République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement supérieur
Et de la Recherche Scientifique

Université Dr YAHIA FARES de Médéa
Institut d'électrotechnique

Projet de Fin d'Études
Pour l'obtention du Diplôme :
Master « LMD » en génie des procédés
Option : pollution chimique et gestion environnementale

THÈME :

ÉTUDE DE LA CONVECTION THERMOSOLUTALE DANS UNE CAVITÉ CUBIQUE 3D

Etudie Par :
BOURABA kamel
TEFIANI karim

Proposé et Dirigé par :
Dr. HADIDI N

-Juin 2014-


بسم الله الرحمن الرحيم

REMERCIEMENTS

Allah merci pour m'avoir donné la santé, la volonté et le courage sans lesquels ce travail n'aurait pas été réalisé.

Je remercie vivement Monsieur HADIDI .N, Maître de conférences et chef de Département de Génie des procédés et l'environnement à l'Université de Medea encadreur de ce mémoire, pour la confiance qu'il a placée en moi, pour sa disponibilité permanente, pour sa patience, pour ses conseils, pour sa contribution majeure à l'orientation de mes recherches, pour son aide et son soutien permanents.

Je remercie sincèrement tout les enseignent de l'université DR.YAHIA FARES de MEDEA au département génie des procèdes et l'environnement

Mes remerciements vont aussi à tous mes collègues de travail et mes responsables Hiérarchiques qui ont contribué à ce que je mène à terme ce travail.

Dédicace

Je dédié ce modeste travail

A mes parents qui m'ont beaucoup aidé à terminer mes études,

qui ont prié et se sont sacrifiés pour moi sans oublier mon frère ALI et YOUCEF, et ma petite sœur AMINA

Ainsi que mes oncles et tantes

A toute la famille TEFIANI sans exception.

A mes amis :KAMEL, CHAABAN, IBRAHIM, TOFIK, YOUNES, HAMZA, MOHMMED, et tous ceux que j'ai oublié.

A toute la promotion 2014

A tous ceux qui m'ont aidé durant ma vie universitaire

*A tous ceux que j'**aime** et qui m'**aiment**.*

TEFIANI KARIM

Dédicaces

Avant tout, je remercie le grand Dieu, qui nous a aidés à élaborer ce modeste travail.

J'ai l'immense honneur de dédier ce modeste travail :

A mes parents qui m'ont beaucoup aidé pour terminer mes études, qui ont prié et se sont sacrifiés pour moi sans

oublier mon frère BRAHIM, MOUKHTAR , ALLEL et MOHAMMED et toutes mes sœurs

A toute la famille BOURABA et TEFIANI sans exception.

A mes amis : Djamel, Mahfoud, Toufik, Karim, chaabane et Hamza et tous ceux que j'ai oublié.

A mon binôme Karim

A toute la promotion 2014.

A tous ceux qui m'ont aidé durant ma vie universitaire

A tous ceux que j'aime et qui m'aiment.

BOURABA KAMEL

Nomenclature

a Diffusivité thermique, [m^2s^{-1}]

C Concentration dimensionnelle du soluté

C_0 (C_L) Concentration dimensionnelle du soluté sur la paroi active

D_{a_i} Nombre de Darcy, $D_{a_i} = K_i / L^2$

k Conductivité thermique, W/m°C

K_i Perméabilité du milieu poreux, m^2

L dimension de la cavité, m

Le Nombre de Lewis, $\mathrm{Le} = a_{\mathrm{eff_i}} / \mathrm{D}_{\mathrm{eff_i}}$

$\mathrm{Nu_b}$ Nombre de Nusselt moyen, $Nu_b = \int_0^1 \left[\frac{\partial \theta}{\partial X} \right]_{X=0} dY$

N Rapport des forces de volume, $\mathrm{N} = \beta_C \Delta C / (\beta_T \Delta T)$

p Pression, [Pa]

P Pression adimensionnelle, $\mathrm{P} = \mathrm{p} L^2 / (\rho_f . a^2 / \varepsilon^2)$

Pr Nombre de Prandtl, $\mathrm{P_r} = \nu_f / a_{\mathrm{eff_i}}$

Ra Nombre de Rayleigh, $Ra = g.\beta_T \cdot L^3 \Delta T / \nu_f . a_{eff\,1}$

Ra_m Nombre de Rayleigh modifié, $Ra_m = RaDa_1$

$\mathrm{R_c}$ Rapport des conductivités thermiques, $\mathrm{R_c} = \mathrm{k_{eff_i}} / \mathrm{k_{eff_1}}$

$\mathrm{R_\nu}$ Rapport de la viscosité effective à celle du fluide, $\mathrm{R_\nu} = \mu_{\mathrm{eff_i}} / \mu_f$

R_K Rapport des perméabilités des couches poreuses, $R_K = K_2 / K_1$

Sh_b Nombre de Sherwood moyen $Sh_b = \int_0^1 \left[\frac{\partial S}{\partial X} \right]_{X=0} dY$

S Concentration adimensionnelle, $S = \left(C - (C_0 + C_L)/2\right) / \left(C_0 - C_L\right)$

T Température, [°C]

$T_0 (T_L)$ Température sur la paroi active, [°C]

u Vitesse axiale, (m/s)

U Vitesse adimensionnelle suivant la direction X, $U = uL/a$

v Vitesse transversale, [m/s]

V Vitesse adimensionnelle suivant la direction Y, $V = vL/a$

x Coordonnée axiale, [m]

X Coordonnée horizontale adimensionnelle, $X = x/L$

y Coordonnée transversale, [m]

Y Coordonnée verticale adimensionnelle, $Y = y/L$

Symboles grecs

β_T Coefficient d'expansion thermique, [K^{-1}]

β_S Coefficient d'expansion solutale

ρ Masse volumique, [Kg m^{-3}]

μ_{eff} Viscosité équivalente dans le modèle de Brinkman, [Kg m^{-1} S^{-1}]

ν Viscosité cinématique, [m^2 s^{-1}]

ε Porosité

τ Tortuosité

θ Température adimensionnelle, $\theta = \left(T - (T_0 + T_L)/2\right)/\left(T_0 - T_L\right)$

ϕ Variable dépendente

Γ Coefficient de diffusion

ΔT différence de température, $\Delta T = T_0 - T_L$, [°C]

Δc Différence de concentration, $\Delta c = c_0 - c_L$

Indice

b	Moyen
E, e	Est
eff	Effectif
f	Fluide
i	Couche poreuse
N, n	Nord
Nb	Nœuds voisins
P	Nœud principal
S, s	Sud

الملخص :

يهدف هذا العمل إلى دراسة الانتشار الحراري والكتلي في تجويف مكعب يحتوي على وسط مسامي و مائع ، الوسط المسامي يعتبر متجانسا ومشبع بنفس المائع ، يخضع الجدار الأيسر و الأيمن إلى درجة حرارة و تركيز ثابتين وأما الجدران الأخرى كضومة للحرارة وغير نفوذة ، كل المعادلات الأساسية لهذه الظاهرة الفيزيائية تحل رقميا بواسطة الحجم المتناهي وهذه النتائج تحلل على شكل خطوط سيل ثبوت الحرارة و التركيز وكذا متوسط ثابتين *نسلت* و *شرود*.

الكلمات الدالة : الانتشار الحراري و الكتلي , ثنائي الانتشار, وسط مسامي , تجويف مكعب.

Résumé

Ce travail représente une étude des transferts de chaleur et de masse générée dans une cavité cubique renfermant un milieu poreux avec un fluide. Le milieu poreux est considérée homogène et isotrope et saturé par le fluide. Les parois varticales (gauche et droite) sont soumises à des conditions des températures et des concentrations uniformes alors que les autres parois sont adiabatiques et imperméables .les équations de base décrivant la convection double diffusive au sein de l'enceinte sont résolues numériquement par la méthode de volume finis.les résultats numériques sont analysés en terme de lignes de courant , les isothermes , des isoconcentration et des nombres de Nusselt et sherwood moyens.

Mots clés : Double diffusive, thermosolutale, milieu poreux, cavité cubique.

Abstract :

This Work deals with numerical study three dimensional double-diffusive convection in cubical enclosure filled by two vertical porous medium layers. The porous layer is considered homogeneous, isotropic and saturated with the same binary fluid. The vertical walls of the enclosure are subjected to uniform temperature and concentration whereas the horizontal walls are assumed to be adiabatic and impermeable. The mathematical description of the problem is based on a one-domain formulation of the conservation equations. The set of equations governing the double-diffusive convection in the enclosure are solved numerically using the control volume approach.

Key words : Double diffusive, three dimensional, porous media, thermosolutale.

Sommaire

Introduction Général…… 01

Chapitre I : Notions sur les milieux poreux et leurs applications

I.1.Introduction……..……..…….... **03**

I.2.Quelques exemples de milieux poreux……..…… **03**

I.2.1.Milieux poreux naturels……..... **03**

I.2.2.Milieux poreux artificiel……..... **04**

I.3.Définition relative aux milieux poreux……. **06**

I.3.1.Milieu poreux……..…….…..... **06**

I.3.2.Notion de volume élémentaire représentatif (V.E.R)…….……. **08**

I.4.Propriétés structurales et thermo physique d'un milieu poreux……..… **08**

I.4.1.La porosité……..……..……..…….…..... **08**

I.4.2.La variation de la porosité…….…… **10**

I.4. 3.La perméabilité……..…….……..... **11**

I.4.4.La tortuosité……..……..……..…….... **12**

I.4.5.La surface spécifique…….……..... **13**

I.4.6.Conductivité thermique effective……..…..... **13**

I.4.7.Modèles d'écoulement en milieux poreux……. **15**

I.5.La loi de Darcy……..……..... **15**

I.5.1.Formulation de Forchheimer……..……..... **16**

I.5.2.Modèle général…….…….……..... **16**

I.6.Mousse Métallique…… 17

I.6.1.Applications…… 18

I.6.2.Electrode poreuse…… 18

I.6.3.Echangeur chaleur…… 19

I.7.Conclusion…… 19

Chapitre II : Formulation mathématique

II.1.Introduction …… 20

II.1.2.phénomènes de transferts …… 20

II.1.3.Définitions…… 20

II.1.3.1.La chaleur…… 20

II.1.3.2.La température…… 20

II.1.3.3.La conservation de la chaleur…… 20

II.1.3.4.La chaleur spécifique…… 21

II.1.3.5.L'enthalpie…… 21

II.1.3.6.Les transferts de chaleur…… 21

II.1.4.Transfert de masse, diffusion et transport…… 22

II.1.4.1.Flux de particules. Equation de Finck…… 22

II.1.4.2.Régime non permanent…… 24

II.1.5.Convection naturelle, forcée et mixte…… 25

II.2.Le Transfert de masse par diffusion moléculaire…… 26

II.2.1.Equations de la diffusion massique…… 28

II.3.Couplage avec la convection thermique……..…….....…….…..…. **29**

II.4.Modèle Physique……..……...……. **31**

II.5.Hypothèses simplificatrices…….…..... **31**

II.6.Equations gouvernantes……...…… **32**

II.6.1.Equation de continuité……...……... **32**

II.6.2.Equation de conservation de la quantité de mouvement…….…… **33**

II.6.3.Equation de l'énergie……...……..…… **33**

II.6.4.Equation de concentration……...……..... **33**

II.7.Conditions aux limites……..……... **34**

II.7.1.Conditions aux limites dynamiques…….. **35**

II.7.2.Conditions aux limites Thermiques……...……... **35**

II.8.adimensionnement des équations……...…….. **35**

II.8.a). Equation de continuité……..……. **36**

II.8.b).Equation de conservation de la quantité de mouvement…….…… **36**

II.8. c).Equation de l'énergie…….……..... **37**

II.8.d).Equation de concentration…….…….. **37**

II.9.Conditions aux limites adimensionnelles……...……..... **37**

II.10.Conclusion……. **37**

Chapitre III : Modélisation numérique

III.1.Introduction…… **38**

III.2.Principe de la méthode des volumes finis…….…….... **38**

III.2.1.Equation différentielle gouvernante……..…….. **38**

III.2.2.Equation de continuité……...……...…... **38**

III.2.3.Maillage et volume de contrôle…….……..... **39**

III.2.4.Discrétisation des équations de conservation……..……..... **39**

III.2.4.1.Flux de diffusion –convection…….. **41**

III.2.4.2.Simplification de l'expression du flux……..……..... **42**

III.2.4.3.Linéarisation du terme source……...…… **42**

III.2.4.4.Equation finale de discrétisation……...…… **43**

III.2.4.5.Méthode de résolution des équations algébriques……..... **45**

III.2.5.Considérations pour le champ dynamique……...…… **45**

III.2.5.1.Notion de maillage décalé……...……...……..... **46**

III.3.Critère de convergence…….…….. **46**

III.4.Schémas d'interpolation…….…… **46**

III.5.Application de la méthode des volumes finis à notre problème…….…… **47**

Chapitre IV : Résultats et discussions

IV.1.Introduction……..…….. **49**

IV.2.Procédure numérique…….……..... **49**

IV.3.Sensibilité du code de calcul au maillage et validation……..…..…….. **50**

IV.4.Lignes de courant-isothermes –isoconcentrations…….....…….. **51**

IV.5.Effet du nombre de Rayleigh modifié sur les transferts…….……..…….… **53**

IV.6.Conclusion…….....……...…….. **55**

Conclusion générale……..... **56**

Référence bibliographique

Liste des figures

FIG I.1 : Schéma d'un aquifère……..……..…04
FIG I.2 : Schéma d'un réservoir naturel d'hydrocarbures……..……...04
FIG I.3 : milieux poreux consolidés…..……..…..07
FIG I.4 : milieux poreux non consolidés…….……..…..…07
FIG I.5 : Volume élémentaire représentatif (V.E.R.)…….. 08
FIG I.6 : Définition schématique de la tortuosité……..12
FIG I.7 : Modèle série de la conductivité thermique effective ……..……..…..14
FIG I.8 : Modèle parallèle de la conductivité thermique effective……..…….....14
FIG I.9 : Mousse métallique mise en forme pour intégration dans un échangeur de chaleur de type « tube coaxiaux »…….…..……..19
FIG II.1 : Les transferts de chaleur……....….....21
FIG II.2 : Diffusion unidirectionnelle en régime transitoire……...…….……24
FIG II.3 : transfert de masse par diffusion dans un mélange gazeux ….……...……26
FIG II.4 : Couplage thermosolutale le long d'une plaque verticale ……...…….....30
FIG II.5 : modèle physique étudié……...……..…....31
FIG III.1 : Subdivision du domaine d'étude en volumes de contrôle……...…….....39
FIG III.2 : Volume de contrôle représentatif……...……...…….....…41
FIG III.3 : Représentation d'un maillage décalé…….....…….....46
FIG IV.1 : représente les lignes de courant pour N=1, Da=[10^{-7},10^{-3},10^{-2}] et Ra=7.10^{6}……...52
FIG .IV.2 : représente les isothermes pour N=1, Da=[10^{-7},10^{-3},10^{-3}] et Ra=7.106…….....52
FIG. IV.3 : représente les Isoconcentrations pour N=1,Da=[10^{-7},10^{-5},10^{-3}] et Ra=7.10^{6}…...…..53
FIG. IG.4 : Effet du nombre de Rayleigh sur le transfert de chaleur pour N=4, Le=10, Da= [10^{-10} -10^{0}]…….……....54
FIG. IV.5 : Effet du nombre de Rayleigh sur le transfert de masse pour N=4, Le=10, Da= [10^{10} 10^{0}]…….……54

Liste des tableaux

Tableaux I.1 : les domaines d'application pour les écoulements dans les milieux poreux**…...05**

Tableaux I.2 : Valeurs moyennes de porosité de quelques matériaux**……..…09**

Tableaux I.3 : Valeurs moyennes de perméabilité de quelques matériaux, O.Reynolds et Dullien**……...12**

Tableaux III.1 : Définition des différents termes des équations de conservation**……..……...40**

Tableaux III.2 : Expressions des termes sources linéarisés (Sc et Sp) pour les différentes équations**.....43**

Tableaux III.3 : Les expressions de $A|P|$ selon le schéma d'interpolation**……..……47**

Tableaux IV.1 : Sensibilité du code de calcul au maillage pour $Pr = 7$, $N = 1$, $Ra = 10^5$, $Da = 10^{-2}$, $\varepsilon = 0.5$, $Le = 10$ **…….……....50**

Tableau IV.2 : Comparaison du nombre de Nusselt dans le cas du régime de Darcy-Brinkman en convection thermique pour Pr = 0.71, N=0, ε =0.5**…….……...51**

Introduction Générale

Introduction générale

L'étude de la convection naturelle a suscite et suscite encore aujourd'hui l'intérêt de nombreux scientifiques et industriels. Les recherches menées, dans ce domaine, s'étendent sur un peu plus d'un siècle. Un nombre considérable de travaux a été entrepris, suite à la découverte du phénomène par les expériences de Bénard et l'analyse théorique de Rayleigh au début du vingtième siècle, jusqu'a présent.

Depuis une vingtaine d'années, un autre type de transport convectif en milieux poreux attire l'attention des chercheurs, c'est la convection double diffusive ou thermosolutale qui s'exprime en présence de deux composants différents (par exemple la chaleur et la salinité) ayant différents taux de diffusion.

Le phénomène de la double diffusion peut se produire dans les milieux poreux, telles que les étangs solaires, les réservoirs pour le stockage de gaz naturel et de déchet radioactif, la fabrication du cristal, le transport de polluant dans le sol, etc.

Dans un milieu poreux, quand un fluide saturant à plusieurs composants est soumis à des gradients de densité causés par des variations locales de température et de concentration, des forces volumiques dues aux champs de gravité induisent un mouvement convectif : c'est la convection naturelle thermosolutale. La convection naturelle dans les milieux poreux a une importance fondamentale et trouve des applications dans de nombreux domaines (astrophysique, océanographie, géophysique, pollution de l'air, diffusion souterraine des polluants, enfouissement souterrain des déchets radioactifs, isolation thermique, métallurgie, extractions pétrolières, exploitation géothermique et stockage de certains produits agricoles).

