Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr.Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences -Département de Mathématiques & Informatique



MÈMOIRE

présenté en vue de l'obtention

du

Diplome de Master en Mathématiques

Option : Recherche Opérationnelle

Par

DERRICHE Feth Ennour & CHELALl Otmane

Thème

ETUDE DES PROBLÈMES DE LA COLORATION DOMINANTE DANS LES GRAPHE

devant le jury composé de :

Mr.	K.Tablenahas	Grade	MAA	U.Y.F.M	Président.
Mr.	M.ZAMIME	Grade	MCB	U.Y.F.M	Encadreur.
Mr.	M.Bouzefrane	Grade	MAA	U.Y.F.M	Examinateur.
Mr.	A.Bouchou	Grade	MCB	U.Y.F.M	Examinateur.

Soutenu publiquement, le 07 /07/2019

Table des matières

Introduction **6**

1 Notions de base **9**

1.1 Théorie des graphes 9

1.1.1 Concepts de base 9

1.1.2 Distances, excentricité, diamètres, rayons et centres 12

1.1.3 Graphes particuliers 13

1.1.4 Sous-graphe et graphe partiel 19

1.1.5 Ensemble minimal, enemble maximal 19

1.1.6 Quelques invariants de graphes 20

1.1.7 Paking 22

1.1.8 Quelques opérations sur les graphes 22

1.2 Théorie de la complexité 22

1.2.1 Problème de décision 22

1.2.2 Classes de complexité P et NP 23

1.2.3 Problème NP-Complet 24

2 Quelques résultats existants sur la coloration dominante **25**

2.1 Coloration dominante 25

2.2 Complexité 27

2.3 Quelques résultats de base sur la coloration dominante 27

2.3.1 Borne et résultats existence 27

2.4 Coloration dominante pour certaines clesses des graphes 29
2.4.1 Graphes bipartis 29
2.4.2 Les arbres 29
2.5 Résultat principal et algorithme 31
2.5.1 Les arbres 31
2.5.2 les graphes sans P_4 32
2.6 Quelques résultats existants sur Le nombre chromatique dominant 34
2.6.1 Le nombre chromatique dominant de quelques graphes élémentaires . 34
2.6.2 Les cycles et les chaînes 35
2.6.3 Les chenilles 35
2.6.4 Le nombre chromatique dominant d'un graphe biparti 35

3 Coloration dominante des arêtes 36
3.1 Définition de $\gamma'(G)$, $\chi^{'}(G)$ et $\chi_d^{'}(G)$ 36
3.1.1 Coloration et domination des arêtes 36
3.1.2 Coloration dominante des arêtes 38
3.2 Quelques bornes sur l'indice chromatique dominant des arêtes 38
3.2.1 Résultats préliminaires 38
3.2.2 Graphe complet 41
3.2.3 Graphes bipartis 41
3.3 L'indice chromatique dominant de certains graphes particuliers 44
3.3.1 L'indice chromatique dominant de quelques graphes élémentaires . . . 44
3.3.2 L'indice chromatique dominant de certains graphes particuliers 46

4 L'effet de la suppression d'une arête sur l'ndice chromatique dominant 53
4.1 Graphe arête χ_d'-critique 53

Conclusion 59

Bibliographie 59

Liste des Figures

1.1.1 Un graphe $G = (V, E)$. 10
1.1.2 Un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$. 10
1.1.3 Un cycle C_6 et une chaîne P_6. 12
1.1.4 d, g ,h sont des sommets d'articulation. L'arête gh est un isthme. 12
1.1.5 Un graphe complet K_5. 13
1.1.6 Le graphe de Petersen G_{10}. 14
1.1.7 Un graphe biparti et un graphe biparti complet $K_{3,4}$. 14
1.1.8 Un arbre T. 15
1.1.9 Une étoile $K_{1,s}$. 15
1.1.10 Une étoile $K_{1,s}$. 16
1.1.11 Une double étoile $S_{3,3}$. 16
1.1.12 La subdivision d'une étoile $K^*_{1,s}$. 17
1.1.13 une araignée blessée. 17
1.1.14 Un graphe C_5 et sa couronne $C_5 \circ K_1$. 18
1.1.15 Une chenille. 18
1.1.16 Un graphe simple G, un sous-graphe G_A et un graphe partiel G_B. 19
1.1.17 $M = \{x_1x_6, x_2x_4, x_3x_5\}$ est un couplage parfait et $R = \{x_1x_6, x_2x_4, x_3x_5\}$ est un recouvrement. 21
1.1.18 Un graphe G et sont adjoint $L(G)$ 22

2.1.1 Une coloration dominante 26

3.1.1 L'indice chromatique de G 37

3.1.2 le nombre de domination d'aretes de G est 2. 37
3.1.3 L'indice chromatique dominant de G 38
3.3.1 graphe 3 livre B_3. 46
3.3.2 graphe banana $B_{2,4}$. 48
3.3.3 fan grapheF_3. 49
3.3.4 graphe roue. 51

Résumé

Dans ce mémoire, notre étude est portée sur *la coloration dominante des arêtes* et l'indice *chromatique dominant* $\chi_d^{'}(G)$. *Une coloration dominante des arêtes* est une coloration propre de G, telle que tout arête domine au moins une classe de couleur. l'indice *chromatique dominant*, noté $\chi_d^{'}(G)$ est le nombre minimum de couleurs nécessaires dans une coloration dominante de G, une coloration dominante des arêtes minimum est dite une $\chi_d^{'}(G)$-coloration.

Nous présentons en premier lieu quelques résultats existants sur la coloration dominante, *Une coloration dominante* des sommets est une coloration propre de G, telle que tout sommet domine au moins une classe de couleur. Le *nombre chromatique dominant des sommets*, noté $\chi_d(G)$ est le nombre minimum de couleurs nécessaires dans une coloration dominante de G. En second lieu, nous déterminons quelques bornes sur $\chi_d^{'}(G)$, et ensuite nous déterminons l'indice chromatique dominant de certains graphes particuliers: les chaines, les cycles, les chenilles, le n-livre, arbre(n,k)-banana, le fan graph,l' étoile subdivisée et la roue. Enfin, nous allons étudier l'effet de la suppression d'une arête sur l'indice chromatique dominant $\chi_d^{'}(G)$ pour certaines classes particulières des graphes.

Abstract

In this report, the aim of our work is to study focuses on the edge dominator coloring and the dominator chromatic index $\chi_d^{'}(G)$. A dominator edge coloring of G is a proper edge coloring of G in which each edge of the graph dominates at least one color class. The dominator edge chromatic index number, denoted $\chi_d^{'}(G)$ is the minimun of colors required in a dominant staining, and a minimum dominant staining is called a $\chi_d^{'}(G)$ -coloration.

We first present some existing results on the dominant coloring, A dominant coloration is a proper coloration of G such that any vertex dominates at least one color class. The dominant chromatic number, noted $\chi_d(G)$ is the minimum number of colors required in a dominant G staining, second we determine some bounds on $\chi_d^{'}(G)$, and thene we determine the dominant chromatic index of some graphe particulares : chains, cucles, caterpillar, n-book, tree (n, k) -banana, fan graphe,subdivided star and whell graph .

Finally, we will study the effect of deleting an edge on the dominant chromatic index $\chi_d^{'}(G)$ for some particular classes of graphs.

Remerciements

Nous tenons à remercier en premier lieu, Allah le tout puissant de nous avoir donné le courage et la patience pour terminer ce travail.

