_n^k &= a_n^{k-1} + a_{n+1}^{k-1} \quad (k \geq 1, n \geq 0). \end{aligned} \tag{1}$$

La suite (a_n^0) première ligne de la matrice, est la suite initiale. La suite (a_0^n), première colonne de la matrice, est la suite finale. Il résulte immédiatement de (1) l'identité

$$a_n^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a_{n+i}^0 \tag{2}$$

En particulier, on passe de la suite initiale à la suite finale et inversement par

$$a_0^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i^0, \tag{3}$$

$$a_n^0 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} a_0^i. \tag{4}$$

Proposition 1 (Euler [11]). — *Soit $a(t) = \Sigma a_n^0 t^n$ la fonction génératrice ordinaire de la suite initiale. Alors la fonction génératrice ordinaire $\overline{a}(t)$ de la suite finale est donnée par*

$$\overline{a}(t) = \sum_{n\geq 0} a_0^n t^n = \frac{1}{1-t} a\Big(\frac{1}{1-t}\Big). \tag{5}$$

En effet, on sait que

$$\frac{1}{(1-t)^{n+1}} = \sum_{k\geq 0} \binom{n+k}{n} t^k. \tag{6}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-t} a\Big(\frac{t}{1-t}\Big) &= \sum_{n\geq 0} a_n^0 \frac{t^n}{(1-t)^{n+1}} \\
&= \sum_{n,k\geq 0} \binom{n+k}{n} a_n^0 t^{n+k} \\
&= \sum_{m\geq 0} t^m \Big(\sum_{n+k=m} \binom{m}{n} a_n^0 \Big) \\
&= \sum_{m\geq 0} a_0^m t^m \\
&= \overline{a}(t). \quad \square
\end{aligned}$$

Proposition 2 (Seidel [28]). — *Soit $A(t) = \sum_{n\geq 0} a_n^0 t^n/n!$ la fonction génératrice exponentielle de la suite initiale. Alors la fonction génératrice exponentielle de la suite finale est donnée par*

$$\overline{A}(t) = \sum_{n\geq 0} a_0^n \frac{t^n}{n!} = e^t A(t). \tag{7}$$

En effet, d'après (3),

$$\begin{aligned}\overline{A}(t) &= \sum_{n\geq 0}\Big(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a_i^0\Big)\frac{t^n}{n!}\\ &= \sum_{i,j\geq 0}\frac{a_i^0}{i!\,j!}t^{i+j} = e^t A(t).\end{aligned}$$

.

1) On passe d'une proposition à l'autre par transformation de Laplace formelle.

2) On montre aisément [8] que la fonction génératrice exponentielle double de la matrice vaut

$$\sum_{n,k\geq 0} a_n^k \frac{t^n}{n!}\frac{u^k}{k!} = e^u A(t+u).$$

3. Matrices d'Euler-Seidel de nombres (exemples). — Nous commencerons par traiter trois exemples où les nombres sont fractionnaires, puis nous aborderons les exemples avec des entiers qui ont des interprétations combinatoires.

3.1. — Prenons $a_n^0 = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ $(n \geq 0)$. Alors $a(t) = \dfrac{1}{t}\operatorname{Log}(1+t)$, $\overline{a}(t) = -\dfrac{1}{t}\operatorname{Log}(1-t)$, $A(t) = \dfrac{1-e^{-t}}{t}$, $\overline{A}(t) = \dfrac{e^t-1}{t}$, $a_n^0 = \dfrac{1}{n+1}$ et plus généralement, $a_n^k = \dfrac{(-1)^n}{(n+k+1)\binom{n+k}{k}}$. D'où la matrice

$$(ES1)\qquad \begin{array}{ccccccc} 1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} & \cdots\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & +\frac{1}{12} & -\frac{1}{20} & & \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} & +\frac{1}{30} & & & \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{20} & & & & \\ \frac{1}{5} & & & & & \end{array}$$

Cette matrice est en général attribuée à Leibniz [6].

3.2. — Cet exemple est dû à Euler [11]. $a_n^0 = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ $(n \geq 0)$. On constate rapidement que $a_n^k = \dfrac{(-1)^n 2.4 \dots (2k)}{(2n+1)(2n+3)\dots(2n+2k+1)}$. En particulier $a_0^n = \dfrac{2.4\dots(2n)}{1.3.5\dots(2n+1)}$.

$$(ES2) \qquad \begin{array}{ccccc} 1 & -\dfrac{1}{3} & +\dfrac{1}{5} & -\dfrac{1}{7} & \dots \\ \dfrac{2}{1.3} & -\dfrac{2}{3.5} & \dfrac{2}{5} & & \\ \dfrac{2.4}{1.3.5} & \dfrac{-2.4}{3.5.7} & & & \\ \dfrac{2.4.6}{1.3.5.7} & & & & \end{array}$$

Ainsi $a(t) = 1 - \dfrac{t}{3} + \dfrac{t^2}{5} - \dfrac{t^3}{7} + \dots = t^{-1/2} \operatorname{Arctg}(t^{1/2})$. D'où, d'après la proposition 1, $\overline{a}(t) = [t(1-t)]^{-1/2} \operatorname{Arctg}\Big(\dfrac{t}{1-t}\Big)^{1/2}$. En posant $t = x^2$, et en observant que $\operatorname{Arctg} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arcsin} x$, Euler déduit

$$\frac{\operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2.4}{1.3.5}x^5 + \frac{2.4.6}{1.3.5.7}x^7 + \dots$$

3.3. — Prenons $a_0^0 = 1$, $a_{2n}^0 = \dfrac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}$ et $a_{2n-1}^0 = 0$ $(n \geq 1)$.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \dfrac{1}{2} & 0 & \dfrac{1.3}{2.4} & \dots \\ 1 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1.3}{2.4} & & \\ \dfrac{1.3}{1.2} & 1 & \dfrac{7}{8} & & & \\ \dfrac{1.3.5}{1.2.3} & \dfrac{15}{8} & & & & \\ \dfrac{1.3.5.7}{1.2.3.4} & & & & & \end{array}$$

Alors $a_0^n = \dfrac{1.3.5\dots(2n-1)}{n!}$. En effet $a(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, d'où $\overline{a}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}}$. En outre $A(t) = I_0(t)$, fonction modifiée de Bessel, et $\overline{A}(t) = e^t I_0(t)$.

