République Algérienne Démocratique Et Populaire

Ministère De L'Enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique

Université de Dr.Yahya Fares -Médéa -

Faculté Des Sciences



Mémoire

Présenté pour obtenir le diplôme de Master

En : Physique

Spécialité : Physique Théorique à Haute Énergie

Par : MIHOUBI Halima Saadia

LADJAL khadidja Elkobra

Etudes Analytique et Numérique de l'Effet Hall Quantique Fractionnaire par les Méthodes de *Laughlin* et de *Jain* aux Fermions Composites

---

Soutenue publiquement, le 12/06/2017, *devant le jury composé de :*

L. DEKAR	MCA	*Univ.Médea*	Président
A. MEKHTICHE	MCB	*Univ.Médéa*	Examinateurs 1
N. ZAGHOU	MAA	*Univ.Médéa*	Examinateurs 2
M.AHMED AMMAR	MAA	*Univ.Médéa*	Encadreur

Remerciements

Ce travail à été effectué à l'université de Médea, département de Science de la matière, nos premiers remerciements vont donc naturellement à cette université pour son accueil chaleureux et les conditions de travail idéales dont nous avons pu bénéficier.

A notre maître et président du mémoire Monsieur $M.AHMED\ AMMAR$.

Nous avons eu le privilège de travailler parmi votre équipe et d'apprécier vos qualités et vos valeurs, votre sérieux, compétence et votre sens du devoir, nous ont énormément marqués.

Veuillez trouver ici l'expression de notre respectueuse, considération et notre profonde admiration pour toutes vos qualités scientifiques et humaines.

Ce travail est pour nous l'occasion de vous témoigner notre profonde gratitude.

Nous aimerions aussi remercier tous les membres du jury : Monsieur $L.DEKAR$ d'avoir présider notre jury du mémoire, à monsieurs $A.MEKHTICHE$ et $N.ZAGHOU$ d'avoir été examinateur lors de notre soutenance du mémoire.

Dédicace "1"

Je dédie ce travail à mes très chers parents, vos prières et vos bénédictions m'ont été d'un grand secours pour mener à bien mes études. Aucune dédicace ne saurait être assez éloquente pour exprimer ce que vous méritez pour tous les sacrifices que vous n'avaient cessé de me donner depuis ma naissance, durant mon enfance et même à l'âge adulte.

Que Dieu, puissant, vous préserve et vous accorde santé, longue vie et bonheur.

A chikh HADJRI Mustafa vous êtes mon deuxième père que dieu vous protège.

A mon frère Mohammed Amine.

A mes petites sœurs Romaissa et Meriem.

A ma grand-mère khadidja.

A tous les membres de ma famille, petits et grands.

A mes très chères amies Khatiri Fatima Zahraa ,Ben Hlale Asma ,Moussa Fatiha.

A ma très chère partenaire Halima Saadia vous étiez vraiment une formidable amie.

A mes très chères amies Amina, Hanane, Salma et mes amis de groupe je vous dis : « Ouhiboukoum fi LEHHE »

et surtout notre ami Skandri Amine en lui souhaitant que Dieu miséricordieux le guérisse le plutôt possible.

Aux membres de promotion.

Khadidja Elkobra

Dédicace "2"

A ma très chère mère
A mon très cher Père
A mon très cher mari Oussama
A ma très chère sœur Sara, son mari Nabil
et leurs enfants Ibrahim et Soumia
A mon très cher frère Souhib
A mon beau frère Mossab
A mon cher petit frère Yasser
A tous les membres de ma famille, petits et grands
A ma chère amie Guehlouz Chahra
A mes chères amies et mes collègues

Khadidja Ladjal, Salma Zerkani, Hanane Rabahi et Amina Belmliani...

Halima Saadia

Table des matières

Introduction générale **1**

1 Effet Hall Classique **3**

1.1 Introduction 3

1.2 Electron dans un champ magnétique 3

1.3 Résistance de Hall 4

1.3.1 Les Hypothèses du modèle de Drude-Sommerfeld 6

1.3.2 Temps de collision 6

1.3.3 Théorie des métaux de Drude 6

1.3.4 Propriétés physiques dans le modèle de Drude 7

1.4 Conclusion 8

2 Effet Hall Quantique **9**

2.1 Introduction 9

2.2 Effet Hall quantique Entier 9

2.3 Effet Hall quantique Fractionnaire 11

2.3.1 Modèle de Laughlin 12

2.3.2 Modèle de Jain 12

2.4 Conclusion 13

3 Une particule dans un gaz bidimentionnel soumis à un Champ Magnétique **14**

3.1 Introduction 14

3.2 Mouvement cyclotron 14
3.2.1 Électron dans un champ magnétique 14
3.3 Niveaux de Landau 16
3.4 Invariance de jauge 18
3.5 Fonction d'onde d'une particule 21
3.6 Conclusion 23

4 L'Effet Hall Quantique Fractionnaire **24**
4.1 Introduction 24
4.2 Rôle d'interaction Coulombienne : 24
4.3 Fonction d'onde de Laughlin 25
4.4 Fonction d'onde de Jain 26
4.5 Conclusion 29

5 Méthodes Analytiques et Numériques dans l'EHQF **30**
5.1 Introduction 30
5.2 Énergie de l'état fondamentale 30
5.3 Application de 4 électrons 33
5.3.1 Méthode de Laughlin 33
5.3.2 Méthode de Jain 36
5.4 Résultats et Discussion 37
5.5 Conclusion 38

Conclusion générale **39**

Nomenclature **40**

Bibliographie **43**

Table des figures

1.1 Expérience de Hall. 4
1.2 Résistance de Hall R_H en fonction du champ magnétique B. 5
1.3 Les collisions sur les coeurs d'atomes. 6

2.1 Résistivité longitudinale R xx et de Hall RH varie en fonction du champ magnétique B. 10
2.2 Mesure de EHQF. 12

3.1 Mouvement cyclotron d'un électron à la position $\vec{r}$ autour du centre de guidage $\vec{R}$. 16
3.2 Niveaux de Landau. n représente les niveaux, et m est associé à la dégénérescence de chaque niveau. 18

4.1 Particule de charge fractionnaire e/3 dans l'état fractionnaire nu=1/ 3[10]. 25
4.2 Schéma d'un état fondamental. (a) pour EHQE du nu = n, (b) pour EHQF $nu = \frac{n}{2n+1}$. 27
4.3 Schéma d'un état fondamental. (a) pour EHQE du nu = n, (b) pour EHQF $nu = \frac{n}{2n+1}$. 28
4.4 Représentation du vortex. 29

Liste des tableaux

5.1 État fondamental à υ=1/3. en unités de $\frac{e_0^2}{l_0}$. 37
5.2 État fondamental à υ=1/5. en unités de $\frac{e_0^2}{l_0}$. 38
5.3 État fondamental à υ=2/5.en unités de $\frac{e_0^2}{l_0}$. 38

Introduction générale

L'effet Hall découvert en 1879 par E. H. Hall, il apparaît lorsque l'on plonge un ruban de métal dans un champ magnétique perpendiculaire acquiert une résistance transverse proportionnelle au champ magnétique. Le ruban étant parcouru par un courant électrique I selon sa longueur L, elle-même perpendiculaire au champ magnétique $\mathbf{B}$, il apparaît une tension dans la direction transverse au champ magnétique et à la propagation du courant. Cette tension transverse V_H, dite tension de Hall. Contrairement à l'effet Hall classique, les effets Hall quantiques ne se produisent que lorsque le gaz d'électrons est confiné à deux dimensions.

Notre travail présente dans ce manuscrit est une étude analytique et numérique de l'influence du potentiel coulombien sur les états de l'effet Hall quantique fractionnaire (EHQF), à travers deux théories, l'une de Laughlin et l'autre de Jain. Cette étude repose sur ces deux méthodes complémentaires analytique et numérique. La première utilise des calculs analytiques qui permettent de déterminer l'énergie des états modèles tels que le calcul des intégrales grâce auxquels on peut déterminer l'énergie d'interaction coulombienne. La seconde stratégie d'étude repose sur des calculs numériques exactes qui permettent de déterminer l'état fondamental du système pour un petit nombre d'électrons où nous utilisons le logiciel mathématica pour déterminer ces énergies, afin d'en étudier les propriétés des états modèles tels que celui de Laughlin et de Jain.

On a fait un bref rappel sur la physique de l'effet Hall classique, en prenant en considération les propriétés les plus remarquables d'un électrons dans un champ magnétique.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté les deux théories les plus remarquables de l'effet Hall quantique, ce sont celles de l'effet Hall quantique entier et fractionnaire les plus utilisés par les physiciens.

Au chapitre trois, nous passerons au cas quantique, nous étudierons en particulier la structure de l'Hamiltonien, et les fonctions d'ondes à un corps dans le plus bas niveau de Landau correspondant à différents choix de jauge.

Le chapitre quatre est réservé pour la physique de l'effet Hall quantique fractionnaire, où nous présenterons la fonction d'onde de Laughlin pour décrire le fondamental à $\upsilon = 1/m$ où m est un entier impair (pour les fermions), où il raisonne par approche variationnelle et propose un état approché de l'état fondamental de l'Hamiltonien d'un oscillateur harmonique. Dans la seconde partie de ce chapitre, nous présenterons la théorie de Jain des fermions composites décrit les excitations collectives élémentaires par la promotion d'un fermion composite vers un pseudo niveau de Landau immédiatement supérieur. Cette théorie propose des fonctions d'onde d'essai pour décrire ces excitations. Dans cette étude sur la géométrie de disque, nous présenterons le rôle de l'interaction Coulombienne pour décrire des différentes fractions pour la théorie de Laughlin et de Jain.

Finalement, on discute dans le dernier chapitre la nature de l'état fondamental du système, ainsi les méthodes analytiques et numériques appliquer dans l'EHQF, ces méthodes consistent à déterminer l'énergie d'interaction coulombienne pour un petit nombre d'électrons $N_e = 2, 3, 4$ et 5 électrons.

Chapitre 1

Effet Hall Classique

1.1 Introduction

L'effet de Hall classique a été découvert un siècle auparavant par Edwin Hall en 1879[1]. L'expérience de Hall montre que sous champ magnétique, un courant induit une tension dans la direction perpendiculaire et ce courant est proportionnel au champ magnétique appliqué. Cette découverte remarquable, bien avant la découverte de l'électron par J.J.Thompson en 1897, permet de déterminer la densité des porteurs de charges dans le signe de ces derniers dépend du matériau. Ce phénomène ne sera compris que 50 ans plus tard par la théorie des bandes et la notion de trou.

1.2 Electron dans un champ magnétique

Le principe de l'effet Hall repose sur deux forces : forces magnétique de Lorentz et forces électrique de Hall dans un conducteur parcouru par un courant et soumis à un champ magnétique.

