République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique
Université Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique

MÈMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Par

MOUSSAOUI ISMAIL

Principe de maximum et applications

Soutenue publiquement le 03/07/2023, devant le jury composé de

BIBI Hamza	$MCB.$ **Univ. Médéa**	**Président**
SOUILAH Rezak	$MCA.$ **Univ. Médéa**	**Examinateur**
AYADI Hocine	$MCA.$ **Univ. Médéa**	**Superviseur**

Année universitaire 2022/2023

Remerciement

La réalisation de ce mémoire été possible grâce à Dieu le tout puissant et grâce au concours de plusieurs personnes à qui nous voudrions témoigner toutes nos gratitudes.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué au succès de mon stage et qui m'ont aidée lors de la rédaction de ce mémoire.

Je voudrais dans un premier temps remercier, mon encadreur de mémoire **Dr AYADI Hocine**, professeur de l'université de Yahia Farès de Médéa, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Je remercie également toute l'équipe pédagogique de l'université de Yahia Farès de Médéa et les intervenants professionnels responsables de ma formation, pour avoir assuré la partie théorique de celle-ci.

Le comité de discussion pour avoir corrigé les erreurs dans ce mémoire et pour sa patience avec nous durant la période de discussion et s'être efforcé de faire de ce mémoire une référence pour les étudiants.

Mes professeurs qui m'ont enseigné du primaire au niveau universitaire et qui m'ont soutenu durant cette période importante du cheminement scolaire.

Dédicace

À mes chers parents
Quoi que je dise ou que je fasse,
je n'arrivai jamais à vous remercier comme il se doit.
C'est grâce à vos encouragements,
vos bienveillances et votre présence à mes ôtés,
que j'ai réussi ce respectueux parcours.
Je souhaite que vous soyez fière de moi,
et que j'ai pu répondre aux espoirs que vous avez fondés en moi,
je vous souhaite une bonne santé et une longue vie.
À mes chers frères
Merci pour vos soutiens moral,
vos confiances et vos conseils précieux,
qui m'ont aidé dans les moments difficiles.
Je vous souhaite le bonheur et la réussite dans vos vies.
À toute ma famille et mes amis
À travers ces lignes,
j'adresse mes sincères remerciements
à tous les collègues qui m'ont aidé de près ou de loin,
et j'adresse également des remerciements particuliers,
à mes collègues de travail pour leur soutien moral.
Une dédicace spéciale pour les étudiants
en ***Analyse Mathématique et Applications, 2023***
sur l'esprit joyeux et l'harmonie régnant dans le groupe,
et l'échange d'informations et d'idées,
qui ont contribué au succès de chacun et bonne chance à tous
et à la fin, le seul mot que je puisse dire est merci,
merci beaucoup à tous ceux qui ont contribué,
à la réalisation de ce mémoire.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'un des sujets les plus importants dans les équations aux dérivées partielles qui est le principe du maximum, et nous l'avons présenté en deux chapitres, dans le premier chapitre le principe du maximum a été étudié pour les équations différentielles ordinaires et il est divisé en cinq sections, c'était dans l'ordre suivant principe maximum en dimension 1, principe maximum généralisé, problème à valeur initiale, problème aux limites et opérateurs non linéaires.

Dans le deuxième chapitre, nous avons abordé l'étude du principe du maximum dans les équations elliptiques et il est divisé en quatre sections qui sont les suivants, premièrement une définition sur l'opérateur de Pierre Simon de Laplace puis le principe maximum de Eberhard Frederich ferdinand Hopf puis théorèmes d'unicité pour les problèmes de valeurs limites, et en fin le principe du maximum généralisé.

abstract

In this dissertation we have studied one of the most important topics in partial differential equations, which is the maximum principle, and we have presented it in two chapters, In the first chapter the maximum principle has been studied for ordinary differential equations, and it is divided into five sections it was in the following order one-dimensional maximum principle, the generalised maximum principle, the initial value problem, boundary value problems, and nonlinear operators.

In the second chapter, we approached the study of the maximum principle in elliptic equations, and it is divided into four sections, first a definition on the Laplace operator, then the maximum principle of Eberhard Frederich ferdinand Hopf, then uniqueness theorems for boundary value problems, and finally the generalised maximum principle.

Notations

$[a,b]$	un intervalle fermé
$]a,b[$	un intervalle ouvert
$C^0[a,b]$	l'espace des fonctions continues sur intervalle $[a,b]$
$C^2]a,b[$	les dérivées jusqu'à l'ordre 2 existent sur $]a,b[$ et la dérivée seconde est continu sur $]a,b[$
a,b,c,d	des nombres réel
$u^{'}$	la dérive de fonction u
$u^{''}$	la dérivée second de la fonction u
a^*	le point conjugué de a
∂_i	La i-i ème dérivée partielle ; $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$
D	un espace euclidien à n dimensions
∂D	la frontière de D
Δ	L'opérateur de Laplace ou laplacien ; $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$
∂K	la frontière de K
f,g,h,u	des fonctions
L	un opérateur

Introduction générale

L'un des outils les plus utiles et les plus connus utilisés dans l'étude des équations aux dérivées partielles est le principe du maximum. Ce principe est une généralisation du fait élémentaire du calcul selon lequel toute fonction $f(x)$ qui satisfait l'inégalité $f'' > 0$ sur un intervalle $[a,b]$ atteint sa valeur maximale à l'une des extrémités de l'intervalle. On dit que les solutions de l'inégalité $f'' > 0$ satisfont à un principe de maximum. Plus généralement, les fonctions qui satisfont une inégalité différentielle dans un domaine D et, de ce fait, atteignent leurs maxima sur la frontière de D sont dites posséder un principe maximum.

L'étude des équations aux dérivées partielles commence souvent par une classification des équations en différents types. Les équations les plus fréquemment étudiées sont celles de type elliptique, parabolique et hyperbolique, et ce principe a été étudié dans cette mémoire sur les équations de type elliptique uniquement. Parce que les équations de ces types apparaissent naturellement dans de nombreux problèmes physiques, les mathématiciens intéressés par les équations aux dérivées partielles ont eu tendance à concentrer leurs efforts sur les développements qui présentent un intérêt à la fois mathématique et physique.

Il existe généralement une interprétation physique naturelle du principe du maximum dans les problèmes d'équations différentielles qui se posent en physique. Dans de telles situations, le principe du maximum nous aide à appliquer l'intuition physique aux modèles mathématiques. Par conséquent, quiconque étudie le principe du maximum se familiarise avec les équations aux dérivées partielles d'importance classique et découvre en même temps les raisons de leur importance.

Le principe du maximum nous permet d'obtenir des informations sur les solutions d'équations différentielles sans aucune connaissance explicite des solutions elles-mêmes. En particulier, le principe du maximum est un outil utile pour l'approximation de solutions, un sujet d'un grand intérêt pour de nombreux scientifiques.

Les principes maximaux des équations aux dérivées partielles peuvent être spécialisés aux fonctions d'une variable, et nous avons consacré le premier chapitre à un traitement de ce cas de dimension 1. L'énoncé des résultats et les preuves des théorèmes sont si simples que le lecteur devrait trouver cette introduction au sujet étonnamment facile. Bien entendu, le principe du maximum de dimension 1 est lié aux équations différentielles ordinaires du second ordre plutôt qu'aux équations aux dérivées partielles.

Dans le chapitre 2, nous établissons le principe du maximum pour les opérateurs elliptiques, énonçons plusieurs généralisations et donnons un certain nombre d'applications. Bien que le principe du maximum pour les équations de Pierre Simon de Laplace (1749 — 1827) et quelques autre soit connu depuis plusieurs années, c'est relativement récemment que Eberhard Frederich ferdinand Hopf (1902 — 1983) a établi des principes de maximum stricts pour les opérateurs elliptiques généraux du second ordre. Bon nombre des applications importantes que nous présentons utilisent ces résultats.

Table des matières

Remerciements i

Dédicace ii

Résumé iii

abstract iv

Notations v

Introduction générale vi

1 Principe maximum pour les équations différentielles ordinaires 1
- 1.1 Principe maximum en dimension 1 1
- 1.2 Principe du maximum généralisé 5
- 1.3 Problème à valeur initiale 7
- 1.4 Problème aux limites 8
- 1.5 Opérateurs non linéaires 10

2 Équation elliptiques 13
- 2.1 L'opérateur de Laplace 13
- 2.2 Le principe maximum de E.Hopf 15
- 2.3 Théorèmes d'unicité pour les problèmes de valeurs limites 20
- 2.4 Le principe du maximum généralisé 23

CHAPITRE 1

Principe maximum pour les équations différentielles ordinaires

1.1 Principe maximum en dimension 1

Une fonction continue $u(x)$ sur l'intervalle fermé $[a,b]$ prend un maximum en un point de cet intervalle. Si $u(x)$ a des dérivées secondes continues et que u a un maximum relatif au point c entre a et b $\left(u \in C^2]a,b[\cap C^0[a,b]\right)$, alors un calcul élémentaire montre que

$$u'(c) = 0 \text{ et } u''(c) \leq 0. \tag{1.1}$$

Supposons que dans l'intervalle ouvert $]a,b[$, on sache que u satisfait à l'inégalité suivante :

$$L[u] = u'' + g(x)u' > 0, \tag{1.2}$$

où $g(x)$ est une fonction bornée quelconque. Il est clair que la relation (1.1) ne peut être satisfaite à aucun point c de $]a,b[$. Par conséquent, lorsque (1.2) s'applique, la valeur maximale de u dans l'intervalle n'atteint nulle part ailleurs que l'extrême a ou b. C'est le cas le plus simple du principe de maximum.

En d'autre terme, on suppose que $u''+g(x)u'$ n'est jamais nul. Dans l'étude des équations différentielles et dans de nombreuses applications, une telle condition est trop stricte. Cependant, des inégalités moins strictes

$$u'' + g(x)u' \geq 0,$$

la solution est acceptée. Pour de telles solutions constantes, la valeur maximale est atteinte en tout point. Nous prouvons que c'est la seule exception.

