**République Algérienne Démocratique et Populaire**
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**
**Université Yahia Farès de Médéa**
**Département des Mathématiques et de l'Informatique**

# MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

par

BOUKHEZANI Boubaker

# Relations linéaires compactes

Soutenu publiquement le 15/06/2023 devant le jury composé de

| | | |
|---|---|---|
| *Président :* | Haoues Bagua | Université de Médéa |
| *Examinateur :* | Nouredine Mekdache | Université de Médéa |
| *Encadreur :* | Khaled Bouadjila | Université de Médéa |

**Année universitaire : 2022-2023**

# Table des matières

**Remeciements** **II**

**Dédicace** **III**

**Résumé** **IV**

**Abstracts** **V**

**Notations** **VI**

**Introduction générale** **VIII**

**1 Relations linéaires** **1**
1.1 Relations sur les ensembles . . . . . 1
1.2 Relations linéaires . . . . . 5
1.3 Algèbre des relations linéaires . . . . . 8
1.4 Sélection linéaire . . . . . 9
1.5 Relations linéaires normés . . . . . 10
1.6 Relations linéaires continues . . . . . 15
1.7 Sélections continues . . . . . 19
1.8 Relations linéaires fermées et fermables . . . . . 20
1.9 Notes et remarques . . . . . 23

**2 Adjoints des relations linéaires** **24**
2.1 L'adjoint . . . . . 24
2.2 Quelques propriétés de L'adjoint . . . . . 25

**3 Relations linéaires compactes** **31**
3.1 Compacité d'une relation linéaire . . . . . 31
3.2 Théorème de Schauder . . . . . 32

# Remerciement

**Dieu** soit loué, qui nous a permis de valoriser cette étape de notre parcours académique avec ce mémoire, fruit d'efforts et de réussite, grâce à **Dieu Tout-Puissant**.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué au succès de mon thèse et qui m'ont aidée lors de la rédaction de ce mémoire.

Je voudrais dans un premier temps remercier, mon encadreur de mémoire **Dr KH.Bouajila**, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Je remercie également toute l'équipe pédagogique de l'**Université Yahia Farès de Médea** en particulier l'équipe de travail de la **Département des Mathématiques et de l'Informatique** qui a contribué à notre formation, que ce soit le personnel administratif ou pédagogique.

# Dédicace

*Ã mes chers parents*
*Quoi que je dise ou que je fasse,*
*je n'arrivai jamais à vous remercier comme il se doit.*
*C'est grâce à vos encouragements,*
*vos bienveillances et votre présence à mes côtés,*
*que j'ai réussi ce respectueux parcours.*
*Je souhaite que vous soyez fière de moi,*
*et que j'ai pu répondre aux espoirs que vous avez fondé en moi.*
*Ã mes chers frères*
*Merci pour vos soutiens moral,*
*vos confiances et vos conseils précieux,*
*qui m'ont aidé dans les moments difficiles.*
*Je vous souhaite le bonheur et la réussite dans vos vies.*
*Ã toute ma famille et mes amis*
*Ã travers ces lignes,*
*j'adresse mes sincères remerciements*
*à tous les collègues qui m'ont aidé de près ou de loin,*
*et j'adresse également des remerciements particuliers,*
*à mes collègues de travail pour leur soutien moral.*
*Un dédicace spécial pour les étudiants*
*en Analyse Mathématique et Applications, 2023*
*sur l'esprit joyeux et l'harmonie régnant dans le groupe,*
*et l'échange d'informations et d'idées,*
*qui ont contribué au succès de chacun et bonne chance à tous*
*et à la fin, le seul mot que je puisse dire est merci,*
*merci beaucoup à tous ceux qui ont contribué,*
*à la réalisation de ce mémoire.*

# Résumé

Dans ce travail, nous aborderons le sujet des relations linéaires compactes. Nous commencerons d'abord par un rappel sur les relations linéaires (relation sur les ensembles, relations linéaires, continuité...), puis nous définirons l'adjoint d'une relation linéaire et donnerons quelques propriétés et résultats qui lui sont liés. Enfin, nous donnerons la notion de la compacité dans le cas des relations linéaires, et nous prouverons un résultat de type Schauder.

# Abstracts

In this work, we will approach the subject of compact linear relations. We will begin first with a reminder of linear relations (relation on sets, linear relations, continuity...), then we will define the adjoint of a linear relation and give some properties and results related to it. Finally, we will give the notion of compactness in the case of linear relations, and we will prove a result of the Schauder type.

# Notations

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | L'ensemble des nombres naturels. |
| $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ | Les corps de nombres réels et complexes, respectivement. |
| $\inf(A)$ | L'inférieur de l'ensemble $A$. |
| $\sup(A)$ | Le supérieur de l'ensemble $A$. |
| $T, S, ..$ | Des relations linéaires. |
| $T^*$ | L'adjoint de $T$. |
| $X, Y, Z$ | Des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K} = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. |
| $0_X$ | Le zéro de l'espace $X$. |
| $U_X$ | La boule d'unité ouverte de $X$. |
| $B_X$ | La boule d'unité fermée de $X$. |
| $X'$ | Le dual de $X$. |
| $\dim(X)$ | La dimension de l'espace $X$. |
| $\|x\|$ | La norme de $x$. |
| $D(T)$ | Domaine de $T$. |
| $G(T)$ | Le graphe de $T$. |
| $T^{-1}$ | L'inverse de $T$. |
| $R(T)$ | L'image de $T$. |
| $T\|_M$ | La restriction de $T$ à $M$. |
| $R(U, V)$ | La collection de relation de $U$ dans $V$. |
| $LR(X, Y)$ | La collection linéaire des relations de $X$ dans $Y$. |
| $KR(X, Y)$ | L'ensemble de toutes les relations linéaires compactes. |
| $BR(X, Y)$ | La collection des relations linéaires bornés de $X$ dans $Y$. |
| $\overline{M}$ | La fermeture de l'ensemble $M$. |
| $N(T)$ ou $T^{-1}(0)$ | L'espace nul de $T$. |

| | |
|---|---|
| $\longrightarrow$ | Converge fortement. |
| $I_E$ | La relation identité sur un sous ensemble $E$. |
| $S\mid_{D(T)}$ | $S$ est une extension de $T$. |
| $d(x,V)$ | Distance entre $x$ et $V$. |
| $P$ | La projection linéaire. |
| $T^{-1}(N)$ | L'image réciproque de $N$. |
| $ST$ | La composition de $S$ avec $T$. |
| $J_E^U$ | L'opérateur d'injection naturelle de $E$ dans $U$. |
| $M^\perp$ | Orthogonal de $M$. |
| $\gamma(T)$ | Le module minimum de $T$. |
| $Y/\overline{T(0)}$ | L'espace quotient. |

# Introduction

Les relations linéaires sont une généralisation des opérateurs linéaires. La principale différence est qu'un opérateur linéaire est une application entre deux espaces linéaires mais a valeur unique, tandis qu'une relation linéaire est une application entre deux espaces linéaires pouvant être a plusieurs valeurs.

En 1932, J. von Neumann a introduit des relations linéaires en relation avec les opérateurs différentiels linéaires non densément définis, voir [13].

Plut tard en 1961, Arens a développé une théorie des relations linéaire dans [16], depuis lors, il y a eu d'énormes études sur la théorie des relations linéaires [8, 9, 2, 20, 22, 12] et a été des outils très utiles dans de nombreuses applications [6].

Ces relations linéaires sont également appelées sous-espaces linéaires et opérateurs linéaires multivalués.

Il existe plusieurs articles de recherche et monographies, voir [19] comme exemple et une citation, qui traitent de la théorie des opérateurs linéaires multivalués.

La généralisation des théories des opérateurs linéaires aux relations linéaires a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs, par exemple, dans [10], les autres étudient la délimitation et la fermeture des relations linéaires et montrent le théorème du graphe fermé pour les relations linéaires dans les espaces de Banach et dans[3], l'auteur a prouvé le théorème de von Neumann pour les relations linéaires dans les espaces de Hilbert.

Le but de ce mémoire est de discuter des relations linéaires compactes, d'optenir certaines de leurs propriétés et de généraliser le théorème spectral pour une relation linéaire compacte. Certaines des études sur la théorie spectrale des relations linéaires peuvent être trouvées dans[14, 4, 5, 7].

Nous avons divisé ce travail en trois chapitres selon les données disponibles pour étudier le sujet, dont le plupart nous avons utilisé deux livres [19] et [1] avec l'article détaillant [17] :

- Le premier chapitre, nous avons abordé un rappel sur les relations linéaires : Définitions et caractéristiques à certains concepts mathématique spéciaux et théories nécessaires, qui ont un rôle dans l'étude du sujet proposé.
- Dans le deuxième chapitre, nous avons parlé de l'adjoint d'une relation linéaire et nous avons donné quelques propriétés et résultats importantes pour le sujet.
- Le troisième chapitre était le contenu du sujet, qui est les relations linéaires compactes, nous avons basé sur l'article de Keshav Raj Acharya et Matt Mcbride [17].

CHAPITRE 1

# Relations linéaires

Dans ce chapitre, nous introduisons les concepts et les propriétés de base des relations linéaire. Mentionnons notamment, la continuité des relations linéaires sur les espaces vectoriels normés.

## 1.1 Relations sur les ensembles

**Définition 1.1** ([19]) *Soient $U$, $V$ et $W$ ... des ensembles arbitraires non vides.*

***Une relation*** *$T$ de $U$ dans $V$ est une application définie sur un sous-ensembles non vide $D(T)$ de $U$, appelé de domaine de $T$, qui prend des valeurs dans $2^V \setminus \emptyset$ (la collection des sous-ensembles non vides de $V$). Si $T$ est associée par les point de son domaine sur des singletons, alors $T$ est un opérateur ou une fonction à valeur unique. L'ensemble des relations tel que définie ci dessus sera notée $R(U,V)$. Nous écrivons $R(U) = R(U,U)$.*

*Exemples sur les relations sont : les fonctions, les inverses des fonctions, les adjoints d'opérateurs linéaires.*

### 1.1.1 Domaine de $T$

**Définition 1.2** ([19]) *Soit $u \in U$, $u \notin D(T)$, on définit $Tu = \emptyset$ avec cette convention, on a*

$$D(T) = \{u \in U : Tu \neq \emptyset\}. \tag{1.1}$$

### 1.1.2 Graphe de $T$

**Définition 1.3** ([19]) *Soit $T \in R(U,V)$, alors **le graphe** de $T$ est le sous-ensemble $G(T)$ de $U \times V$ définit par :*

$$G(T) = \{(u,v) \in U \times V : u \in D(T), v \in Tu\}.$$

**Remarque 1** *Une relation dans $R(U,V)$ est uniquement déterminée par son graphe et inversement tout sous-ensemble non vide de $U \times V$ détermine de manière unique une relation.*

### 1.1.3 Rang de $T$

**Définition 1.4 ([1],page 21)** *Soit $T \in LR(U,V)$. Alors le rang $R(T)$ de $T$ est définit par :*

$$R(T) = \bigcup_{u \in D(T)} Tu.$$

### 1.1.4 Relation inverse

**Définition 1.5 ([19])** *Soit $T \in R(U,V)$, **l'inverse** de $T$ est la relation $T^{-1}$ donnée par :*

$$G(T^{-1}) = \{(v,u) \in V \times U : (u,v) \in G(T)\}.$$

### 1.1.5 L'image d'un sous-ensemble

**Définition 1.6 ([19])** *Soit $M$ une sous ensembles de $U$, **l'image** de $M$ par la relation $T$ est donnée par :*

$$T(M) = \cup\{T(m) : m \in M \cap D(T)\}.$$

*Avec $R(T) = T(U) = T(D(T))$ appeler l'image de $T$.*

### 1.1.6 Injectivité et surjectivité

**Définition 1.7 ([19])** *Soit $T \in R(U,V)$ on définit **l'injectivité** et la **surjectivité** par :*

1. *Si $T^{-1}$ est à valeur unique, alors $T$ est dite injective.*
2. *Si $R(T) = V$, alors $T$ est dite surjective.*

**Proposition 1.1 ([19])** *Si $T$ est injective, alors l'implication suivante est vraie.*

$$T(u_1) = T(u_2) \Longrightarrow u_1 = u_2. \qquad \text{pour } u_1, u_2 \in D(T)$$