Les trajectoires des porteurs (charge q) sont infléchies par la force de Laplace[2]

$$\overrightarrow{F}_m = -e \left(\overrightarrow{\nu} \Lambda \overrightarrow{B}\right) \tag{1.1}$$

Ou $(-e)$ correspond à la charge q d'un éléctron. Il en découle un déplacement d'électrons et une concentration de charges négatives sur un coté du matériau ainsi qu'un déficit

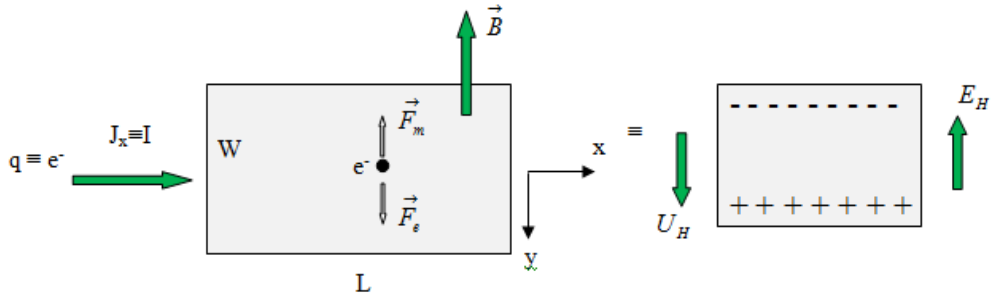


FIG. 1.1 – Expérience de Hall.

de charges négatives du coté opposée. Cette distribution de charge donne naissance à la tension de Hall U_{Hall} ainsi qu'à un champ éléctrique E_H.

Ce champ éléctrique est lui même responsable d'une force éléctrique qui agit sur les éléctrons :

$$\overrightarrow{F}_e = q\ \overrightarrow{E}_H \tag{1.2}$$

$$\overrightarrow{F}_L = q\overrightarrow{E}_H + q\ \overrightarrow{\nu}\ \Lambda\overrightarrow{B} \tag{1.3}$$

On sait qu'un champ magnétique agit sur les charges en mouvement. Le courant qui traverse le matériau conducteur est traduit par des charges libres comme les électrons (e^-) qui se déplace avec une vitesse $\overrightarrow{\nu}$

$$E = \ \nu.B\ \sin(\frac{\pi}{2}) \tag{1.4}$$

$$E_H = \nu.B \tag{1.5}$$

E_H et ν, B étant les mesures algébriques des vecteurs correspondants sur Oy, Ox.

1.3 Résistance de Hall

Si l'on injecte un courant I dans un métal bidimensionnel, exposé à un champ magnétique perpendiculaire, une différence de concentration de charge s'établit entre deux

bords opposés perpendiculairement au courant FIG.1.1[3].

$$E \equiv \ U = R_H.J_x \tag{1.6}$$

On a : $q \equiv e$

$$E_H = \frac{J_x}{n_e.q}.B \tag{1.7}$$

$$E_H = R_H.J_x$$

$$R_H = \frac{E_H}{J_x} = \frac{B}{n_e.q} \tag{1.8}$$

Le schéma suivant Figure FIG.1.2 représente la variation de la résistance de Hall R_H en fonction du champ magnétique B.

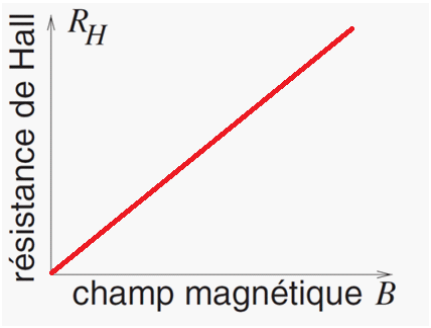


FIG. 1.2 – Résistance de Hall R_H en fonction du champ magnétique B.

La résistance longitudinale et de Hall sont définies respectivement par :

$$R_x = \frac{U_x}{I_x} \text{ et } R_H = \frac{U_H}{I_x} \tag{1.9}$$

En supposant les longueurs de la plaque sont notées L, W tel que L est la longueur et W la largeur de la plaque. La densité de courant $\overrightarrow{J}$ est uniforme et selon le long côté de l'échantillon (L), et le champ électrique E_H est aussi uniforme mais suivant le côté (W). Ainsi que cette approximation est souvent vérifiée pour un échantillon tel que $L >> W$[4]

$$E_H = \frac{U_H}{W} \tag{1.10}$$

À deux dimensions on a une relation de proportionnalité entre la résistivité de Hall ρ_H ou la résistance de Hall R_H ($\rho_H \alpha R_H$) :

$$\begin{aligned} R_H &= \frac{|E_H|}{|J_x|} \\ &= \frac{B}{en_e} \end{aligned} \tag{1.11}$$

1.3.1 Les Hypothèses du modèle de Drude-Sommerfeld

1.3.2 Temps de collision

En considérant les électrons d'un métal comme des particules classiques ponctuelles confinées à l'intérieur du volume défini par l'ensemble des atomes de l'échantillon. Les collisions envisagées par Drude sont les collisions sur les cœurs d'atomes[1]. La Figure FIG.1.3 représente la probabilité qu'un électron est une collision $1/\tau$ (par unité du temps).

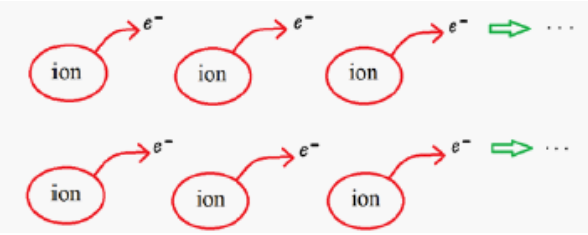


FIG. 1.3 – Les collisions sur les coeurs d'atomes.

On peut définir τ comme le temps de relaxation ou le temps que met l'électron entre deux collisions.

La direction et vitesse de l'électron après collision sont indépendent à ces grandeurs avant la collision FIG.1.3, La vitesse après la collision est aléatoire ainsi que la direction. La distribution de probabilité est celle dictée par la température à la position de la collision, on parle alors de coefficient de transport de chaleur.

1.3.3 Théorie des métaux de Drude

Dans les métaux la conduction de l'électricité se fait par un déplacement des électrons.

1.3.4 Propriétés physiques dans le modèle de Drude

La conductivité électrique

Considérons donc un champ électrique extérieur appliqué suivant la direction Oy. On peut écrire la relation entre le champ électrique et le courant, en introduisant la densité de courant et le tenseur de conductivité σ.

La loi d'Ohm

$$j = \sigma E, \tag{1.12}$$

Où

$$E = \rho j, \tag{1.13}$$

j densité de courant, E champ électrique, σconductivité électrique, ρ résistivité électrique.

Pour le tenseur de conductivité, les relations entre composantes s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ Ey \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

Nous obtenons les simplifications suivantes :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy}, \tag{1.15}$$

$$\sigma_{xy} = -\sigma_{yx}, \tag{1.16}$$

La première quantité est la conductivité longitudinale, la deuxième est la conductivité de Hall.

Le tenseur de résistivité est l'inverse de la conductivité :

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \tag{1.17}$$

$$E_x = \rho_{xx} j_x + \rho_{xy} j_y, E_y = \rho_{yx.} j_x + \rho_{yy.} j_y \tag{1.18}$$

Nous obtenons les simplifications[5]

$$\rho_{xx} = \rho_{yy} = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} \tag{1.19}$$

$$\rho_{xy} = -\rho_{yx} = -\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} \tag{1.20}$$

La première quantité est la résistivité longitudinale, la deuxième est la résistivité de Hall.

A partir de et, en l'absence de diffusion par des impuretés[5]. La densité de courant est donnée par :

$$j = nq\nu = (0, -\frac{n_e q E}{B}, 0) \tag{1.21}$$

On déduit analytiquement le tenseur de conductivité d'un tel système :

$$\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = \frac{n_e q}{B} \tag{1.22}$$

Donc, la résistivité de Hall varie linéairement avec le champ magnétique appliqué et l'inverse de la densité[1].

1.4 Conclusion

L'effet Hall classique nécessite la prise en compte d'un traitement du mouvement d'un électron dans un champ magnétique, ce traitement ne se comprend que par une étude quantique du mouvement électronique pour décrire ce phénomène. On obtient le même résultat, soit par le modèle de Lorentz ou le modèle du Drude, tel que la résistance longitudinale R_{xx} est indépendante du champ magnétique, ainsi que R_{xy} croît linéairement avec le champ magnétique.

[1] La résistance de Hall s'en déduit l'inverse de la conductivité $\rho_{xx} = \rho_{yy} = 0, \rho_{xy} = -\rho_{yx} = -\frac{B}{n_e q}$

Chapitre 2

Effet Hall Quantique

2.1 Introduction

La physique de l'effet Hall quantique s'agit de deux phénomènes appelés effet Hall quantique entier et fractionnaire, qui ne se produisent que qlorsqu'un gaz d'électrons est confiné à deux dimensions et soumis à un champ magnétique fort et à basse température[2]. Dans ces conditions, la résistance transverse présente des plateaux sur lesquels elle est quantifiée tandis que la résistance longitudinale s'annule. Sur ces plateaux, le rapport entre la conductance transverse et le quantum de conductance peut être un entier est appelé effet Hall quantique entier ($EHQE$) ou une fraction, il s'agit alors de l'effet Hall quantique fractionnaire ($EHQF$). Ces deux derniers phénomènes sont d'origine purement quantique.

2.2 Effet Hall quantique Entier

En 1980 von Klitzing et ses collaborateurs découvrent qu'à basse température, un gaz d'électrons confinés à deux dimensions, avait un comportement très différent de celui prédit par la théorie classique.

Leurs mesures de la résistance transverse et longitudinale sont montrées dans la Figure FIG.2.1. Pour des très basses températures entre 1- 4 (K) et de fort champ magnétique bien précis entre 3- 30 (T)[4], la résistance de Hall forme des plateaux.

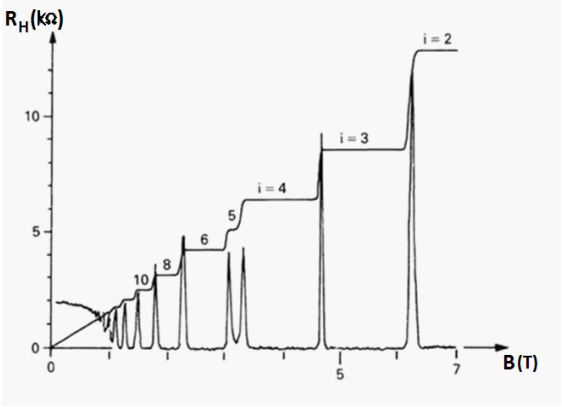


FIG. 2.1 – Résistivité longitudinale R xx et de Hall RH varie en fonction du champ magnétique B.

Où la résistance longitudinale présente un pic et s'annule exactement à la même valeur de B [6, 7].

$$\upsilon = \frac{N_e}{N_B} \tag{2.1}$$

Ce facteur de remplissage υ défini comme le rapport du nombre d'électron N_e à la dégénérescence N_B des niveaux de Landau ou s'appelle encore le nombre de quanta de flux N_B. Ou encore :

$$\upsilon = \frac{n_e}{n_B} \tag{2.2}$$

Tels que, $n_e = \frac{N_e}{S}$ est la densité d'électrons, $n_B = \frac{N_B}{S}$ est la densité de flux, et S l'aire du système utilisé.