Théorème 1.1
Soit $u \in \mathscr{C}^2(]a,b[)$ vérifiant l'inéquation différentielle suivante :

$$L[u] = u'' + g(x)u' \geq 0 \quad pour \quad a < x < b, \tag{1.3}$$

avec g est une fonction bornée sur $]a,b[$. Alors u atteigne son maximum M en l'une des extrémités de l'intervalle $[a,b]$. De plus s'il existe $c \in]a,b[$ telle que $u(c) = M$, alors $u \equiv M$.

Remarque 1 *Si u satisfait l'inégalité stricte*

$$u'' + g(x)u' > 0 \quad pour \quad a < x < b,$$

alors vous ne pouvez pas avoir un maximum antérieur. Parce que si u a un maximum à un point antérieur $c \in]a,b[$, ensuite par n'importe quel calcul élémentaire, nous devons avoir $u'(c) = 0$ et $u''(c) \leq 0$, ce qui contredit la stricte inégalité ci-dessus. Il est important pour les applications à considérer l'inégalité non stricte.

Preuve. [1]

Nous supposons que $u(c) = M$ et qu'il existe un point d dans $]a,b[$ tel que $u(d) < M$. Nous monterons que cela conduit à une contradiction. Pour plus de commodité, soit $d > c$. Nous définissons la fonction

$$z(x) = e^{\alpha(x-c)} - 1,$$

où α est une constante positive. On notera que $z(x) < 0$ pour $a < x < c$, $z(x) > 0$ lorsque $c < x < b$, et $z(c) = 0$. (Voir Figure 1.1)

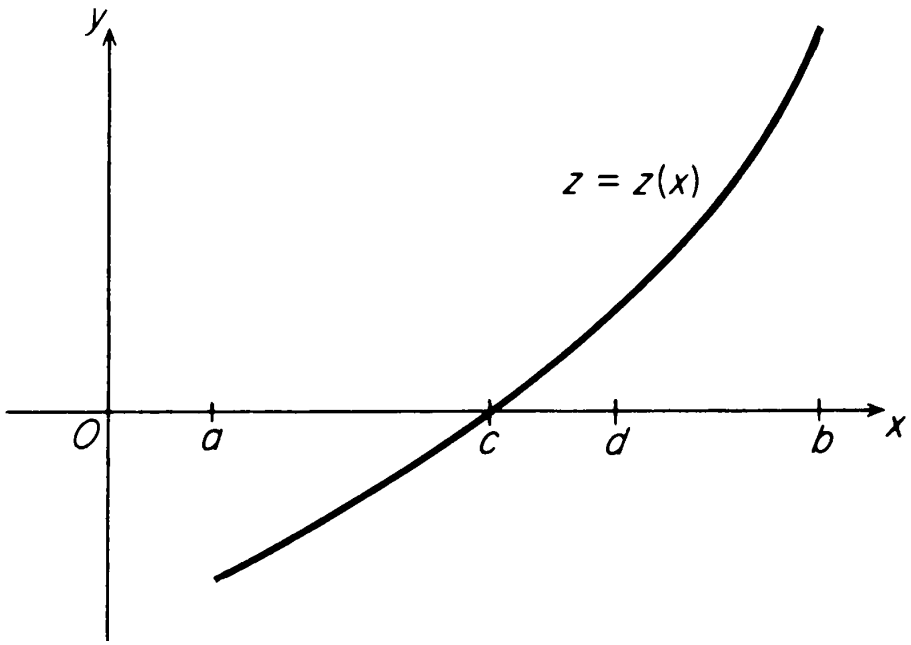


FIGURE 1.1 –

Après le calcul, on trouve

$$L[z] = z'' + g(x)z' = \alpha\left[\alpha + g(x)\right]e^{\alpha(x-c)}.$$

On choisit α de telle sorte que $a < x < d$, $L[z] > 0$. En d'autres termes, choisir α de telle sorte que l'inégalité suivante soit satisfaite

$$\alpha > -g(x),$$

puisque $g(x)$ est borné, nous pouvons toujours le faire. D'où

$$w(x) = u(x) + \epsilon z(x),$$

où ϵ est une constante positive choisie pour satisfaire l'inégalité

$$\epsilon < \frac{M - u(d)}{z(d)},$$

par l'hypothèse que $u(d) < M$ et le fait que $z(d) > 0$, on peut trouver un tel ϵ. Puis, comme z est négatif pour $a < x < c$ on a

$$w(x) < M \text{ pour } a < x < c,$$

par la définition de ϵ, on a

$$w(d) = u(d) + \epsilon z(d) < u(d) + M - u(d),$$

et par suite, on obtient

$$w(d) < M.$$

De plus, au point c, on a

$$w(c) = u(c) + \epsilon z(c) = M,$$

c'est-à-dire que w a une valeur maximale supérieure ou égale à M qui est atteint en un point intérieur d'intervalle $]a, d[$. Cependant,

$$L[w] = L[u] + \epsilon L[z] > 0,$$

par conséquent, d'après le résultat précédent sur l'inégalité stricte (1.2), w ne peut pas admettre un maximum sur $]a, d[$. Cela conduit à une contradiction.

Si $d < c$, alors la fonction auxiliaire

$$z = e^{-\alpha(x-c)} - 1,$$

avec $\alpha > g(x)$, on arrive à la même conclusion. ■

Théorème 1.2

Soit $u \in \mathscr{C}^2(]a, b[)$ vérifiant l'inéquation différentielle suivante :

$$u'' + g(x)u' \geq 0 \text{ dans }]a, b[,$$

avec g est une fonction localement bornée sur $]a, b[$. Supposons que u atteigne son maximum M en l'une des extrémités de l'intervalle $[a, b]$, $u \neq M$ sur $]a, b[$, et u est dérivable à droite de a et à gauche de b.

- *Si $u(a) = M$ et g est bornée inférieurement au voisinage de a. Alors $u'(a) < 0$.*
- *Si $u(b) = M$ et g est bornée supérieurement au voisinage de b. Alors $u'(b) > 0$.*

Preuve. [1]

Supposons que $u(a) = M$, $u(x) < M$ pour $a \leq x \leq b$, et pour un point d dans $]a,b[$, nous avons $u(d) < M$.

Nous définissons à nouveau la fonction auxiliaire

$$z(x) = e^{\alpha(x-a)} - 1 \quad \text{et} \quad \alpha > 0.$$

On choisit $\alpha > -g(x)$ pour $a \leq x \leq d$ tel que $L[z] > 0$. On forme alors la fonction

$$w(x) = u(x) + \epsilon z(x),$$

où ϵ est choisi tel que

$$0 < \epsilon < \frac{M - u(d)}{z(d)}.$$

Puisque $L[w] > 0$, la valeur maximale de w dans l'intervalle $[a,d]$ doit apparaître à une extrémité. Nous avons

$$w(a) = M > w(d),$$

donc le maximum se produit en a. Par conséquent, la dérivée unilatérale de w en a ne peut pas être positive

$$w'(a) = u'(a) + \epsilon z'(a) \leq 0.$$

Cependant

$$z'(a) = \alpha > 0,$$

donc

$$u'(a) < 0,$$

ce qui est le résultat souhaité.

L'argument est similaire si le maximum se produit à $x = b$. ■

Remarque 2

1. *Si la fonction u satisfaisant (1.3) a une valeur maximale relative en un point interne c, alors il y a un intervalle $]a_1, b_1[$ contenant c à l'intérieur, et $u(x) \leq u(c)$ existe sur cet intervalle. Alors le Théorème 1.1 montre que $u(x) = u(c)$ sur cet intervalle. En appliquant le Théorème 1.2 à tous les intervalles se terminant par c, on voit que la valeur $u(c)$ au maximum relatif est en fait la valeur minimale de u sur l'intervalle $]a,b[$.*
2. *Si la fonction u satisfaisant (1.3) a une valeur minimale relative en deux point c_1 et c_2 dans l'intervalle $]a,b[$, alors elle doit avoir une valeur maximale relative en un point compris entre c_1 et c_2. Alors de note 1. il résulte que $u(c) = u(c_2)$ et $u(x)$ est constant sur l'intervalle $]c_1, c_2[$.*
3. *la condition que la fonction g est borné est nécessaire pour la conclusion des théorèmes 1.1 et 1.2. L'équation*

$$u'' + g(x)u' = 0,$$

avec

$$g(x) = \begin{cases} \frac{-3}{x} & pour \ \ x \neq 0, \\ 0 & pour \ \ x = 0, \end{cases}$$

a la solution

$$u = 1 - x^4.$$

Le Théorème 1.1 est clairement violé sur l'intervalle $-1 \leq x \leq 1$, car u a un maximum à $x = 0$. Le Théorème 1.2 est violé sur $[0,1]$ comme $u'(0) = 0$. Les résultats des théorèmes 1.1 et 1.2 ne sont pas applicable car g n'est pas borné inférieurement dans $]0,1[$.

Théorème 1.3
Si $u(x)$ satisfait l'inégalité différentielle

$$(L+h)[u] = u'' + g(x)u' + h(x)u \geq 0, \tag{1.4}$$

et $h(x) \leq 0$ dans l'intervalle $]a,b[$, si g et h sont localement bornée, et si u atteigne son maximum $M > 0$ au point intérieur c, alors $u(x) \equiv M$.

Notez que si h n'est pas entièrement nul, la seule constante non négative M qui satisfait (1.4) est $M = 0$.

Théorème 1.4
Supposons que u une solution non constante de l'inégalité différentielle (1.4) avec des dérivées a droite de a et à gauche de b, $h(x) \leq 0$, et g et h localement bornée sur $]a,b[$.