La plupart des études existantes traitent de la convection d'origine thermique et sont basées sur le modèle de Darcy. De plus ces études supposent le caractère isotrope et homogène des matériaux poreux.

La résolution d'un problème type de convection double diffusive en milieux poreux se ramène a prédire les champs de température, de concentration et de vitesse ainsi que l'intensité de l'écoulement en fonction des divers paramètres du problème. Il est également important de prédire les taux de transferts thermique (nombre de Nusselt) et massique

(Nombre de Sherwood) correspondant.

Dans la présente étude nous intéressons à la double diffusive générée dans une cavité cubique, remplie par un milieu poreux et un fluide

La présente investigation a pour but l'étude de la convection double diffusive dans les milieux poreux dans une enceinte cubique infiniment longue adiabatique et imperméable sur les faces horizontale inférieure et supérieure de l'enceinte. Un gradient de température s'établit entre les faces gauche et droit.

Le modèle mathématique décrivant le présent problème a été développé en se basant sur l'équation de Darcy-Brinkman-Forchheimer.

En pratique, les milieux poreux ne sont pas homogènes, mais plusieurs couches, en Général de propriétés différentes en constituent la matrice poreuse. Par conséquent, il est souhaitable de considérer l'influence, des diverses couches, sur l'écoulement et le transfert de chaleur. L'actualité du sujet, nous a motivé à entreprendre une telle investigation.

Notre étude porte essentiellement sur la mise en évidence de l'influence des paramètres adimensionnelles (le nombre de Rayleigh fluide Ra, le nombre de Darcy Da, le nombre de Rayleigh modifié Ram, ainsi que le rapport de perméabilité Rk) sur l'évolution de la structure de l'écoulement et sur le transfert de chaleur dans le système.

Ce manuscrit est structuré comme suit :

Le premier chapitre est consacré à la présentation des généralités sur les milieux poreux.

Une recherche bibliographique permettant de bien situer notre travail fait l'objet du deuxième chapitre. La formulation mathématique du problème physique, les hypothèses considérées ainsi que les équations de conservation mises sous formes adimensionnelles sont développées dans le deuxième chapitre.

Dans le troisième chapitre est présentée la méthode numérique choisie pour la résolution des équations de conservation.

Le dernier chapitre est consacré à la présentation et à la discussion des résultats obtenus.

On termine notre travail par une conclusion générale.

Chapitre I :

Notions sur Les milieux poreux Et leurs applications

Notions sur les milieux poreux et leurs applications.

I.1. Introduction

Un milieu poreux est un milieu continu, cohésif ou non, qui présente intérieurement une fraction de volume accessible à un fluide. Cette fraction de volume non solide, composée de cavernes, de crevasses, de pores etc. constitue ce que l'on appelle la porosité du milieu poreux. La porosité est évidemment un élément descriptif essentiel du milieu, toutefois, deux milieux poreux présentant la même porosité peuvent avoir des propriétés très différentes. On peut trouver dans un milieu poreux des pores ne débouchant pas (pores aveugles) ou occlus ; un milieu poreux contient à la fois des pores aveugles et des pores ouverts plus ou moins interconnectés, pourra grâce à ces pores ouverts laisser s'écouler le fluide.

Dans la réalité complexe que constitue un milieu poreux, des paramètres comme le diamètre de capillaire ou la porosité, ne constituent que des valeurs globales moyennes, incapables de traduire exactement la topologie complexe de l'écoulement réel à travers le milieu. Dans le cas où les espaces vides sont remplis par une même phase (liquide ou gazeuse), le milieu poreux est dit saturé par le fluide. Les milieux poreux jouent un rôle important dans de nombreux secteurs industriels et phénomènes naturels. Pour nous limiter à quelques exemples typiques : le génie pétrolier, le génie chimique, le génie civil, la médecine, etc.

I.2. Quelques exemples de milieux poreux

I.2.1. Milieux poreux naturels

Dans la nature, les roches et les sols sont certainement les milieux poreux les plus exploités. L'´etude géologique des sous-sols permet de classier les différentes couches géologiques selon la perméabilité à un écoulement de fluide. Les couches d'argile constituent en général les parois imperméables de réservoirs naturels d'eau ou d'hydrocarbures. On nomme *aquifère* un réservoir qui non seulement contient de l'eau mais qui peut aussi .être le lieu d'´ecoulement, par gravité ou par pompage. Une schématisation d'un aquifère est proposée sur la FIG I.1.

Les roches poreuses peuvent contenir également des hydrocarbures. La FIGI.2 montre qu'un tel réservoir peut contenir de l'eau, du pétrole et du gaz, avec des couches de mélange

intermédiaires. C'est pourquoi la compréhension des écoulements multiphasiques est très importante pour l'industrie de l'extraction pétrolière.

La porosité des roches est très variable selon les conditions de température et de pression lors de la formation et de l'´evolution géologique. Les roches denses, [1]

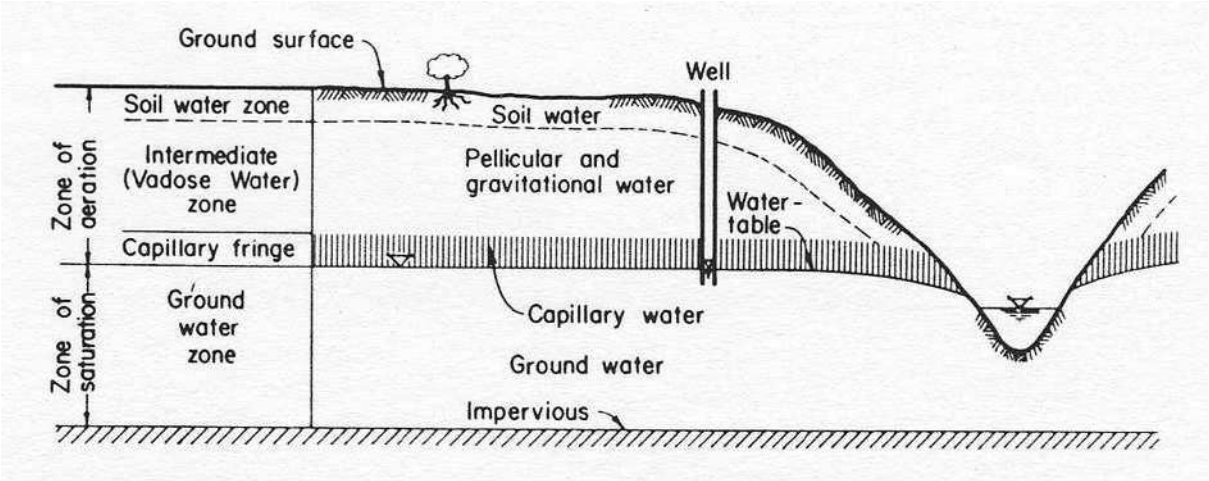


FIG I.1 : Schéma d'un aquifère (Bear j 1972).

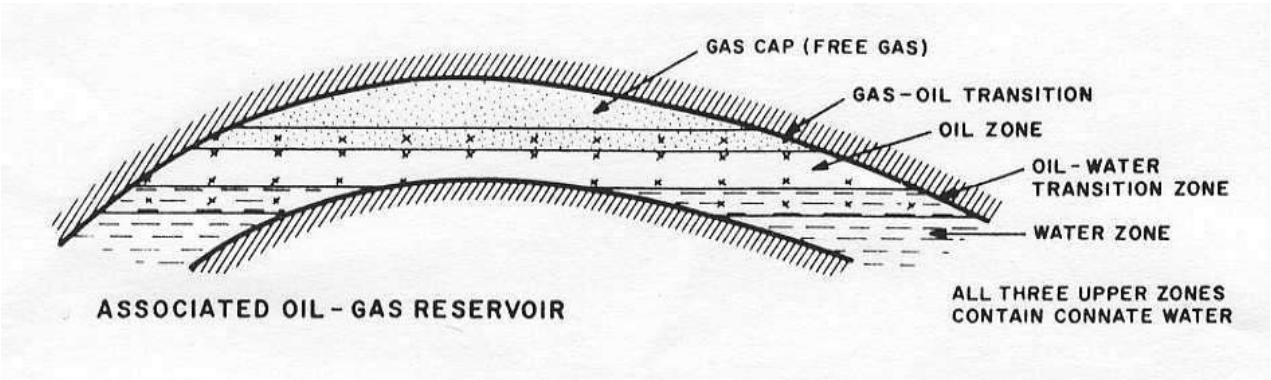


FIG I. 2 : Schéma d'un réservoir naturel d'hydrocarbures (Bear j, 1972)

I.2.2. Milieux poreux artificiels

Lors de la fabrication des bétons et des ciments, une certaine porosité est nécessaire pour permettre un séchage lent et progressif et l'obtention d'un matériau robuste. Parfois, la porosité (fine) est complétée par un réseau de fractures qui fragilise le béton. La porosité d'un bon béton est comprise entre 6 et 10 %.

Le contrôle de la porosité et de la structure poreuse joue un grand rôle dans l'industrie du papier. Selon les méthodes de fabrication, on peut obtenir un papier filtre très absorbant avec une porosité de 80 %, ou au contraire un papier très ((serrée)) et transparent (le papier

calque) avec une porosité proche de 0. On a alors des pores de diamètres compris entre 0,2 à 4 μm. Une méthode de réalisation de poreux de forme diverses est le frittage. Un empilement de grains en contact est chauffé de manière à ce que les contacts entre les grains fondent et réalisent une soudure.

Le frittage peut se réaliser avec des grains en métal (bronze, cuivre par exemple), en plastique ou en verre.

- Les phénomènes de transfert massiques et thermiques dans les milieux poreux (en monophasiques où en poly phasiques) interviennent dans de nombreuses applications et touches à des domaines multiples tel que représenté ci-dessous :

Domaine d'utilisation	**Application**
Mécanique	-Isolement thermique -Capacité de séchage -Récupération de l'énergie géométrique -Accroissement du transfert de chaleur par modification de surface -Lubrification Réacteurs nucléaires utilisant des gaz de refroidissement s'écoulant à travers des particules radioactives -Fusion et solidification des alliages binaires -Déshumidification -Pré chauffeurs et stabilisateurs de flamme poreux -Stockage de l'énergie solaire -Pots catalytiques dans le domaine de l'automobile
Génie-chimique	-Réacteurs chimiques -Filtration -Adsorption -L'échange d'ion -Les réactions catalytiques sur une surface solide -Séchage Réacteurs chromatographiques -Convertisseurs catalytiques pour la réduction de la pollution de l'air des produits de combustion -Transfert de masse à travers les membranes
Environnement	-Ecoulement des eaux souterraines

	-contamination des eaux souterraines -Ecoulement d'eau, de vapeur d'eau et d'air à travers des matériaux de construction -Recyclage de déchets nucléaires -Irrigation -Nettoyage des sols par injection de vapeur
Géologie	-Migration des eaux et minéraux -Exploitation de l'énergie géothermique
Pétrole	-Ecoulement de gaz et pétrole dans les réservoirs -Accroissement de la production de gaz naturel
Médecine	-Stimulation du transport des gaz dans l'organisme, H.P.C.Darcy [2].

Tableau I.1 : les domaines d'application pour les écoulements dans les milieux poreux

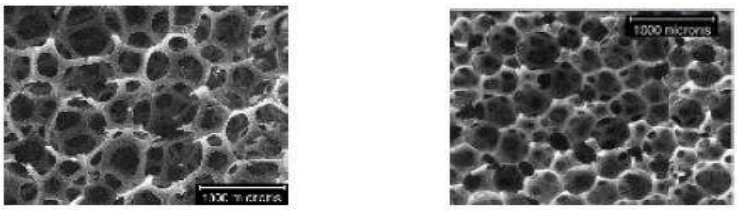
I.3. Définition relative aux milieux poreux

I.3.1. Milieu poreux :

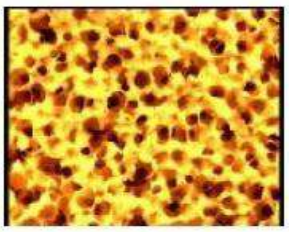
Un milieu poreux est un massif formé de cavités de volume et de surface variées, interconnectées, partiellement ou totalement entre eux par des petits canaux, en prenant comme exemple de formation de particules sphériques, de textures fibreuses, etc., entre lesquels les vides forment l'espèce proprement dit (les vides sont appelés pores).

- Un milieu poreux se présente généralement sous les deux formes suivantes : Milieux poreux consolidés, dans lesquels la phase solide est formée de grains cimentés (FIG.I.3) [3], (calcaire, grés, la céramique….).

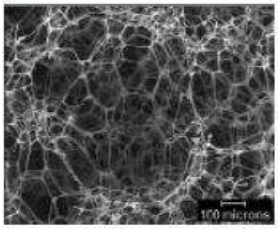
- Milieux poreux non consolidés, dans lesquels la phase solide est formée de grains non soudés entre eux (FIG.I.4) [3], (fibres métalliques, gravier, sable, billes….)



Une mousse de polyuréthanne.

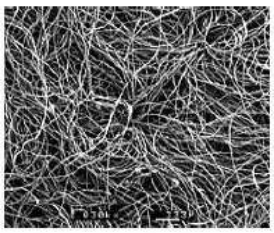


Une mousse de cuivre.



Une mousse de mélanine.

FIG I.3 : milieux poreux consolidés



Fibres métalliques.

FIG I.4 : milieux poreux non consolidés

Les milieux poreux incluent entre autres: les filtres à sable dans l'industrie de traitement de l'eau, les roches réservoirs d'hydrocarbures et les matériaux de génie civil.

Une des caractéristiques majeures de la plupart des corps poreux est de permettre la circulation des fluides dans les cavités du milieu poreux, on distingue pour cela deux (02) types de milieu poreux :

- Le milieu poreux saturé, où la matrice solide est complètement remplie par les fluides comme le sol imbibé d'eau.

- Le milieu poreux où plusieurs fluides, miscibles ou non, coexistent au sein des cavités, comme le sol partiellement saturé d'eau, le mélange eau-huile dans les roches
- pétrolières (écoulement poly phasiques).

I.3.2. Notion de volume élémentaire représentatif (V.E.R)

En pratique, l'utilisation des équations différentielles à l'échelle macroscopique d'un milieu poreux s'avère impossible à cause de la géométrie de ce milieu qui se caractérise par le non uniformité de la dimension du vide et de distribution dans la partie centrale de la matrice poreuse. Il est par conséquent nécessaire d'effectuer un changement d'échelle.

On définit ainsi un volume élémentaire représentatif de grande dimension par rapport aux dimensions moyennes des pores où les grandeurs et paramètres telles que la vitesse, la pression, la température, la porosité, sont de valeurs moyennes.

Autrement dit on peut considérer, par la suite, que le milieu poreux est un ensemble de V.E.R. Cette conceptualisation introduite par J. Bear permet de raisonner en terme de milieu continu équivalent.

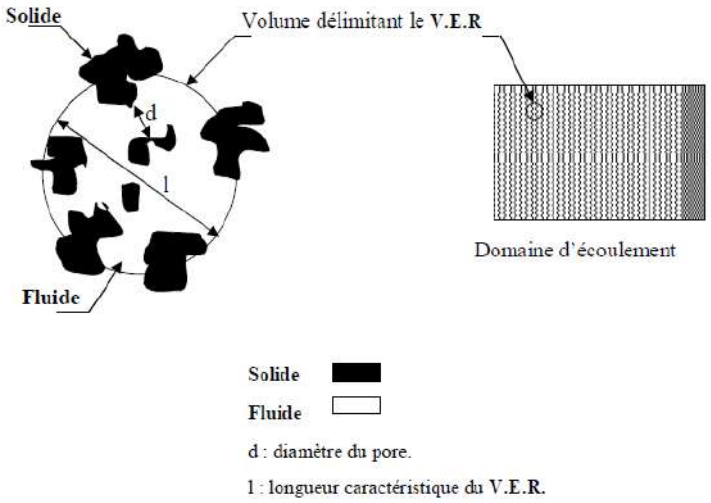


FIG I.5:Volume élémentaire représentatif (V.E.R.)

I.4. Propriétés structurales et thermo physique d'un milieu poreux

Différentes grandeurs géométriques et thermo-physiques sont utilisées pour caractériser l'écoulement et le transfert de chaleur se produisant dans un milieu poreux, nous pouvons citer :

I.4.1. La porosité

La porosité totale (ε_T) dans un milieu poreux est définie comme étant le rapport du volume occupé par les espèces vides au volume total (matrice + vide) correspondant :

$$\varepsilon_T = \frac{V_P}{V_T} \quad \textbf{(I.1)}$$

Où

V_P : Volume des espèces vides

V_T : Volume total

En général, la porosité totale ne présente pas d'intérêt, car seuls les pores accessibles jouent un rôle actif. On définit donc la porosité effective ou utile :

$$\varepsilon_e = \frac{V_{PU}}{V_T} \quad \textbf{(I.2)}$$

Où :

V_{PU} : Volume des pores accessibles ou utiles (c'est à dire communiquant entre eux).

Le tableau (I.2) nous donne quelques valeurs de la porosité de certains matériaux d'après les résultats expérimentaux de A.E.Scheidrgger [4].

SUBSTANCE	**POROSITE**
Matériau mousseux	0,98
Fibre de verre	0,88 – 0,93
Fil à tisser	0,68 – 0,76
Grain de silice	0,65
Poudre d'ardoise noire	0, 57 – 0,66
Cuir	0,56 – 0,59

Terre	0,43 – 0,54
Sable	0,37 – 0,70
Empilement de sphères	0,36 – 0,43
Filtre à cigarette	0,17 – 0,49
Brique	0,16 – 0,34

Tableau (I. 2) : Valeurs moyennes de porosité de quelques matériaux.