La résistance de Hall mesuré par Klaus von Klitzing, avait un comportement très différent de celui prédit par la théorie classique, la courbe n'est pas linéaire dans le champ magnétique, mais comme un escalier. Dans ce cadre, Klitzing et ses collaborateurs ont démontré la création de ces plateaux pour l'$EHQE$ à couse d'un gap apparaît chaque fois qu'un niveau de Landau est complètement

occupé[8].

Ce gap coûte une énergie $\hbar\omega_c$ pour créer une excitation. Il existe d'autre processus qui causent la formation de ces plateaux pour l'$EHQE$, par exemple, le champ magnétique augmente, la dégénérescence de spin est levée mais sans effet Zeeman, le potentiel de désordre est plus fort, ainsi que l'interaction coulombienne,..., etc.

On observe qu'on peut aussi écrire pour un système 2D, la résistance de Hall :

$$R_H = \frac{|E_H|}{|J_x|} \tag{2.3}$$

En remplaçant la densité d'électrons n_e par leur expression, obtient :

$$\begin{aligned} R_H &= \frac{B}{e^2}\frac{S}{N}\frac{e}{h}h \\ &= \frac{\phi}{\phi_0}\frac{1}{N}\frac{h}{e^2} \\ &= \frac{N_B}{N}\frac{h}{e^2} \\ &= \frac{h}{\upsilon e^2} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Lorsque le champ magnétique augmente, ω_c et la dégénérescence N_B des niveaux de Landau augmentent. Avec $\omega_c = \frac{eB}{m}$ la fréquence cyclotronique.

Un plateau indique que pour une certaine valeur de champ B le système devient incompressible puisque la densité d'électrons n_e reste accrochée à celle du quantum de flux n_B pour garder le rapport $\upsilon = \frac{n_e}{n_B} = p$ constant[8].

Avec le facteur de remplissage υ prend des valeurs entiers positifs $\upsilon = 1, 2, 3, ..., N$.

2.3 Effet Hall quantique Fractionnaire

L'$EHQF$ apparu comme un problème d'électrons fortement corrélés et dans un même niveau de Landau (NL) partiellement rempli ($\upsilon < 1$), alors des excitations dans un seul NL étant permises, pour le modèle d'électrons restreints à un seul NL, enfin le gap en énergie ne peut être qu'une conséquence de l'interaction coulombienne entre électrons occupant le même NL. Ces excitations est un quasi-trou qui correspond à ajouter un quantum de flux dans la fonction d'onde collective des électrons et comme il y a m quanta de flux par électron, et rajouter un quantum de flux revient à créer un état non occupé, et donc cette excitation correspond au retrait d'une charge fractionnaire $-e/m$ ce qui lui donne un axés libre de se déplacer d'un état vers l'autre[9][10]. La projection à un seul NL fait l'énergie cinétique globale inchangée et rend le problème indépendant de la structure des bandes électroniques initiales. Pour l'$EHQF$, la température est plus faible entre 20 -100 (mK) et le champ magnétique doit être plus intense entre 15 - 30 (T)[4].

2.3.1 Modèle de Laughlin

Laughlin a proposé, en 1983[9], une fonction d'onde et qui va prendre son nom plus tard pour décrire le fondamental de la fraction $\upsilon = \frac{1}{3}$ pour un liquide incompressible (liquide de Laughlin), mais cette fonction ne contient qu'un paramètre entier m impair (pour des fermions) et pend les valeurs $3, 5, 7, ...$, de telle sorte que $\upsilon = 1/m$. Ce modèle sera traité dans le chapitre 4. Suite à ce travail de Laughlin, plusieurs autres fonctions d'ondes ont été proposées pour différentes valeurs de υ.

2.3.2 Modèle de Jain

Jain introduisit la théorie des fermions composites (FC)[11], qui a pu expliquer la plupart des valeurs du facteur de remplissage auxquelles l'$EHQF$ est observé. Dans cette théorie Jain décrit l'état fondamental de Laughlin au facteur de remplissage $\upsilon = \frac{1}{2s\ +\ 1}$, tel que s entier différent de zéro, et propose une généralisation des états au facteur de remplissage

$$\upsilon = \frac{p}{2ps\ +\ 1} \tag{2.5}$$

Avec s et p entier, en termes de fermions composites (FC). Cette théorie nous permet de comprendre l'$EHQF$ comme un $EHQE$. La Figure FIG.2.2 montre des différentes facteurs de remplissages υ entiers et fractionnaires.

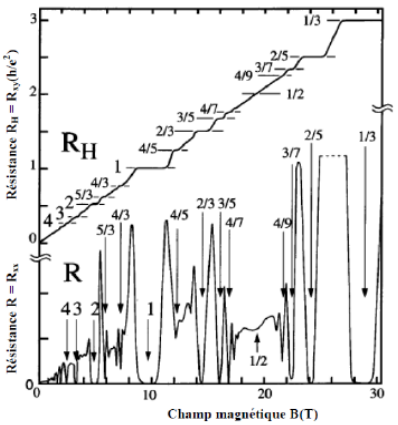


FIG. 2.2 – Mesure de EHQF.

2.4 Conclusion

L'étude de l'effet Hall quantique mérite un traitement du mouvement d'un électron dans un champ magnétique, et pour décrire ce phénomène, nous avons décrit brièvement l'apparition de l'effet Hall classique, quantique entier qui est une conséquence de la présence de désordre, puis quantique fractionnaire qui est une conséquence de la répulsion entre électrons, ainsi le passage entre ces trois phénomènes. On aborde d'abord dans le chapitre suivant le problème d'un électron en présence d'un champ magnétique extérieur, c'est le problème appelés " niveaux de Landau".

Chapitre 3

Une particule dans un gaz bidimentionnel soumis à un Champ Magnétique

3.1 Introduction

Dans les échantillons réels de gaz d'électrons bidimensionnels, il faut d'abord étudier le problème d'un électron en présence d'un champ magnétique extérieur. Dans ce chapitre, on s'intéresse aux propriétés des électrons sur une surface bidimensionnelle soumis à un champ magnétique $\vec{B}$, c'est le problème dit "des niveaux de Landau", ou cette étude est essentiellement basée sur un traitement purement quantique.

3.2 Mouvement cyclotron

3.2.1 Électron dans un champ magnétique

Soit une particule de charge $q = -e$ est soumise à la force de Lorentz

$$\vec{F}_L = -e(\overrightarrow{\nu} \times \vec{B}) \tag{3.1}$$

Avec les vitesses $\nu_x = \dot{x}$ et $\nu_y = \dot{y}$ on obtient

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -eB\dot{y} \\ m\ddot{y} &= eB\dot{x} \\ m\ddot{z} &= 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Dans la direction z, c'est le mouvement d'une particule libre. Dans le plan perpendiculaire au champ $\vec{B}$, on a

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\omega_c\dot{y} \\ \ddot{y} &= \omega_c\dot{x} \end{aligned} \tag{3.3}$$

L'équation (3.4) donne la relation entre $\overrightarrow{R}$, $\overrightarrow{r}$ et $\overrightarrow{\eta}$

$$\begin{aligned} \eta &= (\eta_x, \eta_y) \\ &= r - R \end{aligned} \tag{3.4}$$

$\overrightarrow{r}$: représente la position de l'électron.

$\overrightarrow{\eta}$: est le rayon cyclotron.

$\overrightarrow{R}$: est le centre de l'orbite cyclotron.

On intègre les équations (3.3) :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega_c(y - Y) \\ \dot{y} &= \omega_c(x - X) \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x &= X - r\ \sin(\ \omega_c t + \varphi) \\ y &= Y + r\ \cos(\ \omega_c t + \varphi) \end{aligned} \tag{3.5}$$

φ : représente la phase.

Le mouvement de la particule projeté dans le plan est donc un cercle de centre $(X\ , Y)$, parcouru à la fréquence ω_c, comme schématisé sur la Figure FIG.3.1[12].

Où $\overrightarrow{r}$ représente la position de l'électron, $\overrightarrow{\eta}$ relie les deux vecteurs $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{r}$.

Le mouvement cyclotron d'un électron dans un champ magnétique $\vec{B}$ autour du centre de guidage $R(X, Y)$, où $\overrightarrow{R}$ est le centre de l'orbite cyclotron et considéré comme une constante du mouvement.

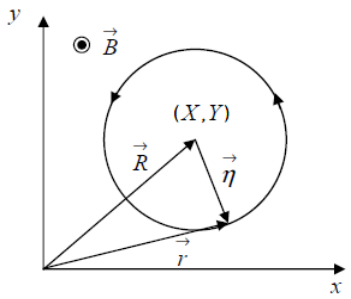


FIG. 3.1 – Mouvement cyclotron d'un électron à la position $\vec{r}$ autour du centre de guidage $\vec{R}$.

3.3 Niveaux de Landau

Dans n'importe quel mouvement circulaire de rayon η et de vitesse $\overrightarrow{\nu}$, l'accélération vers le centre du mouvement est donné par $a_N = \gamma = \frac{\nu^2}{\eta}$, afin que la partie magnétique de la force de Lozentz défini par $\overrightarrow{F}_m$ de l'équation du mouvement (3.1) soit équivalente à $m\overrightarrow{\gamma}$ on obtient la relation entre $\overrightarrow{\nu}$ et $\overrightarrow{\eta}$ par :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\nu} &= \frac{eB}{m}\overrightarrow{\eta} \\ &= \omega_c \overrightarrow{\eta} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Rappolons que l'hamiltonien d'un électron dans un champ magnétique représenté par :

$$H = \frac{1}{2m}\left(\overrightarrow{p} + e\overrightarrow{A}\right)^2 \tag{3.7}$$

L'opérateur quantité de mouvement $\overrightarrow{\Pi} = m\overrightarrow{\nu}$ de l'équation (3.7) s'écrit :

$$\overrightarrow{\Pi} = \overrightarrow{p} + e\overrightarrow{A} \tag{3.8}$$

Avec les relations de commutation :

$$[r_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} \tag{3.9}$$

Avec :

$\hbar$: est la constante de planck.