- *Si u a un maximum strictement positif en a et que la fonction $g(x)+(x-a)h(x)$ est minorée en $x = a$, alors $u'(a) < 0$.*
- *Si u a le plus grand nombre strictement positif en b, alors $u'(b) > 0$ si $g(x)-(b-x)h(x)$ est majorée en $x = b$.*

En généralisant la preuve du Théorème 1.2 au Théorème 1.4, il suffit d'observer

$$\begin{aligned}(L+h)\left[e^{\alpha(x-a)}-1\right] &= e^{\alpha(x-a)}\left[\alpha^2+\alpha g+h\left(1-e^{-\alpha(x-a)}\right)\right],\\ &\geq e^{\alpha(x-a)}\left[\alpha^2+\alpha g+\alpha(x-a)h\right].\end{aligned}$$

Corollaire 1.1 *Si u est continu sur $[a,b]$ satisfaisant (1.4) dans $]a,b[$ avec $h(x) \leq 0$. Si $u(a) \leq 0$ et $u(b) \leq 0$, alors $u(x) < 0$ où $]a,b[$ sauf si $u \equiv 0$.*

1.2 Principe du maximum généralisé

Nous étudions l'inégalité différentielle

$$(L+h)[u] = u'' + g(x)u' + h(x)u \geq 0,\ a < x < b, \tag{1.5}$$

sans l'exigence que h soit négative. Supposons que nous puissions trouver une fonction w qui a des dérivées secondes continues sur $[a,b]$ et qui satisfait l'inégalité

$$w > 0, \text{ dans } [a,b], \tag{1.6}$$

$$(L+h)[w] \leq 0 \text{ dans }]a,b[. \tag{1.7}$$

Considérons le changement de variable

$$v = \frac{u}{w}.$$

Un calcul simple donne

$$\begin{aligned}(L+h)[u] &= (L+h)[vw],\\ &= (vw)'' + g(vw)' + h(vw),\\ &= (v'w + vw')' + g(v'w + vw') + h(vw),\\ &= v''w + v'w' + v'w' + vw'' + g(v'w + vw') + h(vw),\\ &= v''w + v'w' + v'w' + vw'' + gv'w + gvw' + hwv,\\ &= v''w + v'(w' + w' + gw) + (w' + gw' + hv)v,\\ &= v''w + v'(2w' + gw) + (L+h)[w]v.\end{aligned}$$

En divisant par la quantité positive w, nous voyons que v satisfait l'inégalité différentielle

$$v'' + \left(2\frac{w'}{w} + g\right)v' + \frac{1}{w}(L+h)[w]v \geq 0. \tag{1.8}$$

Les inégalités (1.8), (1.6) et (1.7) montrent que $v = \dfrac{u}{w}$ satisfait les théorèmes 1.3 et 1.4.

Théorème 1.5
Soit l'opérateur $L+h$ défini par (1.5) avec h est bornée et g est minorée. Pour tout intervalle $[a,b]$, il existe une fonction w vérifiant (1.6) et (1.7). Alors si u solution de (1.5) dans $]a,b[$, alors la fonction $\dfrac{u}{w}$ satisfait le principe maximum donné par les théorèmes 1.3 et 1.4.

Remarque 3 *Le Théorème 1.5 montre qu'une fonction u qui satisfait (1.5) ne peut pas osciller trop rapidement, car si $u > 0$ entre deux de ses zéros $x = a$ et $x = b$, alors $\dfrac{u}{w}$ doit avoir un maximum positif entre eux.*

Si u est une solution de l'équation $u'' + g(x)u' + h(x)u = 0$, nous pouvons appliquer le même raisonnement à u et $-u$ pour voir que u peut avoir au plus un zéro dans n'importe quel intervalle $]a,b[$ où le Théorème 1.5 est valable. Nous constatons donc que deux zéros (entre lesquels u est négatif) dans tout intervalle $]a,b[$ où le Théorème 1.5 est vérifié.

Soit $r(x)$ une solution de l'équation différentielle

$$r'' + g(x)r' + h(x)r = 0, \tag{1.9}$$

avec g et h fonctions bornées. Supposons que r ne soit pas identiquement nul et

$$r(a) = 0$$

A la lumière de la remarque qui suit le théorème 1.5, il résulte que r ne s'évanouit pas à une certaine distance à la droite de a. Si r a des zéros à la droite de a, nous désignons le premier par a^* et l'appelons le point conjugué de a. Ainsi r est de signe dans l'intervalle $]a,a^*[$, et pour plus de commodité, nous supposons que

$$r(x) > 0 \quad pour \quad a < x < a^*.$$

Si $w > 0$ sur $[a,a^*]$, la fonction $\dfrac{r}{w}$ disparaît en a et a^* et est positive en $]a,a^*[$. Il a donc un maximum en $]a,a^*[$. Par conséquent, d'après le Théorème 1.5, w ne peut pas satisfaire

(1.7). *Par contre, si b est un point quelconque de $]a,a^*[$, on peut trouver une fonction w telle que $\frac{r}{w}$ satisfait le principe du maximum du Théorème 1.5. Pour voir cela, nous observons d'abord que $r(x)$ est borné par un nombre positif sur tout sous intervalle $[c,b]$ contenu dans $]a,a^*[$. Ainsi, pour $\epsilon>0$ suffisamment petit, la fonction*

$$w(x)=r(x)+\epsilon\left[2-e^{\alpha(x-a)}\right],$$

est positive sur $[a,b]$. Si nous choisissons α de telle sorte que $(L+h)\left[2-e^{\alpha(x-a)}\right]\leq 0$ dans $]a,b[$, alors w est une fonction pour laquelle le Théorème 1.5 est valable.

Nous concluons que si a^* est le point de conjugué de a, alors il existe $w>0$, de sorte que le Théorème 1.5 est valable pour l'intervalle $[a,b]$ si et seulement si $b<a^*$. Si $r(x)$ (solution (1.9) qui satisfait $r(a)=0$) n'a pas de zéro à droite de a, nous définissons $a^*=\infty$ et le Théorème 1.5 est valable pour chaque intervalle $[a,b]$.

Si $h(x)$ est non borné ou si g n'est pas minorée, il ne peut avoir aucun intervalle $[a,b]$ pour lequel le Théorème 1.5 est valable. Par exemple, la fonction

$$u=x\sin\left(\frac{1}{x}\right),$$

satisfait

$$u''+x^{-4}u=0.$$

Nous voyons que u disparaît à $x=\frac{1}{n\pi}$, $n=1,2,...$, et donc il ne peut avoir aucune fonction $w>0$ avec la propriété que $\frac{u}{w}$ satisfait un principe maximum dans l'un des intervalles $\left[0,\frac{1}{n\pi}\right]$, $n=1,2,....$

1.3 Problème à valeur initiale

On dit que la solution de l'équation différentielle

$$u''+g(x)u'+h(x)u=f(x), \tag{1.10}$$

est une solution de l'équation différentielle

$$u(a)=\gamma_1, \qquad u'(a)=\gamma_2. \tag{1.11}$$

La fonction f,g et h est donnée dans l'intervalle $]a,b[$, g et h sont bornés. Lorsque la solution de (1.10) dans l'intervalle $]a,b[$ satisfait la condition (1.11), on dit que le problème de la valeur initiale est résolu.

Théorème 1.6
Supposons que $u_1(x)$ et $u_2(x)$ soient des solutions de (1.10) dans l'intervalle $]a,b[$ et que u_1 et u_2 satisfassent la même condition initiale (1.11). Alors $u_1\equiv u_2$ dans $]a,b[$.

Preuve. [1]
En définissant $u(x)=u_1(x)-u_2(x)$ satisfait l'équation

$$u''+g(x)u'+h(x)u=0,$$

avec la condition initiale

$$u(a) = u'(a) = 0.$$

Une contradiction apparaît.

D'après le Théorème 1.5, il existe $\epsilon > 0$ dont l'amplitude ne dépend que de g et h, il existe une fonction positive w telle que le maximum de $\frac{u}{w}$ dans l'intervalle $]a, a+\epsilon[$ se produit à une valeur extrême. u satisfait les mêmes conditions initiales. Par conséquent, d'après le Théorème 1.5, cela signifie également que le maximum de $\frac{-u}{w}$ doit se produire à l'une des extrémités a ou $a+\epsilon$. Cependant, si $x = a$

$$\left(\frac{u}{w}\right)' = \frac{u'w - uw'}{w^2} = 0.$$

puisque $\frac{u}{w}$ satisfait le Théorème 1.4, nous concluons que $\frac{u}{w}$ est une constante. $u(a) = 0$, donc cette constante n'est nulle. Cela signifie que u est d'équivalence nulle sur l'intervalle $[a, a+\epsilon]$. En particulier

$$u(a+\epsilon) = 0, \qquad u'(a+\epsilon) = 0.$$

Nous pouvons maintenant répéter l'argument pour conclure que $u \equiv 0$ dans $]a+\epsilon, a+2\epsilon[$, ϵ étant inchangé, puisque sa taille ne dépend que des bornes de g et h dans $]a, b[$. Nous n'avons besoin d'effectuer ce processus qu'un nombre fini de fois pour en déduire que $u \equiv 0$ dans $]a, b[$. ■

1.4 Problème aux limites

Le problème de valeur limite le plus simple consiste à trouver la solution de l'équation suivante

$$u'' + g(x)u' + h(x)u = f(x), \tag{1.12}$$

dans un intervalle $]a, b[$ comme condition limite

$$u(a) = \gamma_1, \qquad u(b) = \gamma_2. \tag{1.13}$$

La question de l'unicité de la solution de (1.12) satisfaisant (1.13) peut être résolue en utilisant le principe du maximum. Cependant, la situation n'est pas aussi simple que dans le cas des problèmes de valeur initiale. L'équation simple

$$u'' + u = 0,$$

a les solutions $u_1 = \sin x$ et $u_2 = 0$ lorsque $0 \leq x \leq \pi$ et les deux solutions satisfont la condition limite $u(0) = u(\pi) = 0$ le résultat suivant donne le théorème d'unicité le plus simple pour les problèmes de valeurs limites.

Théorème 1.7
Supposons que $u_1(x)$ et $u_2(x)$ des solutions de (1.12) satisfaisant la condition aux limites (1.13). Si $h(x) \leq 0$ dans $]a,b[$, alors $u_1 \equiv u_2$.

Preuve. [1]
Soit $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ puis u valide l'équation

$$u'' + g(x)u' + hu = 0, \tag{1.14}$$

et les conditions aux limites

$$u(a) = u(b) = 0.$$

Le Théorème 1.3 montre que $u(x) \leq 0$ dans $]a,b[$. Puisque la fonction $-u(x)$ satisfait la même équation avec les mêmes conditions aux limites, nous pouvons appliquer le Théorème 1.3 à $-u(x)$ pour conclure que $-u \leq 0$ dans $]a,b[$. C'est donc $u = 0$ pour $]a,b[$.