### 1.1.7 Image réciproque

**Définition 1.8 ([19])** *Soient $N \subset V$ et $N \neq \emptyset$ **l'image réciproque** de $N$ est donnée par la relation :*

$$T^{-1}(N) = \{u \in D(T) : N \cap Tu \neq \emptyset\}. \tag{1.2}$$

*En particulier, pour $v \in R(T)$*

$$T^{-1}(v) = \{u \in D(T) : v \in Tu\}.$$

*Il est clair que $D(T^{-1}) = R(T)$ et $R(T^{-1}) = D(T)$.*

### 1.1.8 Relation identité

**Définition 1.9 ([19])** *La relation **identité** est définie sur un sous ensembles non vide $E$ de $U$ notée $I_E$ ou simplement $I$, c'est la relation dans $R(U,V)$ dont le graphe et :*

$$G(I_E) = \{(e,e) : e \in E\}.$$

### 1.1.9 Composition des relations

**Définition 1.10 ([19])** *Soient $T \in R(U,V)$ et $S \in R(V,W)$ avec $R(T) \cap D(S) \neq \emptyset$, **la composition** (le produit) $ST$ dans $R(U,W)$ est définie comme suit :*

$$(ST)(u) = S(Tu). \qquad (u \in U)$$

*Le domaine de $ST$ est calculé comme suivant :*

$$\begin{aligned} D(ST) &= \{u \in U : S(Tu) \neq \emptyset\}, \\ &= \{u \in U : Tu \cap D(S) \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

*D'ou à partir de (1.2) on a :*

$$D(ST) = T^{-1}(D(S)).$$

*D'après la définition de $ST$, il est facile de conclure que :*

$$G(ST) = \left\{(u,w) \in U \times W : (u,v) \in G(T) \text{ et } (v,w) \in G(S) \text{ pour tout } v \in V\right\}.$$

***Propriétés 1 ([19])*** *Nous citons quelques propriétés élémentaires :*

1. $T = TI_U = I_V T$.
2. $G(I_{D(T)}) \subset G(T^{-1}T)$.
3. $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.
4. $D(ST) = T^{-1}S^{-1}(R(S))$.

*La composition est associative, c'est-à-dire que si $R \in R(W,Z)$ alors :*

$$R(ST) = (RS)T.$$

*Nous avons aussi :*

$$\begin{aligned} T \text{ injective} &\iff T^{-1}T = I_{D(T)}, \\ T \text{ valeur unique} &\iff TT^{-1} = I_{R(T)}. \end{aligned}$$

### 1.1.10 Restriction

**Définition 1.11 ([19])** *Soit $M$ un sous-ensembles de $U$ tel que $M \cap D(T) \neq \emptyset$, **la restriction** de $T$ à $M$, noter $T|_M$, est définie par :*

$$\begin{aligned} T|_M &\in R(U,V), \\ D(T|_M) &= D(T) \cap M, \\ (T|_M)_m &= Tm. \qquad \text{pour } (m \in M) \end{aligned}$$

***Remarque 2***

$$\begin{aligned} G(T|_M) &= G(T) \cap (M \times V), \\ &= \{(u,v) \in G(T) : u \in M\}. \end{aligned}$$

*Nous avons :*

$$T|_M = T|_{M \cap D(T)}.$$

### 1.1.11 Extension

**Définition 1.12 ([19])** *Soient $S$ et $T$ deux relations de $R(U,V)$, $S$ est une **extension** de $T$ si :*

$$S|_{D(T)} = T.$$

**Remarque 3** *Si $S$ est une extension de $T$, alors $G(T) \subset G(S)$. (L'inverse est cependant faux voir Corollaire (1.8), ((b).) )*

**Exemple 1 ([19], page 5)** *Soit $X = Y = \mathbb{R}^2$ et considérons l'opérateur matriciel :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*On écrivant $x = \binom{x_1}{x_2}$, $y = \binom{y_1}{y_2}$ pour les vecteurs arbitraires dans $\mathbb{R}^2$, on a :*

$$G(A) = \{\left(\binom{x_1}{x_2}, \binom{y_1}{y_2}\right) : \binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2, \binom{y_1}{y_2} = \binom{x_1}{0}\},$$

*et*

$$A^{-1}\binom{x_1}{0} = \binom{x_1}{0} + A^{-1}(0),$$

*telle que : $A^{-1}(0) = \{\binom{0}{x_2} : x_2 \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace linéaire de $\mathbb{R}^2$.*

*$A^{-1}$ est une relation linéaire de domaine :*

$$D(A^{-1}) = \{\binom{x_1}{0} : x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

*Considérons la relation $S \in LR(X,Y)$ définie par :*

$$S\binom{x_1}{x_2} = \binom{x_1}{0} + A^{-1}(0).$$

*Alors $S$ est une extension de $A^{-1}$.*

### 1.1.12 L'opérateur d'injection

**Définition 1.13 ([19])** *Soit $E$ un sous-espace d'un espace vectoriel normé $U$, l'opérateur **d'injection** naturelle de $E$ dans $U$ noté $J_E^U$, c'est-à-dire $J_E \in R(E,U)$, $D(J_E) = E$, et $J_E(e) = e$ pour tout $e \in E$. Alors :*

$$T|_E = T J_E J_E^{-1}.$$

Telle que

$$I_E = J_E J_E^{-1}.$$

Bien que $I_E$ et $J_E$ ayant des graphes identiques, $I_E$ n'est pas une extension de $J_E$.

## 1.2 Relations linéaires

**Définition 1.14 ([19])** *Soient $X$ et $Y$ deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, une relation $T \in R(X,Y)$ est dite **relation linéaire** si pour tout $x, z \in D(T)$ et scalaires non nuls $\alpha \in \mathbb{K}$, on a :*

1. $Tx + Tz = T(x+z)$.
2. $\alpha Tx = T(\alpha x)$.

*Évidemment, le domaine d'une relation linéaire est un sous-espace linéaire.*

**Notation 1** *La classe des relations linéaires dans $R(X,Y)$ sera notée $LR(X,Y)$.*
*On écrit $LR(X,X) = LR(X)$.*
*Il est clair que si $M$ est un sous-espace linéaire de $X$ et $T \in LR(X,Y)$, alors :*

$$T|_M \in LR(X,Y)$$

*et*

$$TJ_M \in LR(M,Y)$$

**Proposition 1.2 ([19])** *Soit $T \in R(X,Y)$. Les propriétés suivantes sont équivalents :*

1. *$T$ est une relation linéaire.*
2. *$G(T)$ est un sous-espace linéaire de $X \times Y$.*
3. *$T^{-1}$ est une relation linéaire.*
4. *$G(T^{-1})$ est un sous-espace linéaire de $Y \times X$.*

**Preuve.** Soit T une relation linéaire et soit $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in G(T), 0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$.
Alors $y_1 \in Tx_1$ et $y_2 \in Tx_2$ donc :

$$y_1 + y_2 \in Tx_1 + Tx_2 = T(x_1 + x_2).$$

D'ou

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2) \in G(T). \tag{1.3}$$

Encore une fois, puisque $y_1 \in Tx_1$, donc $\alpha y_1 \in \alpha Tx_1$ (comme $\alpha \neq 0$) et donc

$$\alpha(x_1,y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1) \in G(T). \tag{1.4}$$

Enfin, $(0,0) \in G(T)$ par (1.3), donc (1.4) vaut aussi pour $\alpha = 0$. Donc $G(T)$ est un sous-espace.
Inversement, supposons que $G(T)$ soit un sous-espace linéaire de $X \times Y$. Alors $D(T)$ est un sous-espace linéaire de X. Soit $x_1, x_2 \in D(T)$. Pour montrer que :

$$Tx_1 + Tx_2 \subset T(x_1 + x_2), \tag{1.5}$$

on suppose que : $y_1 \in Tx_1$ et $y_2 \in Tx_2$.
Alors

$$(x_1+x_2, y_1+y_2) = (x_1,y_1)+(x_2,y_2) \in G(T).$$

D'ou $y_1 + y_2 \in T(x_1 + x_2)$.
Ensuite, pour montrer que :

$$T(x_1+x_2) \subset Tx_1 + Tx_2.$$

Soit $y \in T(x_1+x_2)$, et $y_1 \in Tx_1$ arbitrairement. Alors :

$$(x_1+x_2, y) = (x_1, y_1)+(x_2, y-y_1) \in G(T).$$

Donc $(x_2, y-y_1) \in G(T)$, d'ou $y-y_1 \in Tx_2$. Alors $y \in y_1+Tx_2 \subset Tx_1+Tx_2$.
Nous avons ainsi montré que $Tx_1+Tx_2 = T(x_1+x_2)$.
Soit maintenant $0 \neq \alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in D(T)$.
Si $y \in Tx$, alors $\alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y) \in G(T)$, donc $\alpha y \in T(\alpha x)$.
D'ou $\alpha(Tx) \subset T(\alpha x)$.
Par contre si $y \in T\alpha x$, alors $(x, \alpha^{-1}y) \in G(T)$, donc $y \in \alpha Tx$.
Ainsi $T(\alpha x) \subset \alpha(Tx)$. Alors $\alpha(Tx) = T(\alpha x)$.
Donc T est une relation linéaire. ■

**Corollaire 1.3 ([19])** *Soit T une relation linéaire. Alors $T(0)$ et $T^{-1}(0)$ sont des sous-espaces linéaires.*

**Corollaire 1.4 ([19])** *Soit $T \in R(X,Y)$. Alors T est une relation linéaire si et seulement si l'égalité :*

$$\alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = T(\alpha x_1 + \beta x_2),$$

*est vraie pour tout $x_1, x_2 \in D(T)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ non nul.*

### 1.2.1 L'espace nul d'une relation linéaire

**Définition 1.15 ([19])** *Le sous-espace $T^{-1}(0)$ est appelé **l'espace nul (ou noyau)** de T, est noté N(T). Nous utilisons à la fois N(T) et $T^{-1}(0)$ tout au long de suite.*

**Proposition 1.5 ([19])** *Soit :*

1. *Pour $x \in D(T)$ on a l'équivalence suivante :*

$$y \in Tx \iff Tx = y + T(0).$$

*en particulier*

$$0 \in Tx \iff Tx = T(0).$$

2. *Pour $x_1, x_2 \in D(T)$ on peut écrire l'équivalence suivante :*

$$Tx_1 \cap Tx_2 \neq \emptyset \iff Tx_1 = Tx_2$$

**Preuve.**

1. - Soit $y \in Tx$. Alors $y+T(0) \subset Tx+T(0) = Tx$. Par contre pour tout $y_1 \in Tx$, on a :

$$y_1 = y+(y_1-y) \in y+Tx-Tx = y+T(0).$$

   Donc $Tx = y+T(0)$. La réciproque est évidente.

   - On suppose que $0 \in T(0)$. Alors $Tx = 0+T(0)$, si et seulement si $Tx = T(0)$ puisque $0 \in T(0)$.
2. Soit $y \in Tx_1 \cap Tx_2$. Alors $Tx_1 = y+T(0) = Tx_2$. La réciproque est évidente.

■

**Corollaire 1.6** ([19]) *On peut écrire :*

*(a).* *T est à valeur unique si et seulement si* $T(0)=\{0\}$.

*(b).* *T et injectif si et seulement si* $N(T)=\{0\}$ .

**Corollaire 1.7** ([19]) *On trouve que :*

*(a).* $T\,T^{-1}(0)=T(0)$

*(b).* $T^{-1}T(0)=T^{-1}(0)$

**Corollaire 1.8** ([19]) *On arrive que :*

*(a).* $T\,T^{-1}y=y+T(0), \qquad (y\in R(T))$
*et*
$T^{-1}T\,x=x+T^{-1}(0). \qquad (x\in D(T))$

*(b).* *Si* $G(S)\subset G(T)$, *alors T est une extension de S si et seulement si* $S(0)=T(0)$.

**Proposition 1.9** ([19]) *Soit T une relation de X à Y. Alors T est une relation linéaire si et seulement si pour tout* $x_1, x_2\in D(T)$ *et pour tout* $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ *:*

$$\alpha T\,x_1+\beta T\,x_2\subset T(\alpha x_1+\beta x_2). \tag{1.6}$$

**Preuve.** Soit $T$ une relation linéaire. Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ et $x_1, x_2\in D(T)$. Soit $y_1\in T\,x_1$, $y_2\in T\,x_2$. Puisque $G(T)$ est un espace vectoriel donc :
$(\alpha x_1+\beta x_2, \alpha y_1+\beta y_2)\in G(T)$, d'ou $\alpha y_1+\beta y_2\in T(\alpha x_1+\beta x_2)$.

