

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

UNIVERSITE YAHIA FARES DE MEDEA

PROJET DE FIN D'ETUDE

Présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHEMATIQUES

Spécialité : Recherches Opérationnelles

Etude de la b-coloration de certains graphes de puissance

Présenté par :
GACEMI Choubaila
DHAOUI Chaimaa

Proposé et dirigé par :
Mr. Noureddine IKHLEF ESCHOUF

Devant le jury composé de :

A. BOUCHOU	Maître de Conférences	UYFM	Président
N. IKHLEF ESCHOUF	Maître de Conférences	UYFM	Promoteur
M. ZAMIME	Maître de Conférences	UYFM	Examinateur
A. BENDALI-BRAHAM	Maître de Conférences	UYFM	Examinateur

Soutenu le 4 juillet 2021.

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous intéressons essentiellement à la notion de la b-coloration des graphes puissance.

Une coloration propre des sommets d'un graphe $G = (V, E)$ est une partition en stable de l'ensemble des sommets du graphe plus précisément, c'est une affectation des couleurs (entiers) aux sommets du graphe de sorte que deux sommets voisins ne partage pas la même couleur. Le nombre minimum des couleurs nécessaires pour réaliser une coloration propre d'un graphe G est le nombre chromatique, noté $\chi(G)$. Une b-coloration d'un graphe est une coloration propre de telle façon que chaque classe de couleur contient au moins un sommet ayant un voisin dans chacune des autres classes. Le nombre b-chromatique $b(G)$ est le le plus grand entier p tel que G admet une b-coloration avec p couleurs.

Nous rappelons d'abord quelques définitions essentielles de la théorie des graphes ensuite, nous présentons des résultats existants et des notions liées à la coloration classique et la b-coloration des graphes. Enfin, nous donnons des valeurs exactes du nombre b-chromatique de quelques graphes de puissance.

Abstract

In this memory, we are mainly interested in the notion of the b-coloring of power graphs.
A proper coloring of the vertices of a graph $G = (V, E)$ is a stable partition of the set of vertices of the graph, more precisely it is an assignment of colors (integers) to the vertices of the graph so that two neighboring vertices do not share the same color. The minimum number of colors necessary to realize a proper coloring of a graph G is the chromatic number noted $\chi(G)$. A b-coloring of a graph is a proper coloring such that each color class contains at least one vertex having a neighbor in each of the other classes. The b-chromatic number $b(G)$ is the largest integer p such that G admits a b-coloring with p colors.
We first recall some essential definitions of graph theory, then, we present existing results and notions related to the minimal coloring and the b-coloring of graphs. Finally, we give exact values of the b-chromatic number of some power graphs.

ملخص

في هذه المذكرة يتعلق الموضوع الرئيسي لدراستنا بمفهوم ب- تلوين بيانات معينة وهي بيانات القوى.

التلوين الأجود لرؤوس بيان G=(V,E) هو تقسيمها إلى مجموعات غير متجاورة وبدقة أكبر هو توزيع الألوان (أعداد طبيعية) على الرؤوس بحيث أن كل رأسين متجاورين لهما لونين مختلفين. الحد الأدنى لعدد الألوان المطلوبة لتلوين بيان تلوينا أجود، هو العدد اللوني ويرمز له ب $\chi(G)$.

التلوين ب- لوني لبيان G=(V,E) هو تلوين أجود لرؤوس هذا البيان بحيث أن كل فئة لونية تحتوي على الأقل على رأس مجاور لرأس آخر على الأقل من جميع الفئات اللونية الأخرى. العدد ب- لوني لبيان يرمز له b(G)، وهو أكبر عدد طبيعي ك ، بحيث البيان يقبل ب - تلوين ب ك لون.

نذكر أولا بالتعريفات الأساسية لنظرية البيانات، ثم نقدم مفاهيم ونتائج متعلقة بالعدد ب- لوني، وأخيرا نقدم قيما مضبوطة للعدد ب- لوني لبعض بيانات القوى.

Remerciements

Nous remercions tout d'abord ALLAH qui nous a donné la santé ,la force et la patience pour compléter ce mémoire.

Notre plus sincère gratitude vont à nos très chers parents pour leur aide, leur soutien et leurs accompagnement.

Ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de monsieur Noureddine Ikhlef Eschouf, on le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel pour sa patience, sa rigueur, ses conseils précieuses et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.

Nous adressons notre sincères remerciements à mademoiselle Bendali-Braham Amel pour son aide.

Nous tenons également à remercier très sincèrement l'ensemble des membres de jury qui ont aimablement accepté d'examiner ce travail.

Nos remerciements s'adressent également à nos familles et nos proches pour leurs encouragements.

Un merci spécial aux professeurs qui nous ont enseigné tout au long de notre parcours académique et ont illuminé nos vies avec la lumière du savoir.

A la fin Nous tenons à remercier tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce travail de près ou de loin .

Je dédie ce modeste travail à:

Mes très chers parents.

Mes sœurs.

Mon frère.

Toute ma famille.

Toutes mes amies , spécialement afaf.

Mon binôme.

Et tous mes enseignants.

Choubaïla.

Je dédie ce modeste travail à :

Ma très chère maman.

Ma petite sœur ibtihale.

Mon frère Mohamed.

Mon oncle Noureddine.

Toute ma famille.

Toutes mes amies, spécialement hinde.

Mon binôme choubaila.

Et tous mes enseignants.

Chaimaa.

Table des matières

Résumé 1

Abstract 2

ملخص 3

Remerciements 4

Dédicace 1 6

Dédicace 2 7

Introduction 10

1 **Généralités sur les graphes** 13

.1.1 Notions de base 13

.1.2 Quelques paramètres liés à un graphe 15

.1.3 Graphes remarquables 16

.1.4 Connexité 19

.1.5 Graphes dérivés d'un graphe 20

.1.5.1 Sous-graphes et graphes partiels 20

.1.5.2 Graphe adjoint 20

.1.5.3 Graphe complémentaire 20

.1.5.4 Subdivision 21

.1.6 Opérations sur les graphes 21

.1.6.1 Union de deux graphes . . . 21
.1.6.2 Joint de deux graphes . . . 22
.1.6.3 Produit cartésien (carré) de deux graphes . . . 22
.1.6.4 Produit dirèct (croisé) de deux graphes . . . 23
.1.6.5 Produit total de deux graphes . . . 23
.1.7 Notion de la complexité . . . 24
.1.7.1 Complexité d'un algorithme . . . 24
.1.7.2 Problème de décision . . . 24
.1.7.3 Problème d'optimisation . . . 24
.1.7.4 Complexité des problèmes . . . 24
.1.8 Coloratio ı des sommets d'un graphe . . . 25
.1.8.1 Note historique . . . 25
.1.8.2 Coloration propre . . . 25

2 La b-coloration dans les graphes **29**

.2.1 a-coloration, b-coloration et m-degré . . . 29
.2.1.1 a-coloration . . . 29
.2.1.2 b-coloration . . . 30
.2.1.3 m-degré . . . 31
.2.2 Quelques résultats existants sur la b-coloration . . . 32
.2.2.1 Bornes et valeurs exactes de b(G) . . . 32
.2.2.2 Notions liées à la b-coloration . . . 37
.2.2.3 Quelques applications de la b-coloration . . . 39

3 Nombre b-chromatique de certains graphes de puissance **41**

.3.1 Graphe puissance d'une grille . . . 41

.3.2 Graphe puissance d'une chenille complète 50

.3.3 Graphe puissance d'un graphe de diamètre 2 56

CONCLUSION ET PERSPECTIVES **58**

Table des figures

.1.1.1 Deux graphes isomorphes. 15

.1.2.2 Un graphe contenant un stable maximum, une clique maximale et un couplage parfait 16

.1.3.3 Le graphe complet K_8 17

.1.3.4 La chaîne P_9 et le cycle C_9. 17

.1.3.5 Un arbre. 18

.1.3.6 Représentation planaire et non planaire de C_4. 18

.1.3.7 Un graphe biparti 18

.1.3.9 Un graphe cubique 19

.1.3.8 Un graphe biparti complet 19

.1.4.10 Un graphe non connexe et un graphe connexe. 19

.1.5.11 Un graphe et un sous-graphe 20

.1.5.12 Le graphe adjoint de C_4 est lui même 20

.1.5.13 Un graphe et son graphe complémentaire 21

.1.5.14 Une subdivision de la griffe $K_{1,3}$ 21

.1.6.15 Le graphe union de la chaîne P_2 et le cycle C_6 22

.1.6.16 Le graphe joint de deux chaînes P_2 et P_3 22

.1.6.17 Le graphe $P_3 \square P_4$ 23

.1.6.18 Le graphe $P_3 \times p_4$. 23

.1.6.19 Le graphe $P_3 \boxtimes P_4$. 23

.1.8.20 Un graphe G dont $\chi(G) = 4$. 26

.2.1.1 L'étoile $K_{1,8}$, son m-degré est égale à 2 31

.3.0.1 C_6 et son graphe puissance C_6^2 41

.3.1.2 La grille $G_{4,4}$ 42

.3.1.3 Le m-degré et la b-coloration optimale des graphes $G_{n,n}^2$, $n \in \{2,3\}$ 42

.3.1.4 Une b-coloration optimale de $G_{4,4}^2$, avec $m(G_{4,4}^2) = 8$. 43

.3.1.5 Une b-coloration optimale du graphe $G_{5,5}^2$ avec 9 couleurs 43

.3.1.6 Une b-coloration optimale de $G_{7,7}^2$, avec $m(G_{7,7}^2) = 12$ 44

.3.1.7 Le graphe $G_{6,6}^2$ 45

.3.1.8 Une b-coloration du graphe $G_{6,6}^2$ avec 11 couleurs 46

.3.1.9 Le graphe $G_{8,8}^2$ 48

.3.1.10 Une b-coloration de $G_{8,8}^2$ avec 12 couleurs, les b-sommets sont en gris. 49

.3.1.11 Une b-coloration optimale de $G_{9,9}^2$ avec 13 couleurs. 50

.3.2.12 La chenille complète $p_{3,3}$ contient 3 noeuds chacune a 3 feuilles, donc 3 cellules. . 51

.3.2.13 Le m-degrés et la b-coloration optimale des graphes $P_{n,3}^2$, $7 \leq n \leq 10$ 52

.3.2.14 Le m-degré et la b-coloration optimale des graphes $P_{n,3}^2$, $n \in \{11,12\}$ 53

.3.2.15 Le m-degré et la b-coloration optimale des graphes $P_{n,3}^2$, $13 \leq n \leq 14$ 54

.3.2.16 Une b-coloration optimale des graphes $P_{15,3}^2$,$P_{16,3}^2$ et $P_{17,3}^2$, avec 13 couleurs. . . . 54

.3.2.17 Une b-coloration optimale de $P_{18,3}^2$ avec 14 couleurs. 56

.3.3.18 Le nombre b-chromatique de W_6^2 est égal à 6 56

.3.3.19 Le nombre b-chromatique de $K_{1,4}^2$ est égal à 5 57

.3.3.20 Le nombre b-chromatique de $K_{2,3}^2$ est égal à 5 57

INTRODUCTION

La structure mathématique connue sous le nom graphe a la précieuse caractéristique de nous aider à visualiser et analyser une situation ou un problème que nous pouvons rencontrer.
Les congestions des nœuds et de connexion apparaissent dans une grande diversité d'applications, elles peuvent représenter des réseaux physiques, tels que des circuits électriques, des routes ou des molécules organiques. Elles sont également utilisées pour représenter des interactions moins tangibles, par exemples, dans les écosystèmes, les relations sociologiques et les bases de données. Mais comment toute une théorie sur les graphes a apparue dans le 19ème siècle ?

En 1736, Königsberg était une ville de Prusse orientale traversée par un flueve qu'elle a divisé en quatre régions reliées entre elles par 7 ponts. Le problème que se posaient les habitants de cette ville était « est-il possible de prendre une marche dans la ville qui nous fasse passer par chaque pont exactement une fois ? » [35] , ils ont essayé plusieurs chemins mais en vain, le problème restait ouvert jusqu'à que le mathématicien suisse Leonard Euler résolue le problème dans son article publié en 1736, en modélisant la situation par un graphe d'où les rivers de la ville sont les sommets du graphe alors que les arêtes représentent les ponts.
Dés le début de 20ème siècle la théorie des graphes a devenu toute une branche des mathématiques grâce aux travaux de König, Menger, Berg, Erdös et Cauchy, ensuite, elle a connue une croissance rapide d'où plus de 1000 articles sur les

problèmes de la théorie des graphes ont été publiés chaque année au cours de la dernière décennie.

En raisons de ses nombreux problèmes et ses applications fascinantes ainsi que la beauté pure du sujet, la coloration des graphes a devenu le thème qu'attire plus l'attention et la curiosité des chercheurs en théorie des graphes, la coloration des graphes traite le partitionnement d'un ensemble d'objets en classes selon certaines règles, plus précisément elle représente une affectation d'étiquettes appelées couleurs à des éléments d'un graphe (sommets, arêtes ,sommets et arêtes) sous certaines contraintes, ces dernières déterminent le type de la coloration, le type le plus connu est le cas ou chaque deux sommets voisins n'aient pas la même couleur (il s'agit d'une coloration propre) puis on s'intéressent à minimiser le nombre des couleurs utilisées qui est appelé le nombre chromatique noté $\chi(G)$ ce qui permet d'optimiser le nombre des machines, des allocations ,des jours d'examens ou des conteneurs qui sont modélisés par ces couleurs .

D'autres types de colorations sont dérivées du type classique (coloration de Grundy, a-coloration, b-coloration ...etc), la plupart de ces colorations cherchent à minimiser le nombre des couleurs tandis que, l'affectation d'une b-coloration consiste à utiliser le nombre maximum des couleurs pour réaliser une coloration propre dont chaque classe de couleurs doit contenir au moins un sommet qui a au moins un voisin dans chacune des autres classes. [25, 32]
justement notre étude se base sur cette dernière pour la richesse de son champ de recherche et ses applications différentes. Ce mémoire s'articule autour de 3

chapitres :

Le premier chapitre englobe les principales définitions et notations nécessaires

pour une bonne compréhension de ce travail, un petit aperçu de la théorie de complexité des algorithmes et également, la définition de la coloration classique et bien sur quelques résultats existantes sur le nombre chromatique.

Dans le **deuxième chapitre** nous présentons quelques types de coloration en concentrant sur les bornes et les valeurs exactes du nombre b-chromatique pour certaines classe de graphes ainsi que, les axes importantes de la b- coloration (b-continuité, b-perfection et b- monotonie).

Pour le **dernier chapitre** nous donnons des valeurs exactes du nombre b-chromatique pour certains graphes de puissance.

Ce mémoire s'achève par une conclusion et quelques perspectives.

CHAPITRE 1 Généralités sur les graphes

Dans ce chapitre, nous présenterons quelques notions essentielles sur les graphes, nous parlerons également de la complexité des algorithmes et des problèmes de décision, ensuite, nous rappelons la définition de la coloration propre et la coloration minimale, à la fin, nous donnons quelques bornes et résultats existants sur le nombre chromatique $\chi(G)$.