Ici, nous abordons un problème de valeur limite plus général, un qui contient les conditions aux limites (1.13) comme cas particulier. Considérons la solution de (1.12) qui satisfait la condition aux limites

$$\begin{cases} -u'(a)\cos\theta + u(a)\sin\theta = \gamma_1, \\ u'(b)\cos\phi + u(b)\sin\phi = \gamma_2, \end{cases} \tag{1.15}$$

où $\gamma_1, \gamma_2, \theta$ et ϕ sont des constantes définies comme suit $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, avec la condition (1.15) réduire à (1.13) lorsque $\theta = \phi = \frac{\pi}{2}$. ■

Théorème 1.8
Supposons $u_1(x)$ et $u_2(x)$ sont les deux solutions de (1.12) satisfaisant la condition aux limites (1.15). Si $h(x) \leq 0$ dans $]a,b[$, alors $u_1 \equiv u_2$ sauf $h \equiv 0, \theta = \phi = 0$, , auquel cas u_1 et u_2 peuvent différer par des constantes.

Preuve. [1]
Comme mentionné, si vous définissez $u = u_1 - u_2$, u satisfait à la condition aux limites avec (1.14) ■

$$\begin{cases} -u'(a)\cos\theta + u(a)\sin\theta = 0, \\ u'(b)\cos\phi + u(b)\sin\phi = 0. \end{cases} \tag{1.16}$$

La fonction constante non nulle $u \equiv M$ satisfait à ces conditions si et seulement si $h \equiv 0, \theta = 0$ et $\phi = 0$. Si nous supposons que u est une solution positive non constante à un instant donné, alors une contradiction apparaît. Par le Théorème 1.3, u atteint un maximum positif en a ou b. Supposons que la valeur maximale se produise en a. $u'(a) < 0$. Puisque $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ et $u(a) > 0$, théorème montrant qu'il viole la première condition de (1.16). De même, si le maximum se produit en b, il viole la deuxième condition de (1.16). Nous concluons que toute solution non constante ne peut jamais être positive. Le même raisonnement appliqué à $-u$ montre que u ne sera jamais négatif. Donc $u \equiv 0$ sur $[a,b]$.

Sans la restriction que $h(x)$ n'est pas positif, vous devez être prudent lorsque vous discutez des conditions exactes impliquées. Par exemple, une équation simple

$$u'' + u = 0.$$

Pour la condition aux limite $u(a) = u(b) = 0$, on n'obtient la solution $u \equiv 0$ que si $b - a < \pi$. Par contre, si $b - a = \pi$, on sait que le résultat est faux.

Le résultat spécifique dans de tels cas est obtenu par application du principe du maximum généralisé donné dans le Théorème 1.5.

Théorème 1.9
Supposons que $u_1(x)$ et $u_2(x)$ soient des solutions à (1.12) qui satisfont la même condition aux limites (1.13). Si $b < a^*$ où a^* est le point conjugué de a, alors $u_1 \equiv u_2$.

La preuve du Théorème 1.9 est une répétition de la preuve du théorème 1.7, sauf que le principe maximal donné dans le Théorème 1.5 est utilisé. Noter que par définition du point conjugué, l'unicité échoue lorsque $b = a^*$.

1.5 Opérateurs non linéaires

De nombreux résultats établis pour les opérateurs différentiels linéaires peuvent être étendus aux opérateurs non linéaires. $u(x)$ est une équation linéaire

$$u'' + H(x, u, u') = 0, \tag{1.17}$$

sur l'intervalle $a \le x \le b$. les fonctions

$$H(x, y, z), \qquad \frac{\partial H(x, y, z)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial H(x, y, z)}{\partial z},$$

est supposée être une fonction continue de x, y et z dans tout les domaines de définition. On suppose en outre que pour chaque x et z

$$H(x, y_1, z) \le H(x, y_2, z) \text{ pour } y_1 \ge y_2, \tag{1.18}$$

ou équivalent

$$\frac{\partial H}{\partial y} \le 0.$$

On observe que si

$$H(x, u, u') = g(x)u' + h(x)u - f(x),$$

alors (1.17) est une équation linéaire. La condition (1.18) devient alors $h(x) \le 0$. Supposons que $w(x)$ satisfasse l'inégalité différentielle

$$w'' + H(x, w, w') \ge 0, \tag{1.19}$$

dans $]a, b[$. Nous considérons la fonction

$$v = w - u,$$

et soustraire (1.17) de (1.19)

$$v'' + H(x, w, w') - H(x, u, u') \ge 0.$$

En appliquant le théorème de la valeur moyenne à H ci-dessus on obtient

$$v'' + \frac{\partial H}{\partial z} v' + \frac{\partial H}{\partial y} v \ge 0.$$

Théorème 1.10
Supposons que

$$w'' + H(x, w, w') \geq u'' + H(x, u, u') \qquad a < x < b, \tag{1.20}$$

où $H, \dfrac{\partial H}{\partial y}$ *sont continues et* $\dfrac{\partial H}{\partial y} \leq 0$. *Si* $w(x) - u(x)$ *atteint un maximum* $M > 0$ *en* $]a, b[$, *alors* $w(x) - u(x) \equiv M$.

Notez que si H dépend de x et z, mais pas de y, nous pouvons ajouter n'importe quelle constante à w sans changer (1.20). Dans ce cas, l'hypothèse de $M > 0$ dans le théorème 1.10 peut être supprimée.

Le Théorème 1.4 peut être généralisé de la même manière.

Théorème 1.11
Soit $u(x)$ *la solution du problème des valeurs limites*

$$u'' + H(x, u, u') = 0 \ \ pour \quad a < x < b, \tag{1.21}$$

$$\begin{cases} -u'(a)\cos\theta + u(a)\sin\theta = \gamma_1, \\ u'(b)\cos\phi + u(b)\sin\phi = \gamma_2, \end{cases} \tag{1.22}$$

où $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ *et* θ *et* ϕ *sont tous deux non-nuls, supposons que* $H, \dfrac{\partial H}{\partial y}, \dfrac{\partial H}{\partial z}$ *sont continus et* $\dfrac{\partial H}{\partial y} \leq 0$. *Si* $z_1(x)$ *satisfait*

$$\begin{aligned} &z_1'' + H(x, z_1, z_1') \leq 0, \\ &-z_1'(a)\cos\theta + z_1(a)\sin\theta \geq \gamma_1, \\ &z_1'(b)\cos\phi + z_1(b)\sin\phi \geq \gamma_2, \end{aligned}$$

et z_2 *satisfait*

$$\begin{aligned} &z_2'' + H(x, z_2, z_2') \geq 0, \\ &-z_2'(a)\cos\theta + z_2(a)\sin\theta \leq \gamma_1, \\ &z_2'(b)\cos\phi + z_2(b)\sin\phi \leq \gamma_2, \end{aligned}$$

puis les bornes supérieure et inférieure

$$z_2(x) \leq u(x) \leq z_1(x),$$

sont valides.

Ce théorème implique que la solution de (1.21) satisfaisant la condition limite (1.22) doit être unique. En effet, si u et $\tilde{u}$ sont des solutions, alors $z_1 = z_2 = \tilde{u}$ trouve $u = \tilde{u}$. Le Théorème 1.11 explique comment trouver des bornes numériques pour la solution de (1.21).

Exemple 1 *trouver des bornes pour la solution* $u(x)$ *de*

$$u'' - u^3 = 0 \ \ pour \ \ 0 < x < 1,$$

ceci satisfait les conditions limites

$$u(0)=0,\ \ u(1)=1.$$

Nous choisissons

$$z_1=x,\ \ z_2=x^{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}.$$

Après

$$z_1''-z_1^3=-x^3\le 0,\ \ z_2''-z_2^3=x^{\frac{-(3-\sqrt{5})}{2}}-x^{3\frac{(1+\sqrt{5})}{2}}\ge 0.$$

Donc

$$x^{\frac{(1+\sqrt{5})}{2}}\le u(x)\le x.$$

Théorème 1.12

Supposons que $u(x)$ *satisfasse*

$$u''+H(x,u,u')=0, \tag{1.23}$$

avec les conditions initiale

$$u(a)=\gamma_1,\ \ u'(a)=\gamma_2, \tag{1.24}$$

$H, \dfrac{\partial H}{\partial y}, \dfrac{\partial H}{\partial z}$ *sont continues et* $\dfrac{\partial H}{\partial y}\le 0$. *Si* $z_1(x)$ *satisfait*

$$z_1''+H(x,z_1,z_1')\ge 0,$$
$$z_1(a)\ge\gamma_1,\ \ z_1'(a)\ge\gamma_2,$$

et $z_2(x)$ *satisfait*

$$z_2''+H(x,z_2,z_2')\le 0,$$
$$z_2(a)\le\gamma_1,\ \ z_2'(a)\le\gamma_2,$$

Ensuite, nous avons les bornes supérieure et inférieure

$$z_2(x)+\gamma_2-z_2(a)\le u(x)\le z_1(x)+\gamma_1-z_1(a),$$
$$z_2'(x)\le u'(x)\le z_1'(x).$$

L'unicité de la solution u de (1.23), (1.24) découle à nouveau du choix de $z_1=z_2=\tilde{u}$ où $\tilde{u}$ est une autre solution supposée de (1.23),(1.24). Alors $\tilde{u}\equiv u$.

CHAPITRE 2

Équation elliptiques

2.1 L'opérateur de Laplace

Soit $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ est une fonction deux fois continûment différentiable définie sur un domaine D d'un espace euclidien à n dimensions ($u(x) \in C^2(D)$). L'opérateur de Laplace ou laplacien Δ est défini comme suit

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Si l'équation $\Delta u = 0$ est satisfaite en tout point du domaine D, on dit que u est harmonique en D, ou simplement que u est une fonction harmonique.

Supposons que u ait un maximum local en un point interne de D. Deuxièmement, par calcul élémentaire à ces points

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \ ..., \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0,$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \leq 0, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \leq 0, \ ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \leq 0.$$

Par conséquent, au maximum local, l'inégalité

$$\Delta u \leq 0,$$

doit tenir. Le raisonnement ci-dessus conduit à l'affirmation. Si une fonction u satisfait l'inégalité stricte

$$\Delta u > 0,$$

en chaque point d'un domaine D, alors u ne peut atteindre son maximum en aucun point intérieur de D. Supposons que $b_1(x_1, x_2, ..., x_n), b_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., b_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ sont des fonctions bornées définies dans D. Sans aucun changement dans l'argument ci-dessus, nous concluons que si u satisfait l'inégalité stricte

$$\Delta u + b_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + ... + b_n \frac{\partial u}{\partial x_n},$$

dans D, u n'est jamais maximal en un point interne.