Inversement, soit $T$ vérifie la condition (1.6) et soit $(x_1, y_1)$ et $(x_2, y_2)\in G(T)$, alors pour $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ on a :

$$\alpha y_1+\beta y_2\in\alpha T\,x_1+\beta T\,x_2\subset T(\alpha x_1+\beta x_2).$$

Montrant que $\alpha(x_1, y_1)+\beta(x_2, y_2)\in G(T)$, donc $G(T)$ est un sous-espace linéaire de $X\times Y$, par conséquent $T$ est une relation linéaire d'après la Proposition (1.2). ■

## 1.2.2 Règles opérationnelles pour une relation linéaire

**Proposition 1.10** ([19]) *Soit* $T\in LR(X,Y)$, *on a les propriétés suivantes :*

*(a).* $T(\alpha M)=\alpha T(M)$. $\qquad (M\subset X, \alpha\in\mathbb{K}, \alpha\neq 0)$

*(b).* $T(M+N)\supset T(M)+T(N)$. $\qquad (M,N\subset X)$

*(c).* $T(M+N)=T(M)+T(N)$. $\qquad (M\subset X, N\subset D(T))$

*(d).* $T\,T^{-1}(M)=M\cap R(T)+T(0)$. $\qquad (M\subset Y)$

*(e).* $T^{-1}T(M)=M\cap D(T)+T^{-1}(0)$. $\qquad (M\subset X)$

*(f).* $T^{-1}(0)\times\{0\}=G(T)\cap(X\times\{0\})=G(T)\cap G(0_X)$.

*(g).* $\{0\}\times T(0)=G(T)\cap(\{0\}\times Y)$.

*(h).* $X\times R(T)=G(T)+(X\times\{0\})=G(T)+G(0_X)$.

*(i).* $D(T)\times Y=G(T)+(\{0\}\times Y)$.

**Preuve.**

(a).

$$\begin{aligned} T(\alpha M) &= \cup\{T(\alpha m) : m \in M \cap D(T)\}, \\ &= \cup\{\alpha(Tm) : m \in M \cap D(T)\}, \\ &= \alpha \cup \{Tm : m \in M \cap D(T)\}, \\ &= \alpha T(M). \end{aligned}$$

(b).

$$\begin{aligned} T(M) &\subset \cup\{T(m+n) : m \in M \cap D(T), n \in N \cap D(T)\}, \\ T(N) &\subset \cup\{T(m+n) : m \in M \cap D(T), n \in N \cap D(T)\}, \\ T(M)+T(N) &\subset \cup\{T(m+n) : m \in M \cap D(T), n \in N \cap D(T)\}, \\ &\subset T(M+N). \end{aligned}$$

(c). Soient $m \in M$ et $n \in N \subset D(T)$. Si $m+n \notin D(T)$, Alors $\emptyset = T(m+n) \subset Tm+Tn$. Par contre si $m+n \in D(T)$, Alors $m \in D(T)$ et $T(m+n) = Tm+Tn \subset TM+TN$.

((d).) et ((e).) découler immédiatement du Corollaire (1.8).
((f).) et ((i).) sont des simples conséquences des définitions. ■

**Corollaire 1.11** ([19]) *Soient $T \in LR(X,Y)$ et $S \in LR(Y,Z)$.*
*Alors $ST \in LR(X,Z)$*

**Preuve.** Soit $x_1, x_2 \in D(ST)$ et soit $\alpha, \beta$ être des scalaires non nul. Alors :

$$\begin{aligned} \alpha(ST x_1)+\beta(ST x_2) &= \alpha S(T x_1)+\beta S(T x_2) \\ &= S(\alpha T x_1)+S(\beta T x_2) \\ &= S(T(\alpha x_1))+S(T(\beta x_2)) \\ &= S(T(\alpha x_1)+T(\beta x_2)) \\ &= ST(\alpha x_1+\beta x_2). \end{aligned}$$

Donc ST est linéaire, d'après le corollaire (1.4) . ■

## 1.3 Algèbre des relations linéaires

Dans cette section, nous allons définis les opérations d'addition et de multiplication scalaire dans $LR(X,Y)$ et décrire les lois régissant ses opérations combinées avec les opérations de composition et d'inversion.

### 1.3.1 Addition et multiplication scalaire dans LR(X,Y)

Soient S et T des relations linéaires dans LR(X,Y) et $\alpha$ un scalaire, les relations $S+T$ et $\alpha T$ sont définies comme suit :

1. $(S+T)x = Sx+Tx$ $\quad (x \in X)$.
2. $(\alpha T)x = \alpha(Tx)$ $\quad (x \in X, \alpha \in \mathbb{K})$.
   Alors :
3. $D(S+T) = D(S) \cap D(T)$.

4. $D(\alpha T) = D(T)$.
   Pour vérifier (3.), soit $x \in D(S) \cap D(T)$, alors $Sx + Tx = (S+T)x \neq \emptyset$ par (1.1) et donc $x \in D(S+T)$.
   Inversement, si $x \in D(S+T)$, alors $(S+T)x = Sx + Tx \neq \emptyset$ on a $Sx \neq \emptyset$ et $Tx \neq \emptyset$.
   Donc $x \in D(S) \cap D(T)$.
   Il ressort de ce qui précède que $\alpha T$ et $S+T$ sons des relations linéaires.
5. $G(S+T) = \{(x,y) \in X \times Y \ : y = s+t, \text{où } (x,s) \in G(S), \text{et } (x,t) \in G(T)\}$.
6. $G(\alpha T) = \{(x, \alpha y) \in X \times Y : (x,y) \in G(T)\}$.
   Nous avons en autre part :
7. $\alpha(\beta T) = (\alpha\beta)T \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{K})$.
8. $S + T = T + S$.
   Et si $R, S, T \in LR(X,Y)$, alors :
9. $R + (S+T) = (R+S) + T$.

**Remarque 4** *Pour les relations linéaires $T \in LR(X,Y)$ et $S \in LR(W,Z)$, la composition $ST$ est définie si et seulement si W=Y.*

**Proposition 1.12 ([19])** *Soient R, S , T des relations linéaires.*

*(a).* $TT^{-1} = I + (TT^{-1} - TT^{-1})$.

*(b).* $\lambda(ST) = (\lambda S)T = S(\lambda T) \qquad (0 \neq \lambda \in \mathbb{K})$.

*(c).* *Si* $G(S) \subset G(T)$, *alors* $G(SR) \subset G(TR)$.

*(d).* $(R+S)Tx \subset (RT + ST)x \qquad (x \in X)$,
*et si T est a valeur unique, alors*

$$(R+S)T = RT + ST.$$

*(e).* $T(R+S)$ *est une extension de* $TR + TS$.
*De plus, si* $D(T)$ *contient les rangs de R et S (en particulier, si* $D(T)$ *est l'espace entier ), alors :*

$$T(R+S) = TR + TS.$$

## 1.4 Sélection linéaire

**Définition 1.16 ([19])** *Un opérateur linéaire A est appelé une* ***sélection*** *(ou partie à valeur unique) de T si :*

$$T = A + T - T, \quad \text{et} \quad D(A) = D(T).$$

*Si A est une sélection de T , alors pour tout* $x \in D(T)$ *:*

$$Tx = Ax + T(0). \tag{1.7}$$

*La relation* $T - T$ *donner par* $G(T-T) = D(T) \times T(0)$ *est connue comme la partie singulière, ou l'indétermination de T est notée par certains auteurs par* $T_\infty$.

*D'après (1.7), nous avons* $R(T) = R(A) + T(0)$, *mais cette somme peut être directe ou non, donc une méthode de construction des sélections est fournie par la proposition suivante.*

**Proposition 1.13 ([19])** *Si $P$ est une projection linéaire avec un domaine $R(T)$ et un noyau $T(0)$ alors $PT$ est une sélection de $T$.*

*Inversement, si $A$ est une sélection de $T$ et si $R(A)\cap T(0)=\{0\}$ alors la projection linéaire définie sur $R(T)$ avec un rang $R(A)$ et un noyau $T(0)$, satisfait $A=PT$.*

**Preuve.** Soit $P$ donné.

Alors $PT(0)=0$, c'est-à-dire que $PT$ est a valeur unique, donc pour $y\in Tx$ on dit :

$$Tx=y+T(0)=Py+(I-P)y+T(0)=PTx+T(0).$$

Inversement, soit $A$ la sélection de $T$ et soit $P$ la projection linéaire définie sur $R(T)$ de rang $R(A)$ et de noyau $T(0)$, pour $x\in D(T)$ on a :

$$Tx=Ax+T(0).$$

Ainsi :

$$PTx=PAx=Ax-(I-P)Ax=Ax.$$

■

**Proposition 1.14 ([19])** *Soit $A$ une sélection de $T$ alors :*

1. $G(T)\cap(\{0\}\times T(0))=\{0\}\times\{0\}$,
   *et*
2. $G(T)=G(A)+(\{0\}\times T(0))$.
   *La projection linéaire $P$ définie sur $G(T)$ avec le rang $G(A)$ et le noyau $\{0\}\times T(0)$ à la propriété que pour $(x,y)\in G(T)$.*
3. $P(x,y)=(x,Ax)$.
   *Inversement, toute projection linéaire $P$ définie sur $G(T)$ avec le noyau $\{0\}\times T(0)$ détermine une sélection $A$ dont le graphe est donné par :*
4. $G(A)=PG(T)$.

## 1.5 Relations linéaires normés

Dans cette section nous présentons les notions fondamentales sur les relations linéaires qui se rapportent aux espaces vectoriels normés

### 1.5.1 Espace quotient

**Définition 1.17 ([14], page 3)** *Soit $Y$ un espace vectoriel normé, **l'espace quotient** de $Y$ par $\overline{T(0)}$ est l'espace vectoriel $Y/\overline{T(0)}$ défini par*

$$Y/\overline{T(0)}=\left\{[y];[y]=y+\overline{T(0)}\right\},$$

*muni de la norme :*

$$\|[y]\|=\inf\{\|y-u\|:u\in\overline{T(0)}\}.$$

### 1.5.2 L'application quotient naturelle

**Définition 1.18 ([19], page 25)** *Pour un sous-espace linéaire fermé $E$ de $X$ donné, notons $Q_E^X$ (ou simplement $Q_E$) **l'application du quotient naturel** de domaine $X$ et d'espace nul $E$.*
*Nous noterons $Q_{\frac{Y}{T(0)}}$ pour $Q_T$, ou simplement par $Q$ quand $T$ est compris.*
*L'application quotient*

$$Q_T : Y \longrightarrow Y/\overline{T(0)},$$

*définit par $Q_T(y) = [y]$.*

**Proposition 1.15 ([19])** *Soit $T \in LR(X,Y)$, alors $QT$ a une valeur unique.*

**Preuve.** Soit $x \in D(T)$ et soit $z_1, z_2 \in QTx$.
Alors

$$z_1 - z_2 \in QTx_1 - QTx_2 = QT(0) \subset Q\overline{T(0)} = 0.$$

Donc $z_1 = z_2$. ■

### 1.5.3 Norme d'une relation linéaire

**Définition 1.19 ([19])** *Soit $T \in LR(X,Y)$. Alors :*

$$\|Tx\| = \|QTx\| \qquad (x \in D(T)),$$
$$\|T\| = \|QT\|,$$

*on appelle **la norme** de $Tx$ et $T$ respectivement.*

### 1.5.4 Relations bornées

**Définition 1.20 ([19])** *On dit que la relation $T \in LR(X,Y)$ est **bornée** si :*
*$D(T) = X$ et $\|T\| \leq M$, pour tout $M > 0$.*

### 1.5.5 Distance

**Définition 1.21 ([19])** *Soient $U$ et $V$ des sous-ensembles non vides d'un espace normé, on définit **la distance** entre $U$ et $V$ par la formule :*

$$d(U,V) = \inf\{\|u - v\| : u \in U, v \in V\}.$$

*On écrira aussi d(x,V), ou d(V,x), pour la distance entre $\{x\}$ et $V$.*

**Proposition 1.16 ([19])** *Soit $T \in LR(X,Y)$, donc on a les propriétés suivantes :*

*(a).* *Si $y_1, y_2 \in Tx$, alors $d(y_1, T(0)) = d(y_2, T(0))$.*

*(b).* *pour $x \in D(T)$ :*

$$\inf_{y \in Tx} d(y, T(0)) = \sup_{y \in Tx} d(y, T(0)).$$

*(c).* $\|Tx\| = d(y, T(0)) \qquad \forall y \in T(x).$

*(d).* $\|Tx\| = d(Tx, T(0)) = d(Tx, 0) \qquad x \in D(T).$

**Preuve.**

(a). Puisque $y_1 - y_2 \in T(0)$ on a :

$$\begin{aligned} d(y_1, T(0)) &= \inf_{z\in T(0)} \|y_1 - z\|, \\ &= \inf_{z\in T(0)} \|y_2 + (y_1 - y_2 - z)\|, \\ &= \inf_{z\in T(0)} \|y_2 - z\|, \\ &= d(y_2, T(0)). \end{aligned}$$