Nous abordons à présent les exemples de matrices à coefficients entiers. Laissons en exercice les nombres de Fibonacci, et commençons par les nombres de Bell :

3.4. — Soit $a_n^0 = B_n$, nombre de *partitions d'un ensemble* à n éléments. On sait [6] que $A(t) = \exp(e^t - 1)$. D'où $\overline{A}(t) = \exp(e^t - 1 + t) = A'(t)$. Par suite $a_n^0 = a_0^{n-1}$, d'où un procédé de calcul simple des nombres de Bell [12, 21].

$(ES4)$

1	1	2	5	15	52	...
2	3	7	20			
5	10	27				
15	37					
52						

3.5. — Un exemple voisin est celui où a_n^0 est le nombre de *partitions ordonnées* d'un ensemble à n éléments (une partition ordonnée est le couple formé d'une partition et d'un ordre total sur les blocs de cette partition). On montre que $A(t) = 1/(2 - e^t)$. D'où $\overline{A}(t) = 2A(t) - 1$, et on a $a_0^n = 2a_n^0$. En outre, dans toute matrice d'Euler-Seidel $a_0^n = a_n^0 + (a_{n-1}^0 + a_{n-2}^1 + a_{n-3}^2 + \ldots + a_0^{n-1})$. Dans ce cas particulier, on a donc

$$a_n^0 = a_{n-1}^0 + a_{n-2}^1 + \ldots + a_0^{n-1},$$

d'où un calcul rapide de ces nombres, étudiés par maints auteurs [1, 4, 12, 15, 16, 21, 29, 31, 32]

$(ES5)$

1	1	3	13	75	...
2	4	16			
6	20				
26					

3.6. — Considérons à présent le cas où a_n^0 est le nombre d'applications f *idempotentes* ($f \circ f = f$) d'un ensemble à n éléments dans lui-même [6, 17, 25]. Alors

$$A(t) = e^{te^t}, \qquad \text{d'où} \qquad A'(t) = (1+t)e^t e^{te^t} = (1+t)\overline{A}(t).$$

Donc $a_{n+1}^0 = a_0^n + n a_0^{n-1}$, et un rapide calcul de a_n^0 [17].

$(ES6)$

1	1	3	10	41	196	...
2	4	13	51			
6	17	64				
23	81					
104						

3.7. — Si a_n^0 est le nombre de permutations sans point fixe, ou *dérangements*, d'un ensemble à n éléments, alors a_0^n vaut $n!$, nombre de toutes les permutations [6, 24].

$$A(t) = \frac{e^{-t}}{1-t}, \quad \overline{A}(t) = \frac{1}{1-t}.$$

Signalons que cette matrice d'Euler-Seidel est déjà dans Euler [10], mais privée de la ligne initiale ! Pour des aspects combinatoires, voir [19] [35].

$(ES7)$

1	0	1	2	9	44	...
1	1	3	11	53		
2	4	14	64			
6	18	78				
24	96					
120						

3.8. — Ainsi d'une manière générale, dans les classes de permutations, on passe des "sans point fixe", avec une fonction génératrice $A(t) = e^{f(t)}$, où $f(0) = f'(0) = 0$, aux "avec points fixes" où $\overline{A}(t) = e^{f(t)+t}$. A ce sujet, voir [13].

Exemple : a_n^0 est le nombre de permutations *involutives* ($p \circ p = \mathrm{id}$) sans point fixe d'un ensemble à n éléments, donc $a_n^0 = 0$ si n impair est $a_n^0 = 1.3.5 \ldots (n-1)$ si n pair. Alors a_0^n est le nombre de toutes les permutations involutives.

$$A(t) = e^{t^2/2}, \quad \overline{A}(t) = e^{t+t^2/2}.$$

$(ES8)$

1	0	1	0	3	0	15	...
1	1	1	3	3			
2	2	4	6				
4	6	10					
10	16						
26							

3.9. — Si $a_n^0 = n!$, a_0^n est le nombre "d'arrangements" sur un ensemble à n éléments. $A(t) = 1/(1-t)$, $A(t) = e^t/(1-t)$.

$(ES9)$

1	1	2	6	24	...
2	3	8	30		
5	11	38			
16	49				
65					

3.10.. — Nous abordons à présent les exemples dûs à Seidel [28], qui ont pour caractéristique de concerner des suites d'entiers alternées. Si

$a_0^0 = 1$, $a_{2n}^0 = 0 (n \geq 1)$, et $a_{2n-1}^0 = (-1)^n T_{2n-1}$, nombre tangent, alors $a_0^{2n} = (-1)^n E_{2n}$, nombre sécant.

$(ES10)$

1	−1	0	2	0	−16	0
0	−1	2	2	−16	−16	
−1	1	4	−14	−32		
0	5	−10	−46			
5	−5	−56				
0	−61					
−61						

$$A(t) = 1 - \operatorname{th} t = \frac{2}{e^{2t}+1}, \quad \overline{A}(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} t}.$$

Si l'on repart des nombres sécants comme suite initiale, on réobtient les nombres tangents, car si $A(t) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}$, $\quad \overline{A}(t) = 1 + \operatorname{th} t$.

$(ES10')$

1	0	−1	0	5	0	−61
1	−1	−1	5	5	−61	
0	−2	4	10	−56		
−2	2	14	−46			
0	16	−32				
16	−16					
0						

En fait, c'est en un certain sens la "même" matrice. Sous la deuxième forme elle est caractérisée par les deux conditions suivantes :

(E1) $A(x)$ est une fonction paire et $A(0) = 1$.

(E2) $\bar{A}(x) - 1$ est une fonction impaire. En supprimant les signes et en décrivant la matrice en diagonale, Seidel obtient le triangle suivant :

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 1 & & & \\
 & \to & 1 & 1 & & \\
 & 2 & 2 & 1 & \leftarrow & \\
\to & 2 & 4 & 5 & 5 & \\
16 & 16 & 14 & 10 & 5 & \leftarrow
\end{array}$$

triangle qui permet un calcul rapide de nombres tangents et sécants, et dont Entringer a donné l'interprétation combinatoire [9].

3.11. — Soit $A(t) = \dfrac{2t}{1+e^t}$. Alors $a_0^0 = 0$, $a_1^0 = 1$, $a_{2n+1}^0 = 0$ $(n \geq 1)$, $a_{2n}^0 = (-1)^n G_{2n}$, où G_{2n} s'appelle nombre de Genocchi. D'où $\overline{A}(t) = -A(t) + 2t$.