Nous voudrons sincèrement exprimer nos plus vifs remerciements à notre promoteur Monsieur **ZAMIME MOHAMED**, Maître de conférences à l'université Dr. Yahia Farès de Médéa. Pour sa disponibilité et ses conseils ont été des éléments décisifs dans l'aboutissement de ce mémoire. On lui doit toute notre reconnaissance.

- Nos remerciements vont également à Monsieur **BOUZEFRANE MOHAMED**, Maître assistant à l'université Dr. YAHIA FARÈS de Médéa, et à Monsieur **AHMED BOUCHOU**, Maître de conférences à l'université Dr. YAHIA FARÈS de Médéa, et à Monsieur **KEMEL TABLENAHAS**, Maître assistant à l'université Dr. YAHIA FARÈS de Médéa, pour d'être membre du jury de ce mémoire.

Je tiens également a exprimer ma gratitude à l'ensemble des enseignants du département M.I de l'université Dr. Yahia Farès de Médéa.*et l'ensemble des étudiants de notre promotion 2018 /2019.*

Enfin, il est important pour nous de remercier nous parents, d'avoir fait de leur mieux pour que nous puisions accomplir ce mémoire dans les meilleures conditions possibles et qui n'ont jamais cessé de nous encourager. Nous adressons nos plus sincères remerciements à tous les membres de la famille surtouts nos sœurs et frères, sans oublier nos amis et tous ceux qui ont servis, de près ou de loin à notre formation.

Dédicace

J*e dédie ce mémoire*

A *mes chers parents, ma mère et mon père*

P*our leur patience, leur amour,et leurs encouragements*

A *mes amies*

A *mon ami* ***Feth ennour*** *et se famille*

S*ans oublier tous les professeurs que ce soit du primaire, du moyen, du secondaire ou de l'enseignement supérieur.*

otman

Dédicace

J*e dédie ce mémoire*

A *ma mère et mon père, Seulement.*

Feth ennour

Introduction

Sans que l'on en soit toujours conscient, la théorie des graphes est aujourd'hui très présente dans notre société moderne. Cette branche des mathématiques s'intéresse à l'étude des graphes ainsi qu'à la résolution de problèmes en les modélisant sous forme de graphes.

Du point de vue historique, la *théorie des graphes* débute avec les travaux du mathématicien suisse *Euler* au18^{ème} siècle, et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tel que celui des *ponts de Konigsberg*, quand il se demandait s'il est possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même point et revenir à son point de départ. Dès le début du 20$^{\text{ème}}$ siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de *Konig, Menger, Cayley* puis de *Berge* et *d'Erdös*.

La coloration est considérée comme l'un des thèmes majeurs de la Théorie des Graphes. L'origine de la coloration des graphes remonte au XIX siècle lorsque Francis Guthrie découvrit que quatre couleurs suffisent pour colorier les cantons d'Angleterre de telle façon que deux cantons ayant une frontière commune ne reçoivent pas la même couleur. D'où, il posa le problème de la possibilité de colorier toute carte géographique à l'aide de quatre couleurs sans que deux pays voisins n'aient la même couleur. Le problème est resté ouvert jusqu'en 1976 quand Appel et Haken le démontrèrent par le biais de l'informatique.

La coloration de graphes est à la base de la théorie des graphes du fait de son utilisation dans la résolution de nombreux problèmes pratiques. En effet, ces derniers sont modélisés comme étant des problèmes de coloration.

A titre d'exemple, on peut citer les problèmes de l'ordonnancement de tâches et l'allocation de fréquences.

Plusieurs types de colorations font objets de travaux d'éminantes équipes de recherche telles que la coloration des sommets, la coloration des arêtes, la coloration des sommets et des arêtes (la coloration totale) etc.

Il existe également plusieurs types de colorations . On cite en exemple la coloration dominante des sommets et la coloration dominante des arêtes etc.

En théorie des graphes la coloration et la domination sont deux domaines importants qui ont été largement étudiés. Le paramètre fondamental dans la théorie de la coloration de graphe est le nombre chromatique $\chi(G)$ pour la coloration d'un graphe G qui est défini comme étant le nombre minimum de couleur requis pour colorer les sommets de G de tel sort qu'aucuns deux sommets adjacents ne reçoivent la même couleur. Si $\chi(G) = K$, on dit que G est K-chromatique.

Comme pour la coloration des sommet ,l'intérêt est de trouver une coloration des arêtes avec un nombre minimum de couleurs. G est k-arête-colorable si on peut colorer ses arêtes avec k couleurs distinctes, sans que deux arêtes adjacentes aient la même couleur.

L'indice chromatique d'un graphe G, noté $\chi^{'}(G)$, est le plus petite entier positif k pour lequel G est k-arêtes-colorable .

Un ensemble dominant S est un sous ensemble des sommets dans un graphe telle que chaque sommet du graphe appartient à S ou a un voisin dans S. Le nombre de domination est l'ordre d'un ensemble dominant minimum. Étant donné un graphe G et un entier K , la recherche d'un ensemble dominant d'ordre K est NP-complet dans un graphe arbitraire. [12] [15]

Un sous-ensemble X de E est appelé un ensemble dominant de G si chaque arête pas dans X est adjacente à une arête dans X. Le nombre de domination d'arêtes $\gamma'(G)$ de G est la cardinalité minimale prise sur tous les ensombles dominants d'arêtes.

Un graphe à une coloration dominante s'il a une coloration propre, chaque sommet du graphe domine chaque sommet de la même classe de couleur. Le nombre chromatique dominant $\chi(G)$ est le nombre minimum de classes de couleur dans une coloration dominante d'un graphe G.

Une coloration dominante des arête est une coloration propre de G telle que tout arête domine au moins une classe de couleur. L'indice *chromatique dominant*, noté $\chi_d^{'}(G)$ est le nombre minimum de couleurs nécessaires dans une coloration dominante de G.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions de théorie des graphes nécessaires à la compréhension de ce mémoire. Nous donnons également un petit aperçu de quelques notions élémentaires de complexité algorithmique.

Dans le deuxième chapitre, on commence par la définition de la coloration, la domination et la coloration dominante. Nous nous intéressons dans ce chapitre au problème de la coloration dominante où nous citons quelques bornes et résultats existants sur le nombre chromatique dominant d'un graphe.

Le troisième chapitre porte sur notre contribution dans le domaine de la coloration dominante des arêtes, on commence par la définition de la coloration des arêtes, la domination des arêtes et la coloration dominante des arêtes où nous determine quelques bornes sur $\chi_d^{'}(G)$ et nous donnons la valeur exacte de l'indice chromatique dominant de certains graphes particuliers.

Dans le quatrième chapitre, nous allons étudier l'effet de la suppression d'une arête sur l'indice chromatique dominante $\chi_d^{'}(G)$ pour certaines classes particulières de graphes.

Ce mémoire s'achève par une conclusion.

Chapitre 1

Notions de base

Dans ce premier chapitre, nous rappelons toutes les définitions de théorie des graphes nécessaires à une bonne compréhension de la suite du mémoire .

1.1 Théorie des graphes

1.1.1 Concepts de base

Un graphe G est un couple (V, E), où V est l'ensemble des sommets , et E est un ensemble de paires d'éléments de V appelées arêtes .

Le nombre des sommets d'un graphe, ou l'ordre (order), égal donc à $\mid V \mid$, est plus généralement noté n, le nombre d'arêtes est quant à lui noté m.