Le Hamiltonien de l'équation (3.7) peut s'écrit :

$$\begin{aligned} H &= \frac{\overrightarrow{\Pi}^2}{2m} \\ &= \frac{(\Pi_x^2 + \Pi_y^2)}{2m} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Ainsi que :

$$\begin{aligned} [\Pi_x, \Pi_y] &= e([p_x, A_y] + [A_x + p_y]) \\ &= -i\hbar e(\partial_x A_y - \partial_y A_x) \\ &= -i\hbar e(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}) \\ &= -ie\hbar \overrightarrow{B} \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A} \tag{3.12}$$

Ou, en termes de longueur magnétique $l_B \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$ l'équation (3.11) devient :

$$[\Pi_x, \Pi_y] = -i\frac{\hbar^2}{l_B^2} \tag{3.13}$$

Pour montrer plus explicitement la structure de l'oscillateur harmonique, on introduit les opérateurs de création et d'annihilation, $(a,\ a^+)$et $(b,\ b^+)$, avec les relations de commutations prennent la forme $[\eta_x, \Pi_x] = i\hbar$, $[\eta_x, \eta_y] = -il_B^2$ et $[X, Y] = il_B^2$.

$$\begin{aligned} a &= \frac{l_B}{\sqrt{2}\hbar}(\Pi_x - i\Pi_y), \text{ et} \qquad a^+ = \frac{l_B}{\sqrt{2}\hbar}(\Pi_x + i\Pi_y), \\ b &= \frac{1}{\sqrt{2}l_B}(X + iY), \text{ et} \qquad b^+ = \frac{1}{\sqrt{2}l_B}(X - iY) \end{aligned} \tag{3.14}$$

Avec la normalisation, on obtient :

$$[a, a^+] = 1 \tag{3.15}$$

On peut écrire le Hamiltonien de l'équation (3.10) sous la forme :

$$\begin{aligned} H &= \frac{\hbar^2}{2ml_B^2}(aa^+ + a^+a), \\ &= \hbar\omega_c(a^+a + \frac{1}{2}) \end{aligned} \tag{3.16}$$

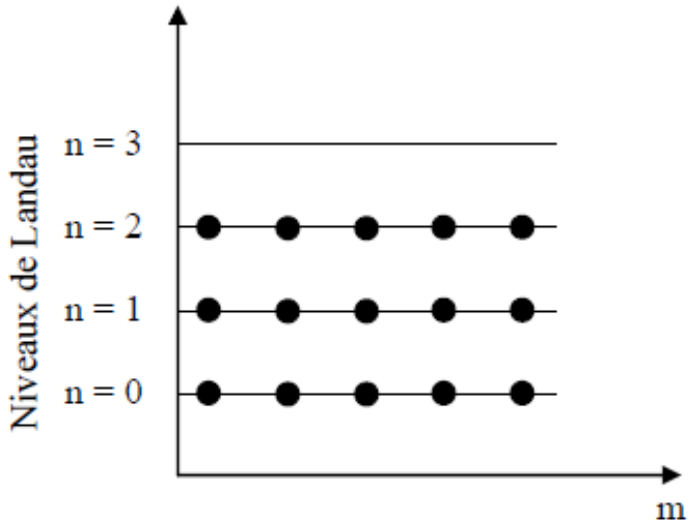


FIG. 3.2 – Niveaux de Landau. n représente les niveaux, et m est associé à la dégénérescence de chaque niveau.

Dans le cas ou $n = 0$ ou $m = 0$, on trouve

$$\begin{aligned} a \quad | \quad 0, m\rangle &= 0, \\ b \quad | \quad n, 0\rangle &= 0 \end{aligned} \tag{3.17}$$

et des nombres n négatifs sont exclus[12]. Un état arbitraire peut par conséquent être construit à l'aide des opérateurs d'échelle à partir de l'état :

$$| \, n, m\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}} \frac{(b^+)^m}{\sqrt{m!}} \, | \, 0, 0\rangle \tag{3.18}$$

Pour rechercher explicitement les états propres de H, il faut choisir une jauge pour exprimer le potentiel vecteur, ce que nous ferons dans suite. Nous calculons ces états propres ci-après dans la jauge symétrique.

3.4 Invariance de jauge

Le problème correspond au système d'électrons en $2D$ loin des parois de confinement de l'échantillon qui bordent le gaz. Pour traiter un certain nombre de problèmes, il

est utile de connaitre les fonctions propres de système. Une façon commode pour construire des bases d'états propres de H_{xy} consiste à choisir une jauge. Deux choix sont particulièrement utiles Jauge de Landau et Jauge symétrique. Elles sont particulièrement adaptées pour les problèmes invariants par translation selon la direction $\overrightarrow{z}$. En mécanique classique le champ électromagnétique $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ peut s'écrire en fonction d'un potentiel scalaire $\phi(x)$ et d'un potentiel vecteur $\overrightarrow{A}$, tels que :

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla}\phi \text{ et } \overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A} \tag{3.19}$$

Nous considérons la transformation suivante, où χ est une fonction arbitraire

$$\phi \mapsto \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t} \text{ et } \overrightarrow{A} \mapsto \overrightarrow{A} + \overrightarrow{\nabla}\chi \tag{3.20}$$

La transformation de la jauge Symétrie est de la forme :

$$\overrightarrow{A}_S = \frac{\overrightarrow{B}}{2}(-y, x, 0) \tag{3.21}$$

La transformation entre la jauge Symétrie et la jauge de Landau est décrite par la fonction $\chi = -\frac{B}{2}xy$[3]

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A}_L &= \overrightarrow{A}_S + \overrightarrow{\nabla}\chi \\ &= \frac{\overrightarrow{B}}{2}(-y, x, 0) - \frac{\overrightarrow{B}}{2}(y, x, 0) \\ &= \overrightarrow{B}(-y, 0, 0) \end{aligned} \tag{3.22}$$

Notons que le Hamiltonien peut également s'écrire, de façon concise, en terme de variables (η_x, η_y) :

$$H = \frac{1}{2}m\omega_c^2(\eta_x^2, \eta_y^2) \tag{3.23}$$

Notons que le moment cinématique, et l'Hamiltonien ne sont pas invariants de jauges. Pour la quantification en niveau de Landau, la description quantique du même système, on impose la non commutativité de la position avec son moment :

$$[x, p_x] = [y, p_y] = i\hbar, \text{ et } [x, y] = [p_x, p_y] = [x, p_y] = [y, p_x] = 0 \tag{3.24}$$

La relation de commutation $[x, y] = 0$ nous donne :

$$[\eta_x, \eta_y] = -[X, Y] \tag{3.25}$$

Avec la relation de commutation $[\eta_x, \Pi_x]$ prend la forme :

$$[\eta_x, \Pi_x] \ = i\hbar \tag{3.26}$$

Pour montrer plus explicitement la structure de l'oscillateur harmonique, on introduit des opérateurs d'annihilation et de création :

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}l_B}(\eta_x - i\eta_y), \qquad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}l_B}(\eta_x + i\eta_y) \tag{3.27}$$

$$\eta_x = \frac{l_B}{\sqrt{2}}(a^+ + a), \qquad \eta_y = \frac{l_B}{\sqrt{2}i}(a^+ - a) \tag{3.28}$$

Le même cas avec les opérateurs d'échelles, $(b,\ b^+)$

$$X = \frac{l_B}{\sqrt{2}}(b^+ + b), \qquad Y = \frac{il_B}{\sqrt{2}}(b^+ - b) \tag{3.29}$$

Avec les relations de commutations $[a, a^+] = [b, b^+] = 1$.

L'Hamiltonien peut être réécrit sous la forme précédente de l'équation (3.16) pour le centre du guidage :

$$H = \hbar\omega_c(a^+a + \frac{1}{2}) \tag{3.30}$$

Pour la jauge Symétrie ou la jauge de Landau, la transformation sur les champs $\overrightarrow{A}$ et $\phi(x)$, appelé changement de Jauge, laisse les champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ invariants et donc la trajectoire classique inchangée. Ce choix de jauge fait jouer des rôles symétriques aux variables x et y, ce qui est satisfait la condition de la symétrie du problème.

Le Hamiltonien dans la jauge Symétrie s'écrit[13] :

$$H = \frac{1}{2m}[(\overrightarrow{p}_x + e\overrightarrow{A}_x)^2 + (\overrightarrow{p}_y + e\overrightarrow{A}_y)^2] \tag{3.31}$$

Tel que :

$\overrightarrow{A}$: Potentiel vecteur.

p : Quantité de mouvement.

Ce qui donne :

$$H = \frac{\hbar\omega_c}{2}[(-il_B\frac{\partial}{\partial_x} - \frac{y}{2l_B})^2 + (-il_B\frac{\partial}{\partial_y} - \frac{x}{2l_B})^2] \tag{3.32}$$

3.5 Fonction d'onde d'une particule

Dans cette partie, nous donnerons une explication simple de l'effet Hall quantique fractionnaire, où les fonctions d'onde à un corps dans le plus bas niveau de Landau étaient des polynômes en z multipliés par un facteur gaussien pour tous les niveaux de Landau. Les fonctions d'ondes $\Phi_{n,m}(x,y) = \langle x,y|n,m\rangle$ dans la jauge symétrique de équation (3.21), il suffit d'utiliser $p_x = -i\hbar\partial_x$ et $p_y = -i\hbar\partial_y$ dans les équations (3.17) et (3.18).

Avec les équations (3.27) et (3.28) on trouve la représentation dans la jauge symétrique. Pour l'$EHQF$ on change de variables d'espace selon $z = x - iy$, est la position de l'électron dans le plan complexe et $\overline{z} = x + iy$ son complexe conjugué, ainsi les paramètres de dérivées partielles ∂_z et $\partial_{\overline{z}}$ liées par :

$$\begin{aligned} \partial_z &= \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y) \\ \partial_{\overline{z}} &= \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) \end{aligned} \tag{3.33}$$

Tel que $\partial_z z = \partial_{\overline{z}}\overline{z} = 1$ et $\partial_z\overline{z} = \partial_{\overline{z}} z = 0$, ainsi les paramètres ∂_z et $\partial_{\overline{z}}$ prennent les formes $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial\overline{z}}$ successives.

L'Hamiltonien (3.32) devient alors

$$H = \frac{\hbar\omega_c}{2}\left(\frac{\overline{z}z}{4l_B^2} - 4l_B^2\partial_z\partial_{\overline{z}} + \overline{z}\partial_{\overline{z}} - z\partial_z\right) \tag{3.34}$$

Ce qui donne avec la longueur magnétique $l_B = 1$

$$H = \frac{\hbar\omega_c}{2}\left(-4\frac{\partial^2}{\partial_z\partial_{\overline{z}}} + \frac{1}{4}z\overline{z} - z\frac{\partial}{\partial_z} - \overline{z}\frac{\partial}{\partial_{\overline{z}}}\right) \tag{3.35}$$

Cela permet de le réécrire à l'aide de deux couples d'opérateurs de création a^+ et d'annihilation a définis par[3]

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{m\omega_c}{2\hbar}}\left(\eta_x + \frac{i}{m\omega_c}\Pi_x\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega_c}}[p_y + eA_y + i(p_x + eA_x) \\ &= \frac{l_B}{\sqrt{2}}[\partial_x - i\partial_y + \frac{x - iy}{2l_B^2}] \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{z}{4l_B} + l_B\partial_{\overline{z}}\right) \end{aligned} \tag{3.36}$$

De la même façon on obtient a^+, b et b^+ :

$$a^+ = \sqrt{2}(\frac{\overline{z}}{4l_B^2} - l_B\partial_z) \tag{3.37}$$

$$b = \sqrt{2}(\frac{\overline{z}}{4l_B^2} + l_B\partial_z) \tag{3.38}$$

$$b^+ = \sqrt{2}(\frac{z}{4l_B} - l_B\partial_{\overline{z}}) \tag{3.39}$$

Avec ces opérateurs, le Hamiltonien l'équation (3.35) prend la même que le Hamiltonien de l'équation (3.16) et (3.30) pour le l'$EHQF$

$$H = \hbar\omega_c(a^+a + \frac{1}{2}) \tag{3.40}$$

Un état dans le plus bas Niveau Landau (NL) est déterminé par l'équation différentielle pour $n = 0$:

$$a\ \Phi_{n=0,m}(z,\overline{z}) = 0 \tag{3.41}$$

Dans le plus bas NL on obtient à l'aide des autres états par applications successives de a^+, b^+ s'obtient a l'aide des équations (3.18) et (3.35)

$$\Phi_{n=0,m}(z,\overline{z}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi l_B^2 m!}}(\frac{z}{\sqrt{2}l_B})^m e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}} \tag{3.42}$$