$(ES11)$

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 17 \\
1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -3 & -3 & 17 & \\
1 & -1 & 0 & 2 & -2 & -6 & 14 & & \\
0 & -1 & 2 & 0 & -8 & 8 & & & \\
-1 & 1 & 2 & -8 & 0 & & & & \\
0 & 3 & -6 & -8 & & & & & \\
3 & -3 & -14 & & & & & & \\
0 & -17 & & & & & & & \\
-17 & & & & & & & &
\end{array}$$

On montre que les diagonales sont alternativement symétriques et anti-symétriques. En particulier $a_n^n = 0$, et Seidel en déduit le triangle suivant

$$\begin{array}{cccccc}
 & 1 & & & & \\
\to & 1 & 1 & & & \\
 & 2 & 1 & \leftarrow & & \\
\to & 2 & 3 & 3 & & \\
 & 8 & 6 & 3 & \leftarrow & \\
\to & 8 & 14 & 17 & 17 &
\end{array}$$

qui permet un calcul rapide des nombre de Genocchi ainsi que des nombres $|a_n^{n-1}|$ q'uon peut appeler nombres de Genocchi de deuxième espèce [3]. On trouvera par ailleurs des interprétations combinatoire de la matrice (ES 11) en [8] et [35].

3.12. — Soit $A(t) = \dfrac{t}{e^t - 1}$, alors $\overline{A}(t) = A(t) + t$, $a_0^n = a_n^0 \quad (n \geq 2)$. Suites initiale et finale sont formées des nombres de Bernouilli. Mais la matrice de Seidel ne donne pas de méthode de calcul de ces nombres.

$$(ES12) \qquad \begin{array}{ccccccc}
1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{30} & \dots \\
\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{30} & & \\
\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{15} & & & \\
0 & -\frac{1}{30} & & & & \\
-\frac{1}{30} & & & & &
\end{array}$$

3.13. — Voici encore un exemple lié à (ES10) et (ES11), qui consiste à prendre pour suite initiale $a_1^0 = 1$, $a_{2n}^0 = (-1)^n 2nT_{2n-1} = (-1)^n 2^{2n-1} G_{2n} \quad (n \geq 1)$, $a_{2n+1}^0 = 0 \quad (n \geq 1)$.

$(ES13)$

0	1	−2	0	8	0	−96
1	−1	−2	8	8		
0	−3	6	16			
−3	3	22				
0	25					
25						

Donc $A(t) = \dfrac{2t}{e^{2t}+1} = t - t\,\mathrm{th}\,t$, $\overline{A}(t) = \dfrac{t}{\mathrm{ch}\,t}$ et $a_0^{2n+1} = (-1)^n(2n+1)E_{2n}$.

4. Quelques extensions polynomiales. — Nous nous limiterons aux extensions les plus classiques en Combinatoire, et nous contenterons dans les tables de donner les premières valeurs des suites initiale et finale. En effet, les matrices de polynômes ne fournissent en général pas d'algorithme pour calculer la suite initiale.

4.1. *Polynômes d'Appell.* — A une suite initiale (a_n^0), de fonctions génératrices $a(t)$ et $A(t)$, nous associons la suite des polynômes $(a_n(x))$ $(n \geq 0)$ définis par

$$a_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i^0 x^{n-i}.$$

Ce sont les polynômes d'Appell associés à (a_n^0) [2]. On montre comme plus haut que

$$\sum a_n(x)t^n = \frac{1}{1-tx} a\Big(\frac{t}{1-tx}\Big), \tag{8}$$

$$\sum a_n(x)\frac{t^n}{n!} = e^{tx}A(t). \tag{9}$$

Les polynômes $a_n(x)$ sont une 'interpolation", puisque

$$a_n(0) = a_n^0, \quad a_n(1) = a_0^n.$$

En outre, on a $a'_n(x) = na_{n-1}(x)$, et ce sont des polynômes de type binomial [27]

$$a_n(x+y) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i(x) a_{n-i}(y).$$

Si l'on prend comme suite initiale d'une matrice de Seidel une suite de polynômes d'Appell $(a_n(x))$, la suite finale sera $(a_n(x+1))$.

Comme exemples, citons d'abord les polynômes de Bernoulli, associés aux nombres de Bernoulli. On peut de même introduire des "polynômes de Genocchi" (à coefficient près ce sont ceux qu'on appelle polynômes d'Euler dans la littérature [6, 18]), d'autres "polynômes d'Euler" à partir de (ES10) ou (ES10'). Introduits à partir de (ES7), on voit que les polynômes énumérateurs du nombre de points fixes sur les permutations ont pour fonction génératrice $\exp((x-1)t)/(1-t)$, d'après (9).

De même, à partir de (ES8), $e^{xt+t^2/2!}$ est fonction génératrice des polynômes d'Hermite, qui énumèrent les points fixes sur les permutations involutives.

Si enfin nous considérons le cas de la suite initiale de (ES3), nous voyons que les polynômes d'Appell associés ont pour fonctions génératrices, d'après (8) et (9)

$$\sum a_n(x)t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xt+(x^2-1)t^2}}, \tag{10}$$

$$\sum a_n(x)\frac{t^n}{n!} = e^{xt} I_0(t). \tag{11}$$

L'équation (10) implique

$$a_n(x) = (x^2-1)^{n/2} P_n\Big(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\Big), \tag{12}$$

où P_n est le polynôme de Legendre. On trouvera une étude combinatoire des polynômes $n!a_n(x)$ en [7].