Deux sommets x, y d'un graphe $G = (V, E)$ sont voisins ou adjacents s'ils ont au moins une arête qui les relie. Si $e = xy$ est une arête de G, alors x et y sont les extrémités de e, et e est dite incidente à x et y.

Une boucle est une arête dont les deux extrémités sont identiques.

Un graphe ayant des arêtes multiples est un multigraphe.

Un graphe est dit simple s'il est sans boucles est sans arêtes multiples.

Exemple 1.1.1 *La figure 1.1.1 représente un graphe simple* $G = (V, E)$ *avec*

$V(G) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_{6,} x_7, x_8\}$

et $E(G) = \{x_1x_6, x_1x_2, x_1x_4, x_2x_5, x_2x_4, x_4x_3, x_4x_6, x_2x_5, x_3x_7, x_5x_3, x_7x_5, x_5x_{3,} x_5x_8\}$.

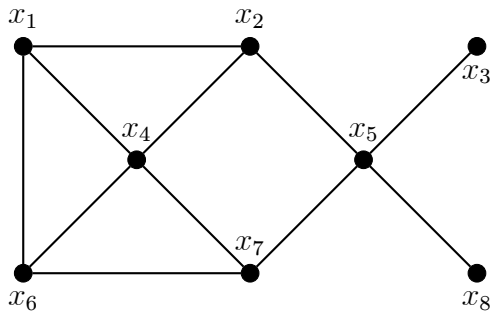


Figure 1.1.1 : Un graphe $G = (V, E)$.

Complémentaire

Définition 1.1.1 *Le graphe complémentaire d'un graphe $G = (V, E)$ est le graphe noté $\overline{G}$, défini par $V(\overline{G}) = V(G)$ et $E(\overline{G}) = \{uv : u \in V(G), v \in V(G) \text{ et } uv \notin E(G)\}$.*

Autrement dit, le complémentaire du graphe $G = (V, E)$, est un graphe avec le même ensemble de sommets V tel que deux sommets sont adjacents dans $\overline{G}$ si seulement s'ils ne le sont pas de G.

Par exemple dans la figure 1.1.2 sont donnés un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$.



Figure 1.1.2 : Un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$.

Voisinages et degrés

- **Le voisinage ouvert** d'un sommet v d'un graphe G, noté $N_G(v)$ est l'ensemble de tous les sommets adjacents à v. C'est à dire $N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$.
- **Le voisinage fermé** d'un sommet v d'un graphe G, noté $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$.
- **Le voisinage privé** d'un sommet v par rapport à un ensemble S est l'ensemble des sommets du voisinage fermé de v qui n'ont pas d'autres voisins dans S. Cet ensemble est noté $pn[v, S]$ et défini par $pn[v, S] = \{u\colon N_G[v] \cap S = \{v\}\}$.

- Soit S un sous-ensemble de V, le voisinage ouvert de S est $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v)$ et le voisinage fermé est $N_G[S] = N(S) \cup S$.
- **Le degré** d'un sommet v de G est le nombre d'arêtes incidentes à v. Il est noté $d(v)$ ou bien $d_G(v)$.
- Lorsque $d(v) = 0$, on dit que le sommet v est **isolé**, et lorsque $d(v) = 1$, on dit que le sommet v est **pendant**. L'ensemble des sommets pendants de G est noté par $L(G)$.
- Un sommet adjacent à au moins un sommet pendant est appelé sommet **support**. L'ensemble des sommets supports de G est noté par $S(G)$.
- Si un support v adjacent à un seule sommet pendant, alors v est un support faible, si non (adjacent à au moins deux sommets pendants) alors v est un support fort.
- Lorsque $d(v) = n - 1$, on dit que le sommet v est **universel.**
- **Le degré maximum** d'un graphe G, noté $\Delta(G)$ est le maximum des degrés de ses sommets. En d'autres termes, $\Delta(G) = \max_{v \in V} \{d(v)\}$.
- **Le degré minimum** d'un graphe G, noté $\delta(G)$ est le minimum des degrés de ses sommets. En d'autres termes, $\delta(G) = \min_{v \in V} \{d(v)\}$.

Chaînes et cycles

Définition 1.1.2 *Le cycle d'ordre n, noté C_n, est le graphe connexe dont tous les sommets sont de degré 2.*

Par exemple voir la figure 1.1.3 .

Définition 1.1.3 *La chaîne d'ordre n, noté P_n, est le graphe connexe dont tous les sommets sont de degré 2, sauf deux sommets sont de degre 1 (sommet pendant).*

Par exemple voir la figure 1.1.3 .

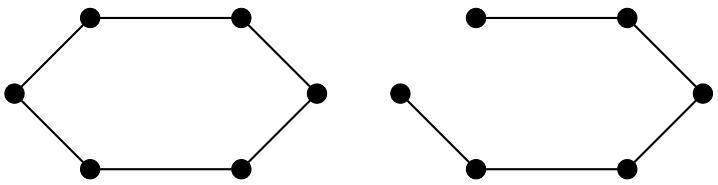


Figure 1.1.3 : Un cycle C_6 et une chaîne P_6.

Connexité

Définition 1.1.4 *Un graphe est connexe si pour toute paire de sommets il est possible de passer de l'un à l'autre par une suite des sommets adjacents .*

La connexité définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des sommets, et chacune des classes d'équivalence est appelée composante connexe du graphe. Autrement dit, un graphe est connexe si et seulement s'il ne contient qu'une seule composante connexe.

Définition 1.1.5 *Un sommet v d'un graphe $G = (V, E)$ est dit* ***sommet d'articulation*** *si sa suppression de V augmente le nombre de composantes connexes de G. L'arête $e \in E$ s'appelle un* ***isthme*** *si sa suppression de e augmente le nombre de composantes connexes de G.*

Exemple 1.1.2 *Le graphe connexe de la figure 1.1.4 possède un isthme gh.*

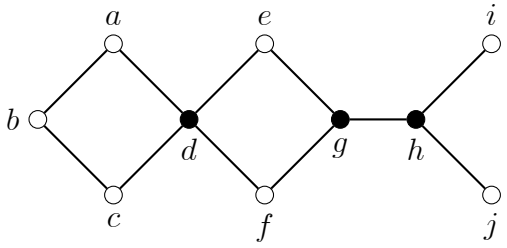


Figure 1.1.4 : d, g ,h sont des sommets d'articulation. L'arête gh est un isthme.

1.1.2 Distances, excentricité, diamètres, rayons et centres

Soit $G = (V, E)$ un graphe et u, v deux sommets de V. La distance entre u et v, notée $d(u, v)$ est la longueur de la plus courte chaîne joignant u et v.

- *L'excentricité* de v, noté $exc(v)$, est définie par $exc(v) = \max\{d(v, w), w \in V\}$.
- Le *diamètre* de G est $daim(v) = \max\{exc(v), w \in V\}$.
- Le *rayon* de G est $rad(G) = \min\{exc(v), w \in V\}$.

Un sommet de G ayant une excentricité minimale est appelé centre.

1.1.3 Graphes particuliers

Graphe complet

Définition 1.1.6 *Un graphe complet est un graphe où chaque sommet est relié à tous les autres sommes. Le graphe complet d'ordre n est noté K_n. Dans ce graphe chaque sommet est de degré $n-1$.*

La figure 1.1.5 représente un graphe complet K_5.