Théorème 2.1: Théorème de la valeur moyenne
u est harmonique dans D (un espace euclidien à n dimensions), alors $u(\tilde{x},\tilde{y})$ est égal à sa valeur moyenne dans tout cercle de D centré sur $(\tilde{x},\tilde{y})$. C'est-à-dire

$$u(\tilde{x},\tilde{y}) = \frac{1}{2\pi R}\int_{c_R} u\,ds.$$

Pour obtenir le principe du maximum, supposons que u satisfait l'inégalité

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \geq 0,$$

dans D et atteint sa valeur maximale M en un point (x_0, y_0) dans D.

Puisque $u \leq M$ et $u(x_0, y_0) = M$, nous concluons de

$$u(\tilde{x},\tilde{y}) \leq \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi} u(R,\theta)R\,d\theta = \frac{1}{2\pi R}\int_{c_R} u\,ds, \tag{2.1}$$

que u doit être identiquement égal à M sur tous les cercles centrés sur (x_0, y_0) et situés dans D. Supposons qu'il existe un point (x_1, y_1) dans D tel que $u < M$, alors il en va de même dans un voisinage de (x_1, y_1). On relie (x_1, y_1) avec (x_0, y_0) par une courbe dans D et soit (x_2, y_2) soit le premier point de cette courbe où $u = M$ (voir Figure 2.1). Alors, u n'est pas identiquement égal à M sur tout cercle suffisamment petit centré en (x_2, y_2). Ainsi, en contradiction avec l'inégalité (2.1), le résultat suivant s'applique.

Théorème 2.2: Principe maximum
Soit

$$\Delta u \geq 0 \ \text{ dans } D.$$

Si u atteint maximum M en tout point de D, alors $u \equiv M$ dans D.

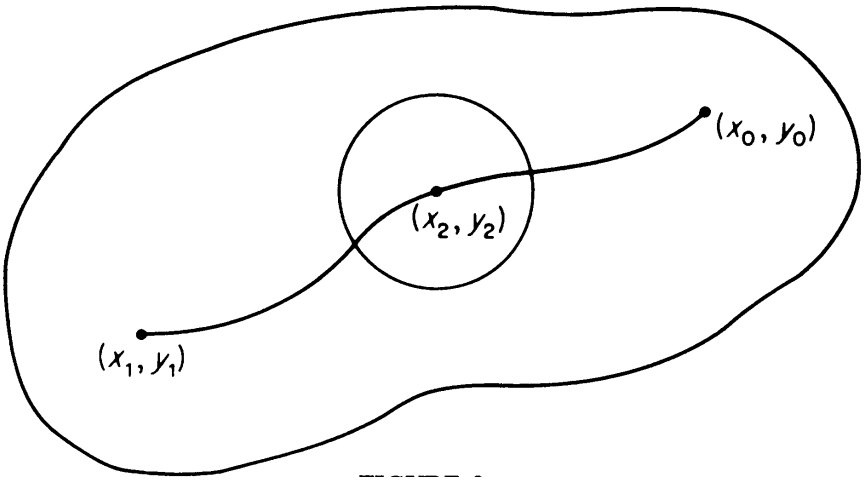


FIGURE 2.1 –

Nous ne supposons pas que le domaine D est borné. Si la frontière de D est ∂D, et si u est continue sur $D \cup \partial D$ et non constante, alors si D est borné, les valeurs de u dans D sont plus petites que la valeur maximale de u sur ∂D, si D est non borné, ces valeurs sont inférieures au maximum de u sur ∂D, soit inférieures à la limite supérieure $*$ de u lorsque $\left(x^2+y^2\right)$ tend vers l'infini.

Le principe du minimum correspondant s'applique aux fonctions qui satisfont à l'inégalité suivante

$$\Delta u \leq 0,$$

(obtenue en appliquant le Théorème 2.2 à la fonction $-u$), on peut conclure qu'une fonction harmonique non constante n'atteint ni maximum ni minimum en aucun point intérieur de D.

Définition 2.1

Une fonction u qui satisfait $\Delta u \geq 0$ dans un domaine D est dite sousharmonique dans D, ou simplement une fonction sousharmonique. u est dite super harmonique si elle satisfait $\Delta u \leq 0$ parce que $-u$ est sousharmonique

2.2 Le principe maximum de E.Hopf

Considérons l'égalité différentielle stricte

$$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} > 0. \tag{2.2}$$

Si L est elliptique, une fonction u qui satisfait (2.2) dans un domaine D ne peut pas avoir de maximum dans D.

Comme dans le cas de dimension 1, nous étendrons le principe du maximum pour inclure la possibilité que $L[u]$ satisfasse une inégalité qui peut ne pas être stricte.

Théorème 2.3
Soit $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ satisfont l'inégalité différentielle

$$L[u] = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \geq 0,$$

dans un domaine D où L est uniformément elliptique. Supposons que les coefficients a_{ij} et b_i soient uniformément bornés. Si u atteint un maximum M en un point de D, alors $u \equiv M$ en D.

Preuve. [1]

Supposons que $u = M$ à un certain point P de D et que $u < M$ en autre point Q de D. Nous établirons une contradiction. Construire un arc γ dans D s'etendant de Q à P (voir Figure 2.2). Le premier point de γ où $u = M$ est noté R.c'est à dire $u < M$ pour la partie γ, entre Q et R et $u(R) = M$. Soit $d > 0$ la plus grande limite inférieure de la distance entre tout point de γ et tout point de la frontière de D. On considère un point P_1 dans la partie QR de γ à distance inférieure ou égale à $\frac{1}{2}d$ de R. et construisons la plus grande boule de centre

P_1 dans laquelle $u < M$. Cette boule (appelée K) aura un rayon inférieur à $\frac{1}{2}d$ et se situera donc entièrement dans D. Soit S un point sur la frontière ∂K de K tel que $u = M$ en S.

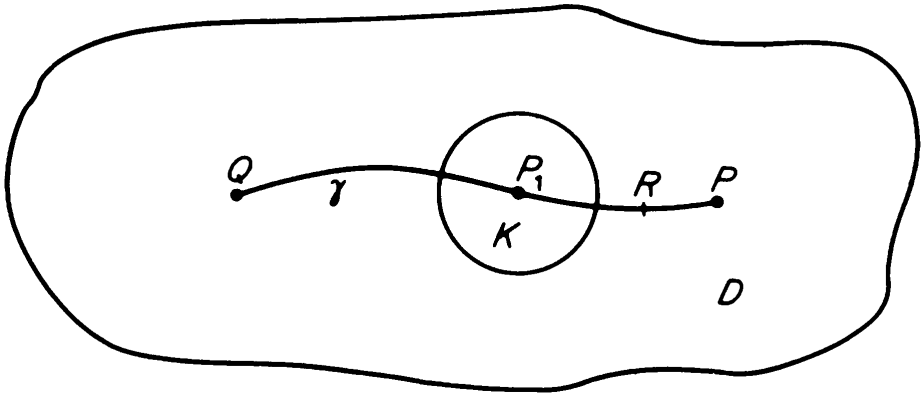


FIGURE 2.2 –

Par continuité, il doit avoir au moins un de ces points. Il peut en avoir plusieurs construisent la boule K_1 tangente à ∂K en S et se trouvant autrement complètement dans K.(voir Figure 2.3). En désignant la limite de K_1 par ∂K_1, nous observons que $u < M$ dans K_1 et sur ∂K_1 sauf au point unique S où $u = M$. Le rayon de K_1 sera noté r_1.

Nous réalisons encore une autre construction. Une boule K_2 de limite ∂K_2 et de rayon $r_2 = \frac{1}{2}$ est dessinée de centre en S.(voir Figure 2.4). On note $C_2^{'}$ la partie de ∂K_2 à l'intérieur de K_1 et sur ∂K_1. Autrement dit, la surface $C_2^{'}$ inclut sa frontière, qui est l'intersection de ∂K_2 et ∂K_1. La partie de ∂K_2 en dehors de ∂K_1 que nous appelons $C_2^{''}$.