Pour plus d'informations sur ces notions, le lecteur peut se référer aux ouvrages C. Berge [4], C. Roux [34], N. Hartsfield, R. Gerha [21], J. Gross, J. Yelien [19, 20], G. Chartrand [11], J. Aldous, R. Wilson [2] et C. Vasudec [37].

.1.1 Notions de base

Un graphe G est défini par un couple $(V(G), E(G))$, d'où $V(G)$ est un ensemble de sommets et $E(G)$ est un ensemble de paires de sommets appelées arêtes. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous notons simplement V et E. La cardinalité de l'ensemble V(G) donc représente le nombre des sommets du graphe appelée l'ordre de G également la cardinalité de l'ensemble E(G) représente le nombre de ses arêtes dite la taille de G, notée m.

— Deux sommets sont adjacents (voisins) s'ils sont reliés par une arête, deux arêtes ayant un sommet en communs sont aussi dites adjacentes, alors qu'une arête est dite incidente à un sommet, si ce dernier est une extrémité de cette arête.

— Le degré d'un sommet v d'un graphe G, noté $d_G(v)$, est égale au nombre de ses voisins.

— Le voisinage ouvert d'un sommet $v \in V(G)$ est le sous-ensemble de tous les voisins de v défini comme suit :

$$N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$$

— Le voisinage fermé d'un sommet $v \in V(G)$ est le sous-ensemble contenant v et tous ses voisins défini par :

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$$

— Le voisinage privé d'un sommet $v \in V(G)$ par rapport un sous ensemble $S \subseteq V(G)$ est l'ensemble noté $pn[v, S]$, contenant les sommets qui sont dans S et possèdent v comme voisin unique :

$$pn[v, S] = \{u : N_G[v] \cap S = v\}$$

— Un sommet isolé est de degré 0, et il est pendant s'il est de degré 1.
L'arête incidente à un sommet pendant est dite arête pendante, ainsi le voisin d'un sommet pendant est appelé sommet support.

— Un sommet universel est le sommet adjacent à tous les sommets restants du graphe G.

— Une boucle est une arête dont les deux extrémités sont confondues.

— Les arêtes multiples sont des arêtes reliant les même sommets.
Un graphe est dit simple s'il ne contient ni boucles ni arêtes multiples.

— Dans un graphe connexe G=(V,E), la distance entre deux sommets v_1 et v_2, notée $d_G(v_1, v_2)$ est la longueur de la plus courte chaîne reliant ces deux sommets.

— Le diamètre d'un graphe G, noté $Diam(G)$ est la plus grande distance entre une paire de sommets :

$$Diam(G) = \max_{v_1, v_2 \in V(G)} \{d_G(v_1, v_2)\}$$

— Deux graphes G et H d'ordre n sont isomorphes (on écrit $G \simeq H$) s'il existe

un bijection définie par :

$\varphi : V(G) \to V(H)$ tel que $\forall v_1, v_2 \in V(G), v_1 v_2 \in E(G) \Leftrightarrow \varphi(v_1)\varphi(v_2) \in E(H)$

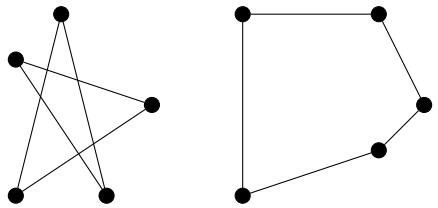


FIGURE .1.1.1 – Deux graphes isomorphes.

.1.2 Quelques paramètres liés à un graphe

-Le degré maximum d'un graphe G, noté $\Delta(G)$, est défini par : $\Delta(G) = max\{d_G(v) : v \in V(G)\}$.

-Le degré minimum d'un graphe G noté δ est défini par : $\delta(G) = min\{d_G(v) : v \in V(G)\}$.

- Le m-degré d'un graphe G avec $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, noté $m(G)$, représente le plus grand entier m tel que G possède au moins m sommets de degré au moins $(m-1)$. Il est définie comme suit : $m(G) = \{i : deg(v_i) \geq i - 1\}$.

Définition 1. — *Un stable est un sous-ensemble des sommets $S \subseteq V(G)$ sans arêtes (deux à deux non adjacents) et on écrit $v_i, v_j \in S \Leftrightarrow v_i v_j \notin E(G)$.*

— *Un stable est dit maximum au sens d'inclusion si $\forall v_i \in V(G) \setminus S, S \cup \{v_i\}$ n'est pas un stable. Parmi tous les stables possibles dans un graphe G celui qui a la cardinalité maximale est appelé stable maximum de taille maximale notée $\alpha(G)$ (appelé nombre de stabilité).*

— *Une clique est un sous-ensemble des sommets $C \subseteq V(G)$ deux à deux adjacents $v_i, v_j \in C \Leftrightarrow v_i, v_j \in E(G)$, $\omega(G)$ est la cardinalité de plus grande clique que possède le graphe G.*

— *Un couplage dans un graphe G est un sous-ensemble des arêtes $M \subseteq E(G)$ deux à deux non adjacentes , un couplage M est dit maximum (au sens d'inclusion) si : $\forall e_i \in E(G) \setminus M, M \cup \{e_i\}$ n'est pas un couplage .*

— *La taille du couplage de cardinalité maximale est notée $\beta(G)$.*

— *Un couplage est appelé parfait s'il sature tous les sommets du graphe G dans ce cas : $\beta(G) = \frac{n}{2}$.*

Exemple.

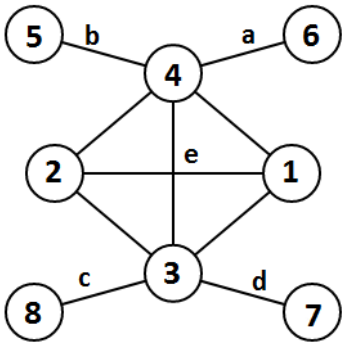


FIGURE .1.2.2 – Un graphe contenant un stable maximum, une clique maximale et un couplage parfait

Un stable maximum est $\{5,6,7,8\}$, une clique maximale est $\{4,1,2,3\}$, un couplage parfait est $\{a,b,c,d,e\}$.

.1.3 Graphes remarquables

— Un graphe discrèt noté O_n est un graphe sans arêtes , autrement dit $\Delta(G) = 0$.

— Un graphe complet noté K_n , est un graphe d'ordre n dont tous les sommets sont deux à deux adjacents, c'est-à-dire : $\forall v \in V(G), deg(v) = n-1$.

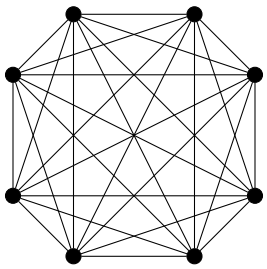


FIGURE .1.3.3 – Le graphe complet K_8

— Une chaîne notée P_n est une suite alternative sommet-arête

$P_n = \langle v_1, e_1, v_2, e_2, \cdots, v_{n-1}, e_{m-1}, v_n \rangle$.

La longueur d'une chaîne est égale à $n-1$ (nombre de ses arêtes). Une chaîne passant une et une seule fois par chacune de ses arêtes est dite simple. Une chaîne hamiltonienne est une chaîne qui passe une fois et une seule par chaque sommet du graphe. Une chaîne eulérienne est une chaîne qui parcourt toutes les arêtes d'un graphe connexe une et une seule fois.

— Un cycle notée C_n est une chaîne fermée (les deux sommets d'extrémité sont confondues).

La longueur d'un cycle est égale au nombre de ses arêtes. Un cycle hamiltonien (respectivement eulerien) est une chaîne hamiltonienne (respectivement eulerienne) a les deux extrémités confondues.

Définition 2. *La maille d'un graphe G, notée $g(G)$, est la longueur du plus court de ses cycles.*

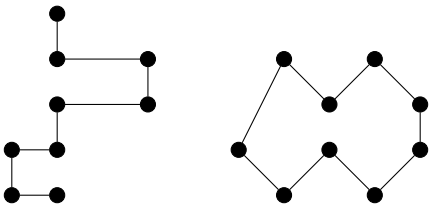


FIGURE .1.3.4 – La chaîne P_9 et le cycle C_9.

— Un arbre noté T est un graphe connexe et sans cycle. Tout arbre d'ordre n possède exactement $(n-1)$ arêtes.

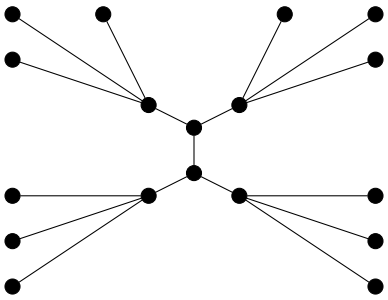


FIGURE .1.3.5 – Un arbre.

— Une forêt est un graphe non connexe où chaque composante connexe est un arbre.

— Un graphe planaire est un graphe admettant une représentation tel que aucune arête n'en croise une autre.

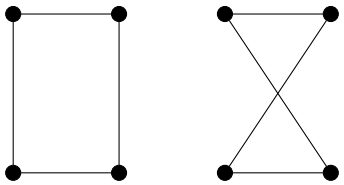


FIGURE .1.3.6 – Représentation planaire et non planaire de C_4.

— Un graphe biparti noté $B_{X,Y}$ est un graphe dont son ensemble de sommets V admet un partitionnement en deux stables X et Y, on écrit :

$$V = X \cup Y \ , \ X \cap Y = \emptyset \ , \ \forall v_i v_j \in E(G) \Rightarrow v_i \in X, v_j \in Y \ .$$

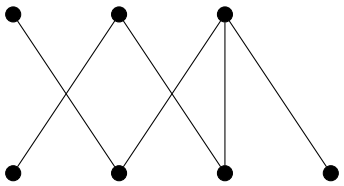


FIGURE .1.3.7 – Un graphe biparti

— Un graphe biparti complet noté $K_{m,n}$ est un graphe biparti dont l'ensemble des sommets est l'union de deux stables X de cardinalité m et Y de cardinalité n , de plus ce graphe possède le nombre maximum des arêtes entre les deux stables.

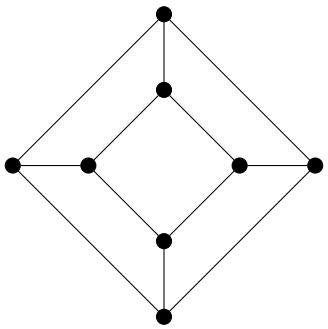


FIGURE .1.3.9 – Un graphe cubique

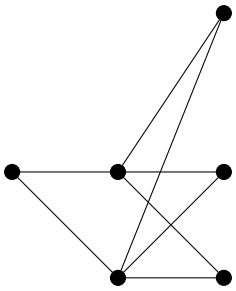


FIGURE .1.3.8 – Un graphe biparti complet

— Un graphe r-régulier est un graphe dont tous les sommets ayant le même degré r. Si $r = 3$ alors le graphe est dit cubique.

.1.4 Connexité

Deux sommets $v_1, v_2 \in V(G)$ d'un graphe G sont connexes s'il existe au moins une chaîne joignant v_1 et v_2. Un graphe $G = (V, E)$ est connexe si pour chaque paire de sommets distincts $v, u \in V$, il existe une chaîne joignant v et u. Une composante connexe d'un graphe est un sous-graphe maximal connexe.

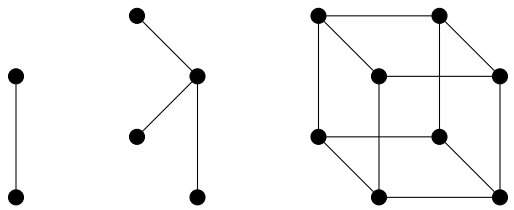


FIGURE .1.4.10 – Un graphe non connexe et un graphe connexe.

.1.5 Graphes dérivés d'un graphe

.1.5.1 Sous-graphes et graphes partiels

Soit G = (V, E) un graphe simple

— $H = (V', E')$ est un graphe partiel de G si $V' = V$ et $E' \subseteq E$.

— $H = (V', E')$ est un sous graphe de G si $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$. En outre, si $E = \{uv \in E : u, v \in V'\}$, c'est à dire les arêtes sont celles de E ayant leurs deux extrémités dans V' alors H est dit sous graphe induit, noté $G[V']$.

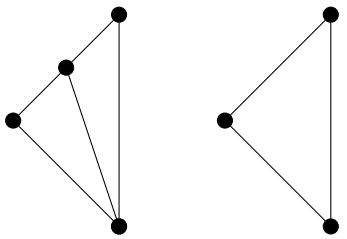


FIGURE .1.5.11 – Un graphe et un sous-graphe

.1.5.2 Graphe adjoint

Le graphe adjoint d'un graphe $G(V, E)$ noté $L(G)$ est le graphe dont chaque sommet représente une arête de G, en plus deux sommets dans $L(G)$ sont voisins si et seulement si les deux arêtes équivalentes dans G sont adjacentes.

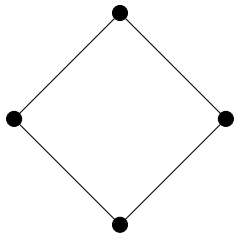


FIGURE .1.5.12 – Le graphe adjoint de C_4 est lui même

.1.5.3 Graphe complémentaire

Le graphe complémentaire d'un graphe G noté $\overline{G}$ possède le même ensemble des sommets du graphe G et tel que deux sommets dans $\overline{G}$ sont adjacents si et seulement si ne sont pas dans G, on écrit :

$$\forall v_i v_j \in E(\overline{G}) \Leftrightarrow v_i v_j \notin E(G)$$

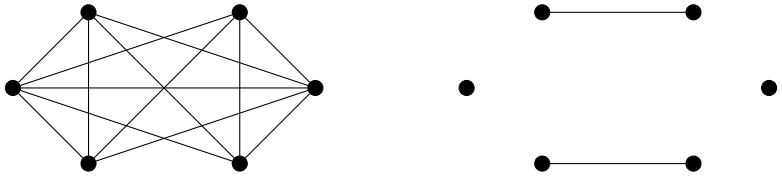


FIGURE .1.5.13 – Un graphe et son graphe complémentaire

Remarque.

— Le graphe complémentaire de $\overline{G}$ est identique au graphe G.

— Un graphe isomorphe à son graphe complémentaire est dit auto-complémentaire.

.1.5.4 Subdivision

Le graphe subdivisé d'un graphe G est obtenu en remplaçant chaque arête $v_i v_j$du graphe G par un nouveau sommet v_k et deux arêtes $v_i v_k$ et $v_k v_j$.