(b). Soit $z \in Tx$. on a :

$$\begin{aligned} d(z, T(0)) &= \sup_{y\in Tx} d(y, T(0)), \\ &= \inf_{y\in Tx} d(y, T(0)). \end{aligned}$$

(c). Pour tout $y \in Tx$ on a :

$$\begin{aligned} Tx &= y + T(0), \text{d'après la proposition (1.5)et donc} \\ \|Tx\| &= \|QTx\|, \\ &= \|Qy\|, \\ &= d(y, \overline{T(0)}), \\ &= d(y, T(0)). \end{aligned}$$

(d). Si $z \in Tx$. Alors :

$$\begin{aligned} d(Tx, 0) &= \inf_{y\in Tx} \|y\|, \\ &= \inf_{y\in Tx} \|z - (z - y)\|, \\ &= \inf_{k\in T(0)} \|z - k\|, \\ &= d(z, T(0)), \\ &= \|Qz\|, \\ &= \|QTx\|, \\ &= \|Tx\|. \end{aligned}$$

■

**Proposition 1.17 ([19])** *Soient $S, T \in LR(X, Y)$, alors :*

1. $$\|Sx + Tx\| \leq \|Sx\| + \|Tx\| \qquad (x \in D(T + S)).$$

2. *$\forall \alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in D(T)$ on a :*
$$\|\alpha Tx\| = |\alpha| \, \|Tx\|. \tag{1.8}$$

**Preuve.**

1. Soit $s \in Sx$, $t \in Tx$. Alors $s+t \in (S+T)x = Sx+Tx$, donc :

$$\begin{aligned} \|Sx+Tx\| &= d(s+t,(S+T)(0)), \\ &\leq d(s,S(0)+T(0)+d(t,S(0)+T(0))), \\ &\leq d(s,S(0)+d(t,T(0))), \\ &= \|Sx\|+\|Tx\|. \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} \|\alpha Tx\| &= \|Q(\alpha T)(x)\| \qquad (\text{puisque } \alpha T(0) = T(0) \text{ pour } \alpha \neq 0), \\ &= \|\alpha QTx\|, \\ &= |\alpha|\|Tx\|. \end{aligned}$$

■

**Proposition 1.18 ([19])** *Soit $T \in LR(X,Y)$, alors :*

$$\|T\| = \sup_{x \in B_x} \|Tx\|.$$

**Preuve.**

$$\begin{aligned} \|T\| &= \|QT\|, \\ &= \sup_{x \in B_x} \|QTx\|, \\ &= \sup_{x \in B_x} \|Tx\|. \end{aligned}$$

■

**Proposition 1.19 ([19])** *Pour $S,T \in LR(X,Y)$, $\alpha \in \mathbb{K}$ alors :*

*(a).*

$$\|S+T\| \leq \|S\|+\|T\|.$$

*(b).*

$$\|\alpha T\| = |\alpha|\,\|T\|.$$

**Preuve.**

1. soient $S,T \in LR(X,Y)$, alors

$$\begin{aligned} \|S+T\| &= \sup\{\|Sx+Tx\| : x \in B_X \cap D(S) \cap D(T)\}, \\ &\leq \sup\{\|Sx\|+\|Tx\| : x \in B_X \cap D(S) \cap D(T)\}, \\ &\leq \sup\{\|Sx\| : x \in B_X \cap D(S) \cap D(T)\} + \sup\{\|Tx\| : x \in B_X \cap D(S) \cap D(T)\}, \\ &\leq \sup\{\|Sx\| : x \in B_{D(S)}\} + \sup\{\|Tx\| : x \in B_{D(T)}\}, \\ &= \|S\|+\|T\|. \end{aligned}$$

2. Pour $\alpha \in \mathbb{K}$ :

$$\begin{aligned} \|\alpha Tx\| &= \|Q(\alpha T)(x)\|, \\ &= \|\alpha QTx\|, \\ &= |\alpha|\,\|QTx\|, \\ &= |\alpha|\,\|Tx\|. \end{aligned}$$

■

**Proposition 1.20 ([19])** *Soit $T \in LR(X,Y)$. Alors :*

*(a).* $\|T\| < \infty$ *si et seulement s'il existe un nombre* $\lambda > 0$ *pour lequel :*

$$T B_{D(T)} \subset \lambda B_{R(T)} + T(0).$$

*(b).* *si* $\|T\| < \infty$, *alors :*

$$\|T\| = \inf_{\lambda>0} \left\{ \lambda : T B_{D(T)} \subset \lambda B_{R(T)} + T(0) \right\}.$$

**Preuve.**

(a). Supposons que $\|T\| < \infty$. Alors d'après la Proposition (1.16) on a :

$$\sup_{\|x\|<1} \sup_{y \in Tx} d(y, T(0)) = \|T\| < \infty.$$

Donc si $x \in B_{D(T)}$ et $y \in Tx$, alors $\exists k \in T(0)$ tel que, soit $\epsilon > 0$, on a :

$$\|y - k\| < \|T\| + \epsilon,$$

i.e. $y - k \in (\|T\| + \epsilon) B_{R(T)}$. Donc :

$$y \in (\|T\| + \epsilon) B_{R(T)} + T(0). \tag{1.9}$$

Soit maintenant $x \in B_{D(T)}$ et considérons $y \in Tx$. Alors $y = \lambda y_1 + k$ tel que $\|y_1\| \leq 1$ et $k \in T(0)$. D'ou $\|y - k\| \leq \lambda$. Donc $d(y, T(0)) \leq \lambda$. Alors $\|T\| \leq \lambda < \infty$.

(b). Soit $\|T\| < \infty$. Si $\|T\| = 0$, alors $T B_{D(T)} \subset \overline{T(0)}$ et maintenant soit $\|T\| > 0$.

$$\inf_{\lambda>0} \{ \lambda : T B_{D(T)} \subset \lambda B_{R(T)} + T(0) \} \leq \|T\|. \tag{1.10}$$

Supposons maintenant que $0 < \alpha < \|T\|$ et soit $x \in B_{D(T)}$, $y \in Tx$ alors :

$$\alpha < d(y, T(0)). \tag{1.11}$$

Supposons que $T B_{D(T)} \subset \alpha B_{R(T)} + T(0)$. Alors $\exists y_1 \in B_{R(T)}$, $k \in T(0)$ tel que $y = \alpha y_1 + k$. Alors :

$$\|y - k\| \leq \alpha < d(y, T(0)),$$

par (1.11), une contradiction, donc nous concluons que :

$$\alpha < \inf\{\lambda > 0 : T B_{D(Y)} \subset \lambda B_{R(T)} + T(0)\}.$$

■

### 1.5.6 Le module minimum

**Définition 1.22 ([19])** *Soit $T \in LR(X,Y)$* ***Le module minimum de*** *$T$ est la quantité :*

$$\gamma(T) = \sup\{\lambda : \|Tx\| \geq \lambda d(x, N(T)) \ \ pour \ \ x \in D(T)\}.$$

**Proposition 1.21 ([19])** *Soit $T \in LR(X,Y)$ :*

$$\gamma(T) = \sup\{\lambda : \lambda B_{R(T)} \subset T B_{D(T)}\}.$$

**Théorème 1.22 ([19])** *Soit $T \in LR(X,Y)$ on a la formule :*

$$\gamma(T) = \|T^{-1}\|^{-1}.$$

## 1.6 Relations linéaires continues

**Définition 1.23 ([19])** *Soit $S$ une relation arbitraire d'un espace topologique à un autre, alors $S$ est dite **continue** si pour chaque voisinage $V$ dans $R(S)$, l'image inverse $S^{-1}(V)$ est un voisinage dans $D(S)$.*

*La relation $S$ est dite ouverte, si pour chaque voisinage $U$ dans $D(S)$, l'image $S(U)$ est un voisinage dans $R(S)$.*

**Remarque 5** *On remarque que*

1. *$S$ est continue si et seulement si $S^{-1}$ est ouverte.*
2. *Soit $U_X$ la boule d'unité ouverte de $X$, c'est-à-dire :*
$$U_X = \{x \in X : \|x\| < 1\}.$$
3. *Soit $E$ un sous-espace fermé de $X$ :*
$$Q_E U_X = U_{Q_E}(x).$$
4. $$Q_E B_X = B_{Q_E}(x).$$
*On note le critère topologique simple suivant :*
5. *$T$ est continue si et seulement si $T\overline{\Omega} \subset \overline{T\Omega}$ pour tout sous-ensemble $\Omega$ de $D(T)$.*

**Proposition 1.23 ([19])** *Soit $T \in LR(X, Y)$. Alors :*

*(a). $T$ est continue si et seulement si $\|T\| < \infty$.*

*(b). $T$ est un ouverte si et seulement si $\gamma(T) > 0$.*
*En particulier :*

*(c). Si $\dim D(T) < \infty$, alors $T$ est continue.*

*(d). Si $\dim R(T) < \infty$, alors $T$ est ouverte.*

**Preuve.**

(a). Soit $T$ continue. Alors il existe un voisinage ouvert $U$ dans $D(T)$ tel que $U \subset T^{-1}U_{R(T)}$.
Donc :
$$U - U \subset T^{-1}U_{R(T)} - T^{-1}U_{R(T)}.$$
Un voisinage ouvert de $\{0\}$ dans $D(t)$. Alors $2T^{-1}U_{R(T)} = T^{-1}(U_{R(T)} - U_{R(T)}) = T^{-1}U_{R(T)} - T^{-1}U_{R(T)}$.
Par conséquent $\exists \lambda > 0$ tel que :
$$\lambda U_{D(T)} \subset T^{-1}(U_{R(T)}),$$
donc :
$$\frac{1}{2}\lambda B_{D(T)} \subset T^{-1}(B_{R(T)}).$$
Alors :
$$\frac{1}{2}\lambda T B_{D(T)} \subset B_{R(T)} + T(0) = T T^{-1}(B_{R(T)}),$$
et donc $\|T\| < \infty$.

Inversement, supposons que $\|T\| < \infty$. Soit $V$ un voisinage en boule ouverte dans $R(T)$, de centre $y$. Alors :

$$V_0 = V - \{y\} = \alpha U_{R(T)} \qquad \forall \alpha > 0.$$

On a aussi $\forall \lambda > 0$,

$$T U_{D(T)} \subset \lambda U_{R(T)} + T(0),$$

donc

$$U_{D(T)} + T^{-1}(0) \subset \lambda T^{-1} U_{R(T)} = \alpha^{-1} \lambda T^{-1} V_0,$$

ainsi

$$T^{-1}(0) + \lambda^{-1} \alpha U_{D(T)} \subset T^{-1}(V - y) = T^{-1}(V_0),$$

alors :

$$T^{-1} y + \lambda^{-1} \alpha U_{D(T)} \subset T^{-1} y + T^{-1} V - T^{-1} y,$$

i.e.

$$T^{-1} y + \lambda^{-1} \alpha U_{D(T)} \subset T^{-1} V.$$

qui est un voisinage dans $D(T)$.

(b). Découle par le Théorème (1.22).

(c). Découle de la continuité de l'opérateur linéaire $QT$, puisque $\|T\| = \|QT\|$.

(d). On remplace $T^{-1}$ par $T$ dans ((c).).

■

**Proposition 1.24 ([19])** *Soit $T \in LR(X, Y)$, alors :*

*(a). $N(T) \subset N(QT)$ avec égalité si $T(0)$ est relativement fermé dans $R(T)$.*

*(b). $\gamma(T) \leq \gamma(QT)$ avec égalité si T(0) est relativement fermé dans $R(T)$.*

**Preuve.**

(a).

$$\begin{aligned} N(T) &= \{x : (x,0) \in G(T)\} \\ &= \{x : Tx \cap T(0) \neq \emptyset\} \\ &\subset \{x : \overline{Tx} \cap Tx \neq \emptyset\} \\ &= N(QT). \end{aligned}$$

Avec $T(0)$ est fermé dans $R(T)$.