La même chose pour les états correspondant à différentes valeurs de n pour $m = 0$

$$\begin{aligned}\Phi_{n,m=0}(z,\overline{z}) &= \frac{(\sqrt{2})^n}{\sqrt{2\pi l_B^2 n!}}(\frac{\overline{z}}{4l_B} - l_B\partial)^n e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi l_B^2 n!}}(\frac{\overline{z}}{\sqrt{2}l_B})^n e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}}\end{aligned} \tag{3.43}$$

Un état générique du plus bas niveau de Landau pour l'$EHQF$ s'écrit donc

$$\Phi_{PBNL}(z,\overline{z}) = f(z)e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}} \tag{3.44}$$

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les propriétés des électrons dans un plan bi-dimensionnels. Nous recherchons les états propres de l'Hamiltonien H d'un oscillateur harmonique dans la jauge symétrique. Ainsi que les fonctions d'ondes des équations (3.43) pour $n = 0, m$, utilisé pour la fonction d'onde de Laughlin et ses états excités, et (3.44) pour $n, m = 0$, utilisé pour la fonction d'onde de Jain et ses états excités. Ces dernières équations ont la même densité de probabilité dans tous les niveaux de Landau[14].

Chapitre 4

L'Effet Hall Quantique Fractionnaire

4.1 Introduction

En 1982, Tsui et Stormer[15], ont découvert des plateaux de résistance correspondants à des remplissages fractionnaires, il s'agit de l'effet Hall quantique fractionnaire. Ce phénomène apparu comme un problème d'électrons fortement corrélés, il s'agit d'une interaction coulombienne occupant le même niveau de Landau.

Considérons de nouveau le cas d'un système sans désordre et sans champ électrique. L'image de $EHQF$ est basée sur des fonctions d'ondes variationelles proposées par Laughlin en 1983[9]. Ces fonctions d'ondes variationelles reposent sur la solution du problème des niveaux de Landau dans la jauge symétrique pour N particules due à Laughlin pour les fractions de la forme $1/m$ et la théorie de Jain des fermions composites (FC) qui a pu expliquer la plupart des fractions de la forme $p/(2np+1)$.

4.2 Rôle d'interaction Coulombienne :

En physique de l'effet hall quantique fractionnaire, Hamiltonien général du système d'un gaz d'électrons bidimensionnels en présence d'un champ magnétique extérieur s'écrit[16] :

$$H = H_0 + H_{int} \tag{4.1}$$

Où : H_{int} décrit l'interaction Coulombienne.

Pour un système à N électrons restreint au plus bas niveau de landau, ainsi que l'énergie cinétique est constante(3.7) et Zeeman est négligeable par la suite, l'interaction coulombienne est la seule qui joue le mécanisme d'entraînement de l'effet Hall quantique fractionnaire ($EHQF$), contrairement à l'effet Hall quantique entier où le potentiel de désordre est plus fort que les interactions. L'effet Hall quantique fractionnaire ne se produit que dans des échantillons de haute qualité avec des faibles concentrations d'impuretés.

4.3 Fonction d'onde de Laughlin

Laughlin a été le premier à proposer une fonction d'onde d'essai pour décrire l'état fondamental de la fraction $\upsilon = 1/3$[9], ensuite généralisé la solution du problème pour $\upsilon = 1/m$, avec m entier impair, ce qui donne m quanta de flux par électron Figure FIG.4.1 :

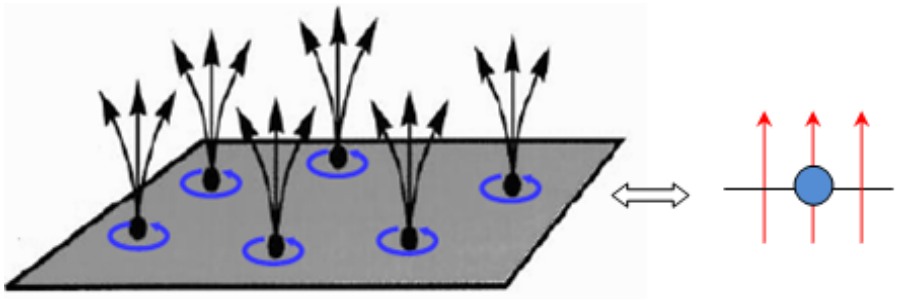


FIG. 4.1 – Particule de charge fractionnaire e/3 dans l'état fractionnaire nu=1/ 3[10].

La fonction $F(z_1, z_2, ..., z_N)$ satisfait les conditions d'antisymétrie. Un déterminant de Slater construit à partir des polynômes $z_i^0, z_i^1, ..., z_i^{N_e}$, et ne dépend pas des z_i^* :

$$\begin{aligned} F(z_1, z_2, ..., z_N) &= Det\left[\begin{pmatrix} z_1^0 & z_2^0 & . & . & z_N^0 \\ z_1^1 & z_2^1 & . & . & z_N^1 \\ . & . & . & . & . \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & . & . & z_N^{N-1} \end{pmatrix}\right]^m \\ &= \prod_{i<j}^{N} (z_i - z_j)^m \end{aligned} \tag{4.2}$$

Avec $F(z_1, z_2, ..., z_N)$ est une fonction analytique à plusieurs variables $z_1, z_2, ..., z_{N_e}$ correspondant aux positions des électrons 1, 2,...,N.

La fonction d'essai est proposée par Laughlin ne contient qu'un paramètre entier m, forcement impair et pend les valeurs 3, 5, 7,...etc.

$$\Psi^L(r_1, r_2, ..., r_N) = \prod_{i<j}^{N} (z_i - z_j)^m \exp(-\sum_{i=1}^{N} |z_i^2|/4l_B^2) \tag{4.3}$$

Cette fonction d'onde est compatible avec la fonction d'onde d'un oscillateur harmonique dans le plus bas niveau de Landau représenté par l'équation(3.42).

Une fonction d'onde pour N électrons dans le plus bas niveau de Landau a nécessairement la forme de l'équation(4.3) où $F(z_1, z_2, ..., z_N)$ est un polynôme en z_i. Laughlin généralise sa théorie où $F(z_1, z_2, ..., z_N)$ est antisymétrique pour des fermions et symétrique pour des bosons.

Pour déterminer la fonction d'onde de Laughlin Il ne reste qu'à déterminer le polynôme $F(z_1, z_2, ..., z_N)$. Laughlin a fait les hypothèses suivantes :

1- Il faut déterminer les fonctions d'ondes variationnelles de Jastrow de l'état $\upsilon = \frac{1}{m}$, supposons la forme(4.2).

2- La fonction d'onde totale doit être un vecteur propre du moment angulaire total $L = 3N(N-1)/2$ pour la géométrie du disque.

3- La symétrie ou l'antisymétrie de $F(z_1, z_2, ..., z_N)$ sous l'échange de deux particules implique $f(-z) = \pm f(z)$. La seule forme qui satisfasse ces critères est fonction d'un oscillateur harmonique représenté par l'équation (3.42).

Où m est un entier pair pour les bosons, impair pour les fermions.

La fonction d'onde de Laughlin possède un très fort recouvrement (plus de 99% à $\upsilon = \frac{1}{3}$ et $\upsilon = \frac{1}{5}$ pour tous les nombres de particules inférieurs à 10)[13].

4.4 Fonction d'onde de Jain

Dans cette théorie, Jain propose une généralisation des états au facteur de remplissage $\upsilon = \frac{p}{2ps+1}$, avec s et p entier, en termes de fermions composites (FC). À partir de l'état incompressible représenté par l'équation (4.3) du modèle de Laughlin, nous pouvons écrire

la fonction Ψ_{2s+1} à l'aide de la fonction Ψ_1 correspondant au facteur $\upsilon^* = 1$[3]

$$\begin{aligned}\Psi_{2s+1} &= \prod_{i<j}^{N_e}(z_i - z_j)^{2s+1}\ \exp(-\sum_{k=1}^{N_e}|z_k^2|) \\ &= \prod_{i<j}^{N_e}(z_i - z_j)^{2s}\ \prod_{i<j}^{N_e}(z_i - z_j)\exp(-\sum_{k=1}^{N_e}|z_k^2|) \\ &= \prod_{i<j}^{N_e}(z_i - z_j)^{2s}\ \Psi_1 \end{aligned} \tag{4.4}$$

L'état fondamental de la fonction d'onde non normalisée des fermions composites pour $\upsilon^* = p$ prend la forme[17] :

$$\Psi_{\upsilon}^{FC} = \mathcal{P}_{PBNL}\left[\prod_{j<k}^{N_e}(z_j - z_k)^{2s}\ \Psi_{\upsilon^*}\right] \tag{4.5}$$

Ce qui donne la formule générale du facteur de remplissage réduit υ^* :

$$\upsilon = \frac{\upsilon^*}{2s\upsilon^* + 1} \tag{4.6}$$

Le schéma suivant Figure FIG.4.2 nous permet d'après la théorie de Jain de comprendre l'$EHQF$ comme un $EHQE$ pour $\upsilon = \frac{1}{3}$.

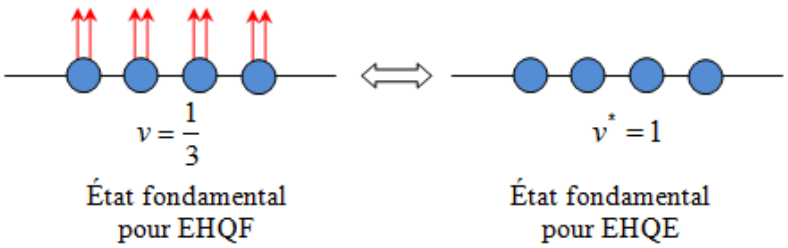


FIG. 4.2 – Schéma d'un état fondamental. (a) pour EHQE du nu = n, (b) pour EHQF $nu = \frac{n}{2n+1}$.