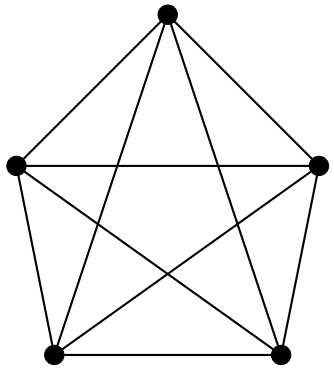


Figure 1.1.5 : Un graphe complet K_5.

Graphe régulier

Définition 1.1.7 *Un graphe est dit régulier si tous ses sommets ont le même degré.*

C'est-à-dire : $\forall u, v \in V(G)$, $d_G(u) = d_G(v)$.

Et d'autre part nous avous : $\delta(G) = \Delta(G)$.

*Un graphe est k-**régulier** ou régulier de degré k si tous ses sommets sont de degré k.*

Exemple 1.1.3 *Prenons par exemple le graphe de Petersen G_{10} de la figure 1.1.6 . Le graphe G_{10} est un graphe 3-**régulier.***

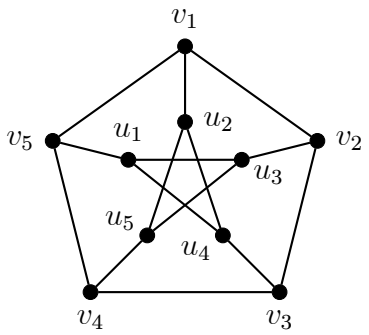


Figure 1.1.6 : Le graphe de Petersen G_{10}.

Graphe biparti et Graphe biparti complet

Définition 1.1.8 ***Un graphe biparti*** *est un graphe qu'on peut partitionner l'ensemble des sommets en deux ensembles A et B non vides tels que toute arête a une extrémité dans A et l'autre dans B. On note alors $G = (A, B, E)$.*

Définition 1.1.9 ***Un graphe biparti complet*** *est un graphe biparti $G = (A, B, E)$ où tout sommet de A est adjacent à tout sommet de B. On le note $K_{i,j}$, où $i =\mid A \mid$ et $j =\mid B \mid$.*

La figure 1.1.7 représente un graphe biparti et un graphe biparti complet $K_{3,4}$.

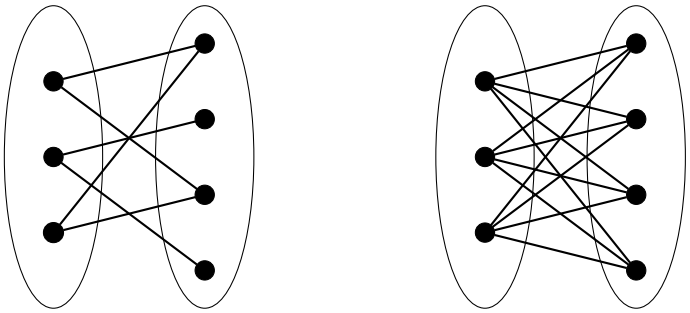


Figure 1.1.7 : Un graphe biparti et un graphe biparti complet $K_{3,4}$.

Arbre

Définition 1.1.10 *Un arbre est un graphe connexe sans cycles. Il comporte exactement $(n-1)$ arêtes, et il est noté généralement T.*

La figure 1.1.8 représente un arbre T.

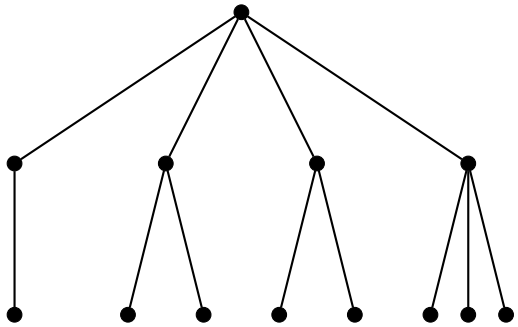


Figure 1.1.8 : Un arbre T.

Forêt

Définition 1.1.11 *Une forêt est un graphe dont toutes les composantes connexes sont des arbres.*

Étoile

Définition 1.1.12 *Un cas particulier d'un graphe biparti complet dans lequel $|V_1| = 1$ et $|V_2| = s$ est appelé une étoile et noté $K_{1,s}$. Le sommet de V_1 est appelé **centre** ou **sommet central** de l'étoile.*

La figure 1.1.9 représente un étoile $K_{1,s}$

.

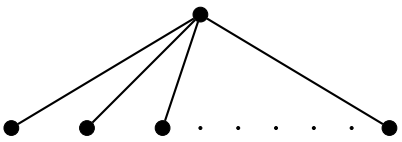


Figure 1.1.9 : Une étoile $K_{1,s}$.

Galaxie

Définition 1.1.13 *Une **galaxie** est un graphe dont toutes les composantes connexes sont des étoiles.*

Griffe

Définition 1.1.14 *Une griffe d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble de sommets de G qui engendre une étoile $K_{1,3}$.*

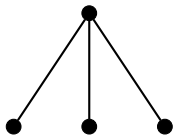


Figure 1.1.10 : Une étoile $K_{1,s}$.

- Un graphe est dit sans griffe (ou sans $K_{1,3}$) s'il ne contient pas $K_{1,3}$ comme sous-graphe induit.

Double étoile

Définition 1.1.15 *Une double étoile est le graphe obtenu en ajoutant une arête reliant les deux centres des deux étoiles $K_{1,p}$ et $K_{1,q}$, et notée par $S_{p,q}$.*

La figure 1.1.11 représente un double étoile $S_{3,3}$.

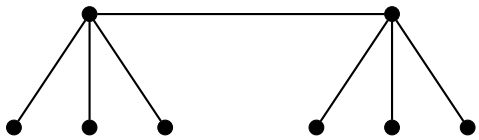


Figure 1.1.11 : Une double étoile $S_{3,3}$.

Étoile subdivisée

Définition 1.1.16 *L'opération de subdivision d'une arête xy d'un graphe G consiste à ajouter un nouveau sommet z tel que $E(G \cup \{z\}) = ((E(G - \{xy\})) \cup \{xz, yz\}$.*

Définition 1.1.17 *Une **étoile subdivisée** (ou **araignée saine**) est obtenue d'une étoile $K_{1,s}$ en subdivisant chaque arête une fois, elle est notée par $K^*_{1,s}$.*

La figure 1.1.12 représente une étoile subdivisée $K^*_{1,s}$ (ou araingnée saine).

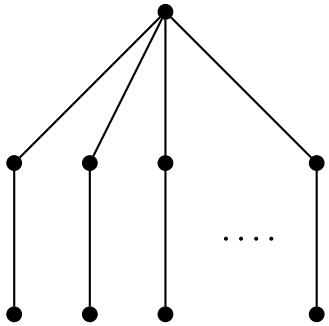


Figure 1.1.12 : La subdivision d'une étoile $K^*_{1,s}$.

Si dans l'étoile $K_{1,s}$, le nombre des arêtes subdivisées sont inférieure à s, alors on appelle le graphe obtenu une **araignée blessée**.