4.2. *Autres extensions.*

a) $a_n^0 = x^n/n!$. Alors $a(t) = e^{xt}$, $A(t) = I_0(2\sqrt{x}t)$. D'où $\overline{a}(t) = (1/(1-t))\exp(xt/(1-t))$, $\overline{A}(t) = e^t I_0(2\sqrt{x}t)$. On a $a_0^n = \frac{1}{n!}\, L_n^{(0)}(-x)$, où $L_n^{(0)}$ désigne le polynôme de Laguerre d'indice 0. En outre $a_1^n = \frac{1}{(n+1)!} L_{n+1}^{(-1)}(-x)$, dont les coefficients sont appelés nombre de Lah [20], et énumèrent les fonctions acycliques f d'un ensemble à $(n+1)$ éléments dans lui-même (c'est-à-dire telles que $f^{n+1} = f^n$) suivant le nombre de points fixes [13, 24].

$$(ES14)\qquad \begin{array}{ccccc} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \frac{x^3}{3!} & \cdots \\ 1+x & \frac{2x^2+x^2}{2!} & \frac{3x^2+x^3}{3!} & & \\ \frac{2+4x+x^2}{2!} & \frac{6x+6x^2+x^3}{3!} & & & \\ \frac{6+18x+9x^2+x^3}{3!} & & & & \end{array}$$

b) Les polynômes dits "exponentiels" [6, 23], dont les coefficients sont les nombres de Stirling de deuxième espèce, qui énumèrent les partitions selon le nombre de blocs. C'est donc une extension de (ES4)

$$A(t) = \exp(x(e^t-1)) = 1 + xt + (x+x^2)\frac{t^2}{2!} + (x+3x^2+x^3)\frac{t^3}{3!} + (x+7x^2+6x^3+x^4)\frac{t^4}{4!} + \cdots$$

$$\overline{A}(t) = \frac{1}{x}A'(t), \quad \text{d'où} \quad a^0_{n+1} = xa^n_0.$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & x & x+x^2 & x+3x^2+x^3 & \ldots \\ 1+x & 2x+x^2 & 2x+4x^2+x^3 & & \\ 1+3x+x^2 & 4x+5x^2+x^3 & & & \\ 1+7x+6x^2+x^3 & & & & \end{array}$$

c) Une extension de (ES9) est donnée par $A(t) = e^{-x\,\mathrm{Log}(1-t)}$, fonction génératrice des polynômes dont les coefficients sont les nombres de Stirling de première espèce et énumèrent les permutations selon le nombre de cycles.

$$e^{-x\,\mathrm{Log}(1-t)} = 1 + xt + (x+x^2)\frac{t^2}{2!} + (2x+3x^2+x^3)\frac{t^3}{3!} + (6x+11x^2+6x^3+x^4)\frac{t^4}{4!} + \cdots$$

Alors $\overline{A}(t) = e^{t-\mathrm{Log}(1-t)}$ est la fonction génératrice des polynômes de Charlier [5, 30]

$$e^{t-x\,\mathrm{Log}(1-t)} = 1 + (1+x)t + (1+3x+x^2)\frac{t^2}{2!} + (1+8x+6x^2+x^3)\frac{t^3}{3!} + \cdots$$

d) Une extension de (ES7) est donnée par les polynômes de Roselle [26] qui énumèrent les *permutations sans point fixe* selon le nombre de montées de cycle, c'est-à-dire d'entiers i tels que $i < p(i)$.

$$A(t) = \frac{\exp(-t)}{1 - \dfrac{\exp((x-1)t)}{x-1}} = 1 + x\frac{t^2}{2!} + (x + x^2)\frac{t^3}{3!} + (x + 7x^2 + x^3)\frac{t^4}{4!} + (x + 21x^2 + 21x^3 + x^4)\frac{t^5}{5!} + \cdots$$

Alors la suite finale est celle des polynômes eulériens [14, 24] qui énumèrent les permutations selon les montées larges de cycle ($i \leq p(i)$).

$$\overline{A}(t) = \frac{1}{1 - \dfrac{\exp((x-1)t) - 1}{x-1}} = 1 + t + (1 + x)\frac{t^2}{2!} + (1 + 4x + x^2)\frac{t^3}{3!} + (1 + 11x + 11x^2 + x^3)\frac{t^4}{4!} + \cdots$$

Notons que cette matrice-là est aussi une extension de (ES10'), qu'on réobtient en posant $x = -1$.

e) Si on prend pour suite initiale les polynômes eulériens, on obtient une matrice étendant à la fois (ES9) et (ES10).

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{\exp((x-1)t)}{1 - \dfrac{\exp((x-1)t) - 1}{x-1}} \\ &= 1 + xt + (x + x^2)\frac{t^2}{2!} + (x + 4x^2 + x^3)\frac{t^3}{3!} + \cdots \\ \overline{A}(t) &= \frac{\exp(xt)}{1 - \dfrac{\exp((x-1)t) - 1}{x-1}} \\ &= 1 + (1 + x)t + (1 + 3x + x^2)\frac{t^2}{2!} + (1 + 7x + 7x^2 tx^3)\frac{t^3}{3!} \\ &\qquad + (1 + 15x + 33x^2 + 15x^3 + x^1)\frac{t^4}{4!} + \cdots \end{aligned}$$

Les polynômes de la suite finale sont, comme ceux de Roselle, symétriques et redonnant les nombres sécants pour $x = -1$.

f) Parmi les extensions en fractions rationnelles, signalons la suivante, de (ES1) : $a_n^0 = \dfrac{(-1)^{n+1}}{x+n}$, d'où $a_0^n = \dfrac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$ $(n \geq 0)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Aigner. — *Combinatorial Theory*. — Springer Verlag, 1979, chap. III et p. 201.

[2] P. Appel. — Sur une classe de polynômes, *Ann. Ecole Normale Supérieure*, vol. **2**, 1880, p. 119-144.

[3] D. Barsky. — Congruences pour les nombres de Genocchi de deuxième espèce, *Séminaire du Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique*, 8ème année (1980/81) 34, 01-013.

[4] J.P. Bauer. — Recherches autour d'une propriété classique de la fonction φ d'Euler, Ann. Sci. Univ. Besançon Math. (3) Fasc. 5 (1972).

[5] C.V.L. Charlier. — Arkiv für Mat. Astron. o. Fysik 2 (1905/06), Nr. 20.

[6] L. Comtet. — *Advanced Combinatorics*. — D. Reidel Publishing Company (1974).

[7] D. Dumont. — Étude combinatoire d'une suite de polynômes associés aux polynômes ultrasphériques,*Publ. Elektr. Fak. Univ. Beograd, Ser. Mat. Fiz.*, 1979, p. 116-125.

[8] D. Dumont et G. Viennot. — A combinatorial interpretration of the Seidel generation of Genocchi numbers, *Ann. Discr. Math*, vol. **6**, 1980, p. 77-87.

[9] R.C. Entringer. — A combinatorial interpretation of the Euler and Bernoulli numbers, *Nieuw. Arch. V. Wiskunde*, vol. **14**, 1966, p. 241-6.