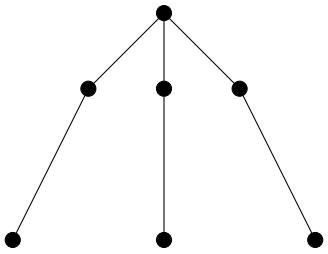


FIGURE .1.5.14 – Une subdivision de la griffe $K_{1,3}$

.1.6 Opérations sur les graphes

.1.6.1 Union de deux graphes

Soient $G = (V_G, E_G)$ et $H = (V_H, E_H)$ deux graphes simples , le graphe union est défini par :

$$G + H = (V_G \cup V_H, E_G \cup E_H)$$

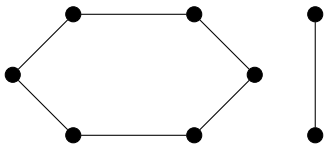


FIGURE .1.6.15 – Le graphe union de la chaîne P_2 et le cycle C_6

.1.6.2 Joint de deux graphes

Soient $G = (V_G, E_G)$ et $H = (V_H, E_H)$ deux graphes simples , le graphe joint noté $G + H$ est une copie du graphe union en ajoutant toutes les arêtes possibles entre les graphes G et H, on peut également écrire :

$$G \vee H = (V_G \cup V_H, E_G \cup E_H \cup E_{GH})$$

avec $E_{GH} = \{v_i v_j : v_i \in V(G) \text{ et } v_j \in V(H)\}$

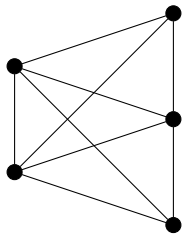


FIGURE .1.6.16 – Le graphe joint de deux chaînes P_2 et P_3

.1.6.3 Produit cartésien (carré) de deux graphes

Soient $G = (V_G, E_G)$ et $H = (V_H, E_H)$ deux graphes simples , le produit cartésien est le graphe $G \square H$ dont l'ensemble des sommets est défini comme suit :

$$V(\text{G } \square \text{H}) = \{(v_i, v_j) : v_i \in V(G) \text{et } v_j \in V(H)\}$$

D'ou deux sommets (v_i, v_j) et (v_k, v_l) sont adjacents si et seulement si :

$$v_i = v_k \text{ et } v_j v_l \in E(H) \text{ ou bien , } v_j = v_l \text{ et } v_i v_k \in E(G)$$

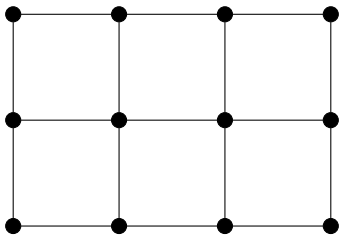


FIGURE .1.6.17 – Le graphe $P_3 \square P_4$

.1.6.4 Produit dirèct (croisé) de deux graphes

Soient $G = (V_G, E_G)$ et $H = (V_H, E_H)$ deux graphes simples , le produit dirècte est le graphe $G \times H$ dont l'ensemble des sommets est donné par :

$$V(G \times H) = \{(v_i, v_j) : v_i \in V(G) \text{ et } v_j \in V(H)\}$$

et deux sommets (v_i, v_j) et (v_k, v_l) sont adjacents si et seulement si :

$$v_i v_j \in E(G) \text{ et } v_k v_l \in E(H)$$

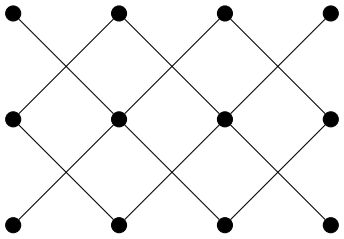


FIGURE .1.6.18 – Le graphe $P_3 \times p_4$.

.1.6.5 Produit total de deux graphes

Soient $G = (V_G, E_G)$ et $H = (V_H, E_H)$ deux graphes simples , le graphe produit total noté $G \boxtimes H$ est le graphe union de deux graphes $G \times H$ et $G \square H$.

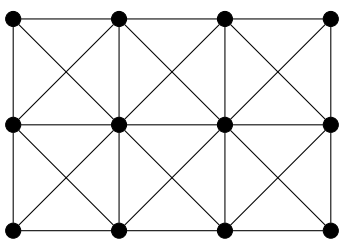


FIGURE .1.6.19 – Le graphe $P_3 \boxtimes P_4$.

.1.7 Notion de la complexité

.1.7.1 Complexité d'un algorithme

La complexité d'un algorithme est la comparaison des algorithmes selon leurs durée d'exécution et plus précisément selon le nombre des opérations élémentaires $(+, -, /, *, test, ...)$ qu'il effectue à fin d'atteindre la solution, si ce nombre est borné par un polynôme de même taille que le problème donné alors l'algorithme est dit polynômial ou bien efficace.
Egalement un problème donné est dit polynômial s'il existe un algorithme efficace qui peut le résoudre.

.1.7.2 Problème de décision

Un problème de décision est une question de décidabilité au sens algorithmique autrement dit une question dont la réponse est "oui" ou "non".

.1.7.3 Problème d'optimisation

Un problème d'optimisation est un problème qui vise à optimiser une fonction objectif sur un domaine fini.

Remarque. Tout problème d'optimisation possède un problème de décision équivalent.

.1.7.4 Complexité des problèmes

La complexité des problèmes de décision est une classification selon la difficulté de résolution.

— La classe P contient les problèmes de décision faciles qui peuvent êtres résolut en temps polynômial par un algorithme déterministe.

— La classe NP contient les problèmes de décision faciles qui peuvent êtres résolut en temps polynômial par un algorithme non déterministe.

— La Classe NP-complet est une sous classe de la classe NP qui contient les problème les plus difficiles.

Remarque.

— un problème d'optimisation est dit NP-difficile si son problème de décision équivalent appartient à la classe NP-complet.

— $P \subseteq NP$

.1.8 Coloration des sommets d'un graphe

.1.8.1 Note historique

En 1852, Francis GUTHRIE a posé le célèbre problème des quatre couleurs : "est-il possible de colorier toute carte géographique avec exactement quatre couleurs de telle sorte que les pays voisins soient colorés différemment?" ce problème a été étudié par plusieurs mathématiciens, mais ce n'est qu'en 1976 qu'une preuve a finalement été obtenue par kneeth APPEL et Wolfgang HAKEN [3]. Leur preuve a impliqué la prise en compte de près de 2000 configurations de pays et a fait un usage intensif de l'ordinateur. Jusqu'à aujourd'hui, aucune preuve simple n'a été découverte. [2]

.1.8.2 Coloration propre

Définition 3. — *Une coloration triviale de G consiste à attribuer à chaque sommet une couleur différente. Ainsi, tout graphe à n sommets est n colorable.*

— *Soit G un graphe simple, une k-coloration de G est une affectation de k couleurs aux sommets du graphe, de telle sorte que, les sommets adjacents se*

voient attribuer des couleurs différentes (une coloration propre). On dit que G est k-colorable.

— *Le nombre chromatique de G, noté $\chi(G)$, est le plus petit entier k pour lequel G est k-colorable.*

— *Une coloration avec $\chi(G)$ couleurs s'appelle une coloration minimale et c'est le type le plus classique des colorations.*

Théorème 1. *[25] Le problème de décision lié au paramètre $\chi(G)$ est NP-complet dans le cas général.*

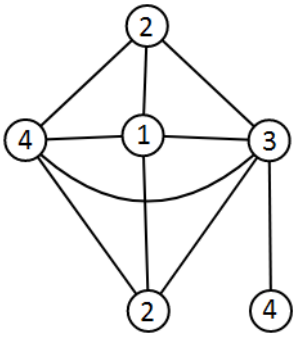


FIGURE .1.8.20 – Un graphe G dont $\chi(G) = 4$.

Proposition 1. *[4] Soit G un graphe d'ordre n alors :*

$$1 \leq \chi(G) \leq n$$

De plus, si G est un graphe discrèt alors $\chi(G) = 1$ et si G est un graphe complet alors $\chi(G) = n$.

Proposition 2. *[4] Pour tout entier $n \geq 3$:*

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Théorème 2. *[4] Soit G un graphe biparti d'ordre n :*

$$\chi(G) = 2$$

Proposition 3. *[4] Soit H un sous graphe de G alors :*

$$\chi(H) \leq \chi(G)$$

Par conséquent, si G contient un sous graphe complet d'ordre k alors : $\chi(G) \geq k$.

Proposition 4. *[4] Soit G un graphe d'ordre n possédant une clique maximale de taille $\omega(G)$:*

$$\chi(G) \geq \omega(G)$$

Proposition 5. *[4] Soit G un graphe non connexe qui possède p composantes connexes $C_1, C_2, ..., C_p$, alors :*

$$\chi(G) = max\{\chi(C_j) : 1 \leq j \leq p\}$$

Si nous connaissons les degrés des sommets d'un graphe G, nous pouvons en savoir plus sur son nombre chromatique $\chi(G)$.

Théorème 3. *[10] Soit G un graphe de degré maximum $\Delta(G)$:*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Cette borne est atteinte pour les graphes ayant $\Delta(G) \neq 2$ et admettant le graphe complet $K_{\Delta(G)+1}$ comme composante connexe et pour les graphes qui vérifient $\Delta(G) = 2$ et admettant un cycle impair comme composante connexe.

R.Brooks a amélioré cette borne.

Théorème 4. *[10] Soit G un graphe connexe de degré maximum $\Delta(G)$, si $G \ncong K_n$ et $G \ncong C_n$ avec n impair alors :*

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

Proposition 6. *[4] Soit G un graphe d'ordre n dont le nombre de stabilité est $\alpha(G)$. Alors :*

$$\frac{n}{\alpha(G)} \leq \chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$$

Théorème 5. *[4] Soit G un graphe d'ordre n dont le nombre de stabilité est $\alpha(G)$. Alors :*

$$\chi(G)\alpha(G) \geq n$$

Théorème 6. *[4] Soit G un graphe d'ordre n dont le nombre de stabilité est $\alpha(G)$. Alors :*

$$\chi(G) + \alpha(G) \leq n + 1$$

Théorème 7. *[33] Soit G un graphe et $\overline{G}$ son graphe complémentaire. Alors :*

$$2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1 \quad et \quad n \leq \chi(G).\chi(\overline{G}) \leq (\frac{n+1}{2})^2$$

CHAPITRE 2 La b-coloration dans les graphes

Dans ce chapitre, nous présentons quelques types de coloration des graphes et leurs paramètres associées. Dans ce contexte, nous rappelons les définitions de la a-coloration et la b-coloration nous focalisons essentiellement sur la b-coloration et nombre b-chromatique, ensuite, nous présentons quelques résultats obtenu sur la b-coloration et les bornes du nombre b-chromatique.

.2.1 a-coloration, b-coloration et m-degré

Plusieurs variantes de colorations sont dérivées de la coloration classique, la plupart de ces coloration cherchent à minimiser le nombre de couleurs. Il existe d'autres colorations qui maximisent le nombre de couleurs, parmi ces colorations citons la a-coloration et la b-coloration.

.2.1.1 a-coloration

Etant données une coloration propre d'un graphe G, une façon de réduire le nombre de couleurs à l'aide d'une recoloration de tous les sommets d'une classe de couleurs par une et une seule couleur. Cette manière de recoloration n'est plus valide s'il existe une arête entre chaque paire de couleurs, d'où l'introduction de la a-coloration par Harary, Hedetniemi et Prins en 1967[25].

Définition 4. *Une a-coloration d'un graphe est une coloration propre de sommets de G telle que pour tout paire de couleurs différentes i et j, le sous graphe engendré pas les deux classes i et j, n'est pas stable. Le nombre a-chromatique est le nombre maximum de classes de couleur dans une a-coloration, noté* ψ.

Remarque 1. *Pour un graphe G et un entier k le problème de décider si* $\psi(G) \geq k$ *est NP-complet en général [18].*

.2.1.2 b-coloration

La notion de la a-coloration a inspiré lvring et Manlove [25], à introduire un autre procédé de coloration. En effet, une autre manière de réduire le nombre de couleurs et d'essayer à partir d'une coloration propre donnée du graphe de réduire le nombre de classes de couleur en transférant les sommets d'une même classe de couleur dans les autres classes de couleur. Une telle recoloration n'est plus possible si pour chaque classe il existe au moins un sommet qu'a un voisin dans chacune des autres classes.

Définition 5. *Une b-coloration(ou coloration b-dominante) est une coloration propre telle que toute classe de couleur i contient un sommet adjacent à au moins un sommet de chaque classe de couleur j, avec j≠i. Ce sommet est appelé b-sommet(ou sommet b-dominant) de couleur i. Le nombre b-chromatique est le nombre maximum de classes de couleurs dans une b-coloration, noté b(G).*

Puisque toute b-coloration est vérifie la définition de la a-coloration et tout χ-coloration est une b-coloration, alors :

$$\chi(G) \leq b(G) \leq \psi(G)$$

Définition 6. *Soit c une b-coloration d'un graphe G avec b(G) couleurs, un ensemble S des sommets de G est dit b-système de c s'il satisfait les deux conditions suivants :*

$$|S| = b(G)$$

$$\forall x, y \in S, c(x) \neq c(y)$$

.2.1.3 m-degré

Définition 7. *Pour qu'un graphe G admette une coloration b-dominante avec k couleurs, il doit avoir au moins k sommets de degré supérieur ou égal à k-1. De cette observation, Irving et Manlove [14], ont défini le m-degré d'un graphe G, noté m(G) qui donne une borne supérieur du nombre b-chromatique.*

Définition 8. *Soit les sommets $v_1, v_2, ...v_n$ d'un graphe G ordonnés tels que : $d(v_1) \geq d(v_2) \geq ..... \geq d(v_n)$, où $d(v_i)$ est le degré de v_i. Le m-degré de G est défini par :*

$$m(G) = max\{i : d(v_i) \geq i - 1\}$$

Tout sommet v vérifiant $d(v) \geq m(G) - 1$ est dit sommet dense.

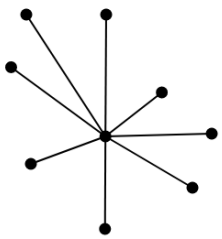


FIGURE .2.1.1 – L'étoile $K_{1,8}$, son m-degré est égale à 2

.2.2 Quelques résultats existants sur la b-coloration

En 1999,Irving et Manlove [25], ont montré que le problème de décision lié au nombre b-chromatique est un problème NP-complet en général, même si en se restreint aux graphe bipartis. Par contre, ce problème est polynomial pour les arbres.[25]

.2.2.1 Bornes et valeurs exactes de b(G)

Comme le problème de détermination de nombre b-chromatique est NP-complet en cas général, cela a incité les chercheurs à établir des bornes qui encadrent ce paramètre. Parmi chercheurs Ivring et Manlove [25] ont prouvé que toute coloration minimale de G avec $\chi(G)$ couleurs est une b-coloration de G, et que tout sommet de degré $\Delta(G)$ peut avoir au maximum $\Delta(G)$ couleurs voisins et prendre pour lui la couleur $\Delta(G)+1$.

Proposition 7. *[25, 32] Soit G un graphe de degré maximum $\Delta(G)$ et $\chi(G)$ son nombre chromatique. Alors :*

$$\chi(G) \leq b(G) \leq \Delta(G)+1$$

Les mêmes auteurs ont montré que m(G) est une borne supérieure du nombre b-chromatique.[25]

Proposition 8. *[25, 32] Pour tout graphe G,*

$$b(G) \leq m(G)$$

Cette borne est atteinte pour les cycle et les chaînes d'ordre $n \geq 5$ et aussi pour les clique.