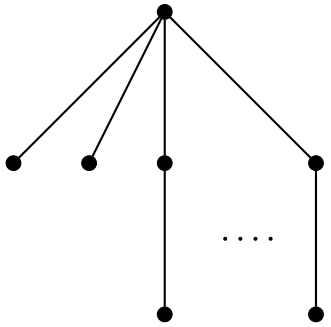
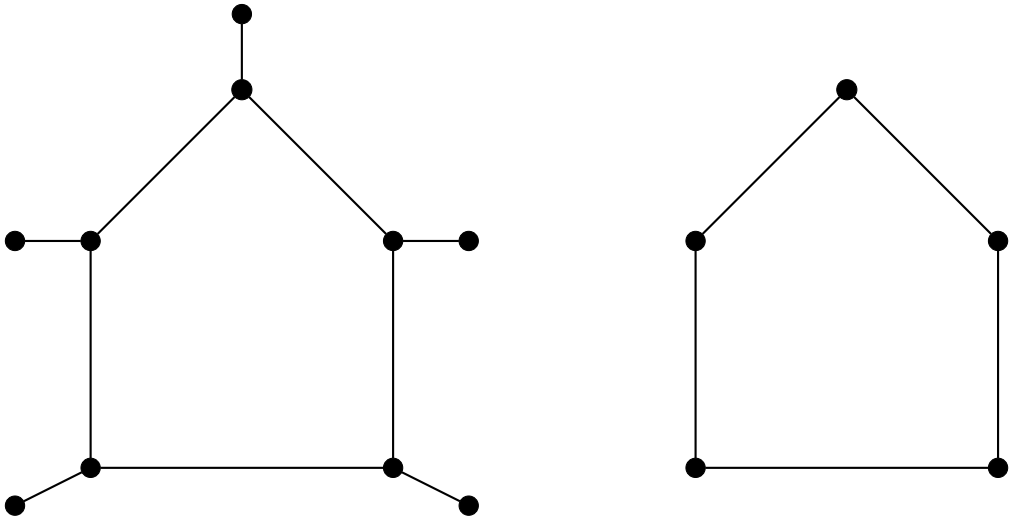


Figure 1.1.13 : une araignée blessée.

Couronne d'un graphe

Définition 1.1.18 *La couronne $G = H \circ K_1$ d'un graphe H est le graphe obtenu d'une copie de H, et pour tout sommet v de $V(H)$, on relie un sommet pendant. Il est évident que l'ordre de G est égal à $2n$ si celui de H est n.*

La figure 1.1.14 représente un graphe C_5 et sa couronne $C_5 \circ K_1$.



$C_5 \circ K_1$ C_5

Figure 1.1.14 : Un graphe C_5 et sa couronne $C_5 \circ K_1$.

Une chenille

Une chenille $C(a_1, a_2, ..., a_n)$ est un arbre dont la supression de ses sommets pendants donne une chaîne $u_1, u_2, ..., u_n$, où a_i est le nombre de sommets pendants adjacents à u_i.

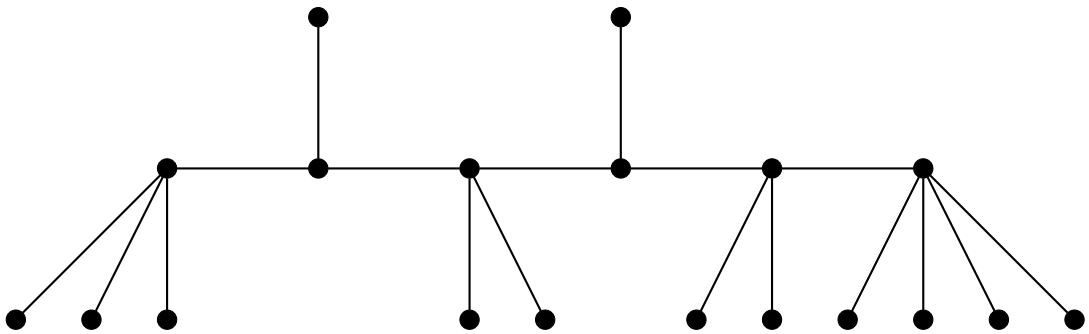


Figure 1.1.15 : Une chenille.

Graphes cordaux

Un trou : est un cycle de longueur au moins 4.

Un graphe est cordal ou triangulé s'il ne contient pas de trou.

Autrement dit, dans un graphe cordal tout cycle de longueur au moins 4 contient une corde (une arête joignant deux sommets non consécutifs du cycle), i.e. les seuls cycles induits sont des triangles.

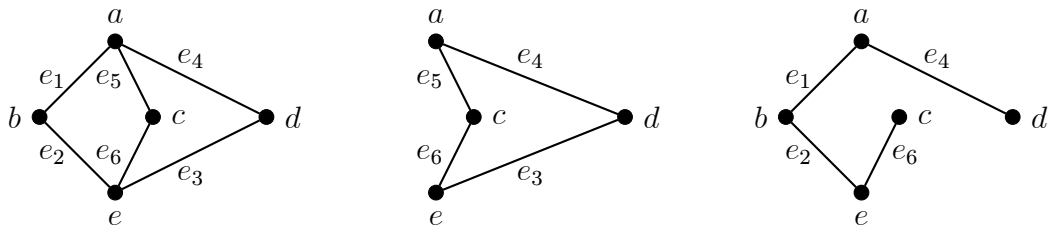
1.1.4 Sous-graphe et graphe partiel

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. On appelle **sous-graphe** de G, un graphe $H = (V', E')$ tel que $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$. Pour un sous-ensemble $A \subseteq V$, le sous graphe induit par A, noté $G[A]$ où simplement $\langle A \rangle$, est le graphe ayant A pour ensemble de sommets et dont les arête sont celles de E ayant leurs deux extrémités dans A.

Étant donné un graphe H, on dit que G est sans H si H n'est pas un des sous-graphes induits de G.

Un **graphe partiel** de G est un graphe obtenu en enlevant une ou plusieurs arêtes de G. Autrement dit, un graphe partiel de G est un graphe $G_B = (V, B)$ ayant le même ensemble de sommets, et ayant comme ensemble d'arêtes, un sous-ensemble de $E(G) : E(G_B) \subseteq E(G)$.

Des exemples de graphe partiel et de sous-graphe sont donnés dans la figure 1.1.16 .



$G = (V, E)$ $G_A = (A, E')$ $G_B = (V, B)$

Figure 1.1.16 : Un graphe simple G, un sous-graphe G_A et un graphe partiel G_B.

1.1.5 Ensemble minimal, enemble maximal

Soient $G = (V, E)$ un graphe et P une propriété.

- Un sous-ensemble A de V est dit minimal par rapport à la propriété P si aucun sous-ensemble strict de A ne vérifie cette propriété.
- A est dit maximal par rapport à la propriété P, si aucun sous-ensemble de V contenant A et différent de A ne vérifie la propriété P.

- Un sous-ensemble B de V est minimum ou de taille minimale par rapport à la propriété P si aucun ensemble plus petit (pas nécessairement un sous-ensemble de B) ne vérifie cette propriété.

- B est maximum ou de taille maximale par rapport à P, si aucun ensemble plus grand que B (sans nécessairement le contenir) ne vérifie la propriété.

1.1.6 Quelques invariants de graphes

Les graphes G et H sont dits isomorphes et on écrit $G \cong H$ s'il existe une fonction bijective entre les ensembles des sommets des deux graphes, $f : V(G) \to V(H)$ tel que deux sommets sont adjacents dans l'un des graphes si et seulement si leurs images par la fonction bijective sont adjacentes dans l'autre graphe.

Si deux graphes sont isomorphes alors ils ont des propriétés communes. Ces propriétés communes sont appelées invariants de graphes. En d'autre termes un invariant est une propriétés stable par isomorphisme. Le nombre de sommets et d'arêtes sont deux invariants de base d'un graphe. Nous définissons ci-après quelques invariants de graphes intervenant dans la suite.