[10] L. Euler. — *De differentis finitis, Opera Omnia, series prima*. — vol. X, Teubner, 1913.

[11] L. Euler. — *De transformatione serierum, Opera Omnia, series prima*. — vol. X, Teubner, 1913.

[12] S. Even. — *Algorithmic Combinatorics*. — Mac Millan New York (1973), pages 55-65.

[13] D. Foata. — *La série génératrice exponentielle dans les problèmes d'énumération*. Presses de l'Université de Montréal, Montréal (1974).

[14] D. Foata et M.P. Schützenberger. — *Théorie Géométrique des polynômes eulériens*. — Lectures Notes in Math. n°./38 Springer-Verlag.

[15] I. J. Good. — The number of orderings of n candidates when ties are permitted, *Fib. Quart*, vol. **13**, 1975, p. 11-18.

[16] O. A. Gross. — Preferential arrangements, *Amer. Math. Monthly*, vol. **69**, 1962, p. 4-8.

[17] B. Harris et L. Schoenfeld. — The number of idempotent elements in symmetric semi-groups, *Jour. of Comb. Theory*, vol. **3**, 1967, p. 122-35.

[18] C. Jordan. — *Calculus of finite differences*. — Chelsea, 1965.

[19] G. Kreweras. — The number of more or less "regular" permutations, *Fib. Quart*, vol. **18**, 1980, p. 226-9.

[20] I. Lah. — Eine neue Art von Zahlen, ihre Eigenschaften und Anwendung in der mathematischen Statistik, *Mitteilungsbl. Math. Statist.*, vol. **7**, 1955, p. 203-212.

[21] C.L. Liu. — *Introduction to Combinatorial Mathematics*. — Mc Graw Hill, 1968.

[22] P. A. Mac Mahon. — *Collected papers*. — M.I.T. Press (1978). p. 611.

[23] C. Radoux. — Une congruence pour les polynômes $P_n(x)$ de fonction génératrice $e^{x(e^z-1)}$, *C. R. Acad. Sc. Paris*, vol. **284**, 1977, p. 637-9.

[24] J. Riordan. — *An Introduction to Combinatorial Theory*. — Wiley (1958).

[25] J. Riordan. — Forest of labelled trees, *Jour. of Comb. Theory*, vol. **5**, 1968, p. 90-103.

[26] D. Roselle. — Permutations by numbers of rises and successions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. **19**, 1968, p. 8-16.

[27] G. C. Rota. — *Finite operator calculus*. — Academic Press, 1975.
[28] L. Seidel. — Über eine einfache Enstehungsweise der Bernoullischen Zahlen und einiger verwandten Reihen, *Sitzungsberichte der Münch. Akad. Math. Phys. Classe* (1877) 157-187.
[29] L. Sinigallia. — Una estensione dei numeri Bernoulliani, *Rendic. di Palermo* (1908), 20-35.
[30] G. Szegö. — *Orthogonal polynomials*. — Amer. Math. Soc. Colloquim Publ., vol. 23 (1939) p. 33.
[31] W. J. Walker. — Algebraic and combinatorial results for ranking competitors in a sequence of races, *Discr. Math*, vol. **14**, 1976, p. 297-304.
[32] Whitworth. — *Choice and Chance*. — London (1934), p. 87.

Compléments (1996)

Récemment, V.I. Arnold a retrouvé et réinterprété le triangle de Seidel des nombres d'Euler [33], puis introduit des paires de tableaux permettant le calcul des nombres de Springer [34]. On trouvera des paires de matrices de Seidel associées à ces paires de tableaux dans [36], ainsi que d'autres exemples, conduisant notamment à définir des nombres d'Euler "médians" qui sont une sorte d'analogue pour les nombres d'Euler des nombres de Genocchi de deuxième espèce.

[33] V.I. Arnold. — Bernoulli-Euler updown numbers associated with function singularities, their combinatorics and arithmetics, *Duke Math. Jour.*, vol. **63**, 1991, p. 1537-1555.
[34] V.I. Arnold. — The calculus of snakes and the combinatorics of Bernoulli, Euler and Springer numbers of Coxeter groups, *Russian Math. Surveys*, vol. **47/1**, 1992, p. 1-51.
[35] D. Dumont, A. Randrianarivony. — Dérangements et nombres de Genocchi, *Discrete Math.*, vol. **132**, 1994, p. 37-49.
[36] D. Dumont. — Further triangles of Seidel-Arnold type and Continued Fractions related to Euler and Springer numbers, *Advances in Applied Math.*, vol. **16**, 1995, p. 275-296.

Dominique Dumont,
Département de mathématique,
Université Louis Pasteur,
7, rue René-Descartes,
F-67084 Strasbourg.

Journal of Integer Sequences, Vol. 14 (2011),
Article 11.4.6

Investigating Geometric and Exponential Polynomials with Euler-Seidel Matrices

Ayhan Dil and Veli Kurt
Department of Mathematics
Akdeniz University
07058 Antalya
Turkey
adil@akdeniz.edu.tr
vkurt@akdeniz.edu.tr

Abstract

In this paper we use the Euler-Seidel matrix method to obtain some properties of geometric and exponential polynomials and numbers. Some new results are obtained and some known results are reproved.

1 Introduction

This work is based on the Euler-Seidel matrix method [11] which is related to algorithms, combinatorics and generating functions. This method is quite useful to investigate properties of some special numbers and polynomials.

In this paper we consider the Euler-Seidel matrix method for some combinatorial numbers and polynomials. This method is relatively easier than the most of combinatorial methods to investigate the structure of such numbers and polynomials.

We obtain new properties of geometric (or Fubini) polynomials and numbers. In addition, we use this method to find out some equations and recurrence relations of exponential (or Bell) polynomials and numbers, and Stirling numbers of the second kind. Although some results in this paper are known, this method provides different proofs as well as new identities.

We first consider a given sequence $(a_n)_{n\geq 0}$, and then determine the Euler-Seidel matrix corresponding to this sequence is recursively by the formulae

$$\begin{aligned} a_n^0 &= a_n, \quad (n \geq 0), \\ a_n^k &= a_n^{k-1} + a_{n+1}^{k-1}, \quad (n \geq 0,\, k \geq 1) \end{aligned} \tag{1}$$

where a_n^k represents the kth row and nth column entry. From relation (1), it can be seen that the first row and the first column can be transformed into each other via the well known binomial inverse pair as,

$$a_0^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k^0, \tag{2}$$

and

$$a_n^0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a_0^k. \tag{3}$$

Euler [12] deduced the following proposition.