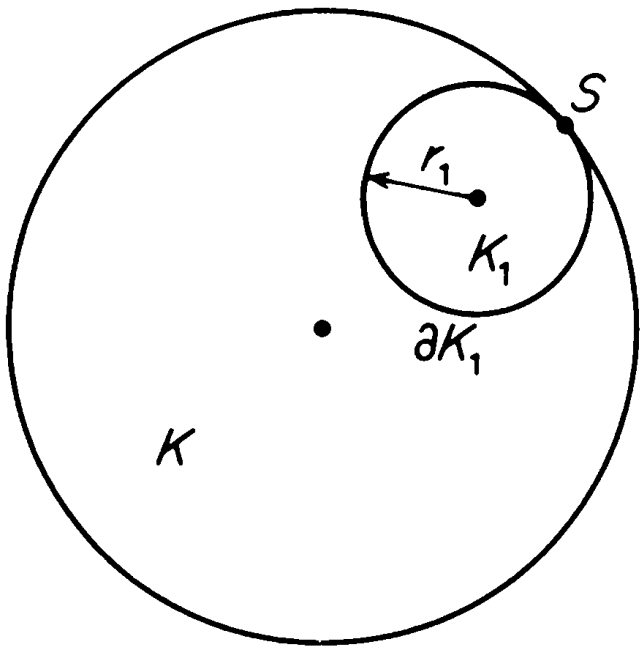


FIGURE 2.3 –

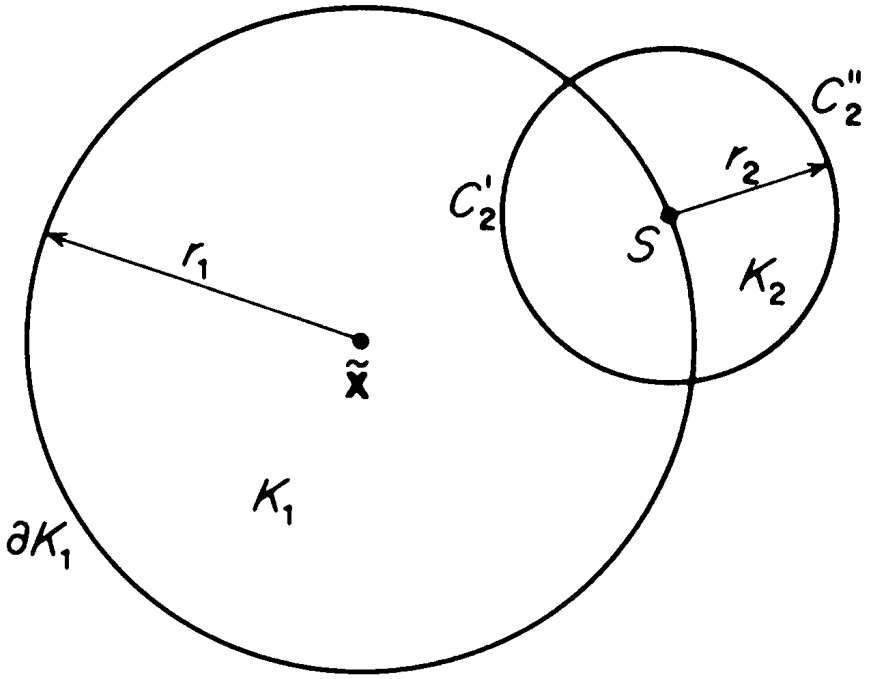


FIGURE 2.4 –

Puisque $u < M$ sur l'ensemble fermé $C_2^{'}$, il y a une constante Γ telle que

$$u \leq M - \Gamma \quad \text{sur } C_2^{'}.$$

Cela découle du fait qu'une fonction continue sur un ensemble borné et fermé prend son maximum. D'autre part, parce que $u \leq M$ partout, on sait que

$$u \leq M \quad \text{sur } C_2^{''}.$$

Soit le centre de K_1 noté $\tilde{x} = (\tilde{x_1}, \tilde{x_2}, ..., \tilde{x_n})$. Nous définissons la fonction auxiliaire

$$z(x) = e^{-\alpha \sum_{i=1}^{n} (x_i - \tilde{x_i})^2} - e^{-\alpha r_1^2}, \tag{2.3}$$

où α est une constante positive à déterminer. Il est alors clair que

$$\begin{aligned} z &> 0 \text{ dans } K_1, \\ z &= 0 \text{ sur } \partial K_1, \\ z &< 0 \text{ extérieur } K_1. \end{aligned}$$

Nous calculons

$$L[z] = e^{-\alpha \sum_{i=1}^{n} (x_i - \tilde{x_i})^2} \left[4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \left(x_i - \tilde{x_j}\right)\left(x_j - \tilde{x_j}\right) - 2\alpha \sum_{i,j=1}^{n} [a_{ii} + b_i (x_i - \tilde{x_i})] \right],$$

De l'ellipticité uniforme de l'opérateur L, il résulte que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} (x_i - \tilde{x_i})(x_j - \tilde{x_j}) \geq \mu_0 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \tilde{x_i})^2,$$

depuis

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\tilde{x}_i)^2>\frac{1}{4}r_1^2$$

en K_2, nous concluons pour x dans K_2

$$L[z]\geq \alpha e^{-\alpha\sum_{i=1}^{n}(x_i-\tilde{x_i})^2}\left[\alpha\mu_0 r_1^2-2\sum_{i=1}^{n}[a_{ii}+b_i(x_i-\tilde{x}_i)]\right].$$

En choisissant α une quantité suffisamment grande, on rend la quantité entre accolades au-dessus positive et on obtient ainsi

$$L[z]>0 \quad \text{dans } K_2.$$

Comme dans la preuve du Théorème 1.1 du chapitre 1, on forme la fonction

$$w=u+\epsilon z,$$

avec ϵ tel que

$$0<\epsilon<\frac{\Gamma}{1-e^{-\alpha\gamma_1^2}}.$$

La fonction w possède les propriétés suivantes :

1. $w<M$ sur $C_2^{'}$. Pour s'en convaincre, il faut d'abord noter que

   $$0\leq z<1-e^{-\alpha\gamma_1^2}.$$

   Donc $\epsilon z<\Gamma$ et $u\leq M-\Gamma$ sur $C_2^{'}$. En additionnant ces inégalités, on obtient $w<M$ sur $C_2^{'}$.
2. $w<M$ sur $C_2^{''}$. Ceci suit parce que $z<0$ sur $C_2^{''}$ et $u\leq M$ partout.
3. $w=M$ dans S, le centre de K_2. Cette affirmation est vraie, car par hypothèse $u=M$ en S, et par construction $z=0$ en S.

   Sur la base des propriétés 1., 2.,3.,w a un maximum quelque part à l'intérieur de la boule K_2. D'autre part,

   $$L[w]=L[u]+\epsilon L[z] \quad \text{en } K_2.$$

Par conséquent, si L est elliptique, aucun maximum n'apparaît dans K_2. Une contradiction est atteinte et le théorème est prouvé. ■

Théorème 2.4
Soit u satisfaire l'inégalité différentielle

$$(L+h)[u]\geq 0,$$

avec $h\leq 0$, L uniformément elliptique en D, et avec les coefficients de L et h bornés. Si u atteint un maximum $M\geq 0$ en un point intérieur de D, alors $u\equiv M$.

Preuve. [1] La preuve du Théorème 2.4 suit exactement la même procédure que la preuve du Théorème 2.3. La fonction auxiliaire z et la quantité positive ϵ sont définies de la même manière. Comme précédemment, une contradiction découle de l'observation qu'une fonction w satisfaisant l'inégalité $(L+h)[w]>0$ dans un domaine ne peut pas avoir de maximum non négatif si $h\leq 0$. ■

Théorème 2.5
Soit u satisfaire l'inégalité

$$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \geq 0,$$

dans un domaine D dans lequel L est uniformément elliptique. Supposons que $u \leq M$ dans D et que $u = M$ à un point limite P. Supposons que P se trouve à la frontière d'une boule K_1 dans D. Si u est continu dans $D \cup P$ et qu'une dérivée directionnelle vers l'extérieur $\frac{\partial u}{\partial v}$ existe à P, alors

$$\frac{\partial u}{\partial v} \quad \text{à } P,$$

sauf si $u \equiv M$.

Preuve. [1] Nous procédons comme dans la preuve du Théorème 2.3. En rétrécissant légèrement K_1 si nécessaire, nous pouvons supposer que ∂K_1 réside entièrement dans $D \cup P$. Construisez une boule K_2 avec un centre en P et un rayon $\frac{1}{2} r_1$ où r_1 est le rayon de K_1 (voir Figure 2.5). Définissez la fonction z selon (2.3), en sélectionnant α si grand que $L[z] > 0$ dans K_2. La fonction

$$w = u + \epsilon z,$$

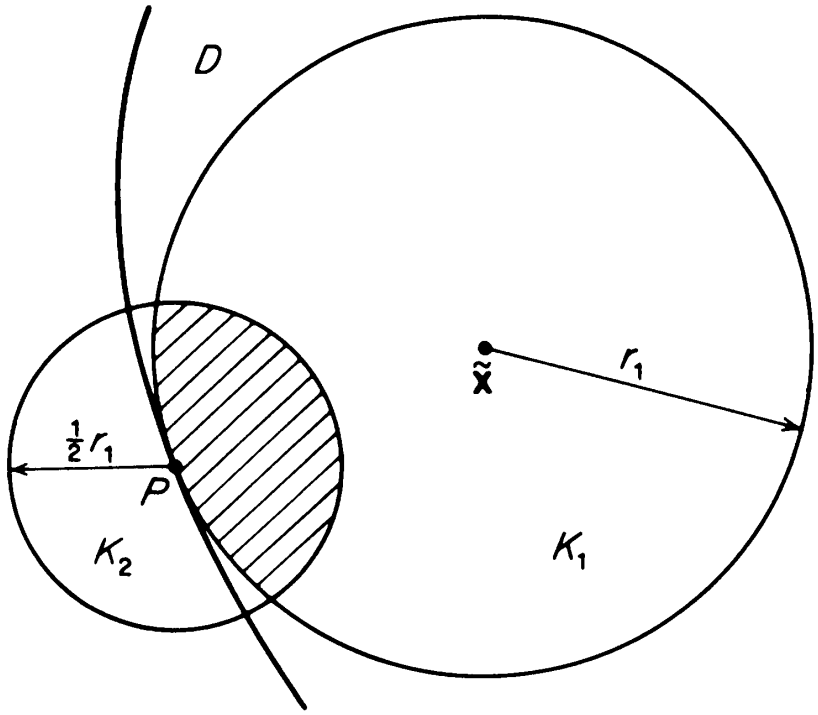


FIGURE 2.5 –

est désormais constitué. D'après le Théorème 2.3, si $u \neq M$, alors $u < M$ dans K_1 et sur sa frontière sauf au point P. Rappelons que $z = 0$ sur la frontière de K_1. On sélectionne $\epsilon > 0$ est petit que $w \leq M$ sur la partie de la frontière de K_2 se trouvant dans K_1. Puis $w \leq M$ sur

toute limite de la région. parce que $L[w]>0$ dans cette région et que la valeur maximale de w se produit en P et $w(P)=M$. Par conséquent, à P

$$\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial u}{\partial v}+\epsilon\frac{\partial z}{\partial v}\geq 0.$$

Nous allons maintenant montrer que $\dfrac{\partial z}{\partial v}<0$ en P, donc que $\dfrac{\partial u}{\partial v}>0$ en cet endroit. En sélectionnant $\tilde{x}$ comme origine de notre système de coordonnées et en laissant r représenter la distance euclidienne de $\tilde{x}$, nous avons

$$z=e^{-\alpha r^2}-e^{-\alpha r_1^2}.$$

puis

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}=-2\alpha x_i e^{-\alpha r^2},$$

et

$$\eta_i=\frac{x_i}{r},$$

Ainsi

$$\frac{\partial z}{\partial v}=-2\alpha r e^{-\alpha r^2}\sum_{i=1}^{n}v_i\eta_i<0,$$

donc $\dfrac{\partial u}{\partial v}>0$, établissant la conclusion du théorème.