Proposition 9. *[30] Soient P_n et C_n respectivement une chaîne et un cycle d'ordre n avec $n \geq 5$, alors :*

$$b(P_n) = b(C_n) = 3$$

Dans [29], A. El Sahili et M. Kouider se sont intéressé aux graphes réguliers pour lesquels $b(G) = \Delta(G) + 1$.

Théorème 8. *[29] Soit G un graphe d-régulier sans cycle d'ordre 6 et de maille au moins 5. Alors :*

$$b(G) = d + 1$$

Les même auteurs de [29] ont conjecturé que tout graphe d-régulier G de maille au moins 5 satisfait $b(G) = d + 1$. Dans [9] M. Blidia et al ont donné une réponse négative à ce problème. De ce fait, les même auteurs de [9] ont reformulé ce problème de la façon suivante :

Conjecture[29] : Soit G un graphe d-régulier de maille au moins cinq différent du graphe de Petersen. Alors le nombre b-chromatique de G est $d + 1$. Ils ont également montré que la conjecture présentée en [9] est vraie pour les petites valeurs de d ($d \leq 6$).

Ivring et Manlove, ont remarqué que le m-degré d'un graphe biparti complet $K_{m,n}$ est $m(K_{m,n}) = n + 1$ et son nombre b-chromatique $b(K_{n,n}) = 2$ [25]. Donc la différence entre le m-degré et le nombre b-chromatique peut être large, tandis que ces deux paramètres peuvent être égaux pour d'autres graphes, par exemple le graphe complet K_n. Et ils ont montré aussi que le nombre b-chromatique d'un arbre T est toujours compris entre $m(T)$ et $m(T) - 1$.

Théorème 9. *[25, 32] Tout arbre T vérifie :*

$$m(T) - 1 \leq b(T) \leq m(T)$$

Ivrin et Manlove ont introduit la notion d'un arbre pivoté dans [25, 32], de la manière suivante :

Définition 9. *[25, 32] Un arbre T est dit pivoté si T admet exactement $m(T)$ sommets denses et contient un sommet v spécial et unique appelé pivot, tel que, :*

- *v n'est pas dense.*
- *Tout sommet dense de T est adjacent a v ou a un sommet dense adjacent à v.*
- *Tout sommet dense de T adjacent à v et a un autre sommet dense est de degré $m(T) - 1$.*

Ivring et Manlove ont prouvé que le nombre b-chromatique d'un arbre T est toujours compris entre $m(T)$ et $m(T) - 1$.

Théorème 10. *[25] Soit T un arbre pivoté. Alors :*

$b(T) = m(T) - 1$. Sinon $b(T) = m(T)$.

Kratchovbil et al [31], ont montré que $b(G) = m(G)$ est un problème NP-complet, même si G est un graphe biparti connexe avec $m(G) = \Delta(G) + 1$.
Dans [30], Kouider et Mahéo ont déterminé la valeur exacte du nombre b-chromatique pour les graphe simple parmi ces graphe le graphe stable $b(S_n) = 1$ et le graphe complet $b(K_n) = n$.

Théorème 11. *[30] Soit G un graphe d'ordre n et $\bar{G}$ son complémentaire. Alors :*

$$b(G) + b(\bar{G}) \leq n + 1 \text{ et } b(G)b(\bar{G}) \geq n$$

Dans [30], Kouider et Mahéo ont fournit d'autre borne supérieure pour le nombre b-chromatique.

Proposition 10. *[30] Pour tout graphe G de taille m et $\alpha(G)$ son nombre de stabilité. On a :*

$$\frac{n}{\alpha(G)} \leq b(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2m}$$

Les même auteurs ont borné le nombre b-chromatique en fonction de son nombre de stabilité $\alpha(G)$.

Proposition 11. *[30] Soient G un graphe connexe d'ordre n et $\alpha(G)$ son nombre de stabilité. Alors :*

$$b(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$$

Proposition 12. *[30] Si G un graphe non connexe et $C_1, C_2, ...C_p$ avec $p \geq 2$ ses composantes connexe. Alors :*

$$m(G) \geq max\{b(C_i), 1 \leq i \leq p\}$$

Dans [30], Kouider et Mahéo ont déterminé la valeurs exacte du nombre b-chromatique du joint de deux graphes.

Théorème 12. *[22] Soient G_1, G_2 deux graphes de sommets disjoint et $G = G_1 \vee G_2$ le joint de G_1 et G_2. Alors :*

$$b(G) = b(G_1) + b(G_2)$$

Dans [27], Alkhateeb et Kohl ont donné une borne supérieure du nombre b-chromatique d'un graphe G.

Théorème 13. *[27] Soit G un graphe d'ordre n, de degré maximum $\Delta(G)$ et de degré minimum $\delta(G)$. Alors :*

$$b(G) \leq \lfloor \frac{2n - \Delta(G) - \delta(G) - 3}{3n - 2\Delta(G) - \delta(G) - 4} n \rfloor$$

M. Kouider et M. Zaker [28] ont borné le nombre b-chromatique pour le graphe complémentaire d'un graphe biparti.

Théorème 14. *[28] Soit G le complémentaire d'un graphe biparti et $\omega(G)$ sa clique maximum. Alors :*

$$b(G) \leq \frac{4\omega(G)}{3}$$

Les même auteurs de [28] ont introduit la borne supérieur de b(G) dans le cas d'un graphe sans griffes généralisées $(K_{1,t})$ et ils ont montré aussi que cette borne est atteinte.

Théorème 15. *[28] Si G est un graphe sans $K_{1,t}$. Alors :*

$$b(G) \leq (t-1)(\chi(G) - 1) + 1$$

Proposition 13. *[28] Pour tout entier $t \geq 3$ et k, il existe un graphe sans $K_{1,t}$, tel que :*

$$\chi(G) = k \text{ et } b(G) = (t-1)(k-1) + 1$$

Si $t = 3$ alors G est dit sans griffe.

Corollaire 1. *[28] Si G est sans griffe. Alors : $b(G) \leq 2\chi(G) - 1$.*

Dans [12], C.Christen et S.Selkow ont montré que tout graphe sans griffe avec $\alpha(G) \geq 3$ satisfait l'inégalité suivante : $\chi(G) \leq 2\omega(G)$. De ce fait, on a le résultat suivant.

Corollaire 2. *[28] Tout graphe sans griffe avec $\alpha(G) \geq 3$ satisfait :*

$$b(G) \leq 4\omega(G) - 1$$

Dans [6], M Blidia et al ont donné une autre borne du nombre b-chromatique, mais cette fois dans le cas d'un graphe différent du graphe complet.

Théorème 16. *[6] Soit G un graphe d'ordre n différent du graphe complet et $\omega(G)$ la taille de sa clique maximum. Alors :*

$$b(G) \leq \lfloor \frac{n + \omega(G) - 1}{2} \rfloor$$

.2.2.2 Notions liées à la b-coloration

Graphes b-continus

Dans[16], Faik appelé l'interpolation du nombre b-chromatique "b-continuité".

Définition 10. *Un graphe G est dit b-continu, s'il admet une b-coloration avec k couleurs pour tout entier k, avec $\chi(G) \leq k \leq b(G)$. L'intervalle $[\chi(G), b(G)]$ est dit le b-spectre du graphe G.*

Le problème de décision lié a la b-continuité d'un graphe G est NP-complet en général, même si $\chi(G)$ et $b(G)$ sont connus, et même si G est un graphe biparti. Ceci nous amène a étudier la b-continuité dans des classes de graphes comme les graphes triangulés [16], les graphes planaires [26].
Dans[27], Alkhateeb et Kohl ont étudié les graphes non connexes b-continus et la relation entre la b-continuité et les trois paramètres : $(\omega(G), \alpha(G), \delta(G))$.

Graphes b-parfaits

Dans [22], Hoàng et Kouider ont introduit la classe des graphes b-parfaits.

Définition 11. *Un graphe G est dit b-parfait si tout sous-graphe induit H de G vérifie* $b(H) = \chi(H)$.

Théorème 17. *[22] Un graphe biparti est b-parfait si et seulement s'il est sans* p_5, *sans* $p_3 + p_4$ *et sans* $3p_3$.

Théorème 18. *[22] Tout graphe sans* $2k_2$ *et sans* $\bar{p}_5$ *est b-parfait.*

Dans [23, 24], C.T.Hoàng et al ont prouvé qu'un graphe est b-parfait si et seulement s'il ne contient pas un membre d'une certaine liste de vingt-deux graphes comme sous-graphe induit.

Graphes b-monotones

Dans [22], Bonomo et al ont introduit la notion d'un graphe b-monotone comme suit :

Définition 12. *Un graphe G est dit b-monotone si pour tout sous-graphe* H_1 *induit de G et tout sous-graphe* H_2 *de* H_1 *vérifie :*

$$b(H_2) \leq b(H_1)$$

Les même auteurs de [22] ont ont montré que les graphes sans P_4 et les graphes sans P_4-sparse sont b-monotones. Il est à noter qu'il existe des graphes qui ne sont pas b-monotones.

Graphes b-critiques

Un graphe critique est un graphe dans lequel chaque sommet ou arête est critique.

Lorsqu'on modifie un graphe par certaines opération telles que la suppression ou

l'ajout des sommets ou d'arêtes, il convient de regarder l'effet de ces modification sur le nombre b-chromatique pour certaines classes particulières de graphes. Le nombre b-chromatique d'un graphe peut augmenter, diminuer ou rester inchangé. De ce fait, on peut classer les graphes critiques par rapport au nombre b-chromatique en six classes de graphes. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.

La classe des graphes sommet $b^{=}$-critique : $\forall v \in V(G), b(G-v) = b(G)$.
La classe des graphes arête $b^{=}$-critique : $\forall e \in V(G), b(G-e) = b(G)$.
La classe des graphes sommet b^{+}-critique : $\forall v \in V(G), b(G-v) > b(G)$.
La classe des graphes arête b^{+}-critique : $\forall e \in V(G), b(G-e) > b(G)$.
La classe des graphes sommet b^{-}-critique : $\forall v \in V(G), b(G-v) < b(G)$.
La classe des graphes arête b^{-}-critique : $\forall e \in V(G), b(G-e) < b(G)$.

Exemple. Les chaînes P_n d'ordre $n \geq 8$ et les cycles C_m d'ordre $m \geq 6$ sont des graphes sommet $b^{=}$-critiques et si $n \leq 7$ et $m \leq 5$, alors il sont arête $b^{=}$- critiques. Les graphes complets sont des graphes sommet b^{-}-critiques et arête b^{-}-critiques.

Dans[7], Blidia et al ont caractérisé les arbres sommet b^{-}-critiques. Dans[8], Ikhlef Eschouf et al ont étudié les graphes sommet b^{+}-critiques. Les auteurs de [5] , ont intéressé à la classe des graphes arête b^{-}-critiques.

.2.2.3 Quelques applications de la b-coloration

La b-coloration a été utilisée dans les problèmes clustering. Un tel problème consiste à regrouper les éléments d'un ensemble de données en classes (ou clusters) de façon que chaque classe comporte des éléments qui sont le plus similaire

possible, et chaque deux éléments de chaque deux classes disjoints sont le plus dissemblables possible.

Dans [14] Effantin et Kheddouci, ont donné un algorithme distribué pour calculer le nombre b-chromatique d'un graphe, et afin d'illustrer leur algorithme, ils ont proposé une application au problème de routage dans les réseaux.
El Ghazel et al [16]. Ont également proposé une méthode de Clustering avec une application dans le domaine médical.
La b-coloration à été appliquée dans certains problème de classification des documents [**?**] et des services web [13].

CHAPITRE 3

Nombre b-chromatique de certains graphes de puissance

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la détermination de la valeur exacte du nombre b-chromatique de certains graphes particuliers, à savoir, le graphe puissance d'une grille $G_{n,n}$ et d'une chenille complète.

Commençons par quelques définitions qui nous seront utiles dans la suite.

Définition 13. *[36] Le graphe puissance d'un graphe $G = (V, E)$ noté G^k, tel que $k \leq 1$, est un graphe qui possède le même ensemble des sommets que G et deux sommets sont adjacents dans G^k s'ils sont à distance au plus k dans G.*

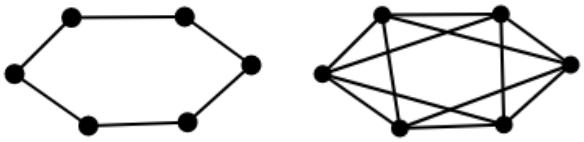


FIGURE .3.0.1 – C_6 et son graphe puissance C_6^2

Remarques.

— Il est évident que pour tout graphe $G^1 \cong G$.

— Dans le reste du chapitre nous nous limitons au cas $k = 2$.

Notre résultat principal se montre dans les sections suivantes .

.3.1 Graphe puissance d'une grille

Dans cette section, on rappelle la définition d'une grille $G_{n,n}$ avant de donner les valeurs exactes du nombre b-chromatique du graphe puissance d'une grille.

Définition 14. *Une grille $G_{n,n}$ tel que $n \geq 2$ est le produit cartésien de deux chaînes d'ordre n.*

Exemple. La Figure 3.1.2 représente la grille $G_{4,4}$ qui est le produit cartésien des deux chaînes P_4 :

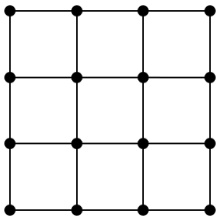
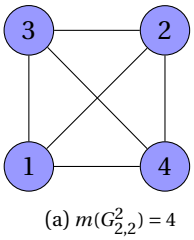


FIGURE .3.1.2 – La grille $G_{4,4}$

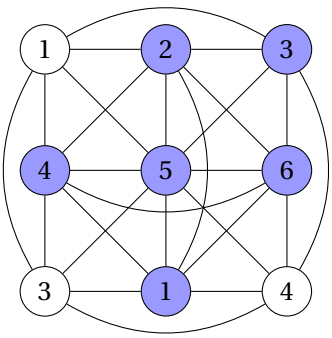
Théorème 19. *Soit $G^2_{n,n}$ le graphe puissance d'une grille. Alors :*

$$b(G^2_{n,n}) = \begin{cases} 2n & si\ n = \{2,3,4\} \\ 2n-1 & si\ n = \{5,6\} \\ 12 & si\ n = \{7,8\} \\ 13 & si\ n \geq 9 \end{cases}$$

Preuve. Tout d'abord il est facile de vérifier que le nombre b-chromatique des graphes $G^2_{n,n}$, $n \in \{2,3,4,5,7\}$ est égal à son m-degré (voir les Figure 3.1.3, 3.1.4, 3.1.5 et 3.1.6).



(a) $m(G^2_{2,2}) = 4$



(b) $m(G^2_{3,3}) = 6$

FIGURE .3.1.3 – Le m-degré et la b-coloration optimale des graphes $G^2_{n,n}$, $n \in \{2,3\}$.