(b). $\gamma(T) = \sup\{\lambda : \|Tx\| \geq \lambda d(x, N(T)) \text{ pour } x \in D(T)\} \leq \sup\{\lambda : \|Tx\| \geq \lambda d(x, N(QT)) \text{ pour } x \in D(T)\}$, avec $T(0)$ est fermé dans $R(T)$, par la partie ((a).).

Le résultat découle maintenant de l'égalité $\|T\| = \|QT\|$. ■

**Remarque 6** *D'après les proposition (1.24) et (1.23), on voit que :*
*$T$ est ouverte $\Longrightarrow$ $QT$ est ouverte.*
*Le réciproque est fausse.*

**Proposition 1.25 ([19])** *Soit $T$ ouverte. Alors :*

$$R(T) \cap \overline{T(0)} \subset T\overline{T^{-1}(0)},$$

*avec égalité si $T^{-1}(0)$ est relativement fermée dans $D(T)$ (par exemple, si $T$ est injective).*

**Preuve.** Soit $T$ ouverte et soit $\{y_n\}$ une suite dans $T(0)$ telle que $\lim y_n = y \in R(T)$. Supposons d'abord que $T$ est injective, par la continuité de $T^{-1}$ on a :

$$\lim \|T^{-1}(y_n - y)\| \leq \lim \|T^{-1}\| \|y_n - y\| = 0.$$

Ainsi $\|T^{-1}y\| = 0$, d'où $y \in N(T^{-1}) = T(0)$ puisque $T^{-1}$ est a valeur unique.

Passant au cas général, soit $Q = Q_{T^{-1}}$, $TQ^{-1}$ est ouvert, d'après ce qui a été prouvé nous avons :

$$D(QT^{-1}) \cap \overline{N(QT^{-1})} = N(QT^{-1}).$$

En combinant avec la Proposition (1.24) on obtient :

$$\begin{aligned} R(T) \cap \overline{T(0)} &= D(T^{-1}) \cap \overline{N(T^{-1})} \subset D(QT^{-1}) \cap N(\overline{QT^{-1}}), \\ &= N(QT^{-1}), \\ &= T(\overline{T^{-1}(0)}). \end{aligned}$$

■

**Corollaire 1.26 ([19])** *Si $T$ est ouverte et $N(T)$ est fermé, alors*

$$N(T) = N(QT) \text{ et } \gamma(T) = \gamma(QT).$$

**Proposition 1.27 ([19])** *Soit $M$ un sous-ensemble non vide de $R(T)$ et soit $\gamma(T) < \infty$. Alors pour $N \subset D(T)$ on a :*

$$d(TN, M) \geq \gamma(T) d(N, T^{-1}M).$$

**Preuve.** Soit $\epsilon > 0$ et en choisis $m \in M$ et $x \in N$ tels que :

$$d(TN, M) > d(Tx - m, 0) - \epsilon. \tag{1.12}$$

Maintenant $Tx - m = T(x - T^{-1}m)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} d(Tx - m, 0) &= d(Tx - m - T(0), 0) = d(Tx, m + T(0)), \\ &= d(Tx, TT^{-1}m) = \inf_{h \in T^{-1}m} d(Tx, Th), \\ &= \inf_{h \in T^{-1}m} d(T(x-h), 0) = \inf_{h \in T^{-1}m} \|T(x-h)\|, \\ &\geq \gamma(T) \inf_{h \in T^{-1}m} d(x - h, T^{-1}0), \\ &= \gamma(T) \inf_{h \in T^{-1}m} d(x, h + T^{-1}0), \\ &= \gamma(T) d(x, T^{-1}m) \geq \gamma(T) d(x, T^{-1}M) \geq \gamma(T) d(N, T^{-1}M). \end{aligned}$$

Alors de (1.12) :

$$d(TN, M) > \gamma(T) d(N, T^{-1}M) - \epsilon.$$

■

**Théorème 1.28 ([19])** *Soient $S \in LR(X, Z)$, $T \in LR(X, Y)$. Alors*

$$\gamma(ST) \geq \gamma(S|_{R(T)}) \gamma T \qquad (\infty.0 \text{ exclue}), \tag{1.13}$$

*avec $\gamma(ST) = \infty$ chaque fois que $\gamma(T) = \infty$ (même si $\gamma(S|_{R(T)}) = 0$), de plut on a l'implication :*

$$S^{-1}(0) \subset R(T) \Longrightarrow \gamma(ST) \geq \gamma(S)\gamma(T). \tag{1.14}$$

**Preuve.** Soit $x \in D(T)$. Puisque $ST = (S|_{R(T)})T$, on suppose que $S = S \mid R(T)$.
Supposons d'abord $\gamma(S), \gamma(T) < \infty$. On a :

$$\begin{aligned} \|STx\| = d(STx, ST(0)) &\geq \gamma(S) d(Tx, S^{-1}ST(0)), \\ &\geq \gamma(S)\gamma(T) d(x, T^{-1}S^{-1}ST(0)), \\ (\text{ puisque } S^{-1}ST(0) = T(0) + S^{-1}(0) \subset R(T)) & \\ &= \gamma(S)\gamma(T) d(x, T^{-1}S^{-1}(0)). \end{aligned}$$

D'où l'inégalité (1.13).

Supposons maintenant que $S^{-1}(0) \subset R(T)$ (ici on ne suppose plus que $S = S|_{R(T)}$), dans ce cas $S^{-1}ST(0) = T(0) \cap D(S) + S^{-1}(0) \subset R(T)$ et donc :

$$d(Tx, S^{-1}ST(0)) \geq \gamma(T) d(x, T^{-1}S^{-1}(0)),$$

et donc, comme précédemment, on obtient :

$$\|STx\| \geq \gamma(S)\gamma(T) d(x, S^{-1}T^{-1}(0)).$$

Découle l'implication (1.14).

Soit maintenant $\gamma(T) = \infty$. Alors $T^{-1}(0)$ est dense dans $D(T)$. Donc $d(x, T^{-1}(0)) = 0$ pour tout $x$ dans $D(ST)$, mais alors $N(ST)$ est dense dans $D(ST)$ ce qui signifie que $\gamma(ST) = \infty$.

Enfin, supposons que $\gamma(S) = \infty$, $\gamma(T) < \infty$. Puisque maintenant $d(Tx, S^{-1}(0)) = 0$, donc $\gamma(T) d(x, T^{-1}S^{-1}(0)) = 0$ ((1.27)).

Donc $\gamma(ST) = \infty$ si $\gamma(T) \neq 0$, la preuve de l'implication (1.14) suit de la même manière. ■

**Corollaire 1.29 ([19])** *Soient $T \in LR(X, Y)$ et $S \in LR(Y, Z)$. Alors :*

$$\|ST\| \leq \|S\| \, \|I_{D(S)} T\| \qquad (\infty, 0 \text{ exclue}), \tag{1.15}$$

*avec $\|ST\| = 0$ si $\|S\| = 0$ même si $\|I_{D(S)} T\| = \infty$.*

*De plut on a l'implication :*

$$T(0) \subset D(S) \Longrightarrow \|ST\| \leq \|S\| \, \|T\|. \tag{1.16}$$

**Corollaire 1.30 ([19])** *Soit $(T_n)$ une suite de relations linéaires bornées dans LR(X,Y) et soit X complet. Si T est une relation définie partout dans LR(X,Y) telle que :*

$$T_n(0) \subset \overline{T(0)} \ \text{ et } \lim_n \|T_n x - Tx\| = 0, \forall x \in X, n \in \mathbb{N}.$$

*Alors $T$ est bornée .*

**Corollaire 1.31 ([19])** *Soit X un espace normé et soit W un sous-ensemble de X tel que :*

$$\sup_{w \in W} |x' w| < \infty \qquad (x' \in X').$$

*Alors W est borné.*

**Proposition 1.32 ([19])** *Si $X = M + N$ où $M \cap N = \{0\}$ et M est de dimension fermée et finie, alors la projection définie sur $X$ de rang $M$ et de noyau $N$ est bornée.*

**Corollaire 1.33 ([19])** *Si M est un sous-espace de dimension fini de D(T), fermé dans D(T) et si $T\mid_M$ continue, alors T est continue.*

**Preuve.** Soit $P$ comme dans la Proposition (1.32). Nous avons :

$$\begin{aligned}\|Tx\| &\leq \|TPx\| + \|T(I-P)x\|,\\ &\leq (\|T\mid_M\| \, \|P\| + \|T\mid_N\| \, \|I-p\|)\|x\|.\end{aligned}$$

Où $\|T\mid_N\| < \infty$ par la Proposition (1.23) ■

**Proposition 1.34 ([19])** *Soit T ouverte et injective et soit $S \in LR(X,Y)$ un opérateur linéaire vérifiant $\|S\| < \gamma(T)$. Alors $T+S$ est ouvert et injectif.*

**Preuve.** Pour $x \in D(T+S)$ :

$$\begin{aligned}\|(T+S)x\| &\geq \|Tx\| - \|Sx\| \qquad (S(0)=\{0\}),\\ &\geq \gamma(T)\|x\| - \|S\| \, \|x\| = (\gamma(T) - \|S\|)\|x\|.\end{aligned}$$

■

## 1.7 Sélections continues

Dans cette section, nous explorons la possibilité de trouver une sélection continue pour une relation linéaire T.

**Proposition 1.35 ([19])** *Soit $T \in LR(X,Y)$, si $T$ est une sélection continue de A, alors $T$ est continue. de plus :*

$$\|T\| \leq \|A\|.$$

**Preuve.** Si $A$ une sélection continue de $T$. On a pour $x \in D(T)$,

$$Tx = Ax + T(0),$$

donc

$$\begin{aligned}\|Tx\| = \inf\{\|y\| : y \in Tx\} &\leq \|Ax\|\\ &\leq \|A\| \, \|x\|.\end{aligned}$$

Donc T est continue. ■

**Proposition 1.36 ([19])** *Soit $T \in LR(X,Y)$, si $T$ est continue, et si $T(0)$ est le noyau d'une projection continue $P$ définie sur $R(T)$, alors $PT$ est une sélection continue de $T$*

**Preuve.** Puisque $P$ et $T$ sont continues sur $R(T)$, la continuité de $PT$ découle du corollaire (1.29) ■

**Proposition 1.37 ([19])** *Soit $T$ continue et soit $\{0\} \times T(0)$ complément topologique dans $G(T)$.*

*Alors $T$ admet une sélection continue, à savoir la relation dont le graphe est $PG(T)$, où $P$ est toute projection bornée définie sur $G(T)$ de noyau $\{0\} \times T(0)$.*

**Preuve.** Puisque $T$ est continue, donc $T_G$ est continue, en effet :

$$\begin{aligned}\|T_G x\| &= \inf\{\|x\|+\|y\| : y \in Tx\},\\ &= \|x\|+\|Tx\|,\\ &\leq \|x\|+\|T\|\,\|x\|,\\ &= (1+\|T\|)\|x\|.\end{aligned}$$

Alors $PT_G$ a valeur unique et continue (puisque $D(P)=R(T_G)$). Donc :

$$PT_G x = (x, Ax) \qquad (x \in D(T)).$$

Si $A$ est linéaire et a valeur unique.Maintenant on a :

$$\begin{aligned}\|(x,Ax)\| &= \|x\|+\|Ax\|,\\ &= \|PT_G x\|,\\ &\leq \|P\|\,\|T_G x\|,\\ &= \|P\|(\|x\|+\|Tx\|),\end{aligned}$$

alors

$$\|Ax\| \leq (\|P\|-1+\|P\|\,\|T\|)\|x\|.$$

Donc $A$ est une sélection continue de $T$. ■

**Corollaire 1.38 ([19])** *Soit $\{0\}\times T(0)$ topologiquement complimenté dans $G(T)$, ou dans $X\times Y$, alors $T$ a une sélection continue si et seulement si $T$ est continue.*

**Preuve.** Si $\{0\}\times T(0)$ est topologiquement complimenté dans $X\times Y$, alors il est déjà topologiquement complimenté dans $G(T)$.