I.4.2. La variation de la porosité

La variation de la porosité apparaît significativement sur le champ de vitesse, et cela en modifiant localement le profil des vitesses, ceci est associé à la nature du contact entre le matériau poreux et la paroi au voisinage de cette dernière, l'assemblage des particules formant le milieu poreux défait.

Le milieu poreux devient ainsi perméable, cette perméabilité est associée à la présence de contraintes de compressions, fracture, etc.

La vitesse du fluide atteint presque deux (02) fois le diamètre des particules. La majorité des travaux de recherches supposent une variation de la porosité (valeur moyenne) au voisinage de la paroi et peut être approximée pour un lit de particules par :

$$\varepsilon = \varepsilon_{\infty}\left[1 + C\exp\left(\frac{-NR}{dp}\right)\right] \qquad \textbf{(I.3)}$$

Où :

ε : Porosité au centre du lit poreux ;

ε_{∞} : Porosité de la paroi ;

R : Distance à partir de la paroi solide ;

d_p : Diamètre des particules ;

C et N : Constantes empiriques, déterminées d'après de récentes recherches par les conditions suivantes :

$$R = 0 \rightarrow \varepsilon = 1$$
$$R \approx 4d_p à 5d_p \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_\infty$$

C= 1,4

→Pour ε_∞ = 4

N= 5, à, 6

I.4.3. La perméabilité

Elle caractérise l'aptitude du milieu poreux à laisser circuler le fluide à travers les pores dans le cas de la présence d'un gradient de pression.

Lorsque le milieu poreux ne contient qu'un seul liquide, la perméabilité absolue K, est donnée par la loi de H.Darcy [5].

$$K = \frac{-\left(\frac{Q}{S}\right).\mu}{\partial P / \partial x} \qquad \textbf{(I.4)}$$

$\frac{Q}{S}$: Vitesse de filtration (vitesse Darcienne) dans le milieu poreux ;

Q : Débit s'écoulant à travers le milieu poreux ;

S : Surface de la section droite ;

μ : Viscosité dynamique de pression dans le sens de l'écoulement.

$\frac{\partial P}{\partial x}$: Gradient de pression dans le sens de l'écoulement.

L'unité de la perméabilité est le m², mais elle est souvent exprimée en Darcy:

1 Darcy= 9.87×10^{-13} m².

.La perméabilité est déterminée expérimentalement en fonction des paramètres géométriques.

Le tableau (I.3) représente certaines valeurs moyennes de perméabilité de quelques matériaux [5]

SUBSTANCE	**PERMEABILITE**
Briques	$4{,}8\ 10^{-15}$ à $2{,}2\ 10^{-13}$
Cuir	$9{,}5\ 10^{-14}$ à $1{,}2\ 10^{-13}$
Poudre d'ardoise noire	$8{,}9\ 10^{-14}$ à $1{,}2\ 10^{-13}$
Terre	$2{,}9\ 10^{-13}$ à $1{,}4\ 10^{-11}$
Fibre de verre	$2{,}4\ 10^{-11}$ à $5{,}1\ 10^{-11}$
Sable	$2{,}0\ 10^{-11}$ à $1{,}8\ 10^{-08}$
Fibre à tisser	$3{,}8\ 10^{-09}$ à $1{,}0\ 10^{-08}$
Cigarette	$1{,}0$ à 10^{-09}

Tableau I.3 : Valeurs moyennes de perméabilité de quelques matériaux, O.Reynolds et **Dullien** [6,7]

I.4.4. La tortuosité

Dans un milieu poreux formé d'un empilement de grains solides, la vitesse réelle locale du fluide n'est pas tout à fait parallèle à la direction moyenne de l'écoulement du fait des obstacles constitués par la phase solide. Le fluide contourne les différentes particules s'opposant à son passage.

Le trajet suivi par un filet fluide est $\boldsymbol{Lm > L}$ où $\boldsymbol{L}$ est la longueur du milieu poreux.

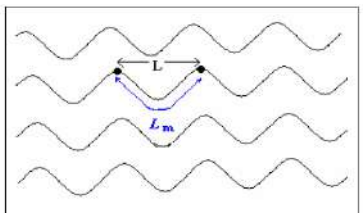


FIG I.6: Définition schématique de la tortuosité

On appelle tortuosité le rapport entre la longueur moyenne du chemin parcouru par une particule fluide et la longueur de l'échantillon.

$$\tau = \frac{L_m}{L} \qquad \textbf{(I.5)}$$

Dans le cas des milieux poreux constitués d'empilement de particules sphériques, la tortuosité varie peu et reste sensiblement égale à $\pi/2$.

I.4.5. La surface spécifique

La surface spécifique est définie comme l'aire totale des vides rapportée à l'unité de volume, soit:

$$A_S = \frac{\text{Aire totale des vides}}{\text{Volume totale du milieu}} \qquad \textbf{(I.6)}$$

Ce paramètre sert d'élément comparatif pour différents milieux poreux de volume Total V.

I.4.6. Conductivité thermique effective

Vu la complexité de la structure des milieux poreux ainsi que la présence des différentes phases (solide et fluide), la modélisation du transfert de chaleur à travers les milieux poreux nécessite l'introduction de la notion de conductivité thermique effective ke. En effet, les phases solides et fluide présentes dans le milieu poreux contribuent généralement avec des proportions différentes au mode de conduction (le plus souvent $k\ solide > k\ fluide$).

Cette conductivité effective dépend de la porosité et des conductivités thermiques des Phases solides ks et fluide $k\,f$.

De manière générale, il n'existe pas de modèles exacts de conductivité thermique effective qui peuvent être appliquées aux cas pratiques d'écoulement dans les milieux poreux. Les modèles existants sont plutôt des modèles approchés construits pour des géométries simples en utilisant des hypothèses simplificatrices et en se basant sur des données expérimentales. Les modèles proposés sont tous des combinaisons pondérées des modèles série et parallèles basés sur l'analogie électrique.

- Dans le modèle série, le flux de chaleur traverse successivement les phases solide et fluide. La résistance thermique du milieu est alors égale à la somme des résistances thermiques dans chacune des phases; (Fig. I.7).

$$\frac{1}{k_C} = \frac{\varepsilon}{k_f} + \frac{1-\varepsilon}{k_s} \qquad \textbf{(I.7)}$$

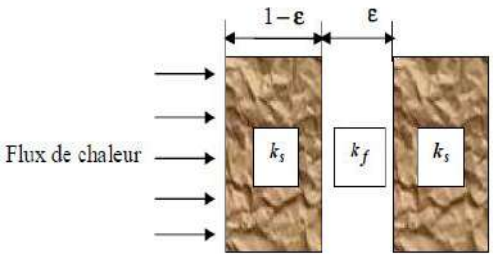


FIG I.7 : Modèle série de la conductivité thermique effective

- Dans le modèle parallèle, le flux de chaleur traverse en même temps les deux phases qui sont parallèles. La conductivité effective est égale à la somme des conductivités thermiques dans chacune des phases; (Fig. I.8).

$$k_e = (1-\varepsilon)k_S + \varepsilon k_f \qquad \textbf{(I.8)}$$

La conductivité thermique effective est toujours comprise entre celle du fluide et celle du solide.

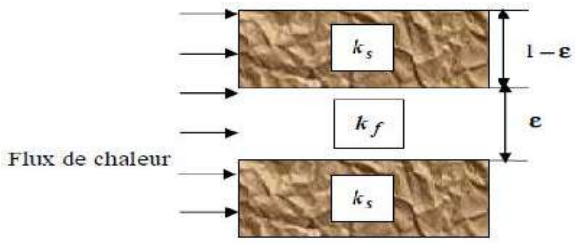


FIG I.8 : Modèle parallèle de la conductivité thermique effective

❖ **Conductivité thermique équivalente**

La conductivité équivalente est une fonction complexe des conductivités du solide et du fluide. En général, on ne pourrait pas évaluer la valeur exacte de la conductivité. Le moyen efficace est la mesure expérimentale dans les conditions d'utilisation en régime permanent. Pour plus de détail sur l'évaluation de la conductivité, nous pouvons citer les travaux de, Tobbal et Bennacer [8], Beji [9].

I.4.7. Modèles d'écoulement en milieux poreux

Les lois des écoulements en milieu poreux ne constituent que des approximations. On s'intéresse en général qu'aux phénomènes à l'échelle macroscopique. Plusieurs lois phénoménales sont utilisées.

I.5. La loi de Darcy

Établie par Darcy sur la base d'observations expérimentales, c'est une relation empirique qui décrit macroscopiquement les écoulements dans les milieux poreux, moyennant la vitesse de filtration.

$$\vec{V} = \frac{k}{\nu}\left(-\frac{\vec{\nabla} P}{\rho}\right) + \vec{g} \qquad \textbf{(I.9)}$$

Où k est la perméabilité et ν la viscosité cinématique du fluide. L'équation de Darcy a été vérifiée pour les écoulements de faible vitesse. La valeur du nombre de Reynolds est utilisée comme critère pour caractériser la transition d'un régime d'écoulement laminaire à un régime turbulent. Pour cela on a défini un nombre de Reynolds de pore pour les écoulements en milieu poreux. En définissant d comme longueur caractéristique qui représente la dimension caractéristique des pores, le nombre de Reynolds s'écrit :

$$R_e = V.\frac{d}{\nu} \qquad \textbf{(I.10)}$$

En termes de détermination de d, Collins a proposé l'expression $d = \sqrt{k/\varepsilon}$ alors que Ward (1964) a plutôt suggéré que $d = \sqrt{k}$ quelle que soit la porosité.

I.5.1. Formulation de Forchheimer

La formulation de Darcy-Forchheimer (1950) la plus couramment utilisée, pour décrire l'écoulement d'un fluide incompressible à travers un milieu poreux homogène et isotrope, en régime stationnaire et en présence de pesanteur, est la suivante :

$$\nabla P = \rho g - \frac{\mu}{k} V + \frac{b\rho}{\sqrt{k}} |V| V \qquad \textbf{(I.11)}$$

où **b** est un paramètre caractéristique de la géométrie du milieu poreux, appelé paramètre de Forchheimer. Résultant de la prise de moyenne sous fortes hypothèses, cette formulation introduit un terme convectif qui exprime la contribution inertielle devenant importante avec les **(** Re **)** croissant.

Cette loi empirique est connue sous le nom de formulation de Darcy-Brinkman, fortement utile pour le cas des hautes porosités. Le premier terme de droite de l'équation ci dessus contenant la viscosité μ est le terme de Darcy et le deuxième contenant la viscosité effective μ_{eff} est appelé le terme de Brinkman. La difficulté dans l'utilisation de ce modèle réside dans l'évaluation de la viscosité équivalente du milieu μ_{eff}. En effet cette grandeur est fonction non seulement de la porosité du milieu mais aussi de sa géométrie (tortuosité). Brinkman a assimilé la viscosité équivalente du milieu à celle du fluide($\mu_{eff} \approx \mu$). Cette approximation a été prouvée expérimentalement et elle est en accord avec les travaux de Neale et Nader [10] et Brinkman et Viskanta [11]. Le modèle de Brinkman permet ainsi d'imposer la condition de non glissement au champ de vitesse de filtration, au niveau des parois imperméables.

I.5.2. Modèle général

On généralise les trois dernières équations en introduisant un terme transitoire et le terme convectif $(V\ \nabla)V$ ce qui conduit à l'équation suivante :

$$\frac{\rho}{\varepsilon}\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\rho}{\varepsilon^2}(V\ \nabla)V = -\nabla P + \rho g - \frac{\mu}{k} V + \frac{b\rho}{\sqrt{k}} |V| V + \mu_{eff} \nabla^2 V \qquad \textbf{(I.12)}$$

Cette équation est équivalente à l'équation de Navier Stokes issue du bilan de quantité de mouvement en milieu fluide. Il faut également noter que la complexité d'un écoulement en

milieu poreux peut être le résultat des effets d'inertie et de viscosité, et d'une variation importante de la porosité au niveau des parois.

I.6. Mousse Métallique

Les structures tridimensionnelles cellulaires à forte porosité telles que les mousses métalliques permettent d'obtenir des gains substantiels en terme d'intensification de transferts de chaleur, de mélanges et de réactions chimiques. Ces matériaux peuvent assurer simultanément un rôle mécanique, thermique, catalytique… cet ensemble de qualité conduit à des réductions importantes de coûts, de masse et offrent ainsi des opportunités d'applications dans des domaines aussi variés que nombreux: automobile, spatial, piles à combustible, génie chimique, etc. Lu, Stone et al. [12], Calmidi and Mahajan [13], Zhu, Hobdel et al. [14], Banhart [15], Boomsma and Poulikakos [16]. Les travaux concernant les matériaux fortement poreux sont encore relativement peu nombreux et récents Madani [17], Topin et al. [18] Vicente [19], Du fait de leur nouveauté, de leur structure particulière, et de la variabilité de texture liée aux différentes voies d'élaboration, les mousses métalliques sont encore mal caractérisées du point de vue des propriétés de transport. L'évaluation précise des propriétés thermophysiques et de transferts devient critique pour diverses applications. L'émergence récente d'utilisation potentielle des mousses dans les technologies nouvelles motive la mise en place d'outils de caractérisations performants.

L'étude des transferts de chaleur et des écoulements dans ce type matériau la situation est plus complexe. La structure des mousses ne permet pas d'étude analytique exacte. L'absence d'outils morphologiques permettant de caractériser la microstructure réelle des mousses conduit dans une majorité d'études à idéaliser les mousses (ensemble de brins aléatoirement orientés, cellules périodiques, réseau cubique Du Plessis, Montillet et al. [20], réseau hexagonal Calmidi and Mahajan [13], tetrakaléidon Boomsma, Poulikakos et al. [21]. Nombre de résultats montrent que ce type d'approche est souvent insuffisant pour identifier les paramètres géométriques influents. Du point de vue des écoulements, de gros efforts aussi bien expérimentaux que théoriques sont effectués depuis une quinzaine d'années pour approfondir les connaissances.

Il existe de nombreux procédés d'élaboration de mousses solides Vilar and Coeuret [22], Ashby, Evans et al. [23], Banhart [15]. L'élaboration de méthodes de fabrication des mousses métalliques pour des applications ciblées est un sujet de recherche à part entière JIMIC-4 [24]. Les méthodes typiques de production de ce matériau sont les suivantes :

- injection de gaz ou utilisation d'un agent moussant dans un métal liquide,
- solidification eutectique solide-gaz,
- métallisation d'une mousse organique (électrodéposition par exemple),
- métallurgie des poudres (compactage/ frittage de poudre métalliques…),
- moulage sur des structures organiques ou des sels (frittés de grains).
- Réplication sur mousse à cellules ouvertes de polyuréthane déposé sur le métal, [25]

Il existe aussi des mousses « lotus-type foam » pour lesquelles on oriente la croissance des bulles dans une direction et dont la topologie est plutôt représentative d'un réseau de tubes parallèles.

I.6.1. Applications

Nous citons quelques applications où l'utilisation du matériau mousse métallique apporte une valeur ajoutée certaine aux systèmes qui l'utilisent. Compte tenu de la relative jeunesse du matériau, la recherche de secteur potentiel d'utilisation du matériau est un sujet de recherche à part entière qui contribue chaque jour à l'élargissement du champ applicatif des « mousses métalliques ». Par conséquent, la liste des applications présentées ci-dessous ne saurait être exhaustive.

I.6.2. Electrode poreuse

L'utilisation de mousse métallique comme électrode de batterie est l'une des premières applications historiques (Ni-MH). Plus récemment, l'utilisation des électrodes en mousses métalliques a été étendue aux piles à combustibles. La distribution des réactifs gazeux et l'évacuation de l'eau formée sont des éléments clés du fonctionnement des piles à combustible de type « piles à membranes échangeuses de protons » (PEMFC). L'emploi de mousses métalliques à pores ouverts, en remplacement des classiques structures à canaux, constitue une alternative prometteuse. En effet, leur porosité élevée favorise l'accès des gaz aux électrodes (surface accessible supérieure à 90% au lieu de 60 à 70% pour les canaux), autorisant a priori une utilisation optimale des surfaces catalysées. Leur emploi est également susceptible de faciliter l'intégration de certaines fonctions telles que le refroidissement (fonction échangeur de chaleur).

Des tests exploratoires ont confirmé l'intérêt des mousses métalliques qui, dans des conditions similaires, ont permis d'atteindre pendant quelques dizaines d'heures de fonctionnement des

performances supérieures à celles obtenues avec des distributeurs à canaux Riva and Poirot-Crouveziez [26].

I.6.3. Echangeur de chaleur

Les échangeurs compacts permettent de réduire l'encombrement, le poids et le coût des dispositifs d'échange thermique. Ils prennent une place de plus en plus importante dans tous les domaines de l'industrie et en particulier dans les secteurs de l'électronique, de l'automobile, de l'aéronautique et de la cryogénie. La conductivité thermique du métal, les propriétés de mélangeur de la structure Ferrouillat, Tochon et al. [27], un rapport perte de pression / surface d'échange performant, sont autant d'atouts pour ce type d'application Tadrist, Miscevic et al. [28].



FIG I.9: Mousse métallique mise en forme pour intégration dans un échangeur de chaleur de type « tube coaxiaux ».

I.7. Conclusion

Dans ce chapitre, les notions de base et les principales caractéristiques se rapportant aux milieux poreux et leurs applications dans divers domaines et les modèles d'équations ainsi que les régimes d'écoulement ont été examinés. Le prochain chapitre sera consacré à une étude bibliographique portant la double diffusive dans les milieux poreux afin de situer notre travail.

Chapitre II :

Formulation Mathématique

Formulation Mathématique

II.1. Introduction

Ce chapitre qui est porté sur la formulation mathématique englobe deux sections indissociables, la première est consacrée pour le phénomène de transfert de chaleur et de masse, et une deuxième section qui a une importance spectaculaire dans cette étude qui est la formulation mathématique.