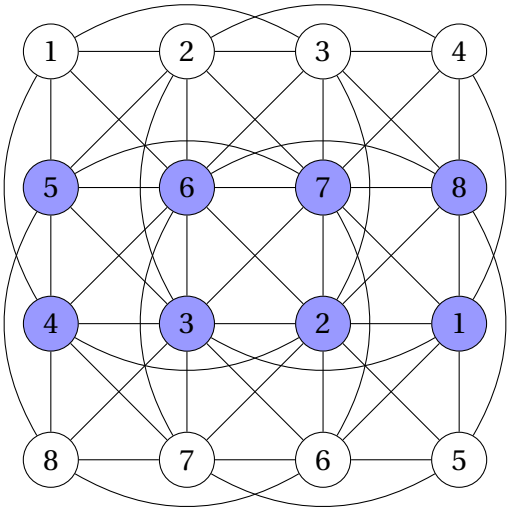


FIGURE .3.1.4 – Une b-coloration optimale de $G^2_{4,4}$, avec $m(G^2_{4,4}) = 8$.

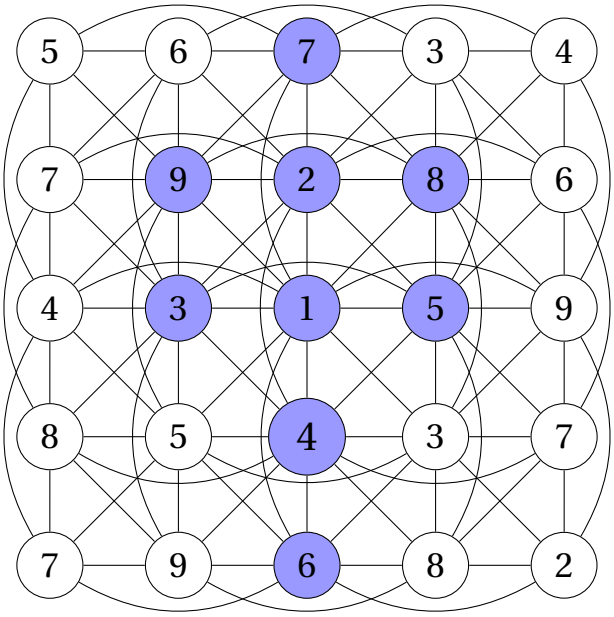


FIGURE .3.1.5 – Une b-coloration optimale du graphe $G^2_{5,5}$ avec 9 couleurs .

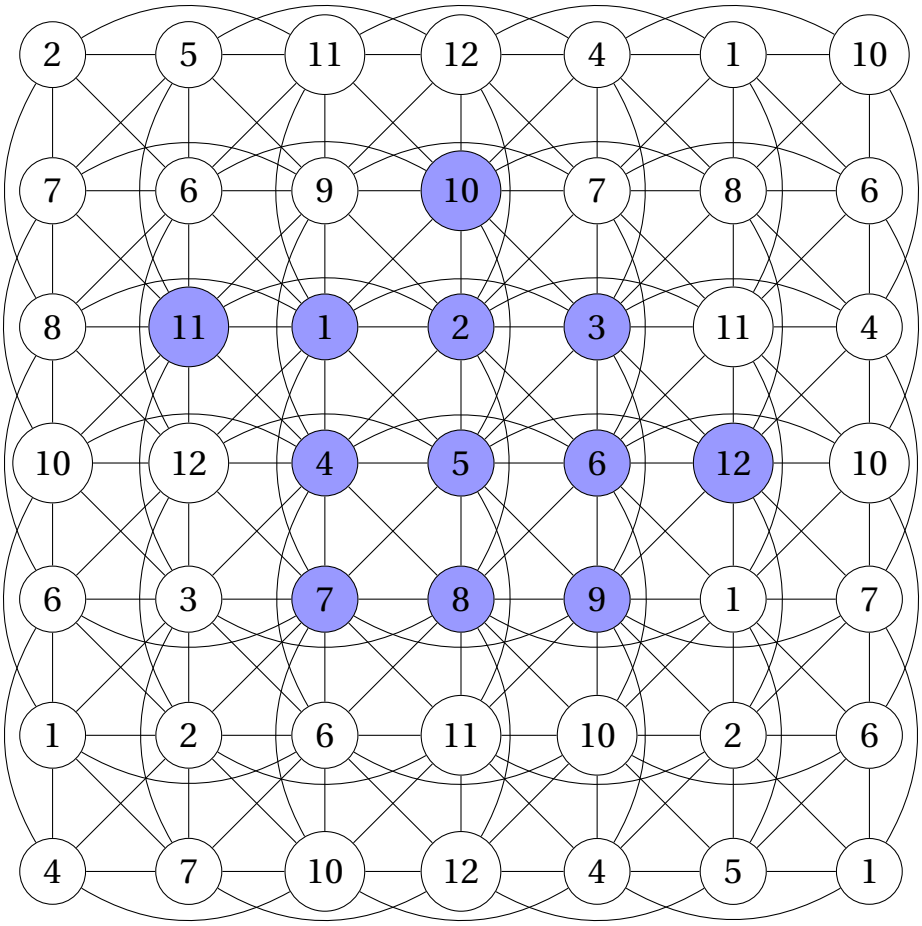


FIGURE .3.1.6 – Une b-coloration optimale de $G^2_{7,7}$, avec $m(G^2_{7,7}) = 12$

Pour $n = 6$, posons $H_1 = G^2_{6,6}$, on peut facilement vérifier que le m-degré de H_1 est 12, (H_1 possède 12 sommets de degré 11 mais il n'a pas au moins 13 sommets de degré au moins 12), alors $b(H_1) \leq 12$.

Supposons que H_1 admet une b-coloration c avec 12 couleurs. Soit D l'ensemble des sommets denses de H_1, et comme $|D| = 12$ alors tous les sommets de D sont des b-sommets et de couleurs distinctes. D'où, les sommets $u_i, 1 \leq n \leq 12$ reçoivent les couleurs $1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11$ et 12, respectivement (sans perte de généralité).

En outre, $\forall u_i, i \in \{1,2,3,6,7,10,11,12\}, deg(u_i) = 11$, de ce fait, ces sommets doivent avoir un voisinage de 11 couleurs distincts.

Le sommet u_5 a besoin des couleurs 11 et 12, on suppose sans perte de géné-

ralité que les sommets v_4 et v_{12} reçoivent les couleurs 11 et 12 respectivement, dans ce cas il ne sera pas possible que les sommet v_9 reçoit l'une des couleurs : $1,2,3,6,10,11$ et 12, car sinon on aura deux voisins de la même couleur, de plus si v_9 a l'une des 5 couleurs restantes, l'un des b-sommets aura une couleur répétée dans son voisinage (s'il reçoit la couleur 7,4 ou bien 9, le sommet u_5 aura une couleur répétée dans son voisinage, et s'il reçoit 8, le sommet u_1 aura deux voisins ayant la couleur 8), contradiction.

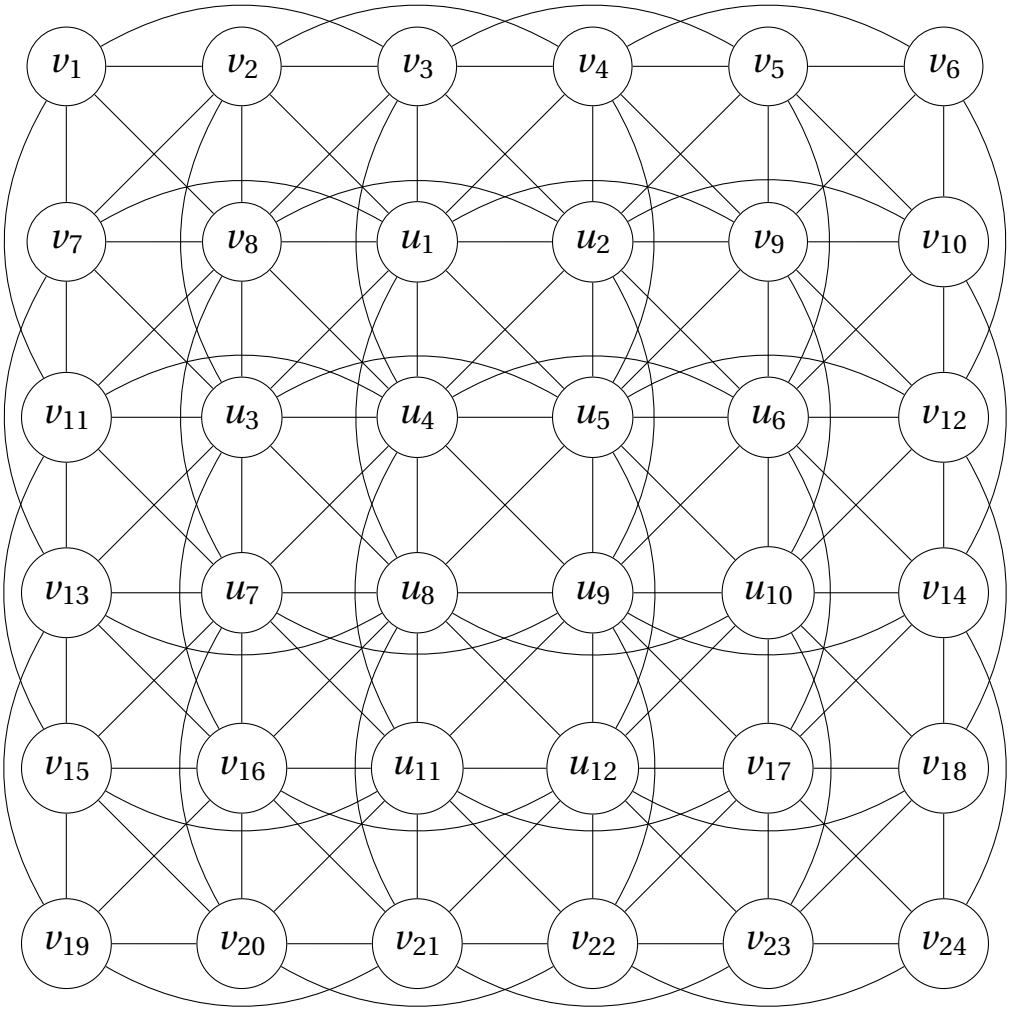


FIGURE .3.1.7 – Le graphe $G^2_{6,6}$

En conséquence, $b(H_1) \leq 11$. La Figure 3.1.8 montre que H_1 admet une b-coloration avec 11 couleurs. Donc $b(H_1) = 11$.

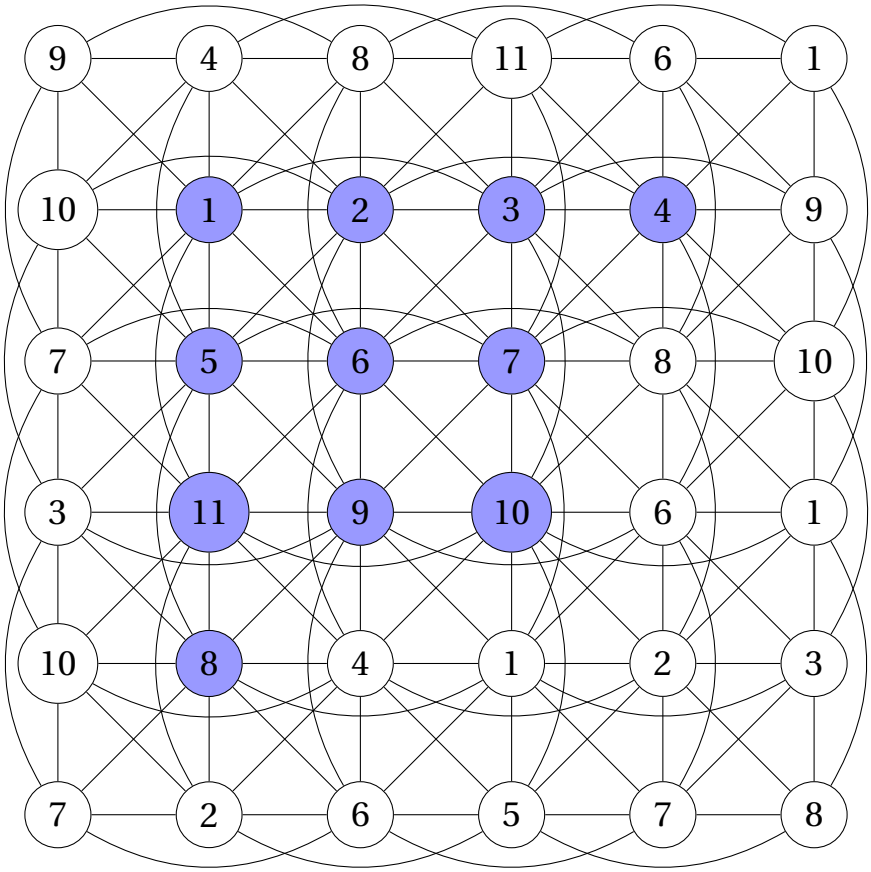


FIGURE .3.1.8 – Une b-coloration du graphe $G^2_{6,6}$ avec 11 couleurs

Pour $n = 8$, posons $H_2 = G^2_{8,8}$. Vu que $\Delta(H_2) = 12$, alors $b(H_2) \leq 13$. Supposons que H_2 admet une b-coloration c avec 13 couleurs et soit D l'ensemble des sommets denses de H_2.

$\forall v_i \in D, deg(v_i) = 12$ tel que $1 \leq i \leq 16$, pour qu'un sommet v_i sera un b-sommet il doit avoir un voisinage de 12 couleurs distincts. On commence d'abord par colorer la clique $\{v_3, v_6, v_7, v_8, v_{11}\}$ par cinq couleurs différents $1, 2, 3, 4$ et 5 . Ensuite, les sommets $v_2, v_5, v_9, v_{10}, v_{12}, v_{14}$ et v_{15} doivent recevoir des couleurs distincts et qui se diffèrent des 5 couleurs précédentes, car sinon l'un des sommets denses aura une couleur répétée dans son voisinage.

De ce fait, les sommets $v_2, v_5, v_9, v_{10}, v_{12}, v_{14}$ et v_{15} reçoivent les couleurs $6, 7, 8, 9, 10, 11$ et 12 respectivement. L'un des 4 sommets denses restants doit être coloré avec la couleur 13, disons v_{13}, en outre, les sommets v_1, v_4, v_{16} reçoivent les couleurs $8, 9$

et 10 respectivement (sans perte de généralité).

Le sommet v_6 a besoin de la couleur 13 pour être un b-sommet et il possède deux voisins pas encore colorés u_{12} et u_{22}, le sommet u_{22} ne peut pas recevoir 13 car sinon le sommet v_9 aura deux 13 dans son voisinage. Par conséquence, le sommet u_{12} reçoit forcément la couleur 13.

D'autre part, le sommet v_7 a aussi besoin de la couleur 13 pour être b-dominant, alors l'un de ses voisins u_{13} et u_{23} doit recevoir 13. Il est clair que u_{13} ne peut pas recevoir la couleur 13 car si c'est le cas la coloration ne sera pas propre, d'où, le sommet u_{23} reçoit 13.