Donc $T$ admet une sélection continue d'après la Proposition (1.37) l'inverse est évident (d'après (1.35)). ■

**Corollaire 1.39 ([19])** *Soit $H$ un espace de Hilbert, soit $T \in LR(X,Y)$ et soit $T(0)$ fermé. Alors $T$ possède une sélection continue si et seulement si $T$ est continue.*

**Proposition 1.40 ([19])** *Soit $T(0)$ de dimension finie, alors $T$ a une sélection continue si et seulement si $T$ est continue.*

**Définition 1.24 ([19])** *Si le domaine de la relation linéaire $T$ est de dimension finie, alors on dit que $T$ est de rang fini.*

**Exemple 2 ([19])** *Soit $T$ une sélection continue et supposons que $F \in LR(X,Y)$ est continue et de rang fini. Alors $T+F$ a une sélection continue.*

## 1.8 Relations linéaires fermées et fermables

**Définition 1.25 ([19])** *La fermeture d'une relation linéaire $T \in LR(X,Y)$ est la relation $\overline{T}$ définie par :*

$$G(\overline{T}) = \overline{G(T)}. \tag{1.17}$$

*Il est clair que $\overline{T} \in LR(X,Y)$.*

*La relation $T$ est dite fermée si et seulement si son graphe $G(T)$ est fermé en $X\times Y$, ou équivalents, si $T=\overline{T}$.*

**Propriétés 2 ([19])** *Soit $T \in LR(X,Y)$ nous listons quelques propriétés simple :*

1. *$T$ est fermée si seulement si $T^{-1}$ est fermée.*
2. $(\overline{T})^{-1} = (\overline{T^{-1}})$.
3. $G(\overline{T}\, J_{D(T)}) = \overline{G(T\, J_{D(T)})}$.
4. *Si $T$ est fermée, alors $T(0)$ est fermée.*
5. *Si $T$ est continue et $D(T)$ et $T(0)$ sont fermés, alors $T$ est fermée.*
   *Notons que même si $G(T) \subset G(\overline{T})$, $\overline{T}$ n'est pas nécessairement une extension de $T$, nous n'avons que $Tx \subset \overline{T}x$ pour tout $x \in D(T)$.*

**Proposition 1.41 ([19])** *Soit $T \in LR(X,Y)$, alors :*

$$Q\overline{T} = \overline{QT} \qquad (\text{où } Q = Q_T).$$

**Preuve.** Soit $(x, Qy) \in G(\overline{QT}) = \overline{G(QT)}$, choisir une suite $(x_n, QTx_n)$ dans $G(QT)$ convergente vers $(x, Qy)$, alors il existe une suite $(k_n)$ dans $T(0)$ et une suite $\{y_n\}$, avec $y_n \in Tx_n$, telles que :

$$y_n + k_n \longrightarrow y.$$

Donc $(x_n, y_n + k_n)$ est une suite dans $G(T)$ convergente vers $(x, y) \in G(\overline{T})$. Ainsi $(x, Qy) \in G(Q\overline{T})$, donc :

$$G(\overline{QT}) \subset G(Q\overline{T}).$$

Pour l'inclusion inverse, soit $(x, Qy) \in G(Q\overline{T})$. Alors $(x, y_1) \in G(\overline{T})$ où $Qy = Qy_1$. Choisir une suite $(x_n, y_n)$ dans $G(T)$ convergente vers $(x, y_1)$. Alors :

$$(x_n, Qy_n) = (x_n, QTx_n) \longrightarrow (x, Qy_1) = (x, Qy).$$

Donc $(x, Qy) \in \overline{G(QT)}$ ■

**Proposition 1.42 ([19])** *Soit $T \in LR(X,Y)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$T$ est fermée.*
2. *$QT$ est fermée et $T(0)$ est fermée.*

**Preuve.** Si $T$ est fermée, alors d'après la Proposition (1.41), $QT$ est fermée et $T(0)$ est fermée par ((2)-(5.)) .

Inversement, supposons que (2.) soit vérifié. Alors d'après la Proposition (1.41), $D(T) = D(QT) = D(Q\overline{T}) = D(\overline{T})$ et pour $x \in D(T)$ on a $Q\overline{T}x = QTx$, donc :

$$\overline{T}x = \overline{T}x + T(0) = Tx + T(0) = Tx.$$

Donc $T = \overline{T}$, c'est-à-dire que $T$ est fermée. ■

**Définition 1.26 ([19])** *La relation linéaire $T$ est dite fermable si $\overline{T}$ est une extension de $T$, c'est-à-dire si :*

$$Tx = \overline{T}x \qquad \text{pour tout } x \in D(T).$$

**Proposition 1.43 ([19])** *Soit $T \in LR(X,Y)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$T$ est fermable.*
2. $T(0) = \overline{T}(0)$.

3. $TJ_{D(T)}$ *est fermée.*

**Corollaire 1.44 ([19])** *$T^{-1}$ est fermable si et seulement si $N(T)=N(\overline{T})$.*

**Proposition 1.45 ([19])** *Soit $T\in LR(X,Y)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$T$ est fermable.*
2. *$QT$ est fermable et $T(0)$ est fermée.*

*En particulier, si $T$ est continue et $T(0)$ est fermée, alors $T$ est fermable.*

**Preuve.** Si $T$ est fermable alors $T(0)=\overline{T}(0)$ d'après la Proposition (1.43), donc $T(0)$ est fermée, puisque $\overline{T}x=Tx$ pour $x\in D(T)$, on a :

$$Q\overline{T}J_{D(T)}=QTJ_{D(T)},$$

donc d'après la Proposition (1.41)

$$\overline{QT}J_{D(T)}=QTJ_{D(T)}.$$

Donc $QT$ est fermable.
Inversement, soit $QT$ fermable et $T(0)$ fermée, alors pour $x\in D(T)$ on a :

$$\begin{aligned}\overline{QT}x&=QTx,\\&=Q\overline{T}x.\end{aligned}$$

Donc $Tx=\overline{T}x$, puisque $\overline{T(0)}=T(0)$, c'est-à-dire que $T$ est fermable. ■

**Proposition 1.46 ([19])** *Soit $T\in LR(X,Y)$, alors :*

$$\|\overline{T}\|\leq\|T\|, \tag{1.18}$$

*avec égalité si $\overline{T}(0)=\overline{T(0)}$, par exemple si $T$ est fermable.*

**Preuve.** Supposons que $\|\overline{T}\|>\|T\|$ et choisissons $\epsilon>0$ et $(x_0,y_0)\in G(\overline{T})$ tels que $\|x_0\|\leq 1$ et :

$$d(y_0,\overline{T}(0))>\|T\|+2\epsilon. \tag{1.19}$$

Choisissons ensuite $(x,y)\in G(T)$ tel que $\|x-x_0\|+\|y-y_0\|<\epsilon$, et $\|x\|<1$. Puisque :

$$|d(y_0,T(0))-d(y,T(0))|\leq\|y-y_0\|<\epsilon,$$

nous obtenons de (1.19) que :

$$\|T\|+2\epsilon<d(y_0,\overline{T}(0))\leq d(y_0,T(0))\leq d(y,T(0))+\epsilon\leq\|T\|+\epsilon,$$

ce qui une contradiction. Donc $\|\overline{T}\|\leq\|T\|$.
Soit maintenant $\overline{T}(0)=\overline{T(0)}$. On a pour $x\in D(T)$ et $y\in Tx\subset\overline{T}x$,

$$\|Tx\|=d(Tx,\overline{T}(0))=d(\overline{T}(x),\overline{T}(0))=\|\overline{T}x\|.$$

Donc $\|T\|\leq\|\overline{T}\|$. ■

**Corollaire 1.47 ([19])** *Soit $T\in LR(X,Y)$, alors :*

$$\gamma(\overline{T})\geq\gamma(T), \tag{1.20}$$

*avec égalité si $\overline{N(T)}=N(\overline{T})$.*

**Proposition 1.48 ([19])** *Soit $T$ est fermée et soit $F\subset Y$ de dimension finie. Alors $Q_FT$ est fermée.*

**Proposition 1.49 ([19])** *Soit $S\in LR(Z,X)$ fermée et la relation $T$ a un rang fermé et satisfasse $\alpha(T)<\infty$ et $\gamma(T)>0$. Alors $TS$ est fermé.*

**Preuve.** Voir [19, page 47] ■

## 1.9 Notes et remarques

Certains auteurs définissent une relation comme étant un sous-ensemble non vide de $U \times V$ (voir par exemple [16, page 25]) a savoir $G(T)$ est un sous-espace, est souvent utilisée comme définition d'une relation linéaire.

Passons brièvement en revue la relation entre les relations linéaires et certains autres types d'applications à valeurs fixes entre les espaces vectoriels (réels) $X$ et $Y$.

Soit $F \in R(X, Y)$, alors $F$ est dite :

(a). **affine** si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x_1, x_2 \in X$

$$\alpha F x_1 + (1-\alpha) F x_2 \subset F(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) \tag{1.21}$$

(b). **convexe** si pour $\alpha \in [0,1]$ et $x_1, x_2 \in X$, l'inclusion (1.21) admet

(c). **un processus convexe** si pour tout $\alpha, \beta \geq 0$ et $x_1, x_2 \in X$

$$\alpha F x_1 + \beta F x_2 \subset F(\alpha x_1 + \beta x_2) \tag{1.22}$$

(d). **linéaire** si pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x_1, x_2 \in X$ , l'inclusion (1.22) et vérifiée.

On a évidemment les inclusions :

$$\text{linéaire} \subset \text{affine} \subset \text{convexe}$$

et

$$\text{linéaire} \subset \text{processus convexe} \subset \text{convexe}$$

CHAPITRE 2

# Adjoints des relations linéaires

Ce chapitre est consacré à l'adjoint d'une relation linéaire, on définit l'adjoint et on donne une caractérisation pour lui, et quelques propriétés importantes.

## 2.1 L'adjoint

**Définition 2.1** ([19]) *Soit $X$ un espace vectoriel normé, $X'$ désignera le dual topologique de $X$, c'est-à-dire l'espace de toutes les formes linéaires continues $x'$ définies sur $X$, muni de la norme :*

$$\|x'\| = \inf\{\lambda : |x'x| \leq \lambda\|x\| \text{ pour tout } x \in X\}.$$

**Notation 2** *Si $K \subset X$ et $L \subset X'$, On note :*

$$K^{\perp} = \{x' \in X' : x'x = 0 \text{ pour tout } x \in K\},$$
$$L^{\top} = \{x \in X : x'x = 0 \text{ pour tout } x' \in L\}.$$

Clairement, $K^{\perp}$ et $L^{\top}$ sont des sous-espaces linéaires fermés de $X'$ et $X$ respectivement, de plus, si $M$ est un sous-espace linéaire de $X$, alors $M^{\perp\top} = \overline{M}$.

Si $N$ est un sous-espace linéaire de $X'$, alors $N^{\top\perp}$ est la fermeture de $N$ si la topologie faible* de $X'$.

**Définition 2.2** ([19]) *Soit $T \in LR(X,Y)$ l'adjoint $T^*$ de $T$ est défini par :*

$$G(T^*) = G(-T^{-1})^{\perp} \subset Y' \times X',$$

*où*

$$\langle (y,x),(y',x')\rangle = \langle x,x'\rangle + \langle y,y'\rangle = x'x + y'y.$$

### 2.1.1 Caractérisation de l'adjoint

Soit $T \in LR(X,Y)$ :

$$(y',x') \in G(T^*) \iff y'y - x'x = 0, \forall (x,y) \in G(T).$$

Donc $y'y = x'x$ pour tout $y \in Tx$, $x \in D(T)$.
Ainsi,

$$x' \in T^* y' \iff y'Tx = x'x, \forall x \in D(T).$$

Donc x' est une extension de $y'T$. On peut donc caractériser l'adjoint comme suit :

$$G(T^*) = \{(y', x') \in Y' \times X' : x' \text{une extension de } y'T\}. \tag{2.1}$$

**Remarque 7** *D'après (2.1), nous voyons que si $T$ est défini de manière dense, alors $T^*$ sera à valeur unique (puisque dans ce cas, $y'T$ aura une extension unique a tout $X$).*

## 2.2 Quelques propriétés de L'adjoint

Dans cette section on résume, à travers des propositions, quelques propriétés de l'adjoint d'une relation linéaire.

**Proposition 2.1 ([19])** *$T^*$ est une relation linéaire fermé dans $LR(Y', X')$, et on a :*

$$D(T^*) = \{y' \in Y' : y'T \text{ est continu est à valeur unique}\}. \tag{2.2}$$

*De plus, étant donné $y' \in D(T^*)$, $x \in D(T)$, on a :*

$$T^* y'x = y'Tx \in \mathbb{K}.$$

**Preuve.** D'après (2.1) dans la définition (2.2) on a : $y'T = x'|_{D(T)}$ est continu en $D(T)$, et $y'T(0) = x'(0) = 0$. ■

**Proposition 2.2 ([19])** *Soit $T \in LR(X, Y)$ et $\lambda \neq 0$, alors :*

*(a).* $(\overline{T})^* = T^*$.

*(b).* $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

*(c).* $(\lambda T)^* = \lambda T^* \qquad (\lambda \neq 0)$.