Dans un premier temps on va donner quelques notions fondamentales sur le transfert de masse et son couplage avec la convection thermique. Nous présentons par la suite notre modèle mathématique et la méthode numérique de résolution.

Nous nous intéressons à la convection double diffusive générée dans une cavité cubique, constituée d'un milieu poreux avec un fluide. Avec des conditions limites classiques (conditions de Dirichlet en température et concentration sur les parois verticales), et en régime stationnaire.

II.1.2. phénomènes de transferts

II.1.3. Définitions [29]

II.1.3.1. La chaleur:

Pour le cours "Phénomènes de transfert" nous disons simplement que c'est une forme de l'énergie. Disons aussi que, lorsqu'on introduit une quantité de chaleur dans un corps, la température de ce dernier augmente. Dans le cas d'un changement de phase, une partie de cette chaleur est utilisée pour satisfaire les besoins thermiques liés à ce phénomène (fusion, évaporation, etc…)

II.1.3.2. La température:

C'est la manifestation mesurable de la chaleur stockée. On dit aussi que la température est liée à la moyenne d'énergie cinétique due au mouvement des atomes et molécules du corps par la relation:

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{3}{2} k_B T \qquad \textbf{(II.1)}$$

II.1.3.3. La conservation de la chaleur:

Une fois que l'énergie a été transformée en chaleur, cette dernière se "conserve" lors des différents transferts qu'elle subit.

$Q + \Delta Q = Q'$ **(II.2)**

II.1.3.4. La chaleur spécifique:

Cette relation fondamentale

$\Delta Q = m \cdot cp \cdot \Delta T$ **(II.3)**

Exprime que, si un corps de masse m stocke ΔQ joules, sa température s'élèvera de ΔT. Cp, la chaleur spécifique (en J/(kg K)) est une propriété physique des matériaux et elle dépend généralement de la température. Elle caractérise sa capacité à emmagasiner de la chaleur. La chaleur spécifique d'une substance est en fonction de sa structure moléculaire et de sa phase.

II.1.3.5. L'enthalpie:

On appelle "enthalpie" la quantité d'énergie contenue dans l'unité de masse d'un corps porté d'une température de référence To à la température T. Elle contient d'éventuelles chaleurs de transformation survenues dans l'intervalle To - T. [H(To)]= 0 ;

To = 0°C ou 20°C selon les tables]:

$\Delta H = \Delta Q/m$ [J/kg]. **(II.4)**

II.1.3.6. Les transferts de chaleur:

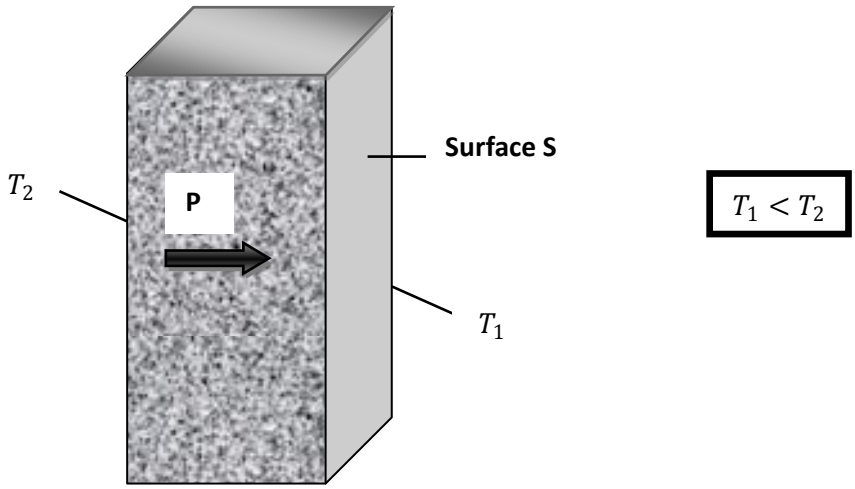


FIG II.1: Les transferts de chaleur

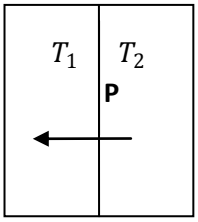
Lorsque deux points dans l'espace sont à des températures différentes (T2 > T1), il y a systématiquement transfert de chaleur de T2 vers T1 (c'est le deuxième principe de la thermodynamique

$dS = dS_1 + dS_2$ **(II.5)**

$$dS = \frac{dQ}{T_1} + \frac{-dQ}{T_2} = dQ\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) \quad \textbf{(II.6)}$$

$$\mathrm{dS} = \mathrm{dQ}\left(\frac{\mathrm{T_2}}{\mathrm{T_1T_2}} - \frac{\mathrm{T_1}}{\mathrm{T_1T_2}}\right) = \mathrm{dQ}\frac{(\mathrm{T_2}-\mathrm{T_1})}{\mathrm{T_1T_2}} \quad \textbf{(II.7)}$$

$$\mathrm{dS} \geq 0 \Longrightarrow \mathrm{T_2} > \mathrm{T_1} \quad \textbf{(II.8)}$$



Le flux est proportionnel à ΔT et à la section de passage.

P = h S (T1 - T2) [W] **(II.9)**

h : s'interprète comme un coefficient d'échange de chaleur. On doit souligner ici que la relation dans le chapitre intitulé "Définitions et unités" n'est valable qu'au premier ordre, car h est, le plus souvent, en fonction de la température et du matériau. D'une manière conventionnelle, on donnera une valeur positive au sens du flux qui va de T1 vers T2 lorsque T1 > T2.

Pour le transfert de chaleur, on utilise très souvent la densité de flux, définie par

$$q = \frac{p}{s} \quad [w/m^2] \quad \textbf{(II.10)}$$

On peut aussi parler de transport de chaleur lors du déplacement d'un fluide chaud.

Un débit massique $\dot{m}$ (kg / s) d'un fluide à la température T correspond à un débit de chaleur, et donc à un flux:

$$p = \dot{m}C_P T \left[\frac{kg}{s}\frac{J}{kg\ k}k\right] = \left[\frac{J}{S}\right] = [w] \quad \textbf{(II.11)}$$

II.1.4. Transfert de masse, diffusion et transport

Du point de vue phénoménologique les processus de diffusion, et plus généralement de migration atomique, peuvent être abordés de deux façons :

1) d'une manière assez formelle, à la façon de nombreuses lois d'écoulement en physique,

2) d'une manière beaucoup mieux fondée physiquement grâce à la thermodynamique des processus irréversibles qui justifie (on précise le degré d'approximation) des expressions posées naturellement suivant la démarche.

II.1.4.1. Flux de particules. Equation de Fick.

Plaçons-nous dans un système unidirectionnel et considérons le flux de particules d'une certaine espèce. Les particules peuvent être des molécules, des atomes ou des ions, des défauts ponctuels, des électrons libres ou des trous électroniques, etc.… Soit c(x, t) leur

concentration, exprimée en nombre de particules ou de moles par unité de volume.

En présence d'un gradient de concentration $\delta c / \delta x$, on admet qu'il s'établît un flux de particules dans le sens descendant du gradient, et que ce flux est proportionnel au gradient correspondant :

$$J = -D \frac{\partial C}{\partial X} \quad \textbf{(II.12)}$$

D est appelé coefficient de diffusion, ou diffusivité.

Le flux est exprimé en nombre de particules ou de moles traversant l'unité d'aire par unité de temps. Il s'ensuit que D a pour dimensions $L2T-1$. Il est généralement exprimé en $cm2s-1$ ou en $m2s-1$ .Cette loi, dite loi de Fick, est formellement identique à la loi de Fourier pour l'écoulement de la chaleur :

$$q = -K \frac{dT}{dx} \quad \textbf{(II.13)}$$

Où k est la conductibilité thermique.

La loi de Finck se généralise sans peine à trois dimensions :

$$J = -D\nabla c \quad \textbf{(II.14)}$$

D est alors un tenseur de deuxième rang.

En fait l'écoulement de particules dans une direction donnée peut avoir deux origines : l'une est bien le gradient de concentration ; mais l'autre est l'action d'une force extérieure, ou force de transport, sous l'effet de laquelle les particules se déplacent avec une certaine vitesse moyenne *v* donnant ainsi naissance à un flux *v* c. D'où l'expression générale :

$$J = -D \frac{\partial C}{\partial X} + (v)c \quad \textbf{(II.15)}$$

(1) En toute rigueur, *J* ainsi défini est une densité de flux mais on a coutume de l'appeler flux.

Nous qualifierons le premier terme du second membre de flux difusionnel proprement dit, et le second de terme de transport. (La terminologie n'est pas fixée ; on utilise indifféremment les termes transport, migration, entraînement, ou même « drift ».) Il s'agit là d'un »e distinction plus commode que profonde comme on le montre en thermodynamique des processus irréversibles, mais qui a l'intérêt de bien correspondre aux conditions expérimentales. Nous préciserons plus loin la nature des « forces extérieures ». Remarquons simplement que le second terme est formellement analogue au premier (proportionnalité flux-gradient), cette force pouvant être un gradient (champ électrique et loi d'Ohm, par exemple).

II.1.4.2. Régime non permanent

Les équations (II.15), (II.12) et leur expression tridimensionnelle ne sont guère utilisables qu'en régime permanent, c'est-à-dire lorsque le flux ne dépend pas du temps, exemple :

diffusion d'un gaz à travers une paroi ; il s'établit une distribution, $c(x)$, $\forall\, t$, et

$$J = -D(dc / dx) = Cte \qquad \textbf{(II.16)}$$

En régime non permanent, c'est-à-dire lorsque le flux en chaque point varie avec le temps, il faut compléter l'équation de Fick par une équation de bilan. Pour des espèces conservatives, c'est l'équation de continuité

$$\frac{\partial J}{\partial x} = - \frac{\partial c}{\partial t} \qquad \textbf{(II.17)}$$

Qui se démontre très simplement : Considérons (FIG.II.2) un cylindre parallèle à la direction de diffusion et de section unité, soit un petit volume limité par les plans P et P' d'abscisses x, $x + dx$ à travers lesquels les flux de particules dirigés de gauche à droite valent respectivement $J(x)$ et $J(x + dx)$. La quantité de matière accumulée pendant le temps dt dans le cylindre limité par P et P'vaut :

$J(x)\ J(x\ dx)\ dt\ J\ dxdt$

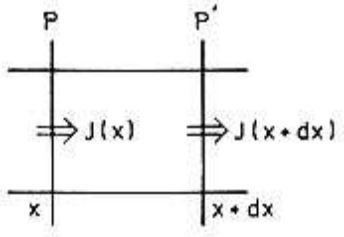


FIG II.2: Diffusion unidirectionnelle en régime transitoire

La quantité de matière accumulée pendant le temps dt dans le cylindre limité par P et P' vaut :

$$[J(x) - J(x\ dx)]\ dt = -\frac{\partial J}{\partial x} dxdt$$

Par application de la formule des accroissements finis. Cette quantité est égale à la variation du nombre de particules dans le volume l dx, soit $[c(t + dt) - c(t)]dx = \frac{\delta c}{\delta t}\, dtdx$.

En égalant les deux expressions :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial X} \qquad \textbf{(II.18)}$$

Combinons (II.11) et (II.13) :

L'équation générale de la diffusion est une équation aux dérivées partielles du second ordre. Elle ne peut être résolue analytiquement tant que D et *v* dépendent de la concentration, et donc de x et t. Mais elle se simplifie notablement si D et *v* sont indépendants de la concentration d'un cas réalisé notamment avec des systèmes qui restent chimiquement homogènes (autodiffusion, par exemple). L'équation (II.19) s'écrit alors :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \langle v \rangle \frac{\partial c}{\partial x} \qquad \textbf{(II.19)}$$

En l'absence de terme de transport, elle se réduit à

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial X^2} \qquad \textbf{(II.20)}$$

Cette équation est souvent qualifiée improprement de seconde loi de Finck. Il existe des expressions analytiques pour les solutions des équations (II.19) et (II.20), différentes suivant les conditions initiales et aux limites du problème. Ces solutions expriment la forme du profil de diffusion c(x, t) et permettent de calculer le coefficient de diffusion D à partir des profils expérimentaux.

II.1.5.Convection naturelle, forcée et mixte

Le terme convection est utilisé pour définir les mouvements dus à l'agitation thermique engendrant des différences de densités entre les molécules d'un fluide. Un fluide est le terme désignant un liquide ou un gaz : corps pur ou mélange dont les molécules ont assez de liberté pour se mouvoir les une par rapports aux autres. On parle de convection naturelle lorsqu'il s'agit d'agitations induites dans le fluide par des forces (de volume ou de surface) agissant à l'intérieur du volume étudié. Les mouvements générés sont dus aux variations locales de la masse volumique du fluide en fonction de la température et/ou de la concentration pour le cas de la convection naturelle d'origine thermique et/ou massique. La convection forcée concerne les mouvements convectifs qui apparaissent sous l'action d'une source externe, telle qu'une pompe ou le déplacement d'un objet dans le fluide, i.e. les mouvements induits par une différence de pression sont des mouvements de convection forcée où l'écoulement persiste même en l'absence de gradient de température. Quand la convection est due aux effets couplés cités précédemment, on parle alors de convection mixte.[30]

II.2.Le Transfert de masse par diffusion moléculaire.

Le transfert de masse par diffusion moléculaire est analogue à la transmission de chaleur par conduction. Il peut avoir lieu dans un fluide au repos mais également dans un fluide en écoulement. Si l'on considère par exemple une cavité contenant deux gaz A et B à la même température, même pression et séparés initialement par une cloison (Fig. II.1):

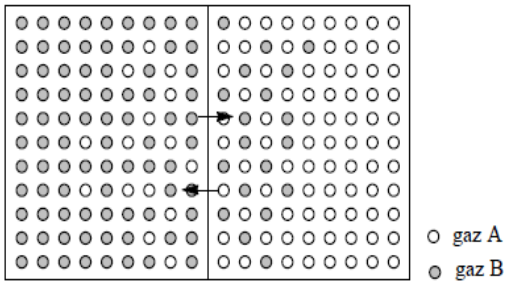


FIG II.3 : transfert de masse par diffusion dans un mélange gazeux.

Un transfert de masse s'effectue, dés qu'on met ces deux gaz en contact, dans le sens décroissant de la concentration.

En régime permanent, la concentration en chaque point ne varie pas avec le temps, et suivant la loi de Fick:

$$\vec{m}_A = -D_{AB}\,\overrightarrow{grad C_A} \qquad \textbf{(II.21)}$$

où $\overrightarrow{\dot{m}}$ est la densité de flux massique en kg/s m^2.

Cette équation est appelé la loi de Fick et relie la densité du flux massique $\dot{m}_A$ échangé par diffusion solutale au gradient de concentration et à la diffusivité massique D_{AB} du composant A dans B.

Remarquons que la loi de Fick est analogue à celle de Fourrier qui détermine la densité du flux thermique transféré par conduction dans un milieu homogène de conductivité λ:

$$\vec{q} = -\lambda\,\vec{grad}\,T \qquad \textbf{(II.22)}$$

$\vec{q}$ est la densité du flux thermique exprimée en W/m^2

λ: est la conductivité thermique exprimée en W/m.K

T est la température

La diffusion solutale peut être influencée par des paramètres extérieurs, tel que les gradients de température (effets de Serre, effet Du four), les gradients de pression où les réactions chimiques.

Dans notre étude, nous supposerons que ces effets extérieurs sont négligeables et que la diffusion solutale ne dépend que du gradient de concentration.

En diffusion solutale, on travaille généralement sur le concept de concentration d'un élément e dans un mélange. Cette concentration représente la masse de l'élément e dans le mélange de volume V_d et elle est exprimée en kg de solvant (l'élément e) par m^3 de solution (le mélange).

$$C_e = \frac{m_e}{V_d} = \rho_e \qquad \textbf{(II.23)}$$

La densité de flux massique locale d'un élément e dans un mélange s'exprime.

$$\overrightarrow{\dot{m}}_e = \rho_e \vec{V}_e \qquad \textbf{(II.24)}$$

Où V_e représente la vitesse des particules du composant e dans un système de coordonnées fixes.

La vitesse moyenne massique $\vec{V}$ est alors définie comme le rapport de la somme des flux massiques élémentaires à la densité totale du mélange.

$$\rho.\vec{V} = \overrightarrow{\dot{m}} = \sum \overrightarrow{\dot{m}} = \sum \rho_e \vec{V}_e \qquad \textbf{(II.25)}$$

$$\vec{V} = \frac{1}{\rho} \sum \rho_e \vec{V} \qquad \textbf{(II.26)}$$

On définit alors le flux massique de l'élément e relativement par rapport à un repère se déplaçant à la vitesse massique moyenne par:

$$\overrightarrow{\dot{M}}_e = \rho_e \left(\vec{V}_e - \vec{V} \right) \qquad \textbf{(II.27)}$$

Si $\overrightarrow{\dot{m}}$ est le flux absolu de l'élément e, $\overrightarrow{\dot{M}}_e$ est le flux diffus; il représente le mouvement de l'élément relativement au mouvement moyen du mélange et on peut écrire:

$$\overrightarrow{\dot{m}}_e = \overrightarrow{\dot{M}}_e + \rho_e \vec{V} \qquad \textbf{(II.28)}$$

L'équation (II.27) nous montre qu'il y a deux contributions pour le flux absolu de l'élément e, l'une due à la diffusion (mouvement de l'élément e par rapport au mouvement moyen du mélange) et l'autre due au mouvement moyen du mélange.