Le sommet u_{11} se manque de la couleur 13, donc l'un de ses voisins pas encore colorés u_{27} et u_{37} reçoit la couleur 13, on suppose que c'est u_{37}, dans ce cas, le sommet v_{14} aura la couleur 13 répétée dans son voisinage. De plus, il est clair que si u_{27} reçoit 13, on aura deux voisins ayant la même couleur, contradiction. D'où, $b(H_2) \leq 12$. D'une autre part, la Figure 3.1.10 présente une b-coloration du graphe H_2 avec 12 couleurs. Donc $b(H_2) = 12$.

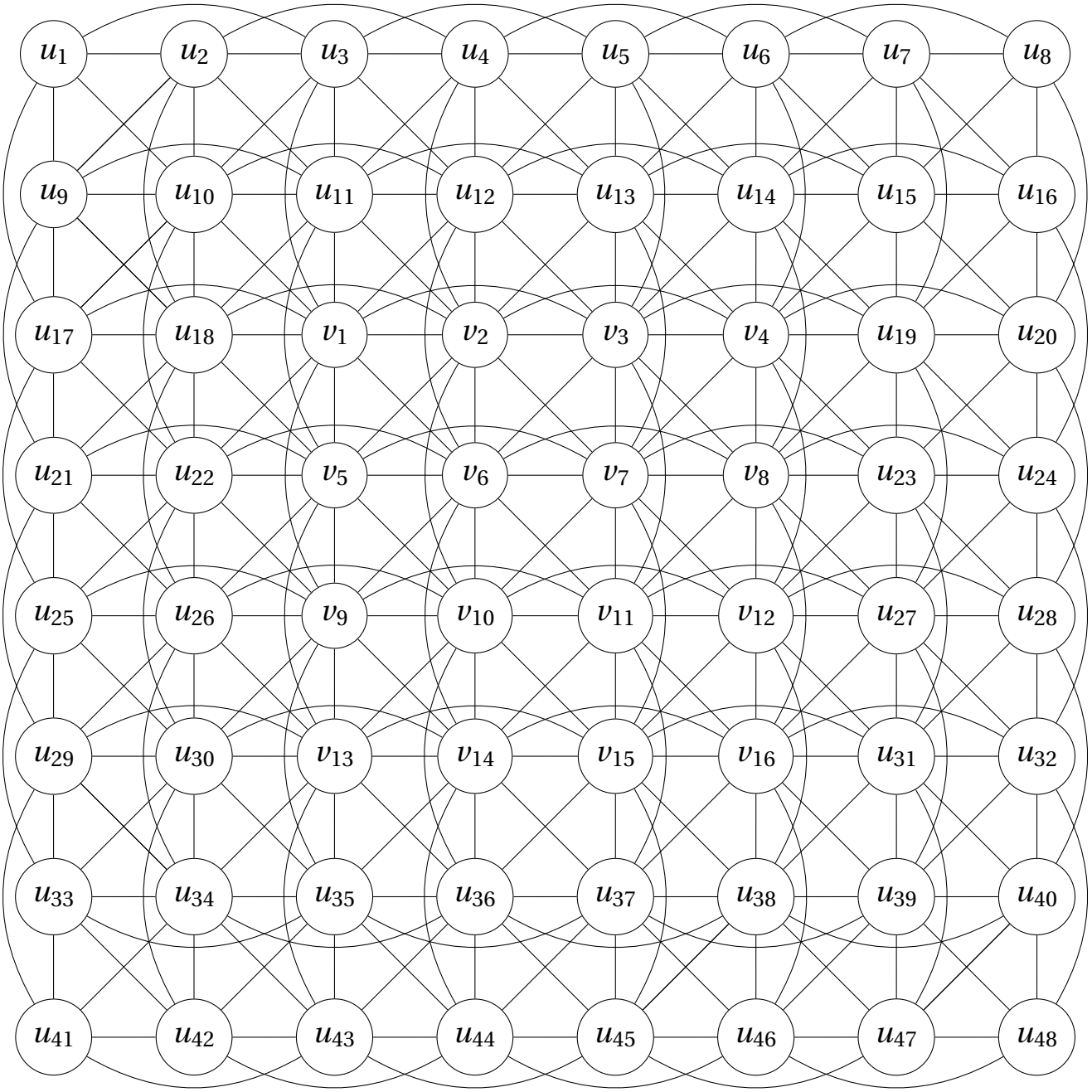


FIGURE .3.1.9 – Le graphe $G^2_{8,8}$

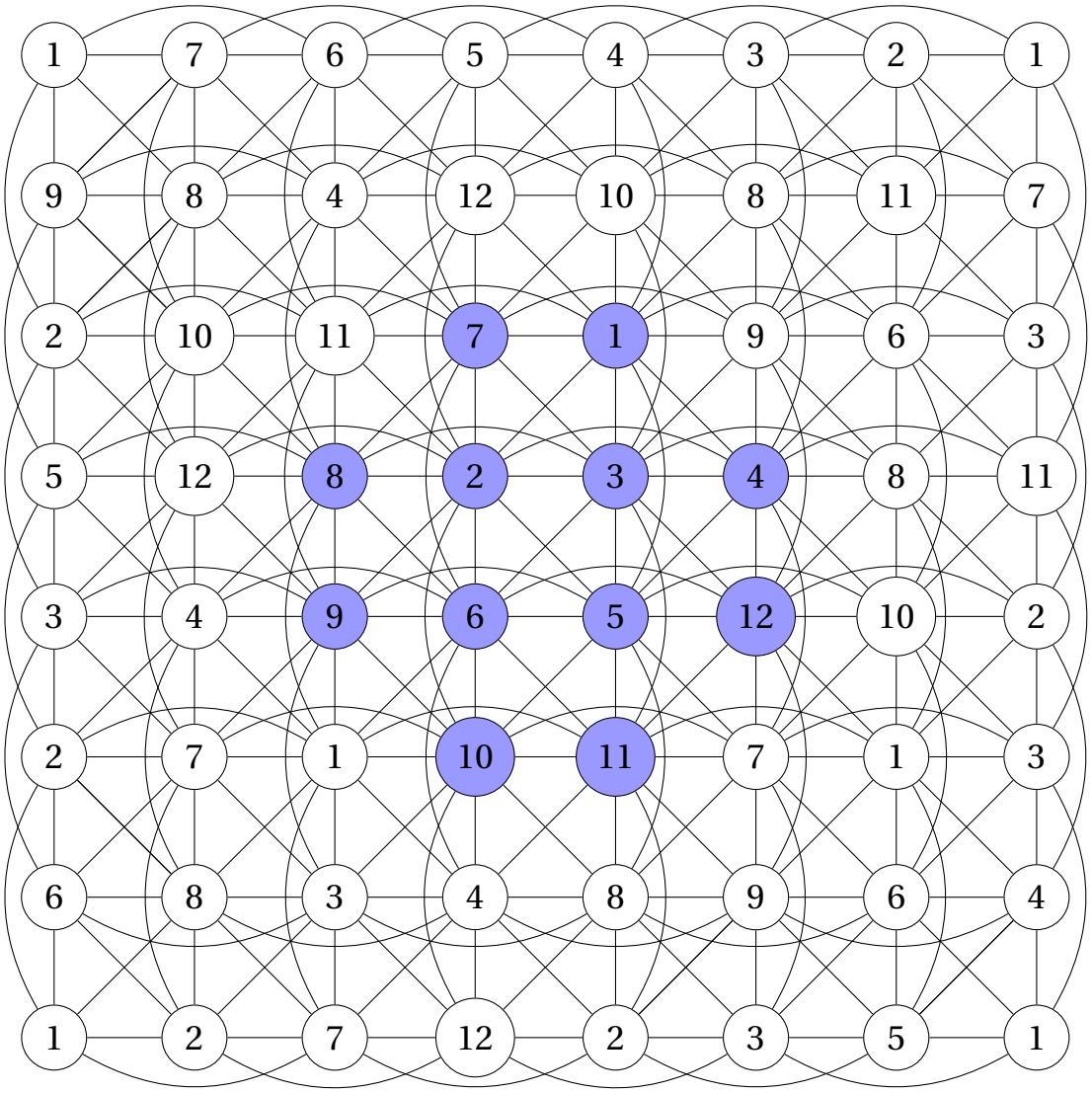


FIGURE .3.1.10 – Une b-coloration de $G^2_{8,8}$ avec 12 couleurs, les b-sommets sont en gris.

Pour $n \geq 9$, posons $H = (G^2_{n,n})$. Le graphe H a au moins 13 sommets de degré 12 mais il n'a pas 14 sommets de degré 13. D'où $m(H) = 13$ alors $b(H) \leq 13$ pour avoir égalité il suffit de donner une b-coloration de H avec 13 couleurs. Soit $H_3 = G^2_{9,9}$ un sous-graphe de H et soit c une coloration de H_3 avec 13 couleurs (voir Figure 3.1.11). Vu que $\Delta(H) = 12$ alors on peut étendre c à tous les sommets de H. Par conséquence $b(H) = 13$.

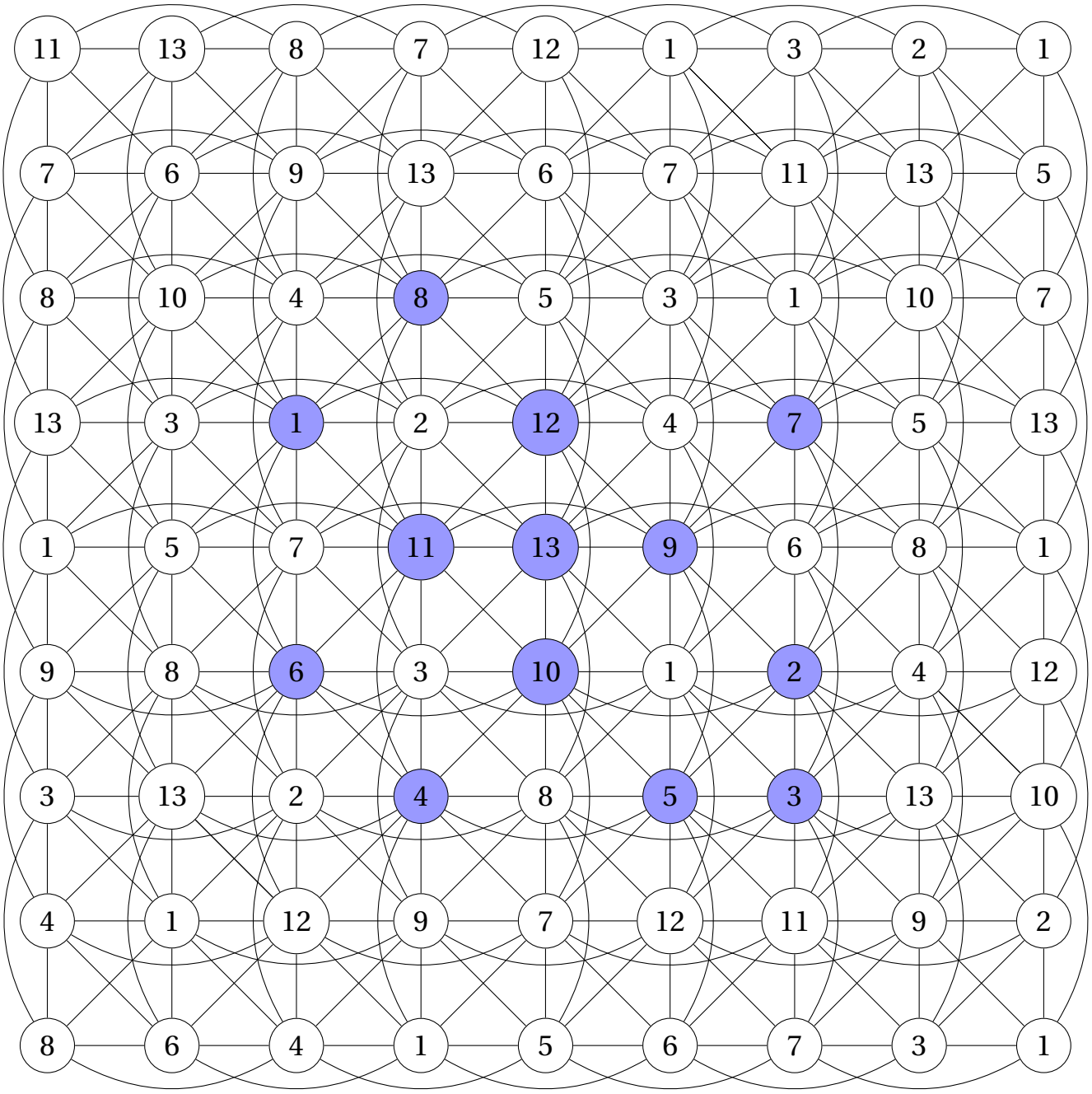


FIGURE .3.1.11 – Une b-coloration optimale de $G^2_{9,9}$ avec 13 couleurs.

.3.2 Graphe puissance d'une chenille complète

Dans cette section on rappelle la définition d'une chenille complète ensuite on donne les valeurs exactes du nombre b-chromatique du graphe puissance d'une chenille complète $P_{n,k}$ tel que $k = 3$.

Définition 15. *[15] Une chenille complète notée $P_{n,k}$ est un graphe composé d'une*

chaîne d'ordre n pour lequel chaque sommet est connecté à un ensemble stable de k sommets. Les sommets de la chaîne sont appelés nœuds et notés $x_1, x_2, ..., x_n$. *Les sommets reliés à un nœud* x_i *tel que* $1 \leq i \leq n$ *sont appelés feuilles et sont notés* $y_i^1, y_i^2, ..., y_i^k$.

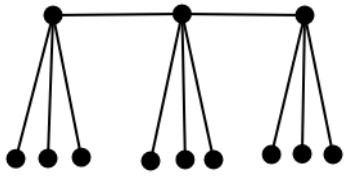
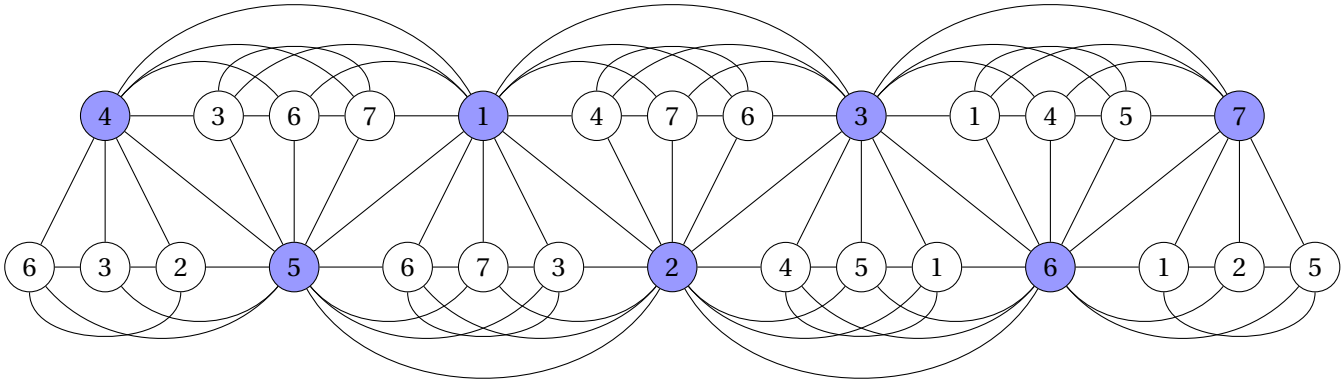


FIGURE .3.2.12 – La chenille complète $p_{3,3}$ contient 3 noeuds chacune a 3 feuilles, donc 3 cellules.