Proposition 1 (Euler)**.** *Let*

$$a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^0 t^n$$

be the generating function of the initial sequence $(a_n^0)_{n\geq 0}$*. Then the generating function of the sequence* $(a_0^n)_{n\geq 0}$ *is*

$$\overline{a}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_0^n t^n = \frac{1}{1-t} a\left(\frac{t}{1-t}\right). \tag{4}$$

A similar statement was proved by Seidel [19] with respect to the exponential generating function.

Proposition 2 (Seidel)**.** *Let*

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^0 \frac{t^n}{n!}$$

be the exponential generating function of the initial sequence $(a_n^0)_{n\geq 0}$*. Then the exponential generating function of the sequence* $(a_0^n)_{n\geq 0}$ *is*

$$\overline{A}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_0^n \frac{t^n}{n!} = e^t A(t). \tag{5}$$

Dumont [11] presented several examples of Euler-Seidel matrices, mainly using Bernoulli, Euler, Genocchi, exponential (Bell) and tangent numbers. He also attempted to give a polynomial extension of the Euler-Seidel matrix method. In [9], Dil et al. obtained some identities on Bernoulli and allied polynomials by introducing polynomial extension of this method. Mező and Dil [16] gave a detailed study of the harmonic and hyperharmonic numbers using the Euler-Seidel matrix method. Moreover, some results on $r-$Stirling numbers and a new characterization of the Fibonacci sequence have been presented. In [10] Dil and Mező presented another algorithm which depends on a recurrence relation and two initial sequences. Using the algorithm which is symmetric respect to the rows and columns, they obtained some relations between Lucas sequences and incomplete Lucas sequences. Hyperharmonic numbers have been investigated as well.

2 Definitions and Notation

Now we give a summary about some special numbers and polynomials which we will need later.

Stirling numbers of the second kind.

Stirling numbers of the second kind $\left\{ {n \atop k} \right\}$ are defined by means of generating functions as follows [1, 6]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{x^n}{n!} = \frac{\left(e^x - 1\right)^k}{k!}. \tag{6}$$

2.1 Exponential polynomials and numbers

Exponential polynomials (or single variable Bell polynomials) $\phi_n(x)$ are defined by [2, 17, 18]

$$\phi_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^k. \tag{7}$$

We refer [5] for comprehensive information on the exponential polynomials.

The first few exponential polynomials are:

$$\begin{array}{|l|}\hline \phi_0(x) = 1, \\ \hline \phi_1(x) = x, \\ \hline \phi_2(x) = x + x^2, \\ \hline \phi_3(x) = x + 3x^2 + x^3, \\ \hline \phi_4(x) = x + 7x^2 + 6x^3 + x^4. \\ \hline \end{array} \tag{8}$$

The exponential generating function of the exponential polynomials is given by [6]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x) \frac{t^n}{n!} = e^{x\left(e^t - 1\right)}. \tag{9}$$

The well known exponential numbers (or Bell numbers) ϕ_n ([3, 6, 7, 20]) are obtained by setting $x = 1$ in (7), i.e,

$$\phi_n := \phi_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}. \tag{10}$$

The first few exponential numbers are:

$$\phi_0 = 1,\ \phi_1 = 1,\ \phi_2 = 2,\ \ \phi_3 = 5,\ \ \phi_4 = 15. \tag{11}$$

They form sequence A000110 in Sloane's *Encyclopedia*.

Readers may also consult the lengthy bibliography of Gould [14], where several papers and books are listed about the exponential numbers.

The following recurrence relations that we reprove with the Euler-Seidel matrix method hold for exponential polynomials [18];

$$\phi_{n+1}(x) = x\left(\phi_n(x) + \phi_n^{'}(x)\right) \tag{12}$$

and

$$\phi_{n+1}(x) = x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\phi_k(x). \tag{13}$$

2.2 Geometric polynomials and numbers

Geometric polynomials (also known as Fubini polynomials) are defined as follows [4]:

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\left\{ n \atop k \right\} k!x^k. \tag{14}$$

By setting $x = 1$ in (14) we obtain geometric numbers (or preferential arrangement numbers, or Fubini numbers) F_n ([8, 15]) as

$$F_n := F_n(1) = \sum_{k=0}^{n}\left\{ n \atop k \right\} k!. \tag{15}$$

The exponential generating function of the geometric polynomials is given by [4]

$$\frac{1}{1 - x(e^t - 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{16}$$

Let us give a short list of these polynomials and numbers as follows

$F_0(x) = 1,$
$F_1(x) = x,$
$F_2(x) = x + 2x^2,$
$F_3(x) = x + 6x^2 + 6x^3,$
$F_4(x) = x + 14x^2 + 36x^3 + 24x^4,$

and

$$F_0 = 1,\ \ F_1 = 1,\ \ F_2 = 3,\ \ F_3 = 13,\ \ F_4 = 75.$$

They form sequence A000670 in Sloane's *Encyclopedia*

Geometric and exponential polynomials are connected by the relation ([4])

$$F_n(x) = \int_0^{\infty}\phi_n(x\lambda)\,e^{-\lambda}d\lambda. \tag{17}$$

Now we state our results.

3 Results obtained by the matrix method

Although we define Euler-Seidel matrices as matrices of numbers, we can also consider entries of these matrices as polynomials [9]. Thus the generating functions that we mention in the statement of Seidel's proposition turn out to be two variables generating functions. Therefore from now on when we consider these generating functions as exponential generating functions of polynomials we use the notations $A(t,x)$ and $\overline{A}(t,x)$. Using these notations relation (5) becomes

$$\overline{A}(t,x) = e^t A(t,x). \tag{18}$$

3.1 Results on geometric numbers and polynomials

This part of our work contains some relations on the geometric numbers and polynomials, most of which seems to be new.

Proposition 3. *We have*

$$2F_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k \tag{19}$$

and

$$F_n = 2\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} F_k \tag{20}$$

where $n \geq 1$.