Stables et cliques

Définition 1.1.19 *Un stable (independent) est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents.*

Définition 1.1.20 *Une clique (clique) est un ensemble de sommets deux à deux adjacents.*

Ainsi une clique dans un graphe est un stable dans son complémentaire et inversement. De plus, tout graphe induit par une clique étant un graphe complet, les deux termes sont le plus souvent confondus, de même, un graphe sans arêtes est régulièrement appelé stable.

Couplage

Un couplage dans un graphe G est un sous ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes. Un couplage maximum est un couplage de taille maximale. On désigne par $\beta(G)$ la taille d'un couplage maximum dans G.

Un sommet d'un graphe G est saturé par un couplage de G lorsqu'il est extrémité d'une arête de ce couplage. Autrement, il est insaturé par ce couplage. Un couplage qui sature tous les sommets de G est dit parfait.

Exemple 1.1.4 *Dans la figure 1.1.17 l'ensemble des arêtes* $M = \{x_1x_6, x_2x_4, x_3x_5\}$ *représente un couplage parfait dans le graphe* G.

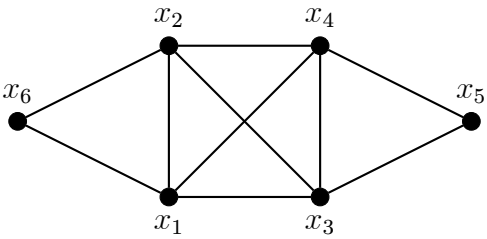


Figure 1.1.17 : $M = \{x_1x_6, x_2x_4, x_3x_5\}$ est un couplage parfait et $R = \{x_1x_6, x_2x_4, x_3x_5\}$ est un recouvrement.

Recouvrement

Etant donné un graphe simple G sans sommets isolés, on appelle recouvrement de G un ensemble R d'arêtes de E tel que tout sommet de G est extrémité d'une arête de R. En d'autres termes, un recouvrement R est un ensemble d'arêtes qui couvre tous les sommets de G.

Un recouvrement minimum est un recouvrement de cardinalité minimum. On désigne par $\upsilon(G)$ la taille minimum d'un recouvrement de G.

Exemple 1.1.5 *Dans la figure 1.1.17 l'ensemble des arêtes* $R = \{x_6x_1, x_2x_4, x_3x_5\}$ *représente un recouvrement minimum de* G *avec* $\upsilon(G) = 3$.

Transversal

On appelle transversal d'un graphe G un ensemble T de sommets de V tel que toute arête de E a au moins une de ses extrémités dans T. En d'autres termes, un transversal T est un ensemble de sommets qui couvre toutes les arêtes de G.

Un transversal minimum est un transversal qui a le plus petit nombre possible de sommets. La cardinalité d'un transversal minimum est appelée nombre transversal. On désigne par $\tau(G)$.

Exemple 1.1.6 *Dans le graphe G de la figure 1.1.17 , l'ensemble $T = \{g, b, d, e, f\}$ représente un transversal minimum de G, d'où $\tau(G) = 5$.*

1.1.7 Paking

Soit S un sous ensemble de sommets. S est un paking si $\forall x, y \in DS,\ N(x) \cap N(y) = \emptyset$, i.e $d(x, y) \geq 3$.

1.1.8 Quelques opérations sur les graphes

graphe adjoint

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Le graphe adjoint de G (graphe de ligne) est le graphe obtenu en associant un sommet à chaque arête de G et en reliant deux sommets par une arête si les arêtes de G correspondant à ces deux sommets sont adjacentes.

Par exemple dans la figure 1.1.18 sont donnés un graphe G et sont adjoint $L(G)$.



G $\qquad\qquad$ $L(G)$

Figure 1.1.18 : Un graphe G et sont adjoint$L(G)$.

1.2 Théorie de la complexité

La théorie de la complexité est une branche des mathématiques et de l'informatique ayant pour cadre l'étude de la difficulté intrinsèque des problèmes algorithmiques, et qui vise à classer ces problèmes en fonction de cette difficulté .

1.2.1 Problème de décision

Chaque problème informatique peut se réduire à un problème de décision, c'est-à-dire un problème formulé comme une question dont la réponse est Oui ou Non. Un problème qui n'est pas formulé de cette manière peut être très simplement transformé en un problème de

décision équivalent. Le problème du voyageur de commerce, qui cherche, dans un graphe, à trouver la taille du cycle le plus court passant une fois par chaque sommet, peut s'énoncer en un problème de décision comme suit: Existe-t-il un cycle passant une et une seule fois par chaque sommet tel que la somme des coûts des arcs utilisés soit inférieure à K, avec $K \in N$. Ce problème est équivalent au problème du voyageur de commerce au sens où si l'on sait résoudre efficacement l'un, on sait aussi résoudre efficacement l'autre.

1.2.2 Classes de complexité P et NP

La théorie de la complexité repose sur la définition de classes de complexité qui permettent de classer les problèmes en fonction de la complexité des algorithmes qui existent pour les résoudre .

classe *P*

Un problème de décision est dans la classe P si, pour chacune de ses instances, dont la taille est notée n, il existe un réel positif k tel qu'il peut être résolu par un algorithme de complexité temporelle $O\left(n^k\right)$, c'est-à-dire qu'il peut être décidé en temps polynomial .

Les problèmes de la classe P sont dits faciles. Ce sont ceux que l'on sait résoudre efficacement.

Classe *NP*

Un problème de décision est dans la classe NP si l'on peut vérifier en temps polynomial qu'une solution pour une instance donnée est valide (ce que l'on appelle un certificat du oui).

De façon équivalente, c'est la classe des problèmes qui admettent un algorithme dans P qui, étant donné une solution du problème NP, est capable de répondre oui ou non. Intuitivement, les problèmes dans NP sont tous les problèmes qui peuvent êtres résolus en énumérant l'ensemble des solutions possibles et en les testant avec un algorithme polynomial.

1.2.3 Problème NP-Complet

Une réduction est une transformation d'un problème en un autre, ceci permet de capturer la notion informelle de problème au moins aussi difficile qu'un autre problème .

Définition 1.2.1 *Un problème X est difficile pour une classe de problèmes C, ou C-difficile, si tout problème de C se réduit à X.*

Autrement dit, il n'existe pas de problème de C plus difficile que X, puisque tout algorithme résolvant X résout aussi n'importe quel problème de C. En particulier, les problèmes difficiles pour la classe NP forment la classe de problèmes NP-difficiles. Lorsque, de plus, X appartient lui aussi à la classe C, on dit qu'il est complet pour C, ceci signifie que X est l'un des problèmes les plus difficiles de C (il peut en effet y avoir plusieurs problèmes de même difficulté).

Définition 1.2.2 ***(Problème NP-complet)*** *Un problème de décision est NP- complet s'il vérifie les deux conditions suivantes :*

- il appartient à la classe NP,
- tous les problèmes de la classe NP se ramènent à celui-ci via une réduction polynomiale .

Tout problème d'optimisation combinatoire dont le problème de décision associé est NP-complet est NP-difficile. Par exemple le problème du stable maximum est NP-difficile.

Chapitre 2

Quelques résultats existants sur la coloration dominante

Dans ce chapitre, nous présenterons quelques definition et des bornes sur le nombre chromatique dominant, avec quelques résultats existants dans quelque graphe particuliers (graphe biparte et les arbre ....).