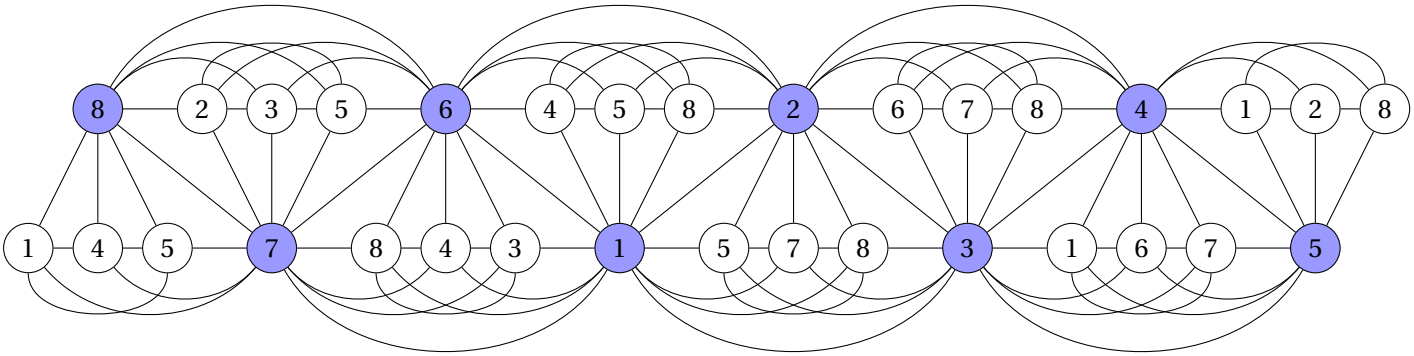
Théorème 20. *Soit* $P_{n,3}^2$ *le graphe puissance d'une chenille complète composée de n noeuds chacune d'eux adjacente à 3 feuilles. Alors :*

$$b(P_{n,3}^2) = \begin{cases} 5 & si\ n = 2 \\ 6 & si\ n = \{3,4,5,6\} \\ n & si\ n = \{7,8,9\} \\ n-1 & si\ n = 10 \\ n-2 & si\ n = \{11,12,13,14,15\} \\ 13 & si\ n = \{16,17\} \\ 14 & si\ n \geq 18 \end{cases}$$

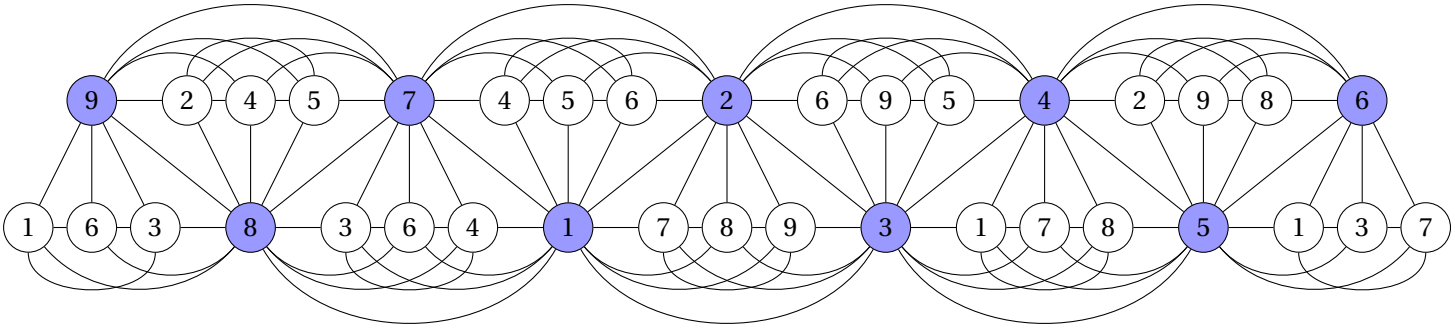
Preuve. Pour $3 \leq n \leq 6$, il est facile de voir que le m-degré de $P_{n,3}^2$ est égale à 6 d'où $b(P_{n,3}^2) \leq 6$. D'autre part $\omega(P_{n,3}^2) = 6$. Ceci implique que $b(P_{n,3}^2) = 6$.
Par le même raisonnement on peut déduire que pour $n = 2$, $b(P_{n,3}^2) = 5$.
Pour $7 \leq n \leq 17$, les Figures 3.2.13, 3.2.14, 3.2.15 et 3.2.16 présentent une b-coloration des graphes $P_{n,3}^2$, $7 \leq n \leq 17$, avec $m(P_{n,3}^2)$ couleurs. En vu de cela, $b(P_{n,3}^2) = m(P_{n,3}^2)$.



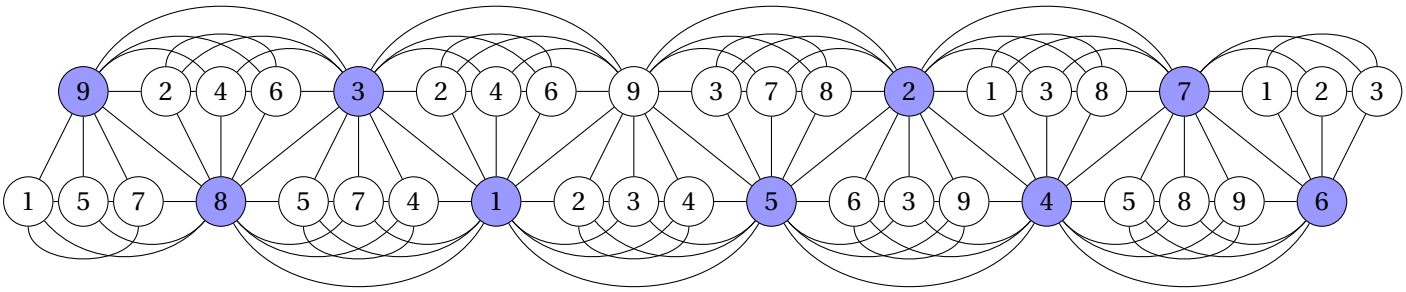
(a) $m(P^2_{7,3}) = 7$



(b) $m(P^2_{8,3}) = 8$

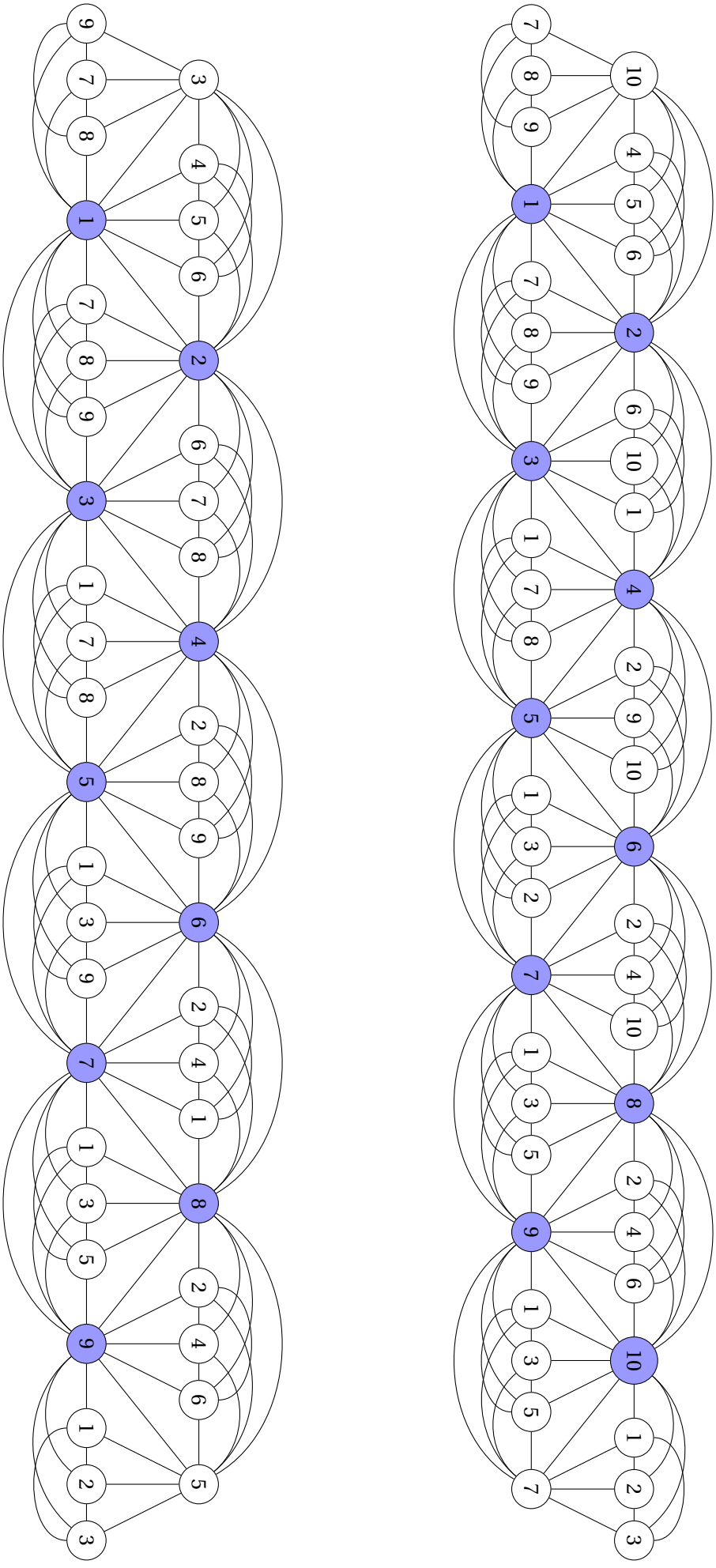


(c) $m(P^2_{9,3}) = 9$



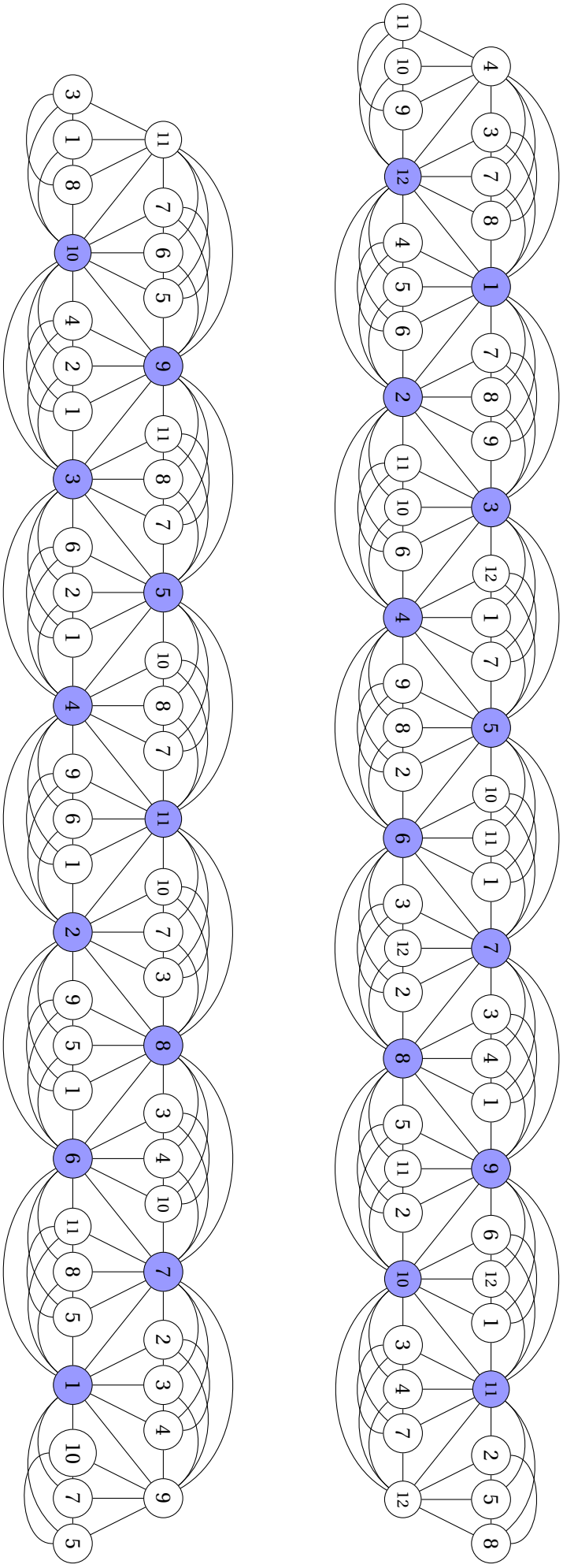
(d) $m(P^2_{10,3}) = 9$

FIGURE .3.2.13 – Le m-degrés et la b-coloration optimale des graphes $P^2_{n,3}$, $7 \leq n \leq 10$



(a) $m(P^2_{11,3}) = 10$ (b) $m(P^2_{12,3}) = 11$

FIGURE .3.2.14 – Le m-degré et la b-coloration optimale des graphes $P^2_{n,3}$, $n \in \{11, 12\}$



(a) $m(P^2_{13,3}) = 12$ (b) $m(P^2_{14,3}) = 13$

FIGURE .3.2.15 – Le m-degré et la b-coloration optimale des graphes $P^2_{n,3}$, $13 \leq n \leq 14$