La preuve du Théorème 2.5 fonctionne également pour l'opérateur $L+h$ avec $h\leq 0$, à condition que $M\geq 0$ et α soient choisi si grand que $(L+h)[z]>0$. ■

Théorème 2.6
Soit u satisfaire l'inégalité

$$(L+h)[u]\geq 0,$$

où L est l'opérateur du Théorème 2.5, et $h(x)\leq 0$ dans D. Supposons que $u\leq M$ dans D, que $u=M$ à un point limite P, et que $M\geq 0$. Supposons que P se trouve à la limite d'une boule dans D. Si u est continue dans $D\cup P$, toute dérivée directionnelle vers l'extérieur de u à P est positive sauf si $u\equiv M$ dans D.

2.3 Théorèmes d'unicité pour les problèmes de valeurs limites

Nous commençons par étudier l'un des problèmes de valeur limites les plus simples pour les équations aux dérivées partielles du second ordre. Sur un domaine borné à deux dimensions D avec frontière ∂D, nous posons le problème de la détermination d'une fonction $v(x,y)$ qui est deux fois différentiable dans D, est continue sur $D\cup\partial D$, et satisfait l'équation

$$\Delta v\equiv\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=f(x,y)\ \text{ dans }\ D, \tag{2.4}$$

et la condition aux limite

$$v=g(s)\ \text{ sur }\ \partial D. \tag{2.5}$$

L'équation (2.4) est connue sous le nom d'équation de poisson. La fonction f est prescrite tout au long de D, et la fonction g donnée en termes de longueur d'arc s, est prescrite le long de ∂D.

Le problème de détermination d'une telle solution v est connu sous le nom de problème de Dirichlet. On l'appelle aussi le premier problème de valeur limite.

Nous n'étudierons pas les conditions sur D et celles sur f et g qui sont suffisantes pour garantir l'existence d'une solution du problème direct. Cependant, au moyen du seul principe du maximum, il est possible de montrer que si une solution de la première valeur limite existe, alors elle doit être unique. C'est-à-dire que nous prouvons qu'il peut y avoir au plus une solution au problème.

Pour établir ce résultat, nous supposons que v_1 et v_2 sont deux fonctions qui satisfont (2.4) et (2.5) avec les mêmes f et g. Définition

$$u = v_1 - v_2,$$

on voit que u satisfait

$$\Delta u = 0 \text{ dans } D,$$

$$u = 0 \text{ sur } \partial D.$$

Selon le principe du maximum, u ne peut pas avoir de maximum à l'intérieur de D. Cependant, le maximum d'une fonction continue sur un ensemble borné fermé doit être atteint. Puisque u est continu sur $D \cup \partial D$ et puisque $u = 0$ sur ∂D, nous concluons que $u \leq 0$ dans D. En appliquant le même raisonnement à $-u$ nous obtenons $u \geq 0$ dans D. D'où

$$u = v_1 - v_2 \equiv 0 \text{ dans } D.$$

Il est essentiel de supposer que le domaine D est borné.

Pour un domaine à n dimensions D avec frontière ∂D, nous considérons maintenant le problème de la détermination d'une fonction $v(x) = v(x_1, x_2, ..., x_n)$ satisfaisant dans D l'équation

$$(L+h)[v] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} + h(x)v = f, \tag{2.6}$$

et sous réserve des conditions aux limites

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial v} + \alpha(x)v = g_1 \text{ sur } \Gamma_1, \\ v = g_2 \text{ sur } \Gamma_2, \end{cases} \tag{2.7}$$

où $\dfrac{\partial}{\partial v}$ est une dérivée directionnelle vers l'extérieur donnée en chaque point de Γ_1. On suppose que l'opérateur L est elliptique dans D et que Γ_1 et Γ_2 sont des ensembles disjoints dont l'union comprend ∂D, la frontière de D. Les ensembles Γ_1 et Γ_2 peut être constitué d'un certain nombre de morceaux séparés, et nous n'excluons pas la possibilité que Γ_1 et Γ_2 soient vides de sens.

Théorème 2.7
Supposons que v_1 et v_2 satisfassent (2.6) et (2.7) dans un domaine borné D. Supposons que chaque point de Γ_1 se trouve sur la frontière d'une boule dans D. Si L est uniformément elliptique, $h(x) \leq 0$ est borné, et $\alpha(x) \geq 0$, alors $v_1 \equiv v_2$, sauf lorsque $h \equiv \alpha \equiv 0$ et Γ_2 est vide, auquel cas $v_1 - v_2$ doit être constant.

Preuve. [1] Définissez $u = v_1 - v_2$. Alors u satisfait

$$(L+h)[u] = 0 \text{ dans } D, \tag{2.8}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial v} + \alpha(x)u = 0 \text{ sur } \Gamma_1, \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma_2. \end{cases} \tag{2.9}$$

Si u jamais vous étiez positif, il aurait un maximum positif. Par le théorème 2.4 ce maximum doit se produire en un point P sur Γ_1. Si u n'est pas constant, $\dfrac{\partial u}{\partial v} > 0$ en P par le théorème 2.6, ce qui contredit la première condition en (2.9). Ainsi, soit u est constant, soit $u \leq 0$ dans D. En appliquant le même argument à $-u$, nous voyons que u doit être constant.

Mais aucune constante autre que 0 ne satisfait (2.8) et (2.9) sauf si $h \equiv \alpha \equiv 0$ et Γ_2 est vide, auquel cas toute constante les satisfait.

Lorsque Γ_1 est vide, le Théorème 2.7 établit un résultat d'unicité pour le problème de Dirichlet. Si Γ_2 est vide, $\alpha \equiv 0$, et $\frac{\partial}{\partial v}$ est la dérivée conormale, nous appelons le problème (2.6),(2.7), le problème de **Neumann** ou le problème de la deuxième valeur limite. Le théorème 2.7 établit l'unicité de la solution (jusqu'à une constante additive si $h \equiv 0$) pour ce problème. Si α ne disparaît pas à l'identique, nous avons le troisième problème de valeur limite. Si ni Γ_1 ni Γ_2 est vide, nous disons fréquemment que le problème est un problème avec des conditions aux limites mixtes.

Comme dans le cas de l'équation de Laplace, un théorème d'unicité pour l'équation (2.6) lorsque le domaine est illimité nécessite une hypothèse supplémentaire sur le comportement des solutions, car $r = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ tend vers l'infini.

Comme application des théorèmes 2.3, 2.5 et 2.7, nous considérons la distribution de température en régime permanent d'un solide. Soit $T(x, y, z)$ la température au point P(x,y,z) d'un milieu homogène et isotrope occupant un domaine borné D avec une surface limite ∂D. Supposons qu'une partie de la surface limite, notée Γ_1, soit isolée de sorte qu'aucune chaleur ne la traverse. La distribution de température est prescrite sur le reste de la frontière, Γ_2. (Γ_1 et Γ_2 peuvent chacun être constitués de plusieurs pièces (voir figure 2.6)). Si la température du milieu est en équilibre (c'est-à-dire si la température ne change pas avec le temps), alors T satisfait l'équation

$$\Delta T = 0 \text{ dans } D,$$

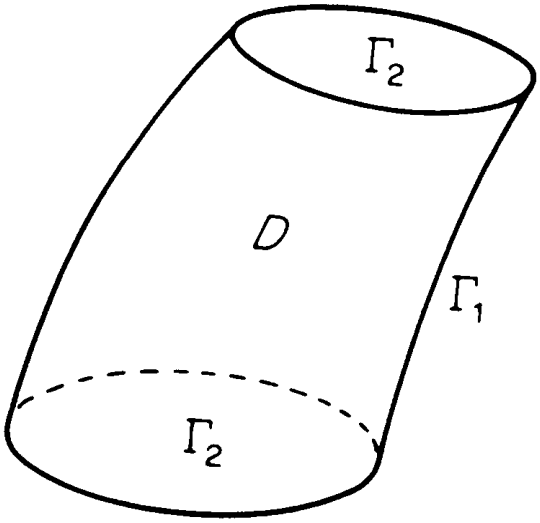
et les conditions aux limites

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_1,$$
$$T \text{ prescrit le } \Gamma_2,$$

($\dfrac{\partial}{\partial n}$ est la dérivée normale vers l'extérieur).

D'après les théorèmes 2.3 et 2.5, ni la température maximale ni température minimale ne peuvent se produire en D ou en Γ_1. Par conséquent, le principe du maximum peut être

FIGURE 2.6 –



utilisé pour établir le résultat selon lequel **la température d'équilibre est toujours comprise entre le maximum et le minimum des températures limites spécifiées.**

Notez que ce résultat est valable même si la température n'est spécifiée que dans une partie de la limite, s'il n'y a pas de flux de chaleur dans la partie restante.

Puisque le flux de chaleur dans le corps est proportionnel à $\dfrac{\partial T}{\partial n}$, le Théorème 2.5 affirme qu'une répartition inégale de la température ne peut être maintenue qu'en fournissant de la chaleur au point le plus chaud de la frontière et en éliminant la chaleur du point le plus froid.

L'unicité de la distribution de température d'équilibre est assurée par le Théorème 2.7. ■

2.4 Le principe du maximum généralisé

La condition $h(x) \leq 0$ dans le théorème 2.6 ne peut pas être entièrement supprimée. Par exemple, la fonction

$$u = \sin x \sin y,$$

est une solution de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2u = 0,$$

dans le carré $S : 0 < x < \pi, 0 < y < \pi$ et u satisfait la condition aux limites

$$u = 0 \text{ sur } \partial S.$$

Il est clair que u atteint son maximum en un point intérieur.