2.1 Coloration dominante

Le concept de coloration dominante a été introduit par *Gera et al.* [10] et étudié plus avant par *Gera* [[8][9]] .

Domination

Définition 2.1.1 *soit $G = (V, E)$ un graphe simple .*

Un ensemble dominant D est un sous-ensemble des sommets de G tel que chaque sommet dans $V - D$ a au moins un voisin dans D.

autrement dit $N[D] = V$.

Le nombre de domination de G, noté par $\gamma(G)$, est la cardinalité minimum d'un ensemble dominant de G.

Un ensemble dominant minimum d'un graphe G est dit $\gamma - ensemble$ de G.

Coloration

Définition 2.1.2 *Une coloration du graphe $G = (V, E)$ est une application $c : V \to C$, où C est l'ensemble de couleurs.*

Une $k-$coloration de G est une coloration de G à valeurs dans $\{1, 2, 3, ..., k\}$.

Une coloration c est propre si pour toute arête $uv \in E(G)$, $c(u) \neq c(v)$. G est dit $k-$colorable s'il admet une k-coloration propre.

Le nombre chromatique d'un graphe G, noté $\chi(G)$, est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour une coloration propre de G. Une coloration propre d'un graphe G et une partition de l'ensemble de sommets, de sorte que chaque partie induit un stable dans G.

Coloration dominante

Définition 2.1.3 *Une coloration dominante d'un graphe simple G, est une coloration propre telle que tout sommet domine au moins une classe de couleur. Explicitement, soit un sommet x et une classe de couleur C. x domine C s'il est adjacent à tous les sommets de C ou si x est le seul sommet de C.*

Définition 2.1.4 *Le nombre chromatique dominant d'un graphe G, noté $\chi_d(G)$ est le nombre minimum de couleurs nécessaires dans une coloration dominante de G. Il est noté $\chi_d(G)$. Une coloration dominante minimum est dite une $\chi_d(G)$-coloration.*

Par exemple dans la figure 2.1.1 représente un graphe G tel que $\chi_d(G) = 4$.

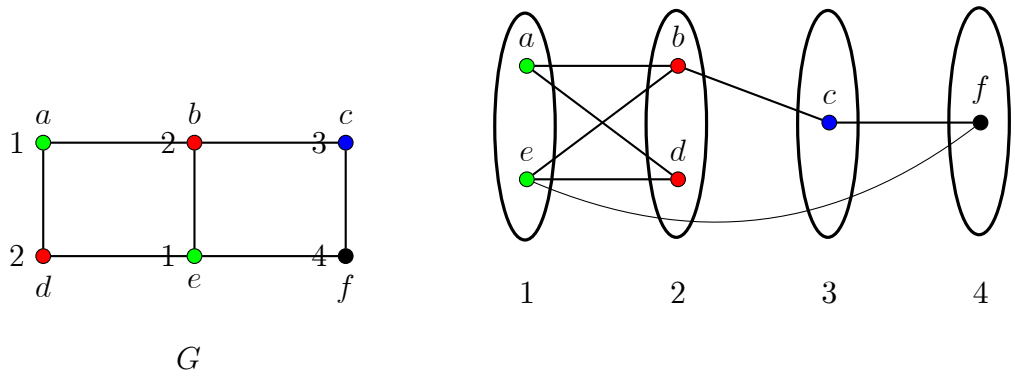


Figure 2.1.1 : Une coloration dominante .

Dans tout qui suit, on designe par CD une coloration dominante de G.

2.2 Complexité

Gera et al. [10] a introduit le concept de nombre chromatique dominant, et ils ont obtenu un certain nombre de résultats combinatoires et algorithmiques de base sur CD ont été donnés dans [11][10][13]. Par exemple, Gera [9] a observé que CD est NP complète sur les graphes généraux par une simple réduction de 3-Coloration.

Plus précisément, pour toute coloration dominent fixé, il est NP-complet de décider si un graphe admet une coloration dominante avec au plus k couleurs [18].

Dans un article récent, Chellali et Maffray [7] montrent qu' on peut décider en temps polynomial si $\chi_d(G) \leq 3$. En outre, ils montrent que le le problème est résolu en temps polynomial sur des graphes sans P_4.

2.3 Quelques résultats de base sur la coloration dominante

2.3.1 Borne et résultats existence

Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$. Comme il y a au moins deux sommets adjacents, donc moins deux couleurs différentes sont nécessaires dans une coloration dominante. De plus, si chaque sommet reçoit sa couleur unique, nous avons aussi une coloration dominante. Ainsi

$$2 \ \leq \chi_d(G) \leq n$$

Et ces bornes sont atteintes.

Proposition 2.3.1 *[9] Soit G un graphe connexe d'ordre n. Alors:*

$$\chi_d(G) = 2 \text{ si et seulement si } G = K_{a,b} \text{ pour } a, b \in \mathbb{N}^*.$$

Proposition 2.3.2 *[9] Soit G un graphe connexe d'ordre n. Alors:*

$$\chi_d(G) = n \text{ si } G = K_n \text{ et } G = \overline{K_n} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

Proposition 2.3.3 *[10] Pour tout graphe G on a:*

$$\chi(G) \leq \chi_d(G)$$

Proposition 2.3.4 *[10] Pour tout graphe connexe d'ordre $n \geq 3$*

$$\chi_d(G) \leq n + 1 - \alpha(G).$$

Cette borne est atteinte pour $G = S_{a,b}$.

Proposition 2.3.5 *[10] Si G est un graphe non connexe avec des composantes connexes $G_{1,}G_{2,\ldots,}G_k$,*

et $k \geq 2$, alors:

$$\max_{i\in\{1;2\cdots k\}} \chi_d(G_i) + k - 1 \leq \chi_d(G) \leq \sum_{i=1}^{n} \chi_d(G_i)$$

Ces bornes sont atteintes.

Lemme 2.3.1 *[10] Il existe un graphe G pour lequel $\chi_d(H) \leq \chi_d(G)$. Il existe aussi un graphe G pour lequel $\chi_d(H) \geq \chi_d(G)$ où H est un sous-graphe de G.*

Théorème 2.3.1 *[7] Soit G un graphe connexe, alors :*

$$max\{\chi(G), \gamma(G)\} \leq \chi_d(G) \leq \chi(G) + \gamma(G)$$

Théorème 2.3.2 *[1] Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$ et $\overline{G}$ sons complémentair alors* $4 \leq \chi_d(G) + \chi_d(\overline{G}) \leq 2n$

Proposition 2.3.6 *[1] Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$. Alors:*

$\chi_d(G) + \chi_d(\overline{G}) = 4$ si et seulement si $G = K_2$ et $G = \overline{K_2}$.

$\chi_d(G) + \chi_d(\overline{G}) = 2n$ si et seulement si $G = K_n$ et $G = \overline{K_n}$.

Proposition 2.3.7 *[1] Soit G un graphe connexe d'ordre n. Alors:*

$$\chi_d(G) + \chi_d(\overline{G}) = 2n - 1 \text{ si } G = K_n - e \text{ et } G = \overline{K_n - e}.$$

2.4 Coloration dominante pour certaines clesses des graphes

2.4.1 Graphes bipartis

Nous étudions maintenant la coloration dominante dans les graphes bipartis.

Théorème 2.4.1 *[8] Soit G un graphe biparti connexe alors:*

$$2 \leq \chi_d(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$$

La borne inférieure est atteinte pour les graphes biparte complets.