II.2.1. Equations de la diffusion massique

L'équation de conservation de la masse globale du mélange s'écrit:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\left(\rho_e \vec{V}\right) = 0 \qquad \textbf{(II.29)}$$

soit, encore, en distinguant la contribution de chacun des éléments: L'équation relative à l'ensemble des éléments du mélange s'écrit:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\left(\sum \rho_e \vec{V}_e\right) = 0 \qquad \textbf{(II.30)}$$

L'équation de la conservation de la masse pour chaque élément e du mélange sur un volume de contrôle est:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\left(\rho_e\right) = 0 \qquad \textbf{(II.31)}$$

En tenant compte de l'équation (II.28), l'équation (II.31) s'écrira:

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla\left(\rho_e \vec{V}\right) = -\nabla \overrightarrow{\dot{M}}_e \qquad \textbf{(II.32)}$$

En remplaçant le flux massique M_e par son expression donnée par la loi de Finck (II.21) et en introduisant le concept de la concentration défini par l'équation (II.23), on obtient l'équation de la diffusion de chaque constituant e du mélange.

$$\frac{\partial C_e}{\partial t} + \vec{V}.\nabla C_e = \mathrm{D}\,\Delta\, C_e \qquad \textbf{(II.33)}$$

Dans notre étude le mélange ne contient qu'un seul élément, dans tout ce qui va suivre on omettra l'indice e pour la concentration, on écrira donc l'équation (II.34) comme suit:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{V}.\nabla C = D\Delta C \qquad \textbf{(II.34)}$$

Lorsque l'écoulement du fluide est assez faible pour contribuer au transfert de masse, L'équation (II.35) s'écrit sous la forme réduite suivante:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla T \qquad \textbf{(II.35)}$$

De même cette diffusivité est analogue à la conductivité thermique (exprimée en kj/kg.K), si on compare la loi de Finck (II.20) et la loi de Fourrier (II.21) donnant respectivement la densité du flux solutale et la densité du flux thermique.

II.3. Couplage avec la convection thermique.

Pour expliquer le comportement de deux écoulements dus simultanément à la diffusion thermique et à la diffusion solutale, prenons l'exemple simple d'une plaque plane verticale maintenu à une température Tp et baignant dans un fluide à une température T∞. si Tp> T∞, le fluide près de la paroi s'échauffe ce qui entraîne une diminution de sa densité, et par conséquent un mouvement ascendant s'établit le long de la paroi, du fait de la poussée d'Archimède. C'est le cas de la convection thermique pure. Supposons maintenant que ce même fluide contient un constituant d'une concentration C∞ et que la plaque est soumise à une concentration Cp de ce même constituant, Quatre cas peuvent intervenir suivant la nature du fluide et des conditions aux limites, en effet le comportement du fluide le long de la paroi

est influencé par le signe d'expansion solutale du constituant (soluté) βc et par le taux de concentration de la paroi par rapport à la solution. Selon ces paramètres les forces de volumes thermiques et solutales peuvent coopérer ou s'opposer suivant les configurations suivantes:

- Le cas où le fluide prés de la paroi est moins concentré (Cp<C∞), sa densité plus faible entraînerai un mouvement ascendant, cet écoulement solutale qui est du à un gradient de concentration coopère avec l'écoulement thermique si βc >0 et s'oppose si βc <0.
- Le cas où le fluide prés de la paroi est plus concentré (Cp>C∞), il devient plus lourd et descend le long de la plaque, cet écoulement se trouve confronté à l'écoulement thermique si βc >0 mais s'entraident si βc <0.

Les quatre configurations sont représentées sur la FIG II.4.

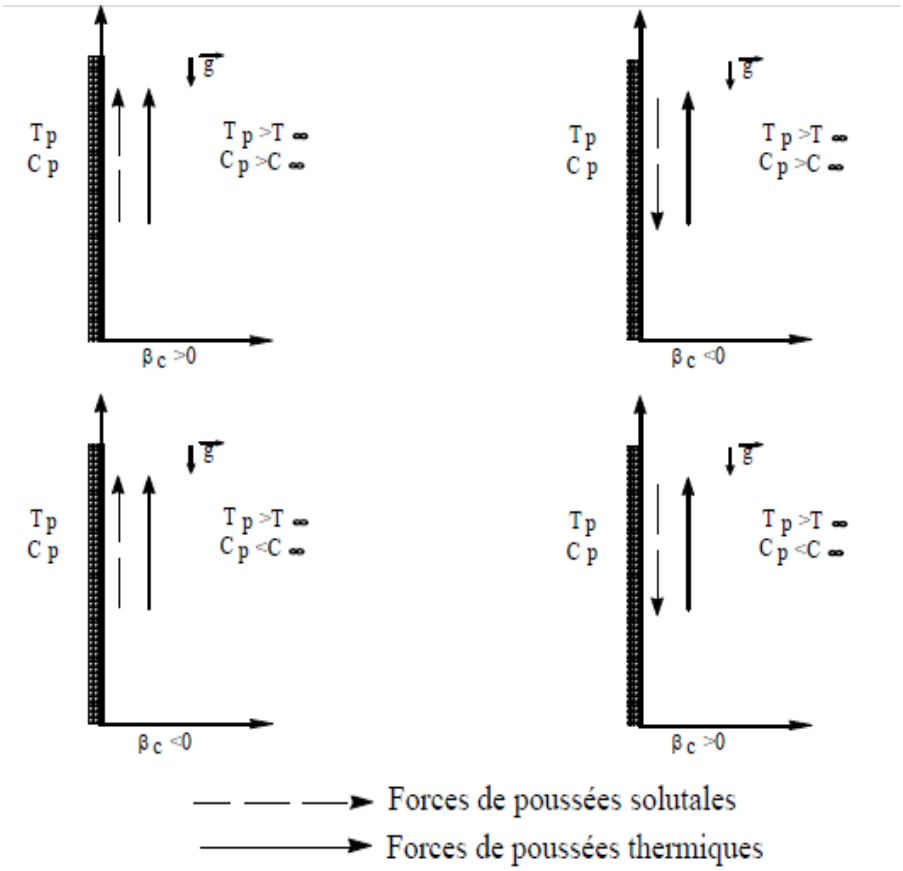


FIG II.4: Couplage thermosolutale le long d'une plaque verticale.

Bejan [30] présente des résultats concernant ce même type d'écoulement naturel d'un fluide le long d'une plaque verticale soumise à des gradients horizontaux de température et de concentration.

Nous considérons dans notre étude que le transfert de chaleur et de masse ne sont couplé que par la vitesse de l'écoulement et n'interagissent pas entre eux directement. Dans le cas contraire nous serons en présence de l'effet de Serre et Du four. Ce phénomène apparaît lorsque les gradients de température et de concentration sont élevés.

Dans ce chapitre nous décrivons et nous formulons le modèle physique, les hypothèses simplificatrices ainsi que les conditions aux limites appropriées.

II.4. Modèle Physique:

Le modèle physique étudié est représenté sur la FIG (II.5). Cavité cubique remplir par milieux poreuses disposées verticale .Les parois verticales sont soumises à des conditions de Dirichlet en température et concentration, respectivement T_1etC_1, T2etC_2 avec $T_2 < T_1$ et $C_2 < C_1$ tandis que les parois verticale sont maintenues adiabatiques et imperméables (conditions de Neuman).

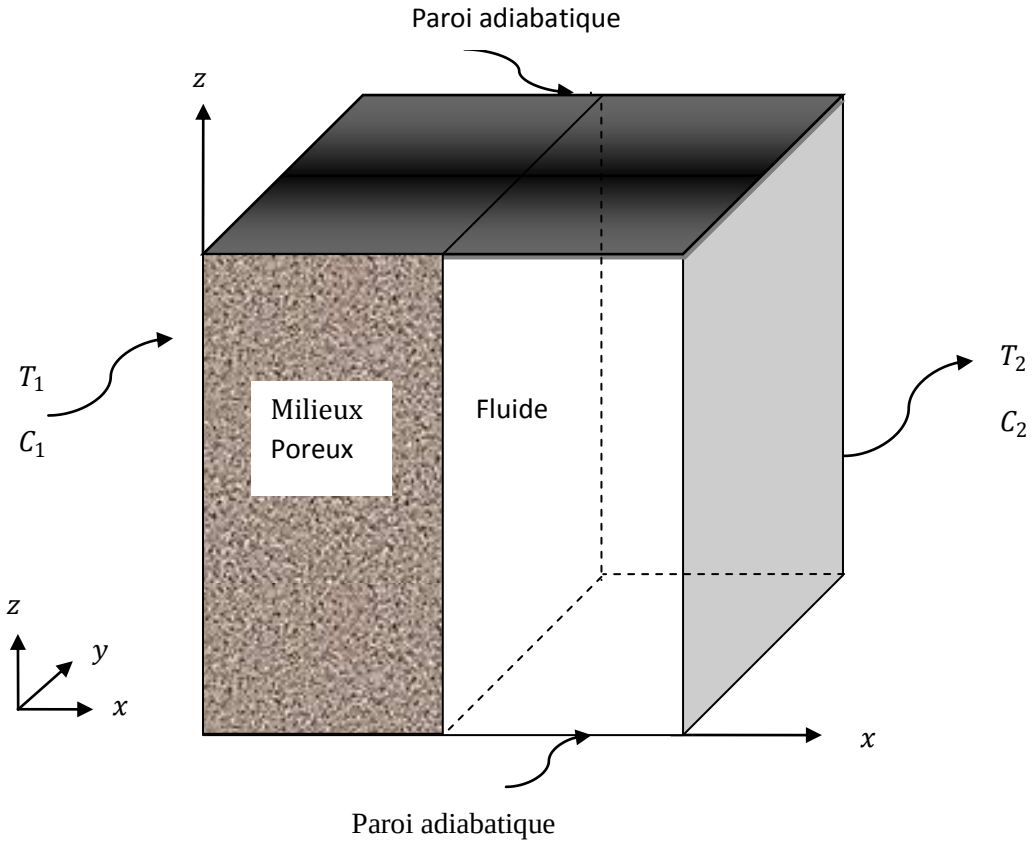


FIG II.5: modèle physique étudié

II.5. Hypothèses simplificatrice

Les hypothèses simplificatrices retenues dans notre étude des phénomènes de convection naturelle sont les suivantes:

- Convection naturelle laminaire tridimensionnelle.
- Régime stationnaire.
- Fluide newtonien et incompressible.

- La couche de milieu poreux est considérée homogène, isotrope, et saturée et en équilibre thermodynamique avec le fluide.
- Propriétés physiques constantes sauf la masse volumique qui varie dans le terme de poussée (hypothèse de Boussinesq).
- L'écoulement du fluide au sein de la cavité est laminaire, permanent tridimensionnel
- Milieu poreux et fluide en équilibre thermique.
- L'enceinte est remplie avec couches de milieu poreux, et un fluide.
- Les propriétés thermo physiques du fluide sont constantes dans la gamme de température et de concentration étudiée.
- La dissipation visqueuse et le terme de compression dans l'équation d'énergie sont négligés.
- Les effets Serre et Dufour sont négligeable.
- Pas de réaction chimique dans la matrice poreuse.
- Le mouvement du fluide dans les milieux poreux est régi par le modèle de Darcy-Brinkman.

Compte tenu des hypothèses émises précédemment, les équations classiques de conservation sont les suivantes :

II.6. Equations gouvernantes

Le phénomène physique est gouverné par un seul type d'équation qui est spécifique aux milieux poreux.

II.6.1. Equation de continuité

Dans chacune des couches du milieu poreux, l'équation de la continuité s'écrit de la manière suivante:

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = 0 \qquad \textbf{(II.36)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad \textbf{(II.37)}$$

II.6.2. Equation de conservation de la quantité de mouvement

L'écoulement est régi par le modèle de Darcy_brinkman.

$$\frac{\rho_f}{\varepsilon^2}\vec{v}.\vec{\nabla}.\vec{v} = -\vec{\nabla}p + \rho_f\vec{g} - \frac{\mu_f}{K}\vec{v} + \mu_{eff}\nabla^2\vec{v} \qquad \textbf{(II.38)}$$

II.6.3. Equation de l'énergie

$$(\rho.cp)_f\ \vec{v}.\vec{\nabla}T = k_{eff}\nabla^2 T \qquad \textbf{(II.39)}$$

II.6.4. Equation de concentration

$$\vec{v}.\vec{\nabla}C = D_{eff}\nabla^2 C \qquad \textbf{(II.40)}$$

Après projection des équations suivant les coordonnées cartésiennes (x, y, z) on obtient:

a)Equation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad \textbf{(II.41)}$$

b) Equation de conservation de la quantité de mouvement

- **Suivant x**

$$\rho_f\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\varepsilon^2\frac{\partial p}{\partial x} - \varepsilon^2\frac{\mu_f}{K}u + \varepsilon^2\mu_{eff}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \varepsilon^2\left(\beta_T\left(T - T_{ref}\right)\right) \qquad \textbf{(II.42)}$$

- **Suivant y**

$$\rho_f\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\varepsilon^2\frac{\partial p}{\partial y} - \varepsilon^2\frac{\mu_f}{K}v + \varepsilon^2\mu_{eff}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \varepsilon^2\left(\beta_T\left(T - T_{ref}\right)\right) \qquad \textbf{(II.43)}$$

- **Suivant *z***

$$\rho_f\left(u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\varepsilon^2\frac{\partial p}{\partial z} - \varepsilon^2\frac{\mu_f}{K}w + \varepsilon^2\mu_{eff}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \varepsilon^2\left(\beta_T\left(T - T_{ref}\right)\right)$$

(II.44)

c) Equation de l'énergie

$$(\rho.cp)_f\left[u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}\right]=k_{eff}\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] \quad \textbf{(II.45)}$$

d) Equation de concentration

$$\left[u\frac{\partial C}{\partial x}+v\frac{\partial C}{\partial y}+w\frac{\partial C}{\partial z}\right]=D_{eff}\left[\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right] \quad \textbf{(II.46)}$$

II.7. Conditions aux limites

Pour la résolution du problème physique, nous avons besoin d'associer aux équations mathématiques régissant le phénomène de convection naturelle, un nombre adéquat de conditions aux limites.

II.7.1. Conditions aux limites dynamiques

Pour faciliter la notation on a supprimé l'indice i, dans ce cas les conditions aux limites s'écrivent La condition d'adhérence aux parois impose des vitesse nulles.

$$x=0\ ,\begin{Bmatrix}0\le y\le L\\0\le z\le L\end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix}u(0,y,z)=0\\v(0,y,z)=0\\w(0,y,z)=0\end{Bmatrix} \quad \textbf{(II.47)}$$

$$y=0\ ,\begin{Bmatrix}0\le x\le L\\0\le z\le L\end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix}u(x,0,z)=0\\v(x,0,z)=0\\w(x,0,z)=0\end{Bmatrix} \quad \textbf{(II.48)}$$

$$z=0\ ,\begin{Bmatrix}0\le y\le L\\0\le x\le L\end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix}u(x,y,0)=0\\v(x,y,0)=0\\w(x,y,0)=0\end{Bmatrix} \quad \textbf{(II.49)}$$

$$x=L\ ,\begin{Bmatrix}0\le y\le L\\0\le z\le L\end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix}u(L,y,z)=0\\v(L,y,z)=0\\w(L,y,z)=0\end{Bmatrix} \quad \textbf{(II.50)}$$

$$y = L \ , \ \begin{Bmatrix} 0 \le x \le L \\ 0 \le z \le L \end{Bmatrix} \qquad \begin{cases} u(x, L, z) = 0 \\ v(x, L, z) = 0 \\ w(x, L, z) = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(II.51)}$$

$$z = L \ , \ \begin{Bmatrix} 0 \le x \le L \\ 0 \le z \le L \end{Bmatrix} \qquad \begin{cases} u(x, y, L) = 0 \\ v(x, y, L) = 0 \\ w(x, y, L) = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(II.52)}$$

II.7.2. Conditions aux limites Thermiques:

$$x = 0 \ , \begin{Bmatrix} 0 \le y \le L \\ 0 \le z \le L \end{Bmatrix} \qquad T(0, y, z) = T_1 \quad \text{imposé} \qquad \textbf{(II.53)}$$

$$x = L \ , \begin{Bmatrix} 0 \le y \le L \\ 0 \le z \le L \end{Bmatrix} \qquad T(L, y, z) = T_2 \quad \text{imposé} \qquad \textbf{(II.54)}$$

$$z = 0 \ , \begin{Bmatrix} 0 \le x \le L \\ 0 \le y \le L \end{Bmatrix} \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)\Big|_{(x,y,0)} = 0 \quad \text{adiabatique} \qquad \textbf{(II.55)}$$

$$z = L \ , \begin{Bmatrix} 0 \le x \le L \\ 0 \le y \le L \end{Bmatrix} \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)\Big|_{(x,y,L)} = 0 \quad \text{adiabatique} \qquad \textbf{(II.56)}$$

II.8. adimensionnement des équations:

En général, l'adimensionnement est une méthode qui peut permettre de réduire le nombre de paramètres influençant les phénomènes physiques et de généraliser les résultats à obtenir.

Afin de ne pas alourdir les équations gouvernantes par l'indice i, on a omis l'indice Ainsi en introduisant les grandeurs adimensionnelles suivantes:

L : Longueur de la cavité.

$\Delta T = T_1 - T_2$: Ecart de température de référence entre les parois.

$\Delta C = C_1 - C_2$: Ecart de Concentration de référence entre les parois.

α : Diffusivité thermique.

$$X=\frac{x}{L} \quad ; \quad Y=\frac{y}{L} \quad ; \quad Z=\frac{z}{L} \quad ; \quad U=\frac{uL}{\alpha} \quad ; \quad V=\frac{vL}{\alpha} \; ; \quad W=\frac{wL}{\alpha} \quad ; \theta=\frac{T-T_{ref}}{T_1-T_2} \quad ;$$

$$S=\frac{C-C_{ref}}{C_1-C_2} \; ; \; P=p\frac{L^2}{\left(\frac{\rho_f.\alpha^2}{\varepsilon^2}\right)}$$

Avec:

$$T_{ref}=\frac{T_1+T_2}{2} \quad ; \quad C_{ref}=\frac{C_1+C_2}{2}$$

Afin de ne pas trop encombrer l'écriture des équations les exposants (*) relatifs aux variable adimensionnelles seront omis par la suite.