Proof. Let us set the initial sequence of an Euler-Seidel matrix as the sequence of geometric numbers, i.e., $(a_n^0)_{n\geq 0} = (F_n)_{n\geq 0}$. Then we have

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 13 & 75 & \cdots \\ 2 & 4 & 16 & 88 & \cdots & \\ 6 & 20 & 104 & \cdots & & \\ 26 & 124 & \cdots & & & \\ 150 & \cdots & & & & \\ \cdots & & & & & \end{bmatrix}.$$

Observing the first row and the first column we see that $a_0^n = 2F_n$, $n \geq 1$. Firstly we need a proof of this fact. Proposition 2 enables us to write

$$\overline{A}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_0^n \frac{t^n}{n!} = \frac{e^t}{2-e^t} = 2\frac{1}{2-e^t} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} 2F_n \frac{t^n}{n!} + 1.$$

Now comparison of the coefficients of the both sides gives $a_0^n = 2F_n$ where $n \geq 1$. Using this result with equations (2) and (3) we get (19) and (20). ∎

Proposition 4. *Geometric polynomials satisfy the following recurrence relation*

$$F_n(x) = x\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} F_k(x). \tag{21}$$

Proof. Let us set the initial sequence of an Euler-Seidel matrix as the sequence of geometric polynomials, i.e. $\left(a_n^0\right)_{n\geq 0} = \left(F_n\left(x\right)\right)_{n\geq 0}$. Thus we obtain from (18)

$$A\left(t,x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n\left(x\right)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{1-x\left(e^t-1\right)}$$

and

$$\overline{A}\left(t,x\right) = \frac{e^t}{1-x\left(e^t-1\right)}. \tag{22}$$

Then differentiation with respect to t yields

$$\overline{A}\left(t,x\right) = \left[\frac{1}{x} - \left(e^t-1\right)\right]\frac{d}{dt}A\left(t,x\right)$$

which can equally well be written as

$$\overline{A}\left(t,x\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{F_{n+1}\left(x\right)}{x} + F_{n+1}\left(x\right) - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_{k+1}\left(x\right)\right]\frac{t^n}{n!}.$$

Equating coefficients of $\frac{t^n}{n!}$ in the preceding equation yields

$$a_0^n = \frac{F_{n+1}\left(x\right)}{x} - \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}F_k\left(x\right). \tag{23}$$

In view of (2) equation (23) shows the validity of (21). ∎

Remark 5. As a special case we get (19) by setting $x = 1$ in (21).

Corollary 6.

$$F_{n+1}\left(x\right) = \frac{x}{1+x}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[F_k\left(x\right) + F_{k+1}\left(x\right)\right]. \tag{24}$$

Proof. With the aid of Proposition 4 we can write

$$\begin{aligned} F_{n+1}\left(x\right) &= x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k\left(x\right) + x\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}F_k\left(x\right) \\ &= x\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\left[F_k\left(x\right) + F_{k+1}\left(x\right)\right] + xF_n\left(x\right) \end{aligned} \tag{25}$$

Then (25) yields equation (24). ∎

Now we give an important recurrence relation for the geometric polynomials.

Proposition 7. *The following recurrence relation holds for the geometric polynomials:*

$$F_{n+1}\left(x\right) = x\frac{d}{dx}\left[F_n\left(x\right) + xF_n\left(x\right)\right]. \tag{26}$$

Proof. We may use (13) and (17) to conclude that

$$F_{n+1}(x) = x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int_0^\infty \phi_k(x\lambda)\,\lambda e^{-\lambda}d\lambda.$$

Using (7) this becomes

$$F_{n+1}(x) = x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{r=0}^{k}\left\{{k \atop r}\right\}x^r\int_0^\infty \lambda^{r+1}e^{-\lambda}d\lambda$$

from which it follows that

$$F_{n+1}(x) = x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{r=0}^{k}\left\{{k \atop r}\right\}(r+1)!x^r.$$

This can equally well be written by means of derivative as

$$F_{n+1}(x) = x\frac{d}{dx}x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k(x).$$

Now equation (21) permits us to write

$$F_{n+1}(x) = x\frac{d}{dx}\left[F_n(x) + xF_n(x)\right].$$

∎

We have the following relation between the geometric polynomials and their derivatives.

Corollary 8.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}xF_k'(x) = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}F_k(x) \tag{27}$$

Proof. Combining results of Proposition 4 and Proposition 7 gives (27). ∎

4 Some other applications of the method

In this section, using the Euler-Seidel matrix method, we are able to reprove some known identities of Stirling numbers of second kind, exponential numbers and polynomials. Using this method one can extend these results to the other sequences.

4.1 Applications to the Stirling numbers of the second kind

Setting the initial sequence of an Euler-Seidel matrix as the sequence of the Stirling numbers of the second kind, i.e., $a_n^0 = \left\{ {n \atop m} \right\}$ where m is a fixed nonnegative integer, we get the exponential generating function of the first row as

$$A(t) = \frac{(e^t - 1)^m}{m!}.$$

We obtain from (2)

$$a_0^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\{ {k \atop m} \right\}. \tag{28}$$

Equation (5) yields

$$\overline{A}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_0^n \frac{t^n}{n!} = e^t \frac{(e^t - 1)^m}{m!}$$

which can equally be written as

$$\overline{A}(t) = \frac{d}{dt} \frac{(e^t - 1)^{m+1}}{(m+1)!}. \tag{29}$$

Comparison of the coefficients of t^n in equation (29) and consideration (28) yield the following result:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\{ {k \atop m} \right\} = \left\{ {n+1 \atop m+1} \right\}. \tag{30}$$

Hence with the help of (30) and binomial inversion formula (3) we obtain

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \left\{ {k+1 \atop m+1} \right\} = \left\{ {n \atop m} \right\}. \tag{31}$$

Relations (30) and (31) can be found in [13] respectively as the equations (6.15) and (6.17) on page 265.