La fonction d'onde de Jain au facteur de remplissage $\upsilon = \frac{2}{5}$ s'écrit

$$\Psi_{2/5} = \mathcal{P}_{PBNL} \prod_{j<k}^{N} (z_j - z_k)^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & \cdot & z_N \\ z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 & \cdot & z_N^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1^{N/2-1} & z_2^{N/2-1} & z_3^{N/2-1} & \cdot & z_N^{N/2-1} \\ \overline{z}_1 & \overline{z}_2 & \overline{z}_3 & \cdot & \overline{z}_N \\ z_1\overline{z}_1 & z_2\overline{z}_2 & z_3\overline{z}_3 & \cdot & z_N\overline{z}_N \\ z_1^2\overline{z}_1 & z_2^2\overline{z}_2 & z_3^2\overline{z}_3 & \cdot & z_N^2\overline{z}_N \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1^{N/2-1}\overline{z}_1 & z_2^{N/2-1}\overline{z}_2 & z_3^{N/2-1}\overline{z}_3 & \cdot & z_N^{N/2-1}\overline{z}_N \end{pmatrix} \exp(-\frac{1}{4}\sum_{j}^{N} |z_j^2|) \tag{4.7}$$

Le deuxième schéma Figure FIG.4.3 nous permet d'après la théorie de Jain de comprendre l'$EHQF$ comme un $EHQE$ pour $\upsilon = \frac{2}{5}$.

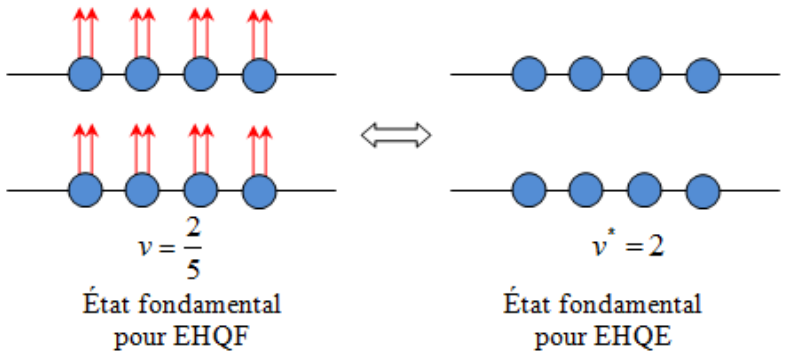


FIG. 4.3 – Schéma d'un état fondamental. (a) pour EHQE du nu = n, (b) pour EHQF $nu = \frac{n}{2n+1}$.

Les états électroniques $\upsilon = \frac{1}{3}$ et $\upsilon = \frac{2}{5}$ sont interprétés comme un EHQE aux facteurs de remplissages entier $\upsilon^* = 1$ et $\upsilon^* = 2$ en termes de FC, dont les vortex portent $2s$ quanta de flux chacun.

L'idée géniale de Jain consiste à introduisire une particule effective qui s'appelle le fermion composite représentés par un état lié d'un électron avec un nombre pair de vortex (un tourbillon du liquide quantique), qui est égale à deux pour notre cas.

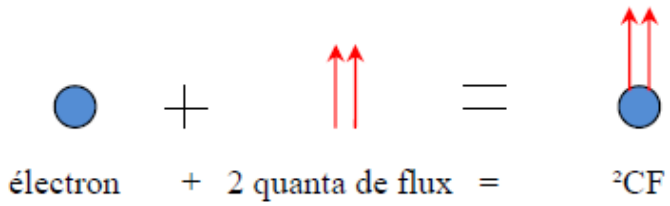


FIG. 4.4 – Représentation du vortex.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la fonction d'onde de Laughlin qu'elle possède un très fort recouvrement avec les états propres exactes pour les facteurs de remplissage $\upsilon = \frac{1}{m}$. Puis nous avons introduit la fonction d'onde de Jain représentée par les fermions composites pour les facteurs de remplissage $\upsilon = \frac{\upsilon^*}{2s\upsilon^* + 1}$, où cette théorie nous permet de comprendre l'$EHQF$ comme un $EHQE$.

Chapitre 5

Méthodes Analytiques et Numériques dans l'EHQF

5.1 Introduction

Face à la difficulté d'une approche analytique du problème, nous présentons dans ce chapitre les méthodes numériques pour trouver l'énergie d'interaction coulombienne entre les électrons. Pour la fonction d'onde du fondamental dans la jauge symétrique, compatible avec la forme générale des fonctions d'ondes dans les PBNL. Cette forme est proche de la fonction d'onde introduite par Jastrow (1955) afin d'approximer avec succès les gaz de particules en forte corrélation.

5.2 Énergie de l'état fondamentale

Nous sommes intéressés au cas où l'énergie de l'état fondamentale du système égale à la somme de tous les potentiels énergétiques de l'équation (5.1) en fonction de l'unité d'énergie $\frac{e^2}{l_0}$. Notre étude consiste à déterminer un problème d'électrons fortement corrélés puisque l'énergie ne peut être qu'une conséquence de l'interaction coulombienne entre électrons occupant le même niveau de Landau[9]. Le Hamiltonien de ce problème à N électrons, restraint au plus bas niveau de Landau ($n = 0$), est donné par la seule interaction

coulombienne[18], il est donc

$$H = \sum_{i=1}^{N_e} \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla_i + e_0 A_i)^2 + V_{ee} + V_{eb} + V_{bb} \tag{5.1}$$

Où,

V_{ee} : est le potentiel d'interaction (electron–electron).

V_{eb} : est le potentiel d'interaction (electron–background).

V_{bb} : est le potentiel d'interaction (background – background).

$$V_{ee} = \sum_{i<j}^{N} \frac{e_0^2}{|r_i - r_j|} \tag{5.2}$$

$$V_{eb} = -\rho \sum_{i=1}^{N} \int_{S_N} d^2r \ \frac{e_0^2}{|r_i - r|} \tag{5.3}$$

$$V_{bb} = \frac{\rho^2}{2} \int_{S_N} d^2r \int_{S_N} d^2r' \ \frac{e_0^2}{|r - r'|} \tag{5.4}$$

Où l'expression de l'interaction coulombienne devient :

$$H\Psi(z_1, \ldots, z_{N_e}) = E \ \Psi(z_1, \ldots, z_{N_e}) \tag{5.5}$$

Nous avons obtenu des résultats analytiques et numériques exact avec l'interaction de Coulomb. Nous calculons la valeur de l'énergie d'interaction d'un État $\Psi(z_1, \ldots, z_{N_e})$:

$$E(N_e) = \frac{\langle\Psi|V|\Psi\rangle}{\langle\Psi|\Psi\rangle} \tag{5.6}$$

Les dérivations mathématiques ainsi que le code Mathématica[19] utilisées pour calculer l'énergie d'interaction, en utilisant les fonctions d'ondes de Laughlin et de Jain de ces électrons. Nous stockons les variables de la fonction d'onde de Laughlin dans le polynôme $P_{Laughlin}$. On utilise les coordonnées de Jacobi pour déterminer le centre du masse. Ces expressions impliquant des intégrales sur de nombreuses variables sont considérablement simplifiées à l'aide des coordonnées de Jacobi qui nous permet de calculer exactement des diverses quantités correspondant aux systèmes à plusieurs électrons[3]. Ensuite, nous utilisons le modèle des interactions de Coulomb, qui agir sur chaque variable du polynôme

P_J. Après changement de variable[18] $z_j = x_j - iy_j = r_j e^{-i\varphi_j}$, les fonctions d'onde ne sont pas normalisées[20] données par :

$$\langle \Psi(r_1, \ldots, r_N) | \Psi(r_1, \ldots, r_N) \rangle = \int_{S_N} \Psi^*(r_1, \ldots, r_N) \Psi(r_1, \ldots, r_N) d^2 r_1 \cdots d^2 r_N \tag{5.7}$$

L'énergie potentielle totale du système de N_e électrons est égale à la somme de tous les potentiels énergétiques :

$$\widehat{V} = \widehat{V}_{ee} + \widehat{V}_{eb} + \widehat{V}_{bb} \tag{5.8}$$

Dans la méthode, on considère le calcul de la valeur moyenne des opérateurs énergétiques comme indiqué dans l'équation (5.1). La même chose pour la méthode de Jain, on refait la même chose, on obtient l'énergie d'interaction pour les fermions composites.

Notre syslème se compose d'un gaz d'électrons bidimensionnel dans un champ magnétique perpendiculaire à se limiter au plus bas niveau de Landau ($PBNL$), où le moment angulaire total $L = mN_e(N_e - 1)/2$[18], avec $m = 3$ pour l'état de Laughlin.

L'énergie totale du système de N électrons est égale à la somme de tous les potentiels énergétiques en anglais electron-electron, electron-background et background-background. La densité électronique ρ s'écrit :

$$\rho = \frac{1}{2\pi l_0^2 m} \tag{5.9}$$

Où il y a exactement un électron pour m quanta de flux.

Pour N électrons la fonction définit par l'équation (4.3), telque $\prod_{i<j} (z_i - z_j)^m$ est le polynôme de Laughlin, symbolisé par $P_{Laughlin}$.

On utilise la transformation de Jacobi :

$$Z_i = \frac{z_1}{i} + \cdots + \frac{z_i}{i} - z_{i+1} \tag{5.10}$$

Ou :

z_i :est la position de chaque électron.

Z_i :est la coordonnée de Jacobi .

On utilise la matrice inverse pour déterminer les z_i en fonction de Z_i puis en les remplace dans le polynôme $P_{Laughlin}$ de Laughlin on obtient le polynôme de Jacobi qui l'on a défini ensuite P_{Jacobi}.

5.3 Application de 4 électrons

Nous présenterons dans cette partie un système de $N = 4$ particules, fermioniques, sans spin peuvent s'écrire comme des combinaisons linéaires d'un déterminant de Slater dans la base d'occupation des orbitales à un corps.

5.3.1 Méthode de Laughlin

Interaction electron–electron V_{ee}

on prend $N = 4$, et on va déterminer l'énergie d'interaction ε_{ee} (électron–électron), par particule :

$$\varepsilon = \frac{V}{N_e} \tag{5.11}$$

Ou N_e le nombre des électrons. Le polynôme $P_{Laughlin}$ de Laughlin s'écrit :

$$P_{Laughlin} = (z_1 - z_2)^3(z_1 - z_3)^3(z_1 - z_4)^3(z_2 - z_3)^3(z_2 - z_4)^3(z_3 - z_4)^3 \tag{5.12}$$

Pour une fonction d'onde $\Psi(r_1, \ldots, r_{N_e})$, l'interaction coulombienne est :

$$V_{ee} = \frac{N_e(N_e-1)}{2} \frac{\int d^2r_1 \cdots d^2r_{N_e} \frac{e_0^2}{|r_1-r_2|} |\Psi(r_1, \ldots, r_{N_e})|^2}{\int d^2r_1 \cdots d^2r_{N_e} |\Psi(r_1, \ldots, r_{N_e})|^2} \tag{5.13}$$

Où :

$$z_j = r_j e^{-i\varphi_j} \tag{5.14}$$

Tel que z_j vecteur position à $2D$ dans la représentation position complexe, devient :

$$V_{ee} = \frac{N_e(N_e-1)}{2} \frac{\int d^2z_1 \cdots d^2z_{N_e} \frac{e_0^2}{|z_1-z_2|} |\Psi(z_1, \ldots, z_{N_e})|^2}{\int d^2z_1 \cdots d^2z_{N_e} |\Psi(z_1, \ldots, z_{N_e})|^2} \tag{5.15}$$