Dans ces conditions, les équations gouvernantes adimensionnelles s'écrivent sous la forme:

II.8.a). Equation de continuité

$$\frac{\partial U}{\partial X}+\frac{\partial V}{\partial Y}+\frac{\partial W}{\partial Z}=0 \qquad \textbf{(II.57)}$$

II.8.b). Equation de conservation de la quantité de mouvement

- **Suivant x**

$$U\frac{\partial U}{\partial X}+V\frac{\partial U}{\partial Y}+W\frac{\partial U}{\partial Z}=-\frac{\partial P}{\partial X}-\frac{\Pr}{Da}.U+Rv\,\Pr.\left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial Z^2}\right) \qquad \textbf{(II.58)}$$

- **Suivant y**

$$U\frac{\partial V}{\partial X}+V\frac{\partial V}{\partial Y}+W\frac{\partial V}{\partial Z}=-\frac{\partial P}{\partial Y}-\frac{\Pr}{Da}.U+Rv\,\Pr.\left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial Z^2}\right) \qquad \textbf{(II.59)}$$

- **Suivant z**

$$U\frac{\partial W}{\partial X}+V\frac{\partial W}{\partial Y}+W\frac{\partial W}{\partial Z}=-\frac{\partial P}{\partial Z}-\frac{\Pr}{Da}.U+Rv\,\Pr.\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial Z^2}\right)$$

(II.60)

II.8.c). Equation de l'énergie

$$U\frac{\partial\theta}{\partial X}+V\frac{\partial\theta}{\partial Y}+W\frac{\partial\theta}{\partial Z}=Rk.\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial Z^2}\right) \quad \textbf{(II.61)}$$

II.8.d). Equation de concentration

$$U\frac{\partial S}{\partial X}+V\frac{\partial S}{\partial Y}+W\frac{\partial S}{\partial Z}=1/Le.\left(\frac{\partial^2 S}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 S}{\partial Z^2}\right) \quad \textbf{(II.62)}$$

II.9. Conditions aux limites adimensionnelles:

Les conditions dynamiques, thermiques et solutales sont :

$$\text{Pour } Z=0,\ \begin{Bmatrix}0\le x\le L\\0\le y\le L\end{Bmatrix} \quad U=V=W=0 \qquad \left.\frac{\partial\theta}{\partial Z}\right|=0 \qquad \left.\frac{\partial S}{\partial Z}\right|=0 \quad \textbf{(II.63)}$$

$$\text{Pour } Z=L,\ \begin{Bmatrix}0\le x\le L\\0\le y\le L\end{Bmatrix} \quad U=V=W=0 \qquad \left.\frac{\partial\theta}{\partial Y}\right|=0 \qquad \left.\frac{\partial S}{\partial Y}\right|=0 \quad \textbf{(II.64)}$$

$$\text{Pour } X=0,\ \begin{Bmatrix}0\le y\le L\\0\le z\le L\end{Bmatrix} \quad U=V=W=0 \qquad \theta=0.5 \qquad S=0.5 \quad \textbf{(II.65)}$$

$$\text{Pour } X=L,\ \begin{Bmatrix}0\le y\le L\\0\le z\le L\end{Bmatrix} \quad U=V=W=0 \qquad \theta=-0.5 \qquad S=-0.5 \quad \textbf{(II.66)}$$

II.10. Conclusion:

Une fois les équations régissant le problème posé, avec les conditions aux limites associées, et mises sous leurs formes adimensionnelles, et étant donné leur présentation sous forme d'équations aux dérivées partielles ne peuvent prétendre à une résolution analytique directe, nous avons donc opté pour une résolution numérique.

Celle-ci permettra de transformer en équations aux dérivées en équations algébriques plus simples à résoudre. Ceci fera l'objet du prochain chapitre.

Chapitre III :

modélisation Numérique

Modélisation Numérique

III.1. Introduction

La procédure numérique retenue pour la résolution du système d'équations couplées précédentes ((II.38)-(II.39)) gouvernant la convection thermosolutale dans la cavité poreuse est la méthode des volumes finis, Patankar [31]. Elle utilise une formulation des équations en variables primitives (vitesse –pression).

III.2. Principe de la méthode des volumes finis

III.2.1. Equation différentielle gouvernante

Les phénomènes physiques impliquant l'écoulement d'un fluide, le transfert de chaleur et le transfert de masse, sont gouvernés par les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, d'énergie et des espèces chimiques,... etc. Ces principes sont exprimés par des équations différentielles. Si on note par ϕ la variable dépendante, les équations de conservation en régime stationnaire possèdent une forme commune, qui est donnée par:

$$\nabla.\left(\rho\vec{V}\phi\right)=\nabla.\left(\Gamma\vec{\nabla}\phi\right)+S \qquad \textbf{(III.1)}$$

Avec:

$\nabla.\left(\rho\vec{V}\phi\right)$: Terme convectif.

$\nabla.\left(\Gamma\vec{\nabla}\phi\right)$: Terme de diffusion.

S : Terme source.

Γ : Coefficient de diffusion.

ϕ : est la variable dépendante généralisée (vitesse, température, Concentration).

III.2.2. Equation de continuité

La difficulté majeure dans le calcul du champ de vitesse, réside dans le champ de pression, qui est inconnu. Cependant, ce champ de pression est implicitement spécifié dans l'équation de continuité.

Quand ce champ de pression est substitué dans les équations du mouvement, le champ de vitesse résultant satisfait l'équation de continuité. Le couplage entre le champ de pression et le champ de vitesse est utilisé dans l'élaboration d'une procédure de calcul pour le champ dynamique.

III.2.3. Maillage et volume de contrôle

La méthode des volumes finis consiste à diviser le domaine de calcul en un certain nombre de volumes de contrôle. Il existe plusieurs types de maillage, on peut citer le maillage uniforme, le maillage non uniforme et aussi le maillage à zones, et c'est pour le maillage à non uniforme que nous avons opté dans notre travail. La FIG (III.1) indique la subdivision d'un domaine en volumes de contrôle.

La variable dépendante considérée est calculée aux nœuds. Les équations algébriques définies en ces nœuds, sont obtenues par intégration des équations de conservation à travers les volumes de contrôle, pour chaque nœud.

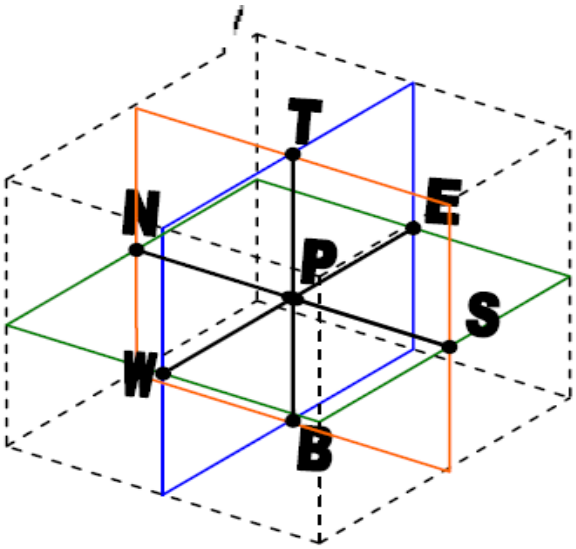


FIG III.1 : Subdivision du domaine d'étude en volumes de contrôle

III.2.4. Discrétisation des équations de conservation

Pour une situation bidimensionnelle, en régime permanent, l'équation différentielle (III.2) peut s'écrire, en considérant une direction (i), sous la forme suivante:

$$\rho.u_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) + S \qquad i = x, y, z \qquad \textbf{(III.2)}$$

En combinant les flux convectifs et diffusifs (III.2), le flux total (convection-diffusion) J_i s'écrit alors:

$$\frac{\partial J_i}{\partial x_i} = S \qquad \textbf{(III.3)}$$

Avec

$$J_i = \rho . u_i \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \qquad \textbf{(III.4)}$$

Les différents termes des équations de conservation obtenues dans notre cas sont rapportés dans le tableau III.1.

Equation	ϕ	Γ	S
Continuité	1	0	0
Mouvement/X	U	$R_v \Pr$	$-\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\Pr}{Da} U + Ra \Pr[\theta + NS]$
Mouvement/Y	V	$R_v \Pr$	$-\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\Pr}{Da} V + Ra \Pr[\theta + NS]$
Mouvement/Z	W	$R_v \Pr$	$-\frac{\partial P}{\partial w} - \frac{\Pr}{Da} V + Ra \Pr[\theta + NS]$
Energie	θ	R_C	0
Concentration	S	$1/Le$	0

Tableau III.1 : Définition des différents termes des équations de conservation

En intégrant l'équation (IV.3) à travers le volume de contrôle représenté dans la figure IV.2, on obtient:

$$(J_e - J_w)\Delta z \Delta y + (J_n - J_s)\Delta z \Delta x + (J_t - J_b)\Delta z \Delta y = \overline{S} \Delta V = \overline{S} \Delta X \Delta Y \Delta Z \qquad \textbf{(III.5)}$$

Dans l'équation (III.5), les quantités $J_{e,w,n,s}$ représentent les flux totaux sur les faces des volumes de contrôle, S est le terme source, et ΔV le volume. Les $A_{e,w,n,s}$ sont les aires de chaque face du volume de contrôle.

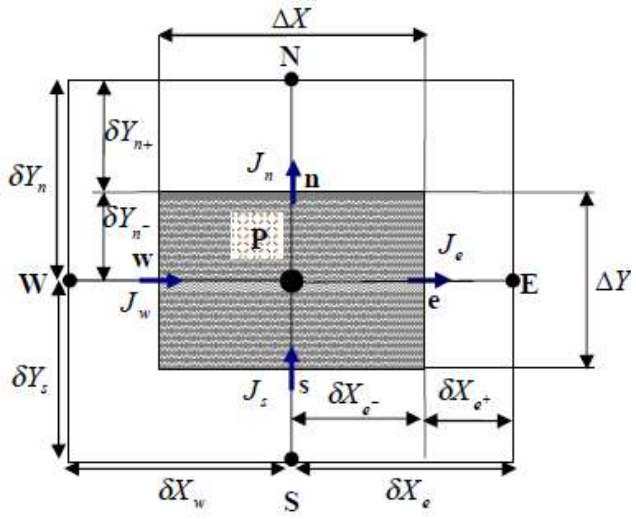


FIG III.2 : Volume de contrôle représentatif

Avec :

$$J_x = \left[U\phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right] \quad \textbf{(III.6)}$$

$$J_y = \left[V\phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right] \quad \textbf{(III.7)}$$

$$J_z = \left[W\phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial Z} \right] \quad \textbf{(III.8)}$$

III.2.4.1. Flux de diffusion -convection:

Considérons la région entre les points P et E de la figure III.2. Si un problème unidimensionnel de convection - diffusion est résolu entre les points P et E, un profil exponentiel de ϕ est obtenu comme solution exacte. La solution exponentielle conduit à:

$$J_e = F_e \left(\phi_P + \frac{(\phi_P - \phi_E)}{\exp(P_e) - 1} \right) \quad \textbf{(III.9)}$$

Où le nombre de Peclet, P_e est donné par:

$$P_e = \frac{F_e}{D_e} \quad \textbf{(III.10)}$$

$F_e = \rho U_e \Delta z \Delta y$ estle débit d'écoulement, et D_e la conductance de diffusion.

Le coefficient de diffusion Γ_e est évalué par une moyenne harmonique [31] à travers le volume de contrôle. L'expression de D_e est alors:

$$D_e = A_e\left(\frac{\left(\delta X_{e^-}\right)}{\Gamma_P} + \frac{\left(\delta X_{e^+}\right)}{\Gamma_E}\right)^{-1} \quad \textbf{(III.11)}$$

Les distances δX_{e^-} et δX_{e^+} [31] sont représentées sur la figure III.2.

III.2.4.2. Simplification de l'expression du flux:

L'équation (III.12) peut s'écrire sous la forme suivante:

$$J_e = F_e\phi_p + \left\{D_e A\left(\left|P_e\right|\right) + \left[-F_e, 0\right]\right\}\left(\phi_P - \phi_E\right) \quad \textbf{(III.12)}$$

Avec

$$A\left(\left|P_e\right|\right) = \frac{\left|P_e\right|}{\left(\exp\left(\left|P_e\right|\right) - 1\right)} \quad \textbf{(III.13)}$$

Le calcul des exponentielles est assez long, de plus il n'est pas exact pour les situations bidimensionnelles et tridimensionnelles avec terme source. Pour ces raisons, des approximations pour l'expression du flux ont été utilisées [31].

III.2.4.3. Linéarisation du terme source:

Souvent le terme source S dépend de la variable ϕ. Il est exprimé comme une fonction linéaire de ϕ_P. La méthode de la tangente [31] est recommandée dans la linéarisation du terme source, elle consiste à écrire:

$$\overline{S} = \overset{*}{S} + \left[\frac{dS}{d\phi}\right]^*\left(\phi_P - \phi_p^*\right) \quad \textbf{(III.14)}$$

La formule de linéarisation peut s'écrire alors:

$$\overline{S} = Sc + S_P\phi_P \quad \textbf{(III.15)}$$

S_P est le coefficient de ϕ_P. Sc est la partie de S qui ne dépend pas explicitement de ϕ_P. Le symbole $\left(^*\right)$ est utilisé pour noter la valeur de ϕ_P à une itération donnée. Il est souhaitable lors de la linéarisation que S_p soit négatif, car un S_p positif peut causer une divergence.

Les valeurs des termes sources linéarisés (Sc et S_P) pour les différentes équations sont résumées dans le tableau III.2.

Equation	ϕ	Sc	Sp
Continuité	1	0	0
Mouvement/X	U	$-\frac{\partial P}{\partial X}+Ra\,\Pr[\theta+NS]$	$-\frac{\Pr}{Da_i}$
Mouvement/Y	V	$-\frac{\partial P}{\partial Y}+Ra\,\Pr[\theta+NS]$	$-\frac{\Pr}{Da_i}$
Mouvement/Z	W	$-\frac{\partial P}{\partial Z}+Ra\,\Pr[\theta+NS]$	$-\frac{\Pr}{Da_i}$
Energie	θ	0	0
Concentration	S	0	0

Tableau III.2. Expressions des termes sources linéarisés (Sc et Sp) pour les différentes équations

III.2.4.4. Equation finale de discrétisation:

L'intégration de l'équation de continuité donne :

$$F_e - F_w + F_n - F_s + F_t - F_b = 0 \qquad \textbf{(III.16)}$$

Où F_e, F_w, F_n, F_s, F_t *et* F_b sont les débits volumiques à travers les faces du volume de contrôle.

Multiplions l'équation (III-16) par ϕ_p elle devient :

$$F_e\phi_P - F_w\phi_P + F_n\phi_P - F_s\phi_P + F_t\phi_P - F_b\phi_P = 0 \qquad \textbf{(III.17)}$$

D'autre part, la linéarisation du terme source donne :

$$\overline{S} = Sc + S_P\phi_P \qquad \textbf{(III.18)}$$

La combinaison entre les équations (III-5) et (III-18) donne :

$$(J_e - F_e\phi_P) - (J_w - F_w\phi_P) + (J_n - F_n\phi_P) - (J_s - F_s\phi_P) + (J_t - F_t\phi_P) - (J_b - F_b\phi_P) = (Sc + S_P\phi_P)\Delta X\Delta Y \qquad \textbf{(III.19)}$$

Sachant que :

$$J_e - F_e\phi_P = \{D_e A(|P_e|) + [-F_e, 0]\}(\phi_P - \phi_E) \qquad \textbf{(III.19a)}$$

$$J_w - F_w\phi_P = \{D_w A(|P_w|) + [F_w, 0]\}(\phi_W - \phi_P) \qquad \textbf{(III.19b)}$$

$$J_n - F_n\phi_P = \{D_n A(|P_n|) + [-F_n, 0]\}(\phi_P - \phi_N) \qquad \textbf{(III.19c)}$$

$$J_S - F_s\phi_P = \{D_s A(|P_s|) + [F_s, 0]\}(\phi_s - \phi_P) \qquad \textbf{(III.19d)}$$

$$J_t - F_t\phi_P = \{D_t A(|P_t|) + [F_t, 0]\}(\phi_t - \phi_P) \quad \textbf{(III.19e)}$$

$$J_b - F_b\phi_P = \{D_b A(|P_b|) + [F_b, 0]\}(\phi_s - \phi_P) \quad \textbf{(III.19f)}$$

On obtient l'équation discrétisée:

$$a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E + a_S\phi_S + a_N\phi_N + a_T\phi_T + a_B\phi_B + b \quad \textbf{(III.20)}$$

Avec:

$$a_E = D_e A(|P_e|) + [-F_e, 0] \quad \textbf{(III.20a)}$$

$$a_W = D_w A(|P_w|) + [+F_w, 0] \quad \textbf{(III.20b)}$$

$$a_S = D_s A(|P_s|) + [-F_s, 0] \quad \textbf{(III.20c)}$$

$$a_N = D_n A(|P_n|) + [+F_n, 0] \quad \textbf{(III.20d)}$$

$$a_T = D_t A(|P_t|) + [-F_t, 0] \quad \textbf{(III.20c)}$$

$$a_B = D_b A(|P_b|) + [+F_b, 0] \quad \textbf{(III.20d)}$$

$$b = Sc\Delta X\Delta Y \quad \textbf{(III.20e)}$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_T + a_B - S_P\Delta X\Delta Y\Delta Z \quad \textbf{(III.20f)}$$

Le symbole $[a,b]$ représente le maximum entre a et b et $A(|P_i|)$ la fonction d'interpolation qui diffère d'un schéma à un autre.