**Preuve.** ((a).) et ((b).) sont des conséquences immédiates de la définition.
Pour ((c).) on a :
si $\lambda \neq 0$ on a :

$$\begin{aligned} G((\lambda T)^*) &= \{(y', x') : y'y = x'x \text{ pour } (x, y) \in G(\lambda T)\}. \\ &= \{(y', \lambda x) : y'(\lambda y) = (\lambda x')x \text{ pour } (x, y) \in G(T)\}. \\ &= G(\lambda T^*). \end{aligned}$$

■

**Proposition 2.3 ([19])** *Soit $T \in LR(X, Y)$, alors :*

*(a).* $N(T^*) = R(T)^{\perp}$.

*(b).* $T^*(0) = D(T)^{\perp}$.

*(c).* $N(\overline{T}) = R(T^*)^{\top}$.

*(d).* $\overline{T}(0) = D(T^*)^\top$.

**Preuve.** on a :

(a).

$$\begin{aligned} y' \in (T^*)^{-1}(0) &\iff (0, y') \in G((T^*))^{-1}, \\ &\iff (y', 0) \in G(T^*), \\ &\iff y'y = 0 \text{ pour tout } y \in R(T), \\ &\iff y' \in R(T)^\perp. \end{aligned}$$

(b).

$$\begin{aligned} x' \in T^*(0) &\iff (0, x') \in G(T^*), \\ &\iff x'x = 0 \text{ pour tout } x \in D(T), \\ &\iff x' \in D(T)^\perp. \end{aligned}$$

(c).

$$\begin{aligned} x \in N(\overline{T}) &\iff (x, 0) \in G(\overline{T}) = G(-(T^*)^{-1})^\top, \\ &\iff x'x = y'(0) \text{ pour tout} (y', x') \in G(T^*), \\ &\iff x'x = 0 \text{ pour tout} (y', x') \in G(T^*), \\ &\iff x'x = 0 \text{ pour tout} x' \in R(T^*), \\ &\iff x \in R(T^*)^\top. \end{aligned}$$

(d).

$$\begin{aligned} y \in N(\overline{T})^{-1} &\iff (y, 0) \in G(\overline{T})^{-1}, \\ &\iff (0, y) \in G(\overline{T}) = G(-(T^*)^{-1})^\top, \\ &\iff y'y = x'(0) \text{ pour tout} (y', x') \in G(T^*), \\ &\iff y'y = 0 \text{ pour tout} y' \in D(T^*), \\ &\iff y \in D(T^*)^\top. \end{aligned}$$

■

**Proposition 2.4 ([19])** *Soient $S, T \in LR(X, Y)$, alors :*

*(a).* $G(S^* + T^*) \subset G((S+T)^*)$.

*(b).* *Si $D(T) \subset D(S)$, et si $S$ est continu (par exemple, si $D(S^*) = Y'$), alors :*

$$S^* + T^* = (S+T)^*.$$

*(c).* $(S+T)^*$ *est un extension de $S^* + T^*$ si et seulement si :*

$$(D(S) \cap D(T))^\perp = D(S)^\perp + D(T)^\perp.$$

**Preuve.**

(a). soit $(y', x') \in G(S^* + T^*)$. Alors $(y', x'_1) \in G(S^*)$ et $(y', x'_2) \in G(T^*)$.
Où : $x' = x'_1 + x'_2$.
Soit $(x, s+t) \in G(S+T)$, où $(x,s) \in G(S)$ et $(x,t) \in G(T)$. Alors :

$$y'(s+t) - x'x = y'(s) + y'(t) - x'_1 x - x'_2 x = 0.$$

Donc $(y', x') \in G((S+T)^*)$.

(b). D'après ((a).) on a :

$$D(S^* + T^*) \subset D((S+T)^*).$$

Si maintenant $y' \in D((S+T)^*)$, alors :

$$0 = y'(S+T)(0) = y'S(0) + y'T(0),$$

ce qui ne peut être le cas que si $0 = y'S(0) = y'T(0)$, c'est-à-dire que $y'S$ et $y'T$ son à valeur unique. Puisque $S$ est continue, $y'S$ est continu de même que $y'T$, car :

$$y'Tx = y'(S+T)x - y'Sx \text{ pour } x \in D(T) = D(S+T) \subset D(S).$$

Ainsi d'après la Proposition (2.1), $y' \in D(T^*) \cap D(S^*) = D(S^*T^*)$, donc :

$$D(S^* + T^*) = D((S+T)^*).$$

Alors 'après la Définition (2.2), (4) :

$$S^* + T^* = (S+T)^*.$$

(c). D'après le Corollaire (1.8) on a :
$(S+T)^*$ est un extension de $S^* + T^*$ si et seulement si $(S+T)^*(0) = S^*(0) + T^*(0)$.

■

**Théorème 2.5 ([19])** *Soient $T \in LR(X,Y)$ et $S \in LR(Y,Z)$, alors :*

*(a).* $G(T^*S^*) \subset G((TS)^*)$.
*De plus, si soit :*

$$R(T^*) = X' et D(S) \subset R(T), \tag{2.3}$$

*ou :*

$$D(S^*) = Z' et R(T) \subset D(S), \tag{2.4}$$

*alors*

$$(ST)^* = T^*S^*. \tag{2.5}$$

*(b). Soit $M$ un sous-espace de dimension fini de $D(T)$, fermé dans $D(T)$, alors :*

$$(TJ_M^X)^* = (J_M^X)^* T^*. \tag{2.6}$$

**Preuve.**

(a). Si $(z', x') \in G(T^*S^*)$ alors $(z', y') \in G(S^*)$ et $(y', x') \in G(T^*)$ pour tout $y' \in Y'$.
Donc $z'z = y'y = x'x$ pour tout $(x, z) \in G(ST)$, d'ou $(z', x') \in G((ST)^*)$.
Nous avons montré que :

$$G(T^*S^*) \subset G((ST)^*). \tag{2.7}$$

Supposons que (2.3) soit vérifié. Soit $(z', x') \in G((ST)^*)$. Depuis $x' \in X' = R(T^*)$, il existe $y' \in Y'$ pour qui $(y', x') \in G(T^*)$.
Maintenant soit $(y, z) \in G(S)$. Alors $y \in D(S) \subset R(T)$, et il existe $x \in D(T)$ tel que $(x, y) \in G(T)$. D'ou $x'x = y'y$.
Aussi $(x, z) \in G(T)$. Donc $x'x = z'z$, et $y'y = z'z$.
Par conséquent $(z', y') \in G(S^*)$. Cela garantit que $(z', x') \in G(T^*S^*)$.
D'ou $G((ST)^*) \subset G(T^*S^*)$.
L'égalité (2.3) découle maintenant de (2.7).
Supposant maintenant que (2.4) soit vérifié. puisque $(S^{-1})^* = (S^*)^{-1}$ d'après la Proposition (2.2), on a :
$R((S^{-1})^*) = Z'$, et $D(T^{-1}) \subset R(S^{-1})$. Ainsi, par la première partie, nous avons :

$$(T^{-1}S^{-1})^* = (S^{-1})^*(T^{-1})^*. \tag{2.8}$$

D'après la Proposition (2.2).

(b). Si $J = J_X^M$, il est facile de voir que $D(T^*) \subset D((TJ)^*)$. Aussi $D(J^*T^*) = D(T^*)$ car $J^*$ est défini partout. De plus $(TJ)^*$ est a valeur unique.
Nous allons maintenant vérifier que $D((TJ)^*) \subset D(T^*)$.
Soit $y' \in D((TJ)^*)$. Alors $y'T$ est continue et a valeur unique on $M$ et donc sur $D(T)$, donc $y' \in D(T^*)$. Ainsi $(TJ)^*$ et $J^*T^*$ ont le même domaine.
Au vu de (2.7), il ne reste plus qu'a monter que $G(J^*T^*) \supset G((TJ)^*)$.
Soit $(y', m') \in G((TJ)^*)$.
Puisque $x' = y'T$ est ue extension continue a valeur unique de $m' = y'TJ$, on a maintenant $(y', x') \in G(T^*)$ et $(x', m') \in G(J^*)$.
Par conséquent $(y', m') \in (J^*T^*)$.

■

**Proposition 2.6 ([19])** *Soit $M$ un sous-espace linéaire de $X$*

*(a). $X'/M^\perp$ est isomorphe à $M'$ sous la norme préservant l'isomorphisme $U$ défini par :*

$$U(Q_{M^\perp}x') = x'|_M \qquad (x' \in X').$$

*(b). Si $M$ est fermé, alors $(X/M)'$ est isomorphe à $M^\perp$ sous l'isomorphisme préservant la norme $V$ défini par :*

$$(Vz')x = z'(Q_M x) \qquad (z' \in (X/M)').$$

*Chaque fois que l'on écrit $X'/M^\perp = M'$, ces égalités sont a interpréter en fonction des isométries naturelles $U$ et $V$.*

**Proposition 2.7 ([19])** *Soit $E$ un sous-espace de $X$. Alors :*

$$(Q_E^X)^* = J_{E^\perp}^{X'} \qquad (\textit{si } E \textit{ est fermé}), \tag{2.9}$$

$$(J_E^X)^* = Q_{E^\perp}^{X'}. \tag{2.10}$$

**Preuve.** En utilisant l'isométrie canonique qui identifie $(X/\overline{E})'$ à $E^\perp$ (Proposition (2.6)), on a (en supposant que $E$ est fermé) :

$$(Q_E^X)^* : E^\perp \longrightarrow X',$$

et

$$(Q_E^X)^* x'(x) = x'(Q_X^E x) = x'(x), \tag{2.11}$$

pour $x \in X, x' \in E^\perp$.
Aussi, $J_{E^\perp}^{X'} : E^\perp \longrightarrow X'$, et

$$(J_{E^\perp}^{X'} x')(x) = x'(x), \tag{2.12}$$

pour $x \in X, x' \in E^\perp$.

La comparaison de (2.11) et (2.12) établit (2.9),
et on a :

$$Q_{E^\perp}^{X'} : X' \longrightarrow E',$$

et

$$Q_{E^\perp}^{X'} x'(e) = x' e, \tag{2.13}$$

pour $x' \in X', e \in E$.

Aussi, $(J_E^X)^* : X' \longrightarrow E'$, et

$$(J_E^X)^* x'(e) = x'(J_E^X e) = x' e, \tag{2.14}$$

pour $x' \in X', e \in E$.

L'égalité (2.10) découle maintenant de (2.12) (2.13) ■

**Théorème 2.8 ([19])** *Soit $T \in LR(X, Y)$ :*

*(a).* $(QT)^* = T^* J_{T(0)^\perp}$.

*(b).* $(T J_{D(T)})^* = Q_{T^*} T^*$.

*(c).* $(QT J_{D(T)})^* = Q_{T^*} T^* J_{T(0)^\perp}$.