4.2 Applications to the exponential numbers and polynomials

4.2.1 Applications to the exponential numbers

Let us construct an Euler-Seidel matrix with the initial sequence $(a_n^0)_{n\geq 0} = (\phi_n)_{n\geq 0}$. Then we get the following Euler-Seidel matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 & 15 & 52 & \cdots \\ 2 & 3 & 7 & 20 & \cdots & & \\ 5 & 10 & 27 & \cdots & & & \\ 15 & 37 & \cdots & & & & \\ 52 & \cdots & & & & & \\ \cdots & & & & & & \end{bmatrix}.$$

From this matrix we observe that $a_0^n = \phi_{n+1}$. Now we prove this observation using generating functions. Since $\left(a_n^0\right)_{n\geq 0} = \left(\phi_n\right)_{n\geq 0}$ we have

$$A\left(t\right) = e^{e^t-1}.$$

Equation (5) enables us to write

$$\overline{A}\left(t\right) = e^{e^t+t-1} = \frac{d}{dt}\left(e^{e^t-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\phi_{n+1}\frac{t^n}{n!}. \tag{32}$$

Comparison of the coefficients of both sides in (32) gives

$$a_0^n = \phi_{n+1} \tag{33}$$

the desired result. From (2) and (33) it follows that

$$\phi_{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\phi_k. \tag{34}$$

Now considering (3) and (34) together we obtain

$$\phi_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(-1\right)^{n-k}\phi_{k+1}. \tag{35}$$

The identity (34) can be found in [13] on page 373 and (35) is inverse binomial transform of the identity (34).

4.2.2 Applications to the exponential polynomials

Setting the initial sequence of an Euler-Seidel matrix as the sequence of exponential polynomials, i.e., $\left(a_n^0\right)_{n\geq 0} = \left(\phi_n\left(x\right)\right)_{n\geq 0}$ we get following Euler-Seidel matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & x & x+x^2 & x+3x^2+x^3 & \cdots \\ 1+x & 2x+x^2 & 2x+4x^2+x^3 & \cdots & \\ 1+3x+x^2 & 4x+5x^2+x^3 & \cdots & & \\ 1+7x+6x^2+x^3 & \cdots & & & \\ \cdots & & & & \end{bmatrix}.$$

We claim that $xa_0^n = \phi_{n+1}\left(x\right)$. Now we prove this fact. With the aid of Proposition 2 we can write

$$\overline{A}\left(t,x\right) = e^t e^{x\left(e^t-1\right)} = \frac{1}{x}\frac{d}{dt}e^{x\left(e^t-1\right)}. \tag{36}$$

Comparison of the coefficients of the both sides in (36) gives

$$xa_0^n = \phi_{n+1}\left(x\right) \tag{37}$$

the desired result. Hence equalities (2) and (37) constitute a new proof of the equation (13).

Equation (3) and equation (13) show the validity of the following equation

$$x\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \phi_{k+1}(x). \tag{38}$$

It is clear that equations (13) and (38) are the generalizations of equations (34) and (35), respectively.

With the help of generating functions technique we derive more results for the exponential polynomials. The following remark is a new proof of the equation (12).

Remark 9. Differentiation both sides of the equation (9) with respect to x we get

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n'(x) \frac{t^n}{n!} = e^t e^{x\left(e^t-1\right)} - e^{x\left(e^t-1\right)},$$

which combines with (36) to give

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n'(x) \frac{t^n}{n!} = \overline{A}(t,x) - A(t,x).$$

Then the last equation gives equation (12) by comparing coefficients.

Our last remark is about a relation between the exponential polynomials and their derivatives.

Remark 10. Employing (12) in the equation (38) we obtain

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^k \phi_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k-1} \phi_k'(x). \tag{39}$$

5 Acknowledgments

We would like to thank the referees for their helpful comments on the manuscript.

This research is supported by Akdeniz University Scientific Research Project Unit.

References

[1] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, 9th printing, Dover, 1972.

[2] E. T. Bell, Exponential polynomials, *Ann. Math.*, **35**, (1934), 258–277.

[3] E. T. Bell, Exponential numbers, *Amer. Math. Monthly.,* **41**, (1934) 411–419.

[4] K. N. Boyadzhiev, A Series transformation formula and related polynomials, *Int. J. Math. Math. Sci.*, **23** (2005), 3849–3866.

[5] K. N. Boyadzhiev, Exponential polynomials, Stirling numbers and evaluation of some Gamma integrals, *Abstr. Appl. Anal.*, Article ID 168672, (2009), 18 pages.

[6] L. Comtet, *Advanced Combinatorics. The Art of Finite and Infinite Expansions*, Revised and Enlarged Edition, D. Riedel Publishing Co., Dordrecht, 1974.

[7] J. H. Conway and R. K. Guy, *The Book of Numbers*, Springer-Verlag, 1996.

[8] M. E. Dasef and S. M. Kautz, Some sums of some importance, *College Math. J.*, **28** (1997), 52–55.

[9] A. Dil, V. Kurt and M. Cenkci, Algorithms for Bernoulli and allied polynomials, *J. Integer Seq.* **10** (2007) Article 07.5.4.

[10] A. Dil and I. Mező, A symmetric algorithm for hyperharmonic and Fibonacci numbers, *Appl. Math. Comput.* **206** (2008), 942–951.

[11] D. Dumont, Matrices d'Euler-Siedel, *Sem. Loth. Comb.*, (1981), B05c.

[12] L. Euler, *De Transformatione Serierum, Opera Omnia*, series prima, Vol. X, Teubner, 1913.

[13] R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, 1994.

[14] H. W. Gould, *Bell and Catalan Numbers - Research Bibliography of Two Special Number Sequences,* 6th Edition, Morgantown, WV, 1985.

[15] O. A. Gross, Preferential arrangements. *Amer. Math. Monthly*, **69** (1962), 4–8.

[16] I. Mező and A. Dil, Euler-Seidel method for certain combinatorial numbers and a new characterization of Fibonacci sequence, *Cent. Eur. J. Math.* **7** (2009), 310–321.

[17] J. Riordan, *Combinatorial Analysis*, Wiley, 1958.

[18] S. Roman, *The Umbral Calculus*, Academic Press, 1984.

[19] L. Seidel, Über eine einfache Enstehungweise der Bernoullischen Zahlen und einiger verwandten Reihen, *Sitzungsber. der Münch. Akad. Math.* **4** (1877), 157–187.

[20] S. M. Tanny, On some numbers related to the Bell numbers, *Can. Math. Bulletin*, **17**, (1974), 733–738.

[21] H. S. Wilf, *Generatingfunctionology*, Academic Press, 1994.

2010 *Mathematics Subject Classification*: Primary 11B73; Secondary 11B83.
Keywords: Euler-Seidel matrices, Stirling numbers, exponential numbers and polynomials, geometric numbers and polynomials.

(Concerned with sequences A000110 and A000670.)

Received July 12 2010; revised version received October 2 2010; February 9 2011; March 25 2011. Published in *Journal of Integer Sequences*, March 26 2011.

Return to Journal of Integer Sequences home page.