Avec :

$$D_e = \frac{\Gamma_e}{\delta X_e}\Delta X\Delta Z \quad , F_e = U_e\Delta Y\Delta Z \quad , \; P_e = \frac{F_e}{D_e}$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w}{\delta X_w}\Delta X\Delta Z \quad , F_w = U_w\Delta Y\Delta Z \quad P_w = \frac{F_w}{D_w} \quad \textbf{(III.21)}$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n}{\delta Y_n}\Delta Y\Delta Z \quad , F_n = V_n\Delta X\Delta Z \quad , \; P_n = \frac{F_n}{D_n}$$

$$D_s = \frac{\Gamma_s}{\delta Y_s}\Delta Y\Delta Z \quad , F_s = V_s\Delta X\Delta Z \quad , \; P_s = \frac{F_s}{D_s}$$

$$D_t = \frac{\Gamma_t}{\delta Z_t}\Delta X\Delta Z \quad , F_t = W_t\Delta X\Delta Y \quad , \; P_t = \frac{F_t}{D_t}$$

$$D_b = \frac{\Gamma_b}{\delta Z_b}\Delta X\Delta Y \quad , F_b = W_b\Delta X\Delta Y \quad , \; P_b = \frac{F_b}{D_b}$$

D_i, F_i et P_i représentent respectivement la diffusion, le débit volumique et le rapport du transfert par convection au transfert par diffusion.

L'équation (IV.21) peut se mettre sous la forme générale suivante :

$$a_P \phi_P = \sum a_{nb} \phi_{nb} + b \qquad \textbf{(III.22)}$$

L'indice nb note les nœuds voisins de P, et la sommation est faite à travers tous les nœuds voisins (e, w, n, s, t, b).

III.2.4.5. Méthode de résolution des équations algébriques:

La méthode de résolution adoptée dans la présente étude est la technique ligne par ligne, qui combine entre une méthode directe (algorithme de Thomas) et une méthode itérative (Gauss Seidel) [31-33]. Elle est utilisée pour la résolution des équations algébriques. Elle consiste à appliquer l'algorithme de Thomas pour trouver les valeurs de ϕ pour une direction et une position donnée. Les valeurs de ϕ des nœuds des positions avoisinantes sont estimées; lorsque toutes les positions seront considérées, une itération est accomplie par la technique ligne par ligne. Le processus peut être répété en choisissant les positions dans l'autre direction.

III.2.5. Considérations pour le champ dynamique

L'analyse des équations gouvernantes pour les composantes de vitesse u_i révèle que ces dernières ne peuvent être obtenues directement par la résolution des équations du mouvement. En effet, ces équations contiennent le gradient de pression $-\frac{\partial P}{\partial x_i}$ qui est un terme source important, lequel n'est pas exprimé en terme de u_i ou d'autres variables. Cependant, la pression est indirectement spécifiée à travers l'équation de continuité. Une autre difficulté surgit aussi pour les équations du mouvement et de continuité. Si les vitesses et les pressions sont calculées aux mêmes nœuds, plusieurs champs physiques irréels peuvent être considérés comme solutions. L'un des remèdes pour cet inconvénient est le maillage décalé proposé par Patankar [31].

III.2.5.1. Notion de maillage décalé:

La FIG III.3 montre une partie d'un maillage adapté au cas bidimensionnel. Dans le maillage décalé, les composantes de vitesse sont portées sur les faces des volumes de contrôle. Toutes les autres variables ϕ, y compris la pression, sont calculées aux nœuds principaux.

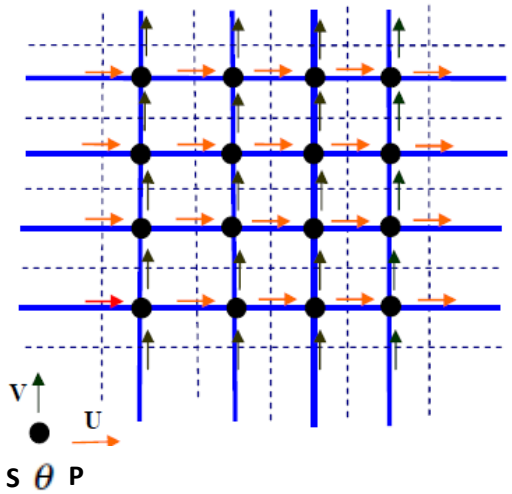


FIG III.3 : Représentation d'un maillage décalé

III.3. Critère de convergence

On dit qu'un processus itératif atteint la convergence lorsque les itérations ultérieures ne produisent aucun changement significatif sur les variables dépendantes ϕ. Pratiquement, on exprime cette convergence par un test d'arrêt du processus itératif appelé critère de convergence qui dépend de la nature du problème et des objectifs du calcul. Un critère de convergence est imposé en terme d'erreur relative pour les variables U, V, P, θ et S. Et qui décrit pour chaque variable :

$\max\left|\frac{\phi-\phi^*}{\phi^*}\right| \leq 10^{-4}$, ainsi que pour le terme b de l'équation de correction pression, avec $|b| \leq 10^{-5}$.

III.4. Schémas d'interpolation

Dans les coefficients de l'équation algébrique (III.14), nous avons rencontré le terme $A(|P_i|)$qui représente la fonction d'interpolation utilisée pour l'évaluation de la variable dépendante ϕ à une interface du volume de contrôle.

$A(|P|)$ Prendra une fonction selon le schéma choisi et qui est récapitulée dans le tableau III.3.

Schéma	$A\|P\|$
Centré	1-0.5$\|P\|$
Upwind	1
Hybride	$[0,(1-0.5\|P\|)]$
Power-Law	$\left[0,(1-0.5\|P\|)^5\right]$
Exponentiel	$\frac{P}{\exp\|P\|-1}$

Tableau III.3. Les expressions de $A|P|$ selon le schéma d'interpolation

Limitations :

- ☒ **Le schéma centré :** il est limité aux problèmes à faible nombre de Peclet, $|P| \le 2$
- ☒ **Le schéma Upwind :**
- non approprié pour les faibles nombres de $|P|$
- Pour les grandes valeurs de $|P|$**,** la diffusion est surestimée (normalement $\frac{d\phi}{dX} \to 0$).

Schéma hybride : Le schéma hybride est une combinaison de deux schémas précédents, il se réduit à l'approximation centrée lorsque $|P| < 2$, et devient identique au schéma Upwind lorsque $|P| > 2$. L'erreur maximale est pour $|P| \approx 2$

- ☒ **Schéma Power-law** : Ce schéma est recommandé pour les problèmes de convection-diffusion, il s'avère très efficace puisqu'il approche beaucoup mieux la solution exacte. Dans notre cas, nous avons utilisé le schéma Power-law.

III.5. Application de la méthode des volumes finis à notre problème

On rappelle les équations qui régissent le mouvement:

$$\frac{\partial U}{\partial X}+\frac{\partial V}{\partial Y}+\frac{\partial W}{\partial Z}=0 \qquad \textbf{(III.23)}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_i^2}\left[U_i\frac{\partial U_i}{\partial X}+V_i\frac{\partial U_i}{\partial Y}+W_i\frac{\partial U_i}{\partial Z}\right]=-\frac{\partial P_i}{\partial X}-\frac{\Pr}{Da_i}.U_i+Rv\Pr.\left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 U_i}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 U_i}{\partial Z^2}\right)+Ra\Pr[\theta_i+NS_i]$$

(III.24)

$$\frac{1}{\varepsilon_i^2}\left[U_i\frac{\partial V_i}{\partial X}+V_i\frac{\partial V_i}{\partial Y}+W_i\frac{\partial V_i}{\partial Z}\right]=-\frac{\partial P_i}{\partial Y}-\frac{\Pr}{Da_i}.V_i+Rv\Pr.\left(\frac{\partial^2 V_i}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 V_i}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 V_i}{\partial Z^2}\right)+Ra\Pr[\theta_i+NS_i]$$

III.25)

$$\frac{1}{\varepsilon_i^2}\left[U_i\frac{\partial W_i}{\partial X}+V_i\frac{\partial W_i}{\partial Y}+W_i\frac{\partial W_i}{\partial Z}\right]=-\frac{\partial P_i}{\partial Z}-\frac{\Pr}{Da_i}.W_i+Rv\,\Pr.\left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 W_i}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 W_i}{\partial Z^2}\right)+Ra\,\Pr[\theta_i+NS_i] \quad \textbf{(III.26)}$$

$$U_i\frac{\partial \theta_i}{\partial X}+V_i\frac{\partial \theta_i}{\partial Y}+W_i\frac{\partial \theta_i}{\partial Y}=Rc.\left(\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial Z^2}\right) \quad \textbf{(III.27)}$$

$$U_i\frac{\partial S_i}{\partial X}+V_i\frac{\partial S_i}{\partial Y}+W_i\frac{\partial S_i}{\partial Z}=\frac{1}{Le}.\left(\frac{\partial^2 S_i}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 S_i}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 S_i}{\partial Z^2}\right) \quad \textbf{(III.28)}$$

$$\left.\begin{array}{lll}
D_e=\dfrac{\Gamma_e}{\delta X_e}\Delta X\Delta Z & ,F_e=U_e\Delta Y\Delta Z & ,P_e=\dfrac{F_e}{D_e}\\
D_w=\dfrac{\Gamma_w}{\delta X_w}\Delta X\Delta Z & ,F_w=U_w\Delta Y\Delta Z & ,P_w=\dfrac{F_w}{D_w}\\
D_n=\dfrac{\Gamma_n}{\delta Y_n}\Delta Y\Delta Z & ,F_n=V_n\Delta X\Delta Z & ,P_n=\dfrac{F_n}{D_n}\\
D_s=\dfrac{\Gamma_s}{\delta Y_s}\Delta Y\Delta Z & ,F_s=V_s\Delta X\Delta Z & ,P_s=\dfrac{F_s}{D_s}\\
D_t=\dfrac{\Gamma_t}{\delta Z_t}\Delta X\Delta Z & ,F_t=W_t\Delta X\Delta Y & ,P_t=\dfrac{F_t}{D_t}\\
D_b=\dfrac{\Gamma_b}{\delta Z_b}\Delta X\Delta Y & ,F_b=W_b\Delta X\Delta Y & ,P_b=\dfrac{F_b}{D_b}
\end{array}\right\} \quad \textbf{(III.29)}$$

Chapitre IV:

Résultats et déscussions

Résultats et Discussions

IV.1. Introduction

La problématique du stockage du(CO_2) est récente et les applications industrielles vont se développer rapidement comme en témoignant les nombreux recherche dans ce domaine (le stockage du gaz dioxyde de carbone) et leur milieux associés.

Actuellement les différents sites de stockage (CO_2) de en milieu souterrain sont ; les anciens réservoirs de pétrole et de gaz, les aquifères profonds [35] et les veines de charbon non exploitées.

Beaucoup d'attentions ont été donnée durant les dernières années par la communauté scientifique internationale pour cette nouvelle idée du stockage géologique de(CO_2), parce que assure un stockage sur longue période géologiques [36] ainsi avec de moindre coût. !

Le stockage de dioxyde de carbone dans la matrice poreuse (Charbon) représente un grand défi scientifique pour la compréhension à l'échelle microscopique les phénomènes de transferts de chaleur et de masse, le transport de gaz (CO_2) à travers la matrice poreuse de Charbon ainsi de connaître les principaux paramètres de contrôlent le processus dans le but d'évaluer les capacités de stockage.

Ce travail à pour but de mieux comprendre les phénomènes des transferts et les écoulements de ce gaz (CO_2) à travers une cavité partiellement poreuse en ($3D$).

IV.2. Procédure numérique

L'ensemble des équations aux dérivées partielles gouvernant la situation physique, est traduit en équations algébriques par utilisation de la méthode des volumes finis. L'algorithme SIMPLER a été adopté pour la séquence des étapes de résolution. Le schéma en loi de puissance a été retenu pour l'évaluation des termes convectifs. Le système d'équations algébriques est résolu itérativement par l'algorithme de Thomas. Un maillage décalé non uniforme, de $(82)^3$ nœuds, a été retenu. Un critère de convergence est imposé en termes d'erreur relative pour les variables U, V, P, θ et S en termes de résidu de masse. Les calculs sont stoppés pour une erreur relative inférieure à 10^{-4} et un résidu de mase inférieur à 10^{-4}.

Dans toutes les simulations de cette étude, nous avons considéré une solution aqueuse de nitrate comme fluide saturant la couche poreuse ($\Pr = 0.78$). La porosité ε, le rapport des conductivités thermiques des deux couches poreuse et fluide et le nombre de Lewis sont respectivement fixés à 0.5, 1et 10. Le rapport de la viscosité effective à la viscosité fluide ($R\nu$) est pris égal à l'unité. Par ailleurs, Nous nous sommes placés dans les deux cas d'un écoulement convectif où la contribution des forces de volume dues à la concentration vient s'ajouter à celle des forces de volume dues à la température. C'est la convection double diffusive avec un rapport des forces de volume $N > 0$(convection thermosolutale coopérant). Nous avons traité l'effet de la variation du rapport des forces de volume sur les transferts (N est varié de 0 à 3). Nous avons pris une large étendue des perméabilités (Da) et du nombre de Rayleigh modifié $\mathrm{Ra_m}$, ils varient respectivement dans les proportions suivantes : $10^{-10} \le Da \le 1$et $7\times10^{-4} \le \mathrm{Ra_m} \le 7\times10^{6}$. Les résultats des calculs numériques sont présentés en termes de lignes de courants, des isothermes, des isoconcentrations et des transferts thermiques et massiques moyens.

IV.3. Sensibilité du code de calcul au maillage et validation

Pour trouver le nombre de nœuds adéquat, nous avons effectué plusieurs exécutions pour les modèles horizontal et vertical. Un maillage de (82^3) nœuds donne un bon compromis entre le temps d'exécution et la précision des résultats. Un exemple de calcul est présenté dans les tableaux IV.1.

Maillage	$(42)^3$	$(66)^3$	$(82)^3$	$(106)^3$
Nu	4.63	4.55	4.53	4.52
Sh	13.11	12.54	12.40	12.30

Tableau IV.1 : Sensibilité du code de calcul au maillage pour
$Pr = 7, N = 1, Ra = 10^5, Da = 10^{-2}, \varepsilon = 0.5, Le = 10$

Le code de calcul est validé par rapport à plusieurs cas limites de la littérature [35], [36], [37]. Une très bonne concordance est à noter. Les résultats comparatifs sont résumés dans le tableau IV.2 en termes des valeurs du nombre de Nusselt et Sherwood moyens

	Le	10				100
	Ra_m	$1x10^2$	$2x10^2$	$4x10^2$	$1x10^3$	$1x10^3$
Bennacer *et al.* [37].	*Nu* *Sh*	3.11 13.24	4.96 19.83	7.77 29.36	13.48 48.20	13.48 139.98
Trevisan and Bejan[38].	*Nu* *Sh*	3.27 15.61	5.61 23.23	6.69 30.73	- -	- -
Goyeau *et al.* [39].	*Nu* *Sh*	3.11 13.25	4.96 19.86	7.77 28.41	13.47 48.32	13.47 140.65
Présent code (3D)	*Nu* *Sh*	3.10 13.33	4.96 19.91	7.75 28.83	13.50 49.70	13.50 152.42

Tableau IV.2 : Comparaison du nombre de Nusselt dans le cas du régime De Darcy-Brinkman en convection thermique pour *Pr* = 0.71, N=0, ε =0.5.

IV.4. Lignes de courant -isothermes –isoconcentrations

Les structures d'écoulement, des isothermes et des isoconcentrations sont présentées dans les figures IV.1 à IV.3. Pour une situation présentant une faible valeur de (Da), une résistance significative à l'écoulement dans la couche poreuse, on assiste à une décélération de l'écoulement dans cette couche. Ce comportement est dû à la faible perméabilité de la couche poreuse. A cet effet, la circulation du fluide est plus favorable et la convection thermosolutale est plus prononcée dans cette deuxième couche.

Pour une valeur de Da égale à 10^{-5}, la pénétration de fluide dans la couche poreuse est plus favorable par rapport au premier cas parce que cette fois ci la couche poreuse est plus perméable que dans le cas précédant. Dans le cas où la couche poreuse est plus perméable $Da=10^{-3}$ les lignes de courant sont de forme elliptique prolongée et multicellulaires dans toute cavité. La couche limite hydrodynamique prend place sur les parois verticales. La convection thermosolutale est bien prononcée dans les deux couches.

Les isothermes et les isoconcentrations sont déformées et des gradients de température et de concentrations sont intensif prend place dans la couche fluide tandis que les. Alors que Les

isothermes et les isoconcentratios dans la couche poreuse sont parallèles aux parois verticales, indiquant que le transfert de chaleur et de masse tend vers une situation diffusive.

Isoconcentrations sont déformées dans les deux couches avec formation d'une couche limite solutale sur les parois verticales car le nombre de Lewis est élevé (Le=10) et la convection est d'origine solutale (N=1)

Pour une perméabilité plus élevée les isothermes sont déformées et prennent place sur la diagonale de la couche limite thermique tend à se former, localisée respectivement sur les parties basses et hautes des parois latérales. Les isoconcentrations sont elles aussi déformées et prennent place sur toute la cavité avec un resserrement notable sur les parois verticales de la cavité. Une couche limite solutale prend place sur les parois latérales car le nombre de Lewis est élevé (Le=10).