On obtient les coordonnées complexes de Jacobi Z_i

$$\begin{aligned} Z_1 &= z_1 - z_2, \\ Z_2 &= \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2} - z_3, \\ Z_3 &= \frac{z_1}{3} + \frac{z_2}{3} + \frac{z_3}{3} - z_4, \\ Z_4 &= \frac{z_1}{4} + \frac{z_2}{4} + \frac{z_3}{4} + \frac{z_4}{4}. \end{aligned} \tag{5.16}$$

L'équation (5.16) c'est une matrice carrée avec les inconnues z_1 , z_2 , z_3 , z_4 , on va calculer la matrice inverse, on obtient :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{Z_1}{2} + \frac{Z_2}{3} + \frac{Z_3}{4} + Z_4, \\ z_2 &= \frac{-Z_1}{2} + \frac{Z_2}{3} + \frac{Z_3}{4} + Z_4, \\ z_3 &= \frac{-2\,Z_2}{3} + \frac{Z_3}{4} + Z_4, \\ z_4 &= \frac{-3\,Z_3}{4} + Z_4. \end{aligned} \tag{5.17}$$

On inclut z_1 , z_2 , z_3 , z_4 dans l'équation (5.11) le polynôme vecteur P_{Jacobi} devient :

$$P_{Jacobi} = Z_1^3(\frac{-Z_1}{2} + Z_2)^3(\frac{Z_1}{2} + Z_2)^3(\frac{-2Z_2}{3} + Z_3)^3(\frac{-Z_1}{2} + \frac{Z_2}{3} + Z_3)^3(\frac{Z_1}{2} + \frac{Z_2}{3} + Z_3)^3, \tag{5.18}$$

Et nous avons :

$$\int \prod_{k=1}^{N} d^2 z_k = \int \prod_{k=1}^{N} d^2 Z_k \quad \text{avec} \quad N \geq 2 \tag{5.19}$$

Afin de satisfaire aux coordonnées de Jacobi, on peut écrire la forme suivante[18] :

$$\sum_{k=1}^{N} r_k^2 = N R_N^2 + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{j}{j+1} Z_j^2 \quad \text{avec} \quad N \geq 2 \tag{5.20}$$

Ainsi :

$$S_N(r_1 , r_2 , ..., r_N) = \sum_{k=1}^{N} r_k^2 \tag{5.21}$$

Pour $N = 4$ particules, et d'après l'équation (5.20) nous avons également :

$$S_4(R, Z_1, Z_2, Z_3) = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 = \frac{Z_1^2}{2} + \frac{2Z_2^2}{3} + \frac{3Z_3^2}{4} + 4Z_4^2 \tag{5.22}$$

D'après le changement de coordonnées correspondant V_{ee} devient :

$$\varepsilon_{ee} = \frac{3}{2} \frac{\int d^2 Z_1 \int d^2 Z_2 \int d^2 Z_3 \int d^2 Z_4 [P_{Jacobi}]^2 e^{-(Z_1^2/4 + Z_2^2/3 + 3Z_3^2/8 + 2Z_4^2)/l_0^2} \frac{e_0^2}{Z_1}}{\int d^2 Z_1 \int d^2 Z_2 \int d^2 Z_3 \int d^2 Z_4 [P_{Jacobi}]^2 e^{-(Z_1^2/4 + Z_2^2/3 + 3Z_3^2/8 + 2Z_4^2)/l_0^2}} \tag{5.23}$$

Interaction background – background V_{bb}

L'énergie d'interaction ε_{bb} (background – background) par particule :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{bb} &= \frac{1}{N}\frac{\rho^2}{2}\int_{S_N} d^2r \int_{S_N} d^2r' \frac{e_0^2}{|r-r'|} \\ &= \frac{8}{3\pi}\frac{\sqrt{\upsilon N}}{2}\frac{e_0^2}{l_0} \end{aligned} \tag{5.24}$$

Interaction electron– background V_{eb}

L'énergie d'interaction ε_{eb} (electron–background) par particule :

$$V_{eb} = -\rho N \frac{\int d^2r_1 ... d^2r_N |\Psi(r_1,\ldots,r_N)|^2 \int_{S_N} d^2r \frac{e_0^2}{|r_1-r|}}{\int d^2r_1 ... d^2r_N |\Psi(r_1,\ldots,r_N)|^2} \tag{5.25}$$

Avec :

$$\int_{S_N} d^2r \frac{e_0^2}{|r_i - r|} = 2\frac{e_0^2 S_N}{R_{N_e}} \int_0^\infty \frac{dq}{q} J_1(q) J_0(\frac{qr_1}{R_N}) \tag{5.26}$$

Avec :

S_N : est la surface du disque.

R_{N_e} : est le rayon du disque.

Où $J_0(x)$ et $J_1(x)$ désignent les fonctions de Bessel d'ordre *zéro* et *un* respectivement.

Dans la géométrie de disque, on peut donne une simplification de l'énergie V_{eb}[21], ce qui donne :

$$\mid V_{eb} \mid = \mid 2V_{bb} \mid, \tag{5.27}$$

Ce qui donne :

$$\mid \varepsilon_{eb} \mid = \mid 2\varepsilon_{bb} \mid . \tag{5.28}$$

5.3.2 Méthode de Jain

Pour la méthode de Jain on refait les mêmes étapes de calcul pour V_{ee}, V_{bb} et V_{eb}. Seulement, il faut déterminer la polynôme de Jain :

$$P_{Jain} = \mathcal{P}_{PBNL} \prod_{j<k}^{N} (z_j - z_k)^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ \overline{z}_1 & \overline{z}_2 & \overline{z}_3 & \overline{z}_4 \\ z_1\overline{z}_1 & z_2\overline{z}_2 & z_3\overline{z}_3 & z_4\overline{z}_4 \end{pmatrix} \tag{5.29}$$

Avec $\overline{z} = 2\frac{\partial}{\partial z}$

Le polynôme P_{Jain} de Jain pour 4 particules s'écrit :

$$\begin{aligned} P_{Jain} = {} & 8\,(z_1 - z_2)\,(z_1 - z_3)\,(z_2 - z_3)\,(z_1 - z_4)\,(z_2 - z_4)\,(z_3 - z_4)\,\left(7\,z_2^4\left(z_3^2 - z_3\,z_4 + z_4^2\right) + z_3^2\,z_4^2\left(7\,z_3^2 - 22\,z_3\,z_4 + 7\,z_4^2\right) + \right. \\ & z_2^3\left(-22\,z_3^3 + 19\,z_3^2\,z_4 + 19\,z_3\,z_4^2 - 22\,z_4^3\right) + z_2\,z_3\,z_4\left(-7\,z_3^3 + 19\,z_3^2\,z_4 + 19\,z_3\,z_4^2 - 7\,z_4^3\right) + z_2^2\left(7\,z_3^4 + 19\,z_3^3\,z_4 - 69\,z_3^2\,z_4^2 + \right. \\ & 19\,z_3\,z_4^3 + 7\,z_4^4\Big) + 7\,z_1^4\left(z_2^2 + z_3^2 - z_3\,z_4 + z_4^2 - z_2\,(z_3 + z_4)\right) + z_1^3\left(-22\,z_2^3 - 22\,z_3^3 + 19\,z_3^2\,z_4 + 19\,z_3\,z_4^2 - 22\,z_4^3 + 19\,z_2^2\right. \\ & \left.(z_3 + z_4) + z_2\left(19\,z_3^2 - 48\,z_3\,z_4 + 19\,z_4^2\right)\right) + z_1^2\left(7\,z_2^4 + 7\,z_3^4 + 19\,z_3^3\,z_4 - 69\,z_3^2\,z_4^2 + 19\,z_3\,z_4^3 + 7\,z_4^4 + 19\,z_2^2\,(z_3 + z_4) - \right. \\ & 3\,z_2^2\left(23\,z_3^2 - 8\,z_3\,z_4 + 23\,z_4^2\right) + z_2\left(19\,z_3^3 + 24\,z_3^2\,z_4 + 24\,z_3\,z_4^2 + 19\,z_4^3\right)\Big) + z_1\left(-7\,z_2^4\,(z_3 + z_4) + z_2^3\left(19\,z_3^2 - 48\,z_3\,z_4 + \right. \right. \\ & \left. 19\,z_4^2\right) + z_3\,z_4\left(-7\,z_3^3 + 19\,z_3^2\,z_4 + 19\,z_3\,z_4^2 - 7\,z_4^3\right) + z_2^2\left(19\,z_3^3 + 24\,z_3^2\,z_4 + 24\,z_3\,z_4^2 + 19\,z_4^3\right) - z_2\left(7\,z_3^4 + 48\,z_3^3\,z_4 - \right. \\ & \left.\left.\left.\left.24\,z_3^2\,z_4^2 + 48\,z_3\,z_4^3 + 7\,z_4^4\right)\right)\right) \end{aligned} \tag{5.30}$$

On obtient le polynôme de Jacobi P_{Jacobi} par la même méthode de Laughlin :

$$\begin{aligned} P_{Jacobi} = {} & -\frac{1}{69\,984}\left(Z_1\,(Z_1 - 2\,Z_2)\,(Z_1 + 2\,Z_2)\,(2\,Z_2 - 3\,Z_3)\,(3\,Z_1 + 2\,Z_2 + 6\,Z_3)\,(3\,Z_1 - 2\,(Z_2 + 3\,Z_3))\left(729\,Z_1^6 + 16\,Z_2^2\,(Z_2 + 3\,Z_3)^2\right.\right. \\ & \left.\left.\left(4\,Z_2^2 - 156\,Z_2\,Z_3 + 63\,Z_3^2\right) - 81\,Z_1^4\left(68\,Z_2^2 - 44\,Z_2\,Z_3 + 93\,Z_3^2\right) + 36\,Z_1^2\left(316\,Z_2^4 + 88\,Z_2^3\,Z_3 - 558\,Z_2^2\,Z_3^2 + 1026\,Z_2\,Z_3^3 + 189\,Z_3^4\right)\right)\right) \end{aligned} \tag{5.31}$$

Reste qu'un seul problème pour la méthode de Jain, on ne peut pas déterminer les potentiel V_{bb} et V_{eb} dans la géométrie de disque, il faut les déterminé dans la géométrie d'une sphère.

Le potentiel d'interaction V_{bb} (background-background) et V_{eb} (électron-background) dans la géométrie de sphere, peuvent se calculer analytiquement par la méthode de Jain[16].

$$V_{bb} = \frac{N^2}{2\sqrt{S}}\frac{e_0^2}{l_0} \tag{5.32}$$

$$V_{eb} = -\frac{N^2}{\sqrt{S}}\frac{e_0^2}{l_0} \tag{5.33}$$

Avec la densité d'états électroniques $\rho = \frac{1}{4\pi S l_0^2}$. Ainsi que tous les électrons sont sur une sphère de rayon $R = \sqrt{S} l_0$.

et :

N : est le nombre des électrons.

S : est le moment magnétique.

l_0 : est la longueur magnétique.

5.4 Résultats et Discussion

Les énergies caractéristiques de la fraction $\upsilon = \frac{1}{3}$ sont résumées dans le Tableau TAB.5.1

Les calcules de l'énergie $\varepsilon_{ee}(1/3)$ pour N_e = 3,4 et 5 de notre calcul est le même avec ceux de Ciftja[18].