**Corollaire 2.9 ([19])** *Soit $T \in LR(X, Y)$ :*

$$D(T^*) = D((QT)^*),$$
$$\textit{et}$$
$$T^* y' = (QT)^* y' \qquad (y' \in D(T^*)).$$

**Remarque 8** *Le corollaire (2.9) montre que les adjoints des relations T et QT ont le même graphe. Dans le cas où T est fermé et à valeur unique, alors $D(T^*)^{\perp\top} = Y'$ est les deux adjoints sont identiques.*

**Corollaire 2.10 ([19])** *Soit $T \in LR(X, Y)$, Alors :*

$$\|T^*\| \leq \|T\|. \tag{2.15}$$

**Preuve.** Supposons que $\|T\| < \infty$. D'après le théorème (2.8) :

(a). $(QTJ)^* = Q_{T^*} T^* J_{T(0)^\perp}$ où $(J = J_{D(T)})$,
qui, par la Proposition (2.3), est de domaine $D(T^*)$ et de plus :

(b). $(QTJ)^*(y') = Q_{T^*}T^*J_{T(0)^\perp}(y')$ $(y' \in D(T^*))$.
Comme $QTJ$ est défini partout, $(QTJ)^*$ est a valeur unique. d'où

$$\begin{aligned}\|T^*\| = \|Q_{T^*}T^*J_{T(0)^\perp}\| &= \sup\{\|(QTJ)^*y'\| : y' \in B_{D(T^*)}\},\\ &= \sup\{|y'(QTJx)| : y' \in B_{D(T^*)}, x \in B_{D(T)}\},\\ &\qquad (\text{puisque} D(T^*) \subset T(0)^\perp)\\ &\leq \sup\{\|y'\|\,\|QTJ\|\,\|x\| : y' \in B_{D(T^*)}, x \in B_{D(T)}\},\\ &\leq \|QTJ\|,\\ &\leq \|T\|.\end{aligned}$$

■

**Proposition 2.11 ([19])** *Soit $P$ une projection bornée définie sur $X$. Alors :*

$$N(P)^\perp + R(P)^\perp = X' \text{ et } N(P)^\perp \cap R(P)^\perp = \{0\}.$$

**Preuve.** Vérifiant que $P^*$ est une projection bornée définie sur $X'$, par Proposition (2.3)

$$\begin{aligned}R(P)^\perp &= N(P^*),\\ N(P)^\perp &= R(I-P)^\perp = N((I-P)^*) = R(P^*).\end{aligned}$$

Ainsi $X' = N(P^*) + R(P^*) = N(P)^\perp + R(P)^\perp$, et $N(P^*) \cap R(P^*) = \{0\} = N(P)^\perp \cap R(P)^\perp$. ■

**Proposition 2.12 ([19])** *Soient $T \in LR(X,Y)$ et $M$ un sous-espace linéaire de $X$, si $\overline{R(T)} + M = Y$ où $\dim M < \infty$, alors :*

$$R((Q_M^Y T)^*) = R(T^*).$$

**Preuve.** Si $Q = Q_M^Y$. puisque $\dim M < \infty$ il existe une projection bornée $P$ de $Y$ sur $\overline{R(T)}$ de noyau $M$ (par la Proposition (1.40) ) et Proposition (2.12) on a :

$$R(T^\perp) + M^\perp = Y', R(T)^\perp \cap M^\perp = \{0\}.$$

D'après théorème (2.5) :

$$(QT)^* = T^*Q^* = T^*J_{M^\perp}^{Y'}.$$

Ainsi :
$R((QT)^*) = T^*(M^\perp) = T^*(M^\perp + N(T^*)) = T^*(M^\perp + R(T)^\perp) = R(T^*)$. ■

CHAPITRE 3

# Relations linéaires compactes

Dans ce chapitre, nous donnerons le concept de compacité des relations linéaires et certains résultats importants, et nous démontrerons le théorème de Schauder.

## 3.1 Compacité d'une relation linéaire

**Définition 3.1 ([14], page 3)** *Soit $T \in LR(X,Y)$, on définit $T_s$ :*

$$T_s : D(T) \longrightarrow Y/\overline{T(0)}.$$

*Par $T_s = Q_T T$, tel que :*

$$T_s(x) = [y] \ \ pour\ tout\ (x,y) \in G(T),$$

*et $\forall x \in D(T)$ :*

$$\|T_s x\| = \|T x\|,$$
$$\|T_s\| = \|T\|.$$

**Définition 3.2** *Un sous-ensemble $M$ d'un espace vectoriel normé, est dit totalement borné si, pour tout $r > 0$, $M$ peut être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon $r$.*

**Définition 3.3 ([14],page 7)** *Soient $X$ et $Y$ deux espaces vectoriels normés et $T \in LR(X,Y)$.*
*$T$ est dite **compacte** si pour tout sous-ensemble borné $M$ de $X$, l'image $T_s(M)$ est **précompacte**, c'est-à-dire que, $\overline{T_s(M)}$ est un sous-ensemble compact de $Y/\overline{T(0)}$.*
*$T$ est dite **précompacte** si pour tout sous-ensemble borné $M$ de $X$, l'image $T_s(M)$ est **totalement bornée***

**Proposition 3.1 ([19])** *Soient $X$ et $Y$ deux espaces vectoriels normés et $T \in LR(X,Y)$.*
*$T$ est dite **compacte** si et seulement si $T_s(B_X)$ est **précompacte**.*
*$T$ est dite **précompacte** si et seulement si $T_s(B_X)$ est **totalement bornée**.*

**Notation 3** *on a*

1. *L'ensemble de toutes les relations linéaires compactes noté par $KR(X,Y)$. On utilise $KR(X)$ lorsque $X=Y$.*
2. *Les sous-ensembles compactes dans un espace de Banach sont nécessairement bornés, toute relation compacte est bornée. On a donc :*

$$KR(X,Y)\subseteq BR(X,Y).$$

**Proposition 3.2 ([14],page 7)** *Une relation linéaire $T\in LR(X,Y)$ est compacte si et seulement si toute suite $\{x_n\}\in D(T)$, avec $\|x_n\|<1$ admet un sous-suite $\{x_{nk}\}$ pour laquelle $T_s(x_{nk})$ converge en $Y/\overline{T(0)}$.*

**Proposition 3.3** *Soient $T\in KR(X)$ et $S\in BR(X)$ telles que $TS$ et $ST$ soient des compositions bien définies, c'est-à-dire $R(T)\subseteq D(S)$ et $R(S)\subseteq D(T)$, alors $TS\in KR(X)$ et $ST\in KR(X)$.*

**Preuve.** Soit $U$ un sous-ensemble borné de $D(S)$, puisque $S\in BR(X)$, on a $S(U)$ est un ensemble borné donc :

$$(TS)(U)=T(S(U)),$$

qui est un ensemble précompacte puisque $T\in KR(X)$.

Soit maintenant $U$ un ensemble borné dans $D(T)$, par définition puisque $T(U)$ est précompacte et $S$ est borné et donc continue, il suit que $(ST)(U)$ doit être précompacte.

Cela signifie que $KR(X)$ se comporte comme un idéal dans $B(X)$. ■

**Proposition 3.4 ([19])** *Si $T$ une relation linéaire continue, avec $\dim R(T)<+\infty$, alors $T$ est compacte.*

## 3.2 Théorème de Schauder

**Lemme 3.1 (Arzelà-Ascoli [11], page 111)** . *Soient $K$ un espace métrique compact et $H$ un sous ensemble borné de $\mathscr{C}(K)$. On suppose que $H$ est uniformément équicontinu, c-à-d,*

$$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\ tels\ que:\quad d(x_1,x_2)<\delta\implies|f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon,\forall f\in H.$$

*Alors $\overline{H}$ est compact dans $\mathscr{C}(K)$.*

**Théorème 3.5 (Schauder [11], page 159)** *Soient $X$ et $Y$ deux espaces de Banach. Si $T\in KR(X,Y)$ alors $T^*\in KR(Y',X')$.*

**Preuve.** Soient $T\in KR(X,Y)$, $B_{Y'}$ la boule d'unité dans l'espace dual $Y'$ et $x\in D(T)$ alors :

$$\begin{aligned}\|T^*f\|&=\sup_{x\in B_X}\|T_s^*f(x)\|,\\&=\sup_{x\in B_X}\|f(T_s(x))\|,\\&=\sup_{y\in\overline{T(B_X)}}\|f(y)\|.\end{aligned}$$

On pose $A=T^*(B_{Y'})$, soit l'injection $u$ de $A\subset X'$ dans $\mathscr{C}(\overline{T(B_X)})$ défini par :

$$u(T^*f)=f\mid_{\overline{T(B_X)}},\ \text{pour}\ f\in B_{Y'}.$$

Ainsi

$$\|T^*f\|_{X'} = \|f\|_{\overline{T(B_X)}}\|_{\mathscr{C}(\overline{T(B_X)})}, \forall f \in Y'.$$

Si $T$ est borné alors $T^*$ est borné et $\|T\| = \|T^*\|$ tel que :

$$\begin{aligned}\|T^*\| &\leq \|T^*\|\,\|f\|_{Y'},\\ &\leq \|T\|.\end{aligned}$$

Donc $u(A)$ est uniformément borné dans $\mathscr{C}(\overline{T(B_X)})$. Étant donné $y_1, y_2 \in \overline{T(B_X)}$, $f \in B_{Y'}$, on a :

$$\begin{aligned}|f|_{\overline{T(B_X)}}(y_1) - f|_{\overline{T(B_X)}}(y_2)| &\leq |f(y_1 - y_2)|,\\ &\leq \|f\|_{Y'}\|y_1 - y_2\|,\\ &\leq \|y_1 - y_2\|.\end{aligned}$$

Ainsi, $u$ est équicontinu et donc par le théorème d'**Arzelà-Ascoli** $A$ est pré-compact. ■

**Théorème 3.6** ([19]) *Soient $X, Y$ deux espaces de Banach et $T$ est une relation linéaire fermée. Alors $T \in KR(X, Y)$ si et seulement si $T^* \in KR(Y', X')$.*

**Théorème 3.7** ([19]) *Soit $T$ une relation linéaire continue. $T$ est précompacte si et seulement si $T^*$ est compacte.*

# Conclusion

Dans ce travail, nous aborderons le sujet des relations linéaires compactes sur un espace vectorielle. On définit les relations linéaires (relation sur les ensembles, relations linéaires, continuité...), puis nous définirons l'adjoint d'une relation linéaire et donnerons quelques propriétés et résultats qui lui sont liés. Enfin, nous donnerons la notion de la compacité dans le cas des relations linéaires et nous prouverons un résultat de type Schauder.

Ce domaine ne se limite pas à l'étude des relations linéaires compactes, car il est possible d'étudier les relations linéaires semi-Friedholm et la théorie spectrale des relations linéaires.

# Bibliographie


[1] A. Ammar and A. Jeribi,*Spectral theory of multivalued linear operators*, Sfax, Tunisia, 2021.

[2] A. Dijiksma, H. S. V. de Snoo, *Self-adjoint extentions of symetric subspaces*, Pac. Jour. Math, 54, 71-100, 1974.

[3] A. Sandovici, *Von Neumann's theorem for linear relations*, Lin.and Mulki. Alg, 2017.

[4] A. G. Baskakov, A. S. Zagorskii, *Spectral Theory of Linear Relations on Real Banach Spaces*, Math Notes, 81, 1-15, 2007.

[5] A. G. Baskakov, I. A. Krshtal, *On completeness of spectral subspaces of linear relations and ordered pairs of linear operators*, Jour. Math. Anal. Appl., 407, 157-178, 2013.

[6] C. Remling, *Spectral Theory of Canonical Systems*, De Gruyter Studies in Mathematics Series . Walter Dr Gruyter GmbH, 2018.

[7] D. Gheorghe, F. H. Vasilescu, *Spectral theory for linear relations via linear operators*, pac. Jour. Math., 255, 349-372, 2012.

[8] E. A. Conddington, *Extension Theory of Formally Normaland Symmetric Subspaces*, Mem. Amer. Math. Soc, 134, 1973.

[9] E. A. Conddington, H. S. V. de Snoo, *Positive selfadjoint extensions of positive symmetric subspaces*, Math. Z, 159, 203-214, 1978.

[10] G. Ren, Y. Shi, and G. Xu, *Boundedenes and Closedness of Linear Relations*, Lin. Multi. Alg, 66, 309-333, 2018.

[11] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer Science and Business Media, 2010.

[12] H. S. Vde Snoo, and F. H. Szafrniec, *Componentwise and canonical decompositions of linear relations*, Diss. Math, 465, 1-59, 2009.

[13] J. von Neumann, *Über adjungierte Funktional-operatoren*, Ann. Math, 33(1932,294-310)-372, 2012.

[14] K. R. Acharya, *Self-Ajoint Extension and Spectral Theory of a Linear Relation in a Hilbert Space*, ISRN Mathematical Analysis, Art. ID 471640, 1-5, 2014.

[15] S. Goldberg, *Unbounded linear operators*, United States of America. 1966.

[16] R. Arens, *Operational calculus of linear relations*, Pac. Jour. Math , 11, 9-23, 1961.

[17] R. Keshav Raj Acharya, Matt Mcbride, *Compact linear relations and their spectral properties*, Elec. Jour. Math. Anal. Appl., Vol. 11. pp. 116-126. Jan, 2023.

[18] R. Tyrrell Rockafellar, *Convexe Analysis*, Princeton New. Jersey, 1970.

[19] R. W. Cross, *Multivalued Linear Operators*, Marcel-Dekker, New York (1998).

[20] S. Hassi, A. Sandovici, H. S. V de Snoo, *Form sums of nonnegative selfadjoint operators*, Acta. Math. Hungar. 111, 81-105, 2006.

[21] T. Álvarez, *On Essentiel Spectra of Linear Relations and Quotient Indecomposable Normed Spaces*, Rock. Mount. Jour. Math, 42, (1.15.2012).

[22] S. Hassi, A. Sandovici, H. S. V, et. al, *Extremal extentions for the sum of nonnegative selfadjoint relations*, Proc. Amer. Math. Soc, 135, 3193-3204, 2007.