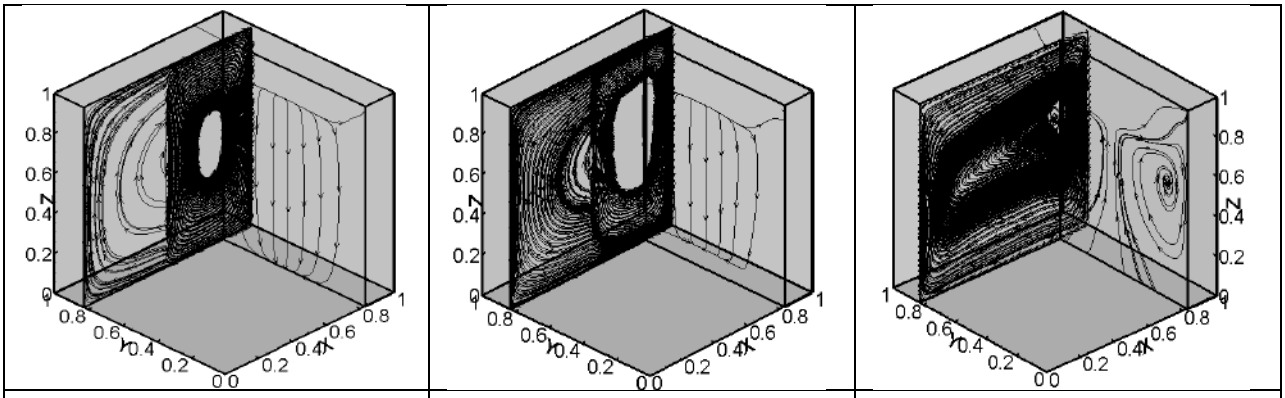


FIG. IV.1 : représente les lignes de courant pour N=1, Da=[10^{-7},10^{-5},10^{-3}] et Ra=7.10^{6}

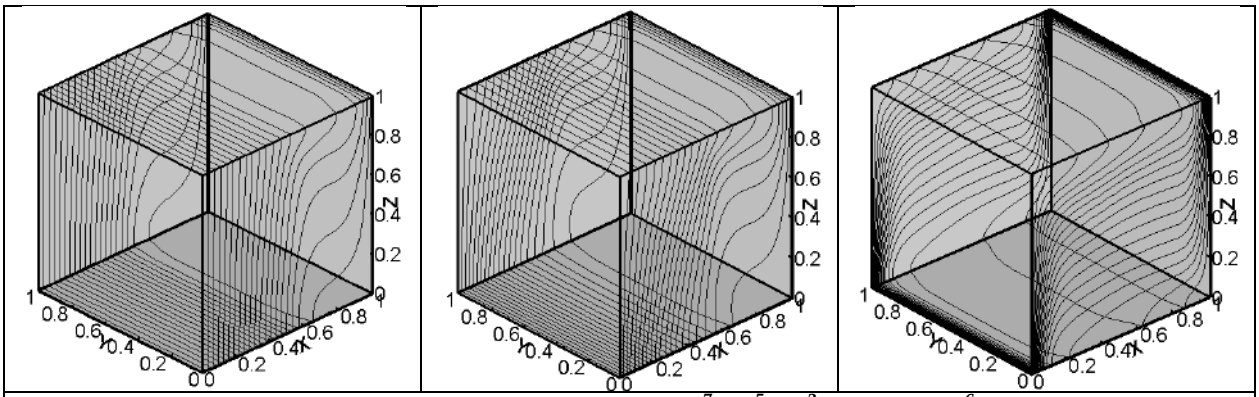


FIG .IV.2 : représente les isothermes pour N=1, Da=[10^{-7},10^{-5},10^{-3}] et Ra=7.10^{6}

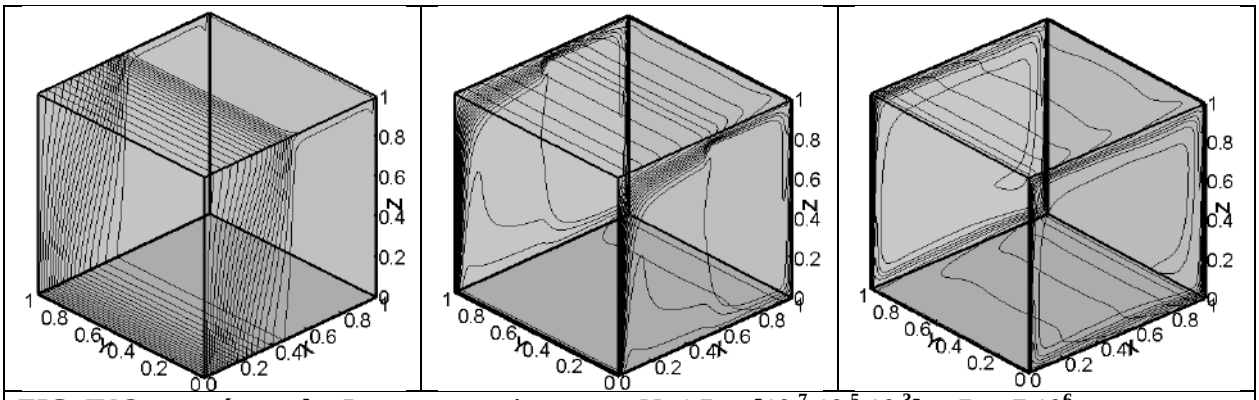


FIG. IV.3 : représente les Isoconcentrations pour N=1,Da=[10^{-7},10^{-5},10^{-3}] et Ra=7.10^{6}

IV.5. Effet du nombre de Rayleigh modifié sur les transferts.

Les figures IV.4 et IV.5 illustrent l'évolution des transferts thermique et massique moyens en fonction de Da pour différentes valeurs de Ra. Ces transferts sont quantifiés en termes des nombres de Nusselt et Sherwood moyens. Les deux figures montrent que les transferts sont purement diffusifs pour une perméabilité faible, La variation de la perméabilité met donc en évidence trois régimes de transferts, un écoulement diffusif pur pour les faibles valeurs de Da, un écoulement qui s'intensifie de plus en plus avec l'accroissement de Da (pour Da modéré) et un régime complètement couche limite indépendant de Da quand ce dernier est élève. La transition entre les deux régimes convectifs se fait pour une valeur de raccordement notée Da^{c} . Cette valeur critique est d'autant plus élevée que Ra est faible. Nous constatons qu'à Da donnée, le transfert de matière est plus élevé que le transfert de chaleur. En effet, vu que le nombre de Lewis (Le) est égal à 10, la couche limite solutale est plus fine que la couche limite thermique. Ceci est aussi à l'origine de l'obtention d'un transfert de masse diffusif pour des valeurs de Da plus faibles que dans le cas du transfert de chaleur.

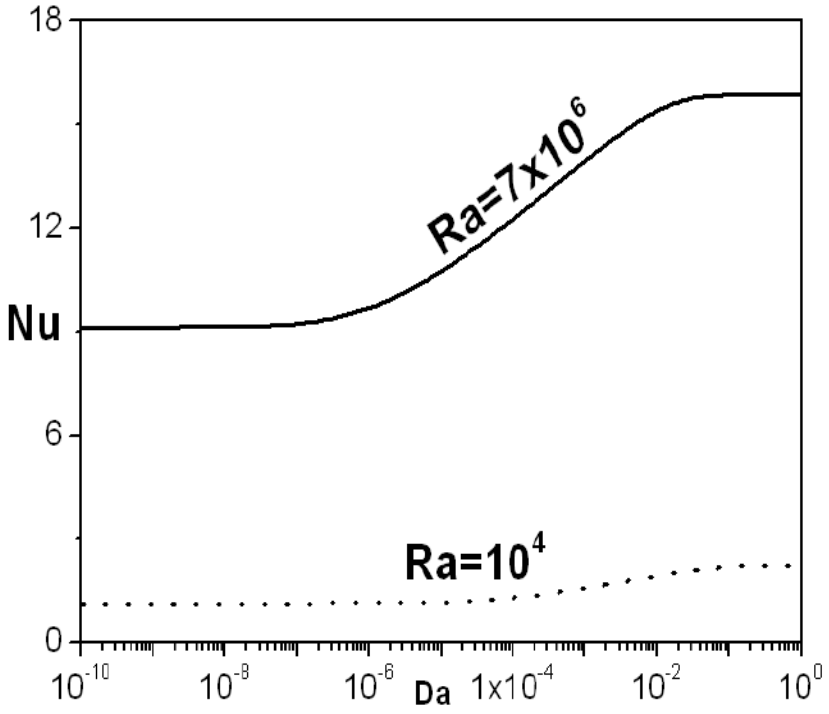


FIG. IV.4 : Effet du nombre de Rayleigh sur le transfert de chaleur pour N=4, Le=10, Da= [10^{-10} -10^{0}]

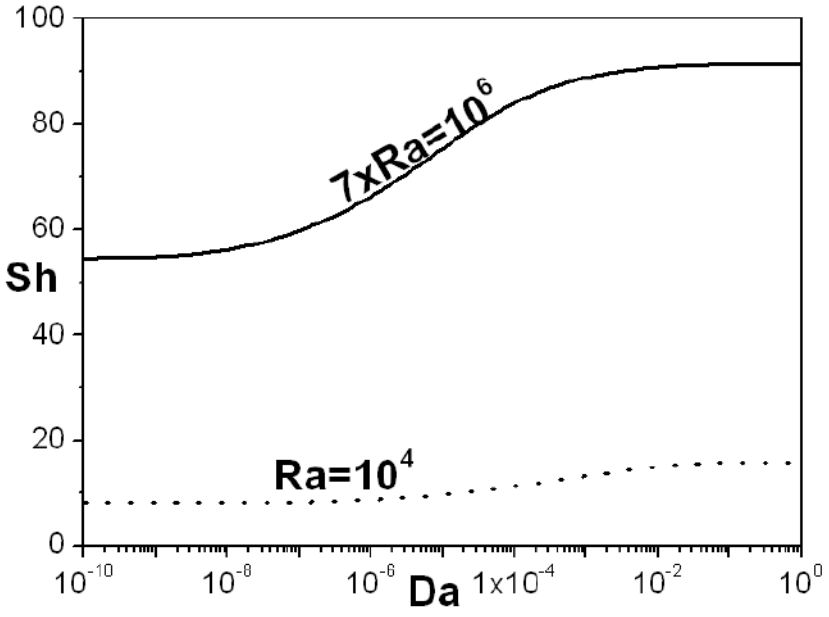


FIG. IV.5 : Effet du nombre de Rayleigh sur le transfert de masse pour N=4, Le=10, Da= [10^{-10} -10^{0}]

IV.6. Conclusion

Les résultats de la simulation numérique, portant sur la convection naturelle dans une enceinte partiellement poreuse, ont été présentés et discutés. L'étude numérique concerne l'influence des divers paramètres sur l'écoulement et le transfert de chaleur et de masse a été analysé et commenté.

Conclusion Générale

Conclusion générale

Dans cette mémoire, nous avons présenté une étude numérique du transfert de chaleur et de masse par convection double diffusive générée dans une cavité sous forme cubique renfermant deux couches la première une couche poreuse tant dis que la deuxième couche est fluide disposées verticalement. Les parois verticales sont soumises à des conditions de température et de concentration uniformes alors qu'autres parois sont adiabatiques et imperméables. Ce type d'écoulements dans de tels milieux en multicouches est en effet très peu étudié actuellement.

Les équations régissant le phénomène de la convection thermosolutale dans l'enceinte partiellement poreuse, sont résolues numériquement au moyen d'un code de calcul basé sur la méthode des volumes finis. L'adimensionnement des équations gouvernantes a fait apparaître les nombres adimensionnels suivants :
Nombre de Darcy (Da), nombre de Rayleigh fluide (Ra), nombre de Rayleigh modifié (Ra_m), nombre de Lewis (Le), le rapport des forces de volume (N).

L'étude de l'effet de variation des paramètres suscités, sur les transferts de matière et de chaleur est analysée. Les lignes de courants, les isothermes et les isoconcentrations ont été discutées dans ce travail.

Cette étude est une contribution à l'enrichissement des connaissances et des éléments de réponse relative aux problèmes de la double diffusion dans les milieux poreux. C'est une approche pour l'étude de la diffusion des polluants dans des sols. Nous avons montré en première étape à travers ce travail que la variation de la perméabilité de la couche poreuse à un effet très appréciable sur la structure d'écoulement et les transferts. Par ailleurs trois régimes de transferts ont été identifiés, un écoulement diffusif pur pour les faibles valeurs de Da , un écoulement qui s'intensifie de plus en plus avec l'accroissement de Da (pour Da modéré) et un autre régime complètement couche limite indépendant de Da (pour Da élevés).

Références bibliographiques

[1] BEAR J. Dynamics of fluids in porous media, Elsevier (1972).

[2] H.P.C.Darcy, "Les Fontaines Publiques De La Ville De Dijon". V. Dalmont, Paris (1956)

[3] Site internet: www. Heat Transfer. TORONTO. UC.COM

[4] A.E.Scheidrgger, “The physics of flow through porous media”, University of Toronto Press, 3rd edition (1974)

[5] F. A. L.Dullien, ″Porous Media: Fluid Transport And Pore Structure″, Academic Press New York (1979).

[6] O.Reynolds, ″Papers On Mechanical And Physical Subjects″ , Cambridge University Press (1900).

[7] A.L. Dullien, “Porous media, fluid transport and pore structure”, Academic Press, 2nd Edition (1992)

[8] A.Tobbal, R.Bennacer et R.Cabrillac, Effet de l’anisotropie des matériaux poreux sur les phénomènes de transfert de chaleur et de masse,Proceedings du 13ème Congrès Français de Mécanique, Vol. II, pp. 457-460, 1997.

[9] H.Beji, Etude Numérique de la convection naturelle en milieu poreux saturé : Modélisation du nombre de Darcy et introduction de la dispersion dynamique, thèse de Doctorat, Université Paris 6, 1989.

[10] C.Beckerman et R.Viskanta, Double-diffusive convection during dendritic solidification of binary mixture, PhysicoChem. Hydrodyn., Vol . 10, pp.195-213, 1988.

[11] G.Neale et W.Nader, Practical significance of Brinkman’s extension of Darcy’s law: coupled parallel flows within a channel and bounding porous medium, The Canadian J. Chem. Eng., Vol. 52, pp. 475-478, 1974

[12] Stone, et al. "Heat transfer in open- cell metal foams." Lu, T. J., H. A. Acta Materialia 46(10): 3619-3635. (1998)

[13] Calmidi, V. V. and R. L. Mahajan "Forced convection in high porosity metal foams." Journal of Heat Transfer 122: 557-565. (2000).

[14] Hobdel, et al. Zhu, H. X., J. R. "Effects Of Cell Irregularity On The Elastic Properties Of Open-Cell Foams." Acta Material 48(10): 4893-4900. (2000).

[15] Banhart, J. "Manufacture, Characterization and application of cellular metals and metal foams." Progress in materials Science 46: 559-632. (2001).

[16] Boomsma, K. and D. Poulikakos "On the effective thermal onductivity of three-dimensionally structured fluid-saturated metal foam." International Journal of Heat and Mass Transfer 44: 827-836. (2001).

[17] Madani, B., F. Topin, et al. "Flow laws in metallic foams: experimental determination of inertial and viscous contribution." Jounal of porous media 10**(**1). (2006).

[18] Topin, F., J.-P. Bonnet, et al. "Experimental analysis of multiphase flow in metallic foam: convective boiling, flow laws and heat transfer." Advanced material Engineering **8**(9): 890-899. (2006).

[29] Vicente, J., F. Topin, et al. "Open celled material structural properties measurement: from morphology to transport properties." Material transaction 47(9): 2195-2202. (2006).

[20] . Montillet, et al. Du Plessis, P., A "Pressure Drop Prediction for Flow through High Porosity Metallic Foams." Chem. Eng. Sci. 49: 3545-3553. (1994).

[21] Boomsma, K., D. Poulikakos, et al. "Simulations of flow through open cell metal foams using an idealized periodic cell structure." International Journal of Heat and Fluid Flow **24** 825-834. (2003).

[22] Vilar, E. O. and F. Coeuret ."Mass tranfer to flow-through thin electrodes under laminar flow." Electrochimica Acta. **40**(5): 585-590. (1995).

[23] Ashby, M. F., A. G. Evans, et al. Metal foams: A design guide Boston, MA,Butterworth – Heinemann. (2000)

[24] JIMIC-4. METFOAM2005, Kyoto, Japan. (2005)

[25] These Bonnet

[26] Riva, R. and J. P. Poirot-Crouveziez ."Des concepts innovants pour les plaques bipolaires." Clefs C.E.A. **50-51**: 76-80. (2004).

[27] Ferrouillat, S., P. Tochon, et al. (2006). "Micromixing enhancement by turbulence: Application to multifunctional heat exchangers." Chemical Engineering and Processing **45**: 633–640.

[28] Tadrist, L., M. Miscevic, et al. "About the Use of Fibrous Materials in Compact Heat Exchangers." Experimental Thermal and Fluid Science **28**: 193 – 199. (2004).

[29] Prof. H. HOFMANN Laboratoire de Technologie des Poudres

[30] A.BEJEN, convection heat transfer, john, wiley and sons 1984

[31] Patankar, S.V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Mc-Graw-Hill, New York, 1980.

[32] J. P. Roache, Résolution numérique des équations aux derives partielles.

[33] A. Gourdin et M. Boumhart, Méthodes numériques appliqués.

[34] D. Euvrard, Analyse numérique en mécanique des fluides.

[35] Hansen J., Sato M., Ruedy R., Lacis A., Oinas V., 2000. Global warming in the century: An alternative scenario. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **97**,9875-9880.

[36] King G.R., Ertekin T., Schwerer F.C., 1986. Numerical simulation of the transient behaviour of coal-seam degasification wells. Society of Petroleum Engineers (SPE) Formation Evaluation **1**, 165-183.

[37] R. Bennacer, A. Tobbal et H. Beji., Convection naturelle thermosolutale dans une cavité poreuse anisotrope : formulation de Darcy-Brinkman, Rev.Energ.Ren., Vol. 5, p. 1-21, 2002.

[38] O.Trevisan and A. Bejan, Natural convection with combined heat and mass transfer buoyancy effects in a porous medium, Int. J. Heat Mass Transfer, 28, 1597-1611, 1985.

[39] B. Goyeau, J. P. Songbe and D. Gobin, Numerical study of double-diffusive natural convection in a porous cavity using the Darcy-Brinkman formulation, Int. J. Heat MassTransfer, 39, 1363-1378, 1996.