Comme au chapitre 1, les méthodes utilisées pour prouver un principe de maximum avec $h \leq 0$ peuvent être étendues pour établir un principe maximal généralisé. Les théorèmes d'unicité des problèmes de valeurs limites est une conséquence directe de ce principe. Supposons que $u(x)$ satisfasse

$$(L+h)[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + h(x)u \geq 0 \tag{2.10}$$

dans un domaine D où L est uniformément elliptique. Nous ne supposons pas que $h<0$. Soit $w(x)$ une fonction positive donnée sur $D\cup\partial D$ et définissons

$$v(x)=\frac{u(x)}{w(x)}.$$

Un calcul montre que

$$\frac{1}{w}(L+h)[u]=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{2}{w}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_j}+b_i\right]\frac{\partial v}{\partial x_i}+\frac{1}{w}(L+h)[w]\,v\geq 0,$$

dans D. Alors, si w satisfait l'inégalité

$$(L+h)[w]\leq 0,$$

dans D, nous pouvons appliquer le principe du maximum donné dans les théorèmes 2.4 et 2.6 à la fonction $v(x)$, obtenant ainsi le théorème suivant

Théorème 2.8
Soit $u(x)$ satisfaire l'inégalité différentielle (2.10) dans un domaine D où L est uniformément elliptique. s'il existe une fonction $w(x)$ telle que

$$w(x)>0 \ \ sur \quad D\cup\partial D \tag{2.11}$$

$$(L+h)[w]\leq 0 \ \ dans \ \ D \tag{2.12}$$

alors $\dfrac{u(x)}{w(x)}$ ne peut pas atteindre un maximum non négatif dans D que s'il s'agit d'une constante. Si $\dfrac{u(x)}{w(x)}$ atteint son maximum non négatif en un point P sur ∂D qui se trouve à la limite d'une boule dans D et si $\dfrac{u}{w}$ n'est pas constant, alors

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u}{w}\right)>0 \ \ à \ \ P,$$

où $\dfrac{\partial}{\partial v}$ est un dérivé directionnel vers l'extérieur.

Si une fonction w avec les propriétés prescrites existe et si $u=0$ sur ∂D, alors le Théorème 2.8 implique l'unicité des solutions du premier problème aux limites. Nous énonçons cette conclusion dans le théorème suivant.

Théorème 2.9
S'il existe une fonction $w(x)>0$ sur $D\cup\partial D$ telle que $(L+h)[w]\leq 0$ dans D et si D est borné, alors le problème

$$(L+h)[w]=f(x) \ \ dans \ \ D,$$
$$u=g(x) \ \ sur \ \ \partial D,$$

a au plus une solution.

Preuve. [1] Bien entendu, il n'est pas toujours possible de trouver une fonction w satisfaisant les conditions énoncées dans les théorèmes 2.8 et 2.9. Dans l'exemple donné au début de cette section, on voit que la fonction $u = c \sin x \sin y$, où c est une constante quelconque, est une solution de $(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) + (\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) + 2u = 0$ dans le carré $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$ qui vérifie la condition $u = 0$ sur la frontière. Il n'y a donc pas de solution unique, et donc aucune fonction w ne peut exister pour ce problème.

Nous donnons maintenant une méthode spécifique pour déterminer une fonction $w(x)$ ayant les propriétés (2.11) et (2.12) à condition que le domaine D soit contenu dans une dalle suffisamment étroite délimitée par deux hyperplans parallèles. Supposons que le domaine borné D soit contenu dans une dalle $a < x_1 < b$, où x_1 est la première coordonnée de $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$,ensemble

$$w(x) = 1 - \beta e^{\alpha(x_1 - a)}, \tag{2.13}$$

les nombre α et β doivent être sélectionnés de manière que (2.11) et (2.12) soient maintenus. Nous calculons

$$(L+h)[w] = -\beta \left[\alpha^2 a_{11}(x) + \alpha b_1(x) + h(x)\right] e^{\alpha(x_1 - a)} + h(x).$$

Par l'hypothèse d'ellipticité uniforme, $a_{11}(x) \geq \mu_0$. Nous supposons que $h(x)$ est borné et que $b_1(x)$ est minorée ;c'est-à-dire,

$$-m \leq h(x) \leq M,$$

$$-m \leq b_1(x),$$

où m et M ne sont pas négatifs. Nous choisissons un α si grand que

$$\alpha^2 \mu_0 - (\alpha + 1)m > 0.$$

Ensuite, nous sélectionnons

$$\beta = \frac{M}{\alpha^2 \mu_0 - (\alpha + 1)m}. \tag{2.14}$$

Dans ces circonstances

$$(L+h)[w] \leq 0 \text{ sur } D \cup \partial D.$$

Cependant, pour assurer que $w > 0$ sur $D \cup \partial D$, nous devons avoir

$$\beta e^{\alpha(b-a)} < 1,$$

C'est-à-dire, l'inégalité

$$M < \left[\alpha^2 \mu_0 - (\alpha + 1)m\right] e^{-\alpha(b-a)}, \tag{2.15}$$

doit être satisfait. Nous sommes toujours libres d'augmenter la taille de α si nous le souhaitons. On peut choisir α pour que le côté droit de (2.15) soit un maximum. Notez que le côté droit devient plus grand à mesure que $b - a$ devient plus petit. De plus, la condition (2.15) devient moins restrictive à mesure que M, le maximum de $h(x)$, devient plus petit. Lorsque α et β satisfont (2.14) et (2.15), le principe du maximum du Théorème 2.8 s'applique à $w(x)$ donné par (2.13). Ainsi, étant donné un opérateur $L + h$, il existe toujours un nombre $b - a$ tel que si $D \cup \partial D$ se trouve dans une bande de largeur $b - a$, le premier problème de frontière

a une solution unique. Alternativement, la condition (2.15) affirme que pour tout domaine borné $D \cup \partial D$ la solution du premier problème de valeur limite est unique si le maximum positif M de $h(x)$ est suffisamment petit.

Il est clair que la largeur de la bande $b-a$ peut être dans n'importe quelle direction, puisqu'une rotation des coordonnées fait de cette direction la direction x_1.

L'unicité des solutions aux autres problèmes de valeurs limites peut également être prouvée en utilisant le principe du maximum généralisé. Soit u une solution de

$$(L+h)[u] \equiv \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + h(x)u = 0,$$

dans un domaine D. Nous supposons que u satisfait aux conditions aux limites

$$\frac{\partial u}{\partial v} + \alpha(x)u = 0 \text{ sur } \Gamma_1,$$

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_2.$$

Où la frontière ∂D est composée des parties Γ_1 et Γ_2 et où $\dfrac{\partial u}{\partial v}$ est une dérivée directionnelle vers l'extérieur. Nous supposons à nouveau que chaque point de Γ_1 se trouve à la limite d'une boule en D. soit $w(x)$ positif sur $D \cup \partial D$, et définissons

$$v(x) = \frac{u(x)}{w(x)}.$$

Alors v satisfait

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n}\left[b_i + \frac{2}{w}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial w}{\partial x_j}\right]\frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{1}{w}(L+h)[w]\,v = 0,$$

dans D ; aussi, v satisfait aux conditions aux limites

$$\frac{\partial v}{\partial v} + \frac{1}{w}\left[\frac{\partial w}{\partial v} + \alpha(x)w\right]v = 0 \text{ sur } \Gamma_1,$$

$$v = 0 \text{ sur } \Gamma_2.$$

Par le Théorème 2.7, nous trouvons que, si $(L+h)[w] \leq 0$ dans D et $(\dfrac{\partial w}{\partial v}) + \alpha(x)w \geq 0$ sur Γ_1, alors $v \equiv 0$ dans D sauf si

1. $(L+h)[w] \equiv 0$.
2. $(\dfrac{\partial w}{\partial v}) + \alpha(x)w \equiv 0$ sur Γ_1.
3. Γ_2 est vide, auquel cas v peut être n'importe quelle constante.

L'argument ci-dessus établit le théorème d'unicité général suivant.

Théorème 2.10
Supposons qu'il existe une fonction $w(x) > 0$ *sur* $D \cup \partial D$ *telle que*

$$(L+h)[w] \leq 0 \quad dans \quad D,$$

et

$$\frac{\partial w}{\partial v} + \alpha(x) w \geq 0 \quad sur \quad \Gamma_1,$$

où ∂D *est composé de deux parties* Γ_1 *et* Γ_2*. Supposons que chaque point de* Γ_1 *se trouve à la frontière d'une boule dans* D*, et que* D *est borné. Alors il y a au plus une solution* $u(x)$ *du problème*

$$(L+h)[u] = f(x) \quad dans \quad D,$$
$$\frac{\partial u}{\partial v} + \alpha(x) u = g_1 \quad sur \quad \Gamma_1,$$
$$u = g_2(x) \quad sur \quad \Gamma_2,$$

sauf si

1. $(L+h)[w] \equiv 0$.
2. $(\frac{\partial w}{\partial v}) + \alpha(x) w \equiv 0 \quad sur \quad \Gamma_1$.
3. Γ_2 *est vide, auquel cas* u *est déterminé à un multiple constant de* w *près.*

Le Théorème 2.10 découle du fait que si z_1 et z_2 sont deux solutions, alors $\frac{z_1 - z_2}{w}$ vérifie le principe maximum. Notez que le Théorème 2.10 contient le Théorème 2.9 comme cas particulier (lorsque Γ_1 est vide).

L'existence de $w(x)$ satisfaisant aux conditions requises signifie qu'aucune hypothèse particulière n'est nécessaire sur $h(x)$ et $\alpha(x)$. ■

Bibliographie

[1] Protter M. H. et Weinberger H. F.*Maximum principles in differential equations*, Springer-Velag, New York (1984).

[2] J. Serrin , *"A symmetry Problem in Potential Theory"* Arch. Ration. Mech. Anal. , 43 (1971) , 304 - 318 .

[3] B. Gidas, Y -M . Ni and L.Nirenberg, *"Symmetry and Related Properties Via Maximum Principle"* Comm. Math. Phys.,68 (1979), 209 - 243 .

[4] J . Smoller , Shock Waves and Reaction - Diffusion Equations,(Springer - Verlag , New York, 1983).

[5] Rene P. Sperb ,*Maximum priciples and their applicatios* ,New York London Toronto Sydney San Francisco 1981.

[6] L. Boccardo, and L. Orsina, *Semilinear elliptic equations with singular nonlinearities*. Calculus of Variations and Partial Differential Equations 37.3-4 (2010) : 363-380.

[7] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson, Paris, 1983.

[8] H. Le Dret, *Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations*. Springer International Publishing :, 2018.

[9] F. Bethuel, Equations elliptiques ,10 novembre 2016

[10] H. QUEFELEC ,C. Zuilly, *Analyse pour l'agrégation*. 2013.

[11] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. 1969.

[12] J. Leray, and J. L. Lions. *Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder*. Séminaire Jean Leray 1 (1964) : 1-19.

[13] Gilbarg, D. et Trudinger, N.S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order,second edition, Springer-Verlag* Berlin, 1983.