N	$\varepsilon_{ee}(1/3)$	$\varepsilon_{ee}(1/3)$[18]
3	0.239772	0.239772
4	0.327649	0.327649
5	0.406143	-

TAB. 5.1 – État fondamental à υ=1/3. en unités de $\frac{e_0^2}{l_0}$.

Les énergies caractéristiques de la fraction $\upsilon = \frac{1}{5}$ sont résumées dans le Tableau TAB.5.2

Les calcules de l'énergie $\varepsilon_{ee}(1/5)$ pour N_e = 3,4 et 5 de notre calcul est le même avec ceux de Ciftja[18].

La fonction d'onde de Laughlin s'écrit comme de simples déterminants de Slater présenté au moyen d'un package Mathématica. Cette base est couramment utilisée pour décrire les systèmes quantiques à $2D$. Le calcul de cette partie[22] montrent que l'état

N	$\varepsilon_{ee}(1/5)$	$\varepsilon_{ee}(1/5)$[18]
3	0.184915	0.184915
4	0.252296	0.252296
5	0.313323	-

TAB. 5.2 – État fondamental à υ=1/5. en unités de $\frac{e_0^2}{l_0}$.

d'énergie fondamental d'un système à N électron en interaction coulombienne pour des facteurs de remplissage $\upsilon = \frac{1}{3}$ et $\upsilon = \frac{1}{5}$ est montré dans les Tableaux TAB.5.1 et TAB.5.2, la valeur de l'énergie Coulombienne prend la plus grande amplitude pour $\upsilon = \frac{1}{3}$, et prend la plus petite grandeur de $\upsilon = \frac{1}{5}$. Par conséquent, notre résultat théorique est en accord avec les résultats obtenu par l'article de Ciftja[18]. La méthode de calcul actuelle des énergies d'interaction Coulombienne peut être appliquée à tous les facteurs de remplissage $\upsilon = \frac{1}{m}$ avec m impairs.

Pour le modèle de Jain, l'énergie d'interaction coulombienne pour l'état $\upsilon = \frac{2}{5}$ au moyen d'un package Mathématica. Ces énergies caractéristiques de cette fraction sont résumées dans le Tableau TAB.5.3

Le calcule de l'énergie $\varepsilon_{ee}(2/5)$ pour $N_e = 4$ de notre calcule est presque le même avec ceux de Jain, jusqu'à trois chifres après la virgulen[23].

N	$\varepsilon_{ee}(2/5)$	$\varepsilon_{ee}(2/5)$[23]
4	0.421445	0.421628

TAB. 5.3 – État fondamental à υ=2/5.en unités de $\frac{e_0^2}{l_0}$.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'énergie d'interaction coulombienne de l'état fondamental de la fonction d'onde de Laughlin pour $\upsilon = \frac{1}{3}$ et $\upsilon = \frac{1}{5}$, puis nous avons

introduit la fonction d'onde de Jain représentée par les fermions composites, où nous avons déterminé l'énergie d'interaction coulombienne de l'état fondamental pour $\upsilon = \frac{2}{5}$.

Conclusion générale

Notre travail de ce mémoire nous a permis d'étudier divers aspects de la physique de l'EHQF dans la géométrie disque. L'étude de l'EHQF avec le potentiel de Coulomb, dans la géométrie du disque, serait bien évidemment très intéressante. On a déterminé numériquement par calcul de l'interaction Coulombienne dans le plus bas NL dans les systèmes de petite taille jusqu'à 5 électrons

Le calcul que nous avons fait montre que l'état d'énergie fondamental d'un système à $N = 4$ électrons en interaction coulombienne pour un facteur de remplissage $\upsilon = \frac{1}{3}$, l'énergie totale est égale à -0.388855$\frac{e^2}{l_0}$ et pour un facteur de remplissage $\upsilon = \frac{1}{5}$, l'énergie totale est égale à -0.321584$\frac{e^2}{l_0}$.

Pour un système de Laughlin, on peut vérifier aisément qu'un système au facteur de remplissage $\upsilon = \frac{1}{3}$ est plus stale qu'un système au facteur de remplissage $\upsilon = \frac{1}{5}$.

Pour le modèle de Laughlin et de Jain, On peut faire une comparaison pour 4 électron, où l'énergie totale est égale à -0.388855$\frac{e^2}{l_0}$ Pour le modèle de Laughlin à $\upsilon = \frac{1}{3}$, ainsi que l'énergie totale est égale à -0.550079$\frac{e^2}{l_0}$ pour le modèle de Jain[23], ce qui montre que le modèle de Jain est plus stable que le modèle de Laughlin.

Nomenclature

Symbole	**Signification**
$EHQE$	Effet Hall Quantique Entier
$EHQF$	Effet Hall Quantique Fractionnaire
FC	Fermions Composites
LLL	Lowest Landau Level
NL	Niveau de Landau
$PBNL$	Plus Bas Niveau de Landau
qt	Quasi-trou

Symbole	**Signification**	**Symbole**	**Signification**
$\overrightarrow{A}$	Potentiel vecteur	N_e	Nombre d'électrons
$\overrightarrow{A}_L$	Vecteur de la Jauge de Landau	n	Niveau de Landau
$\overrightarrow{A}_s$	Vecteur de la Jauge de symétrie	$n_B = \frac{N_B}{S}$	Densité du flux
a	Opérateur d'annihilation	$n_e = \frac{N_e}{S}$	Densité électronique
a^+	Opérateur de création	p	Quantité de mouvement
$a_N = \frac{\nu^2}{\eta}$	Accélération (normale)	P_L	Polynôme de Laughlin
$\overrightarrow{B}$	Vecteur induction magnétique	P_J	Polynôme de Jacobi
b	Opérateur d'annihilation	$q \equiv e$	Charge de l'électron
b^+	Opérateur de création	R	Rayon du centre de l'orbitre
E	Champ éléctrique	R_c	Rayon cyclotron
$\overrightarrow{E_H}$	Vecteur champ de Hall	R_H	Résistance de Hall
$\overrightarrow{F_e}$	Force électrique	R_{N_e}	Rayon du disque
$\overrightarrow{F_L}$	Force de Lorentz	r	Position de l'électron
$\overrightarrow{F_m}$	Force magnétique	S	Aire du système utilisé
$\overrightarrow{H}$	Vecteur champ magnétique	t	Temps
H_0	Hamiltonien d'une particule libre	U_H	Tension de Hall
H_{int}	Hamiltonien d'intéraction	$\widehat{V}$	Potentiel énergétique
$\hbar$	Constante de Planck	$\overrightarrow{\nu}$	Vecteur vitesse de l'électron
I	Courant éléctrique	W	Largueur de la plaque
J	Densité du courant	Z_i	Coordonnées de Jacobi
L	Moment angulaire totale	z_i	Position d'électron
m	Masse réalle de système	z	Nombre complexe
$N_B = \frac{\phi}{\phi_0}$	Nombre de quanta de flux	$\overline{z}$	Complexe conjugué

symbole	**Signéfication**
$\overrightarrow{\Pi}$	*Opérateur qantité de mouvement*
$\overrightarrow{\nabla}$	Vecteur Nabla
Φ	Fonction d′onde
γ	Accélération
δ	Delta
$\varepsilon = \frac{V}{N_e}$	Energie d′intéraction par particule
η	Centre de l′orbite cyclotron
ρ	*Résistivité*
ρ_{xy}	*Résistivité longitidunale*
ρ_{xy}	*Résistivité transverse*
σ	*Conductivité*
σ_{xx}	*Conductivité longitudinale*
σ_{xy}	*Conductivité transverse*
τ	*Temps de collision moyen*
υ	*Facteur de remplissage*
$\phi(x)$	Potentiel scalaire
φ	*La phase*
χ	*Fonction arbitraire*
ω_c	*La fréquence cyclotron*

Bibliographie

[1] Drude, P. Zur elektronentheorie der metalle. Annalen der Physik 306, 566 (1900).

[2] Introduction à la physique de l'état solide, C. Kittel, Dunod 1979.

[3] M. Ahmed Ammar, Effet hall quantique fractionnaire, Université de Médéa, 2017.

[4] Frédéric Chandelier, Quelques applications de la théorie des champs à la physique de la matière condensée : l'effet Hall quantique dans tous ses états, Thèse de doctorat, Université Paris 11 – Orsay, 2003.

[5] Manuel ARANZANA, Étude des jonctions entre canaux de bord de l'effet hall quantique fractionnaire, Thèse de Doctorat, Université Paris 6, 2005.

[6] OMAR I. STERN Spin Phenomena in the Fractional Quantum Hall Effect : NMR and Magnetotransport Studies. Thèse de doctorat, INSTITUT MAX-PLANCK FÜR FESTKÖRPERFORSCHUNG, STUTTGART, 2005.

[7] M. Flöser, Transport quantique local et non-local : "Percolation in Quantum Hall Systems Cross-Correlations in Superconducting Hybrid Structures", Thèse de doctorat, Université de Grenoble, 2012.

[8] L. Saminadayar, D. C. Glattli, Y. Jin and B. Etienne, Phys. Rev. Lett. 79, 2526 (1997).

[9] R. B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. 50, 1395 (1983).

[10] H. L. Störmer, Nobel lecture : The fractional quantum Hall effect, Rev. Mod. Phys. 71, 875 (1999).

[11] J. K. Jain, Composite-fermion approach for the fractional quantum Hall effect. Phys.Rev .Lett. 63, 199 (1989).

[12] Mark Oliver GOERBIG, Pascal LEDERER, Electrons bidimensionnels sous champ magnétique fort : la physique des e ets Hall quantiques, Notes de cours, 2006.

[13] Antoine Sterdyniak, Etude de l'intrication dans l'effet Hall quantique fractionnaire, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2013.

[14] J. GUIGNARD, Étude de l'effet Hall quantique dans le graphène exfolié en vue d'une application en métrologie quantique, Thèse de Doctorat, Université Paris Sud 11, 2011.

[15] Tsui, D. C., Gossard, A. C., and Stormer, Phys. Rev. Lett. 48, 1559(1982).

[16] J. K. Jain, Composite Fermions, Cambridge : Cambridge University Press (2007).

[17] J. K. Jain, The Composite Fermion : A Quantum Particle And Its Quantum Fluids, Phys. Today 53, 39-45 (2000).

[18] O. Ciftja, C. Wexler, Phys. Rev. B 67 075304 (2003).

[19] Wolfram Research, Inc., Mathematica, Version 4.0, Champaign, Illinois (1999).

[20] G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall Polynomials, 2nd edition, Clarendon Press, Oxford 1995.

[21] O. Ciftja, Exact results for finite quantum Hall systems of electrons at filling factor one : Disk geometry, JOURNAL OF MATHEMATICAL PHYSICS 52, 122105 (2011).

[22] M.A. Ammar, Z. Bentalha, S. Bekhechi. Method of computation of energies in the fractional quantum Hall effect regime. Condensed Matter Physics, 2016, vol. 19, No. 3, 33702

[23] J.K. Jain and R.K. Kamilla, Int. J. Mod. Phys. B 11, 2621 (1997).