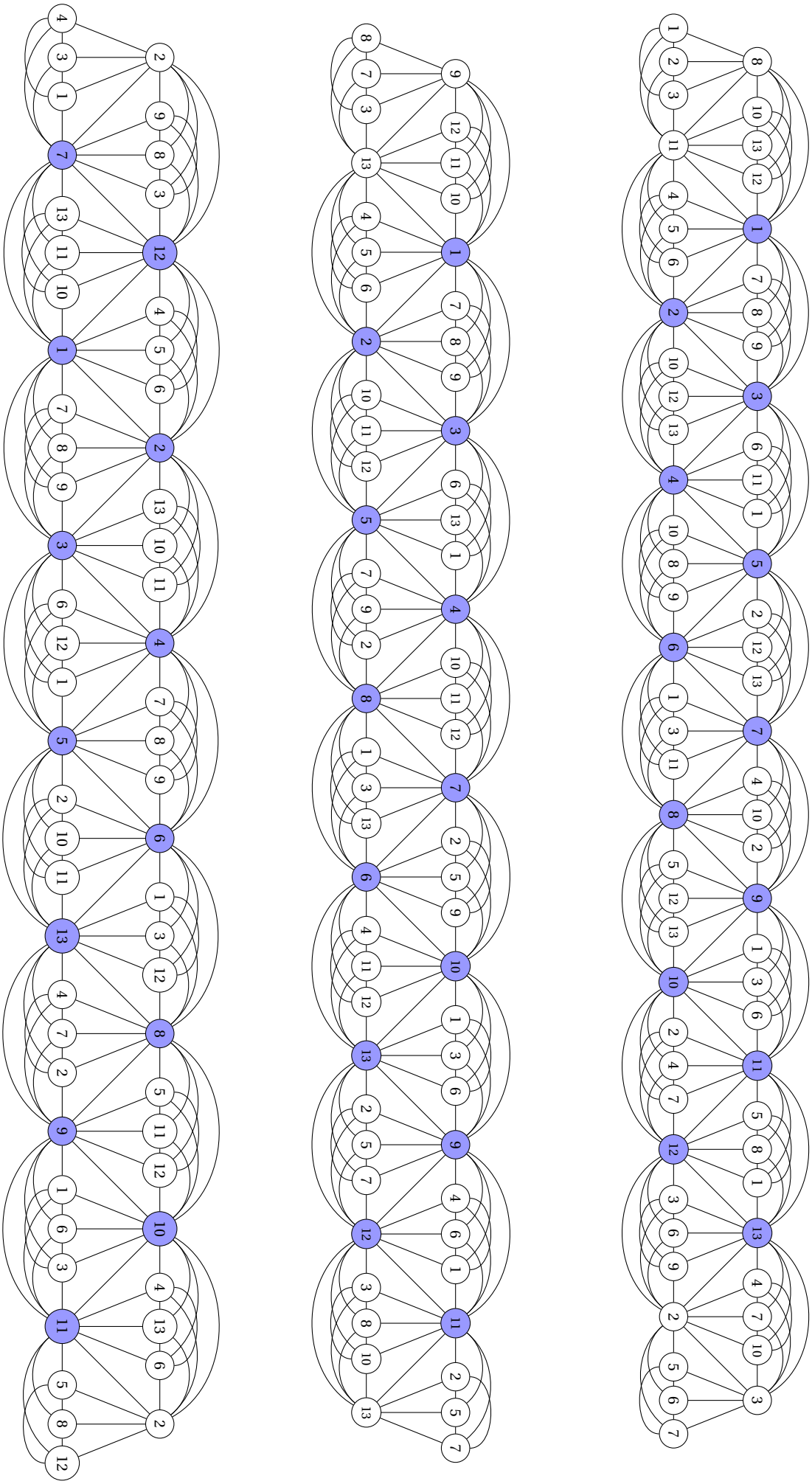


FIGURE .3.2.16 – Une b-coloration optimale des graphes $P^2_{15,3}$,$P^2_{16,3}$ et $P^2_{17,3}$, avec 13 couleurs.

Pour $n \geq 18$, Posons $G_n = P^2_{n,3}$ .Le graphe G_n a au moins 14 sommets de degré 13 mais il n'a pas 15 sommets de degré 14. D'où $m(G_n) = 14$. Par conséquent , $b(G_n) \leq 14$. Pour avoir égalité, il suffit de donner une b-coloration de G_n avec 14 couleurs .Soit $H = P^2_{18,3}$ un sous graphe de G_n. Et soit c une b-coloration de H avec 14 couleurs (coloration partielle de G_n) (voir Figure 3.3.17). Vu que $\Delta(G_n) = 13$, on peut étendre c à tous les sommets de G_n. Par conséquence $b(G_n) = 14$.

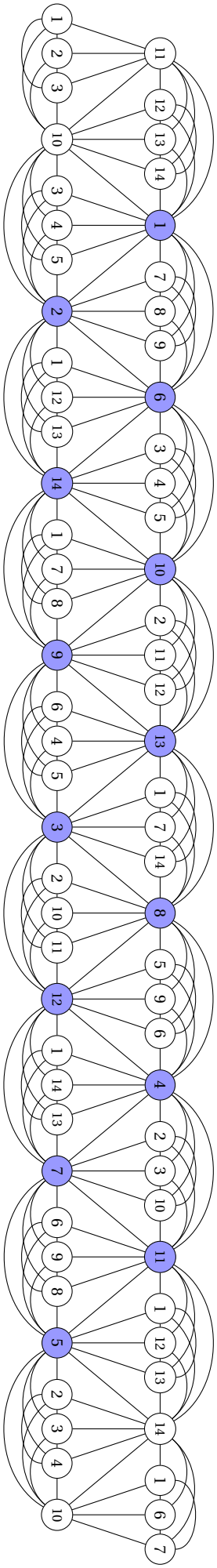


FIGURE .3.2.17 – Une b-coloration optimale de $P^2_{18,3}$ avec 14 couleurs.

.3.3 Graphe puissance d'un graphe de diamètre 2

Le théorème suivant est dû à (Skiena 1990)

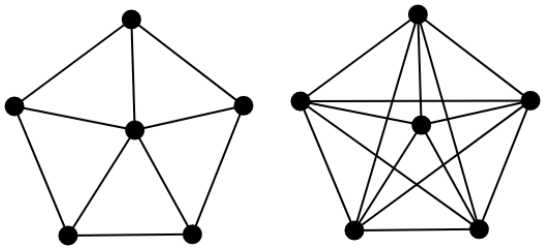
Théorème 21. *[36] Soit $G(V,E)$ un graphe tel que $Diam(G) = k$. Alors la $k^{ième}$ puissance du graphe G est un graphe complet.*

A partir du Théorème 21 on peut déduire le corollaire suivant.

Corollaire 3. *Soit G un graphe d'ordre n tel que $diam(G) = 2$. Alors $b(G^2) = n$.*

Les observations suivantes sont immédiates. Les roues W_n sont des graphes de diamètre égal à 2 ,
d'où $\forall n, W_n^2 \cong K_n$. Alors $b(W_n^2) = n$.

La Figure suivante représente La roueW_6 et son graphe puissance $W_6^2 \cong K_6$.

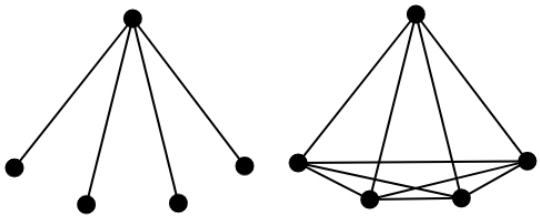


(a) La roue W_6 (b) $W_6^2 \cong K_6$.

FIGURE .3.3.18 – Le nombre b-chromatique de W_6^2 est égal à 6

Les étoiles $K_{1,n-1}$ sont des graphes de diamètre égal à 2, d'où $\forall n, K_{1,n-1}^2 \cong K_n$. Donc $b(K_{1,n-1}^2) = n$.

La Figure 3.3.19 représente L'étoile $K_{1,4}$ et son graphe puissance $K_{1,4}^2 \cong K_5$.

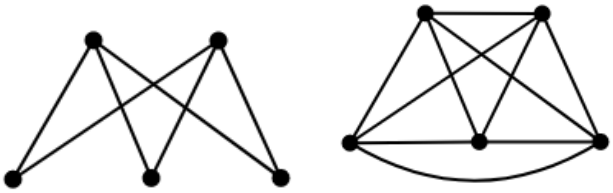


(a) L'étoile $K_{1,4}$ (b) $K^2_{1,4} \cong K_5$.

FIGURE .3.3.19 – Le nombre b-chromatique de $K^2_{1,4}$ est égal à 5

Les graphes bipartis complets $K_{n,m}$ sont des graphes de diamètre égal à 2 , d'où $\forall n, K^2_{n,m} \cong K_{n+m}$. Alors $b(K^2_{n,m}) = n+m$.

La Figure suivante représente Le graphe $K_{2,3}$ et son graphe puissance $K^2_{2,3} \cong K_5$.



(a) $K_{2,3}$ (b) $K^2_{2,3} \cong K_5$.

FIGURE .3.3.20 – Le nombre b-chromatique de $K^2_{2,3}$ est égal à 5

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Au cours de ce mémoire, nous nous sommes intéressés à la notion de la b-coloration se certains graphes de puissance.

La détermination du nombre b-chromatique est un problème NP-complet pour un graphe quelconque. De ce fait et après avoir un recueil des notions élémentaires utilisées dans ce travail nous avons présenté quelques résultats sur la b-coloration de certains graphes de puissance.

Notre objectif essentiel était de déterminer la valeur exacte du nombre b-chromatique pour les graphes puissance d'une grille $G_{n,n}$, d'une chenille complète $P_{n,3}$ et des graphes ayant le diamètre égal à 2 .

Le travail réalisé durant ce mémoire ouvre plusieurs perspectives de travaux futurs, à titre d'exemple :

— La détermination du nombre b-chromatique pour le graphe $k^{\text{ième}}$ puissance d'une grille $G_{n,n}$, tel que $k \geq 3$.

— La détermination du nombre b-chromatique pour le graphe puissance d'une chenille complète $P_{n,k}$, tel que $k \geq 3$.

— Une étude comparative de la b-coloration de certains graphes et leurs graphes puissance.

Bibliographie

[1] B. D. Acharya, M. K. Gill. On the index of gracefulness of a graph and the gracefulness of two-dimensional square lattice graphs. Indian. J. Math 23, 81-94. 1981.

[2] J. Aldous, R. Wilson. *Graphs and applications : an introductory approach*. Edition : Springer. UK,London, 2000.

[3] K. Appel, W. Haken. Every planar map is four colorable : Part1, discharging. Illinios. J. Maths, 21(1977)429-490.

[4] C. Berge. *Graphs*. North Holland, 1985.

[5] A. Bendali-Braham, N. Ikhlef Eschouf, M. Blidia. A characterization of edge b-critical graphs, Discrete Applied Mathematics 238 (2018) 158-160.

[6] M. Blidia, N. Ikhlef Eschouf F. Maffray. b-coloring of some bipattie graphs, Aus-tralasian J. Combin 53 (2012) 67-76.

[7] M. Blidia, N. Ikhlef Eschouf, F. Maffray. On vertex b-crtical trees. Opuscula Math. 33, n :1 (2013) 19-28.

[8] N. Ikhlef Eschouf, M. Blidia. On b-vertex and edge b-critical graphs. Opuscula Math. 35, no. 2 (2015), 171-180.

[9] M. Blidia, F. Maffray, Z. Zemir. On b-colorings in regular graphs. Discrete Applied Mathe-matics 157 : 1787-1793, 2009.

[10] R. Brooks. On coloring the nodes of a network. Math Proc Cambridge philos. Soc, 37 (1941) 194-197.

[11] G. Chartran. *Introductory graph theory*. Edition : Dover publication Inc. USA, New York, 1985.

[12] C. Christen, S. Selkow. Some perfect coloring properties of graphs. J. Combin. Theory Ser. B, 27 (1997) 49 -59.

[13] L. Dekar, H. Kheddouci. A Graph b-Coloring Based Method for Composition-Oriented Web Services Classification. A. An et al. (Eds.) : ISMIS, LNAI 4994, pp. 599-604, 2008.

[14] B. Effantin, H. Kheddouci. A distributed algorithm for a b-coloring of agraph. In : Guo, M, Yang, L. T.,Di Martino, B., Zima, H. P., Dongarra, J., Tang, F. (eds.) ISPA. LNCS, vol. 4330, pp. 430-438, 2006.

[15] B. Effantin (2005), The b-chromatic number of power graphs of complete caterpillars. Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography, 8 :3, 483-502.

[16] T. Faik. La b-continuité des b-colorations : Complexité, Propriétés structurelles et Algorithmes. Thèse de Doctorat, Université Paris XI Orsay, 2005.

[17] D. Gaceb, V. Eglin, F. Lebourgeois, H. Emptoz. Graph b-coloring for automatic recognition of documents. Dans International Conference on Analysis and Recognition, (2009), 261-265.

[18] F. Gavril, M. Yannakakis, Edge dominating sets in graphs, SIAM journalof Applied Mathematics, 38(3)(1980), 364-372.

[19] J. Gross, J. Yelien, P. Zhang. *Handbook of graph theory*.Edition : Champman and Hall/ CRC. USA, New York, 2014.

[20] J. Gross, J. Yelien. *Graphs theory and its applications*.Edition : Champman and Hall/ CRC. USA, New York, 2005.

[21] N. Hartsfield, R. Gerha. *Pearls in graph theory*. Edition : Academic press. USA, New York, 1990.

[22] C. T. Hoàng, M. Kouider. On the b-domining coloring of graphs. Discrete Appl. Math 152 : 176-186, 2005.

[23] C.T. Hoàng, F. Maffray, M. Mechebbek. A characterization of b-perfect graphs. CoRR, Vol. abs/1004.5306, 2010.

[24] C.T. Hoàng, F. Maffray, M. Mechebbek. A characterization of b-perfect graphs. Journal of Graph Theory 71 (2012) 95-122.

[25] R. W. Irving, D. F. Manlove. The b-chromatic number of graphs. Discrete Appl. Math. 91 ; 127-141 ; 1999.

[26] J. Kàra, J. Kratochvil, M. Voigt. b-continuty. Rapport Technique, 2004.

[27] M. Kohl, A. Alkhateeb , Upper bounds on the b-chromatic number and results for res-tricted graph classes, Discucciones Math. Graph Theory 31 (2011) 709-735.

[28] M. Kouider , M. Zaker. Bounds for the b-chromatic number of some families of graphs Discrete mathematics, vol. 306, no7, pp. 617-623, 2006.

[29] A. Kouider , M. El Sahili. About b-colorings of regular graphs, Res. Rep. 1432, LRI, Univ. Orsay, France, 2006.

[30] M. Kouider, M. Mahéo. Some bounds for the b-chromatic number of a graph. Discrete Math. 256 : 267-277, 2002.

[31] J. Kratochvil, Z Tuza, M. Voigt. On the b-chromatic number of graphs. Lecture Notes in Computer Science (Graph-Theoretic Concepts in Computer science : 28th Inter-national Workshop, WG 2002) 2573,310-320,2002.

[32] D. F. Manlove. Minimaximal and Maximinimal optimization problems : a partial order-based approach. PhD thesis, technical report tr-1998-27 of the Computing Science Department of Glasgow University, 1998.

[33] E. A. Nordhaus, J. W. Gaddum. On complementary graphs. Ann. Math. Monthly, 63 : 175-177, 1956.

[34] C. Roux. *Initiation à la théorie des graphes*. Edition : ellipse. France, 2009.

[35] Shields, Rob (December 2012). "Cultural Topology : The Seven Bridges of Königsburg 1736". Theory, Culture Society. 29 (4–5) : 43–57.

[36] S. Skiena. Implementing Discrete Mathematics : Combinatorics and Graph Theory with Mathematica. Reading, MA : Addison-Wesley, 1990.

[37] C. Vasudev. *Graph theory with applications*. Edition : Newage international publisher. India, New Delhi, 2006.