La borne supérieure est atteinte pour la couronne de la chaîne P_n.

Proposition 2.4.1 *[8] Soit k un entier avec $2 \leq k \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$, alors*

il exist un graphe biparti d'ordre n avec $\chi_d(G) = k$.

Proposition 2.4.2 *[8] Soit G un graphe bipartite. Alors $Cor(G)$ est un graphe bipartite avec :*

$$\chi_d(G) = \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor + 1$$

Théorème 2.4.2 *[8] Soit G un graphe biparti connexe alors:*

$$\gamma(G) \quad \leq \chi_d(G) \leq 2 + \gamma(G)$$

2.4.2 Les arbres

Pour les arbres, Gera [8] a montré que chaque arbre non trivial T satisfait $\gamma(T) + 1 \leq \chi_d(T) \leq \gamma(T) + 2$. Dans [5], Chellali et Boumediene ont caractérisé la classe de graphe T tell que $\chi_d(T) = \gamma(T) + 1$. Dans [6], les même auteurs ont proposé un algorithme pour calculer $\chi_d(T)$ en temps polynomial pour chaque arbre non trivial.

Théorème 2.4.3 *[5] Soit T un arbre non trivial. Alors, $\chi_d(T) = \gamma(T) + 1$ si et seulement si T admet un ensemble dominant minimal $D = D_I \cup D_R$ tel que $V(T) - (D_R \cup N[D_I])$ est un ensemble indépendant(stable), avec $D_I = \{v \in D : Pn(v, D) = \{v\}\}$ et $D_R = D - D_I$.*

L'existence ou non d'un ensemble dominant minimal d'un arbre T satisfaisant la propriété du théorème précédent nécessite la connaissance de tous les ensembles dominants minimum de T. Cependant, cette tâche n'est pas facile car un arbre peut admet plusieurs ensembles dominants minimums. Donc, il est naturel de chercher une autre caractérisation pour trouver facilement le nombre chromatique dominant pour n'importe quel arbre.

Théorème 2.4.4 *[22] Un arbre non trivial T vérifie $\chi_d(T) = \alpha_0(T)$ si et seulement si chaque composante connexe du graphe résultant de T en supprimant l'ensemble des feuilles et leurs supports est un sommet isolé ou une étoile où les centres de ces étoiles ne sont pas adjacents à un support dans T.*

Proposition 2.4.3 *[11] Si T est un arbre non trivial avec $\chi_d(T) = \alpha_0(T)$, alors $\chi_d(T) = \gamma(T) + 1$.*

Lemme 2.4.1 *[5] Chaque arbre T d'ordre au moins trois admet une CD avec $\chi_d(T)$ couleurs telles que toutes les feuilles de T ont la même couleur.*

Lemme 2.4.2 *[5] Soit T un arbre non trivial différent d'une étoile. Si $\chi_d(T) = \gamma(T) + 1$, alors pour toute CD minimale de T telle que toutes les feuilles ont la même couleur, les conditions suivantes sont vérifiés:*

a) $| C_G | = 1$.
b) $A \cup DS$ est un ensemble dominant minimum de T.
c) $A \cap DS = \emptyset$.
d) Chaque classe de couleurs $S \in C_S$ est dominée par un sommet de B.

Lemme 2.4.3 *[6] Soit T un arbre non trivial différent d'une étoile. Si $\chi_d(T) = \gamma(T) + 1$, alors pour chaque CD minimum de T tel que toutes les feuilles ont la même couleur, chaque sommet de $V \backslash (A \cup B)$ est adjacent à au moins un support de T.*

Lemme 2.4.4 *[6] Soit T un arbre non trivial diffirent d'une étoile. Si $\chi_d(T) = \gamma(T) + 1$,alors pour toute CD minimale de T telle que toutes les feuilles ont la même couleur, les conditions suivantes sont vérifiés:*

a) $N(DS) = V \diagdown (A \cup B)$.

b) DS est un ensemble packing.

2.5 Résultat principal et algorithme

Dans [10], Gera et al. ont montré qu'il est NP-complet de décider si un graphe admet une coloration dominante minimum avec au plus quatre couleurs.

2.5.1 Les arbres

Dans [6], les auteurs ont donné un algorithme qui calcule $\chi_d(T)$ de n'importe quel arbre non trivial qui est basé sur le théorème suivant:

Théorème 2.5.1 *[6] Soit T un arbre non trivial. Alors $\chi_d(T) = \gamma(T) + 1$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées:*

a) Q est un ensemble packing.

b) $X \cup Q$ est un ensemble dominant minimal de T.

c) $\gamma\left(T\left[V \diagdown N\left[Q\right]\right]\right) = \alpha_0(T\left[V \diagdown N\left[Q\right]\right])$.

Algorithme 1: ColDom

Données : $T = (V, E)$ un arbre non trivial

Résultat : Le nombre chromatique dominant de T.

Calculer $\gamma(T)$, le nombre de domination de T;

si T est une étoile alors

retourner $\chi_d(T) = \gamma(T) + 1$

fin

$Q^* = N(S(T)) \setminus (S(T) \cup L(T))$;

$Q = \{x \in V \setminus Q^* : N(x) \subseteq Q^*\}$; Soit X l'ensemble transversal minimum de

$T' = T[V \setminus N[Q]]$ contenant tous les supports;

si Q est un packing, $X \cup Q$ est un dominant minimum de T et X est un dominant minimum de T

$\chi_d(T) = \gamma(T) + 1$

Colorer T comme suit :

pour chaque $x \in Q$ faire

Donner une nouvelle couleur aux sommets de $N(x)$;

fin

Donner la même nouvelle couleur aux sommets de $L(T) \cup Q$;

Donner une nouvelle couleur à chaque support de T;

Donner une nouvelle couleur à chaque sommet de $X \setminus S(T)$;

Donner aux sommets non colorés la même couleur donnée aux feuilles ;

Sortir ;

sinon

retourner $\chi_d(T) = \gamma(T) + 2$

fin

2.5.2 les graphes sans P_4

Nous montrons maintenemt comment calculer $\chi_d(G)$ en temps polynomial pour les graphes sans P_4 en generale d'après [8] Il existe un algorithme en temps polynomial qui teste si un graphe G satisfait $\chi_d(G) \leq 3$.

Théorème 2.5.2 *[15] Soit G un graphe sans P_4 avec $n \geq 2$. Alors:*

G ou $\overline{G}$ n'est pas connexe.

Ce théorème est motivé par l étude des colorations dominantes dans les graphes qui ne sont pas connexe et les graphes dont le complément n'est pas connexe.

Lemme 2.5.1 *[8] Soit G un graphe quelconque. Alors :*

(i) Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- G a une CD c avec $P_c = 1$, où P_c est le nombre de couleurs utilisées par la coloration c.
- G a un sommet universel.
- Toute coloration c de G est une coloration dominante avec $P_c = 1$.

(ii) Si G n'est pas connexe. Alors :

Toute coloration de G est une coloration dominante et $\chi_d(G) = \chi(G)$. De plus, si G n'a pas de sommet universel, alors tous les coloration dominante c de G vérifie $P_c = 2$.

Lemme 2.5.2 *[7] Soit G un graphe non connexe, avec les composantes $G_1, G_2, ..., G_k$, $k \geq 2$. Alors:*

$$\chi_d(G) = \min \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_{c_i} + \max_{i \in \{1;2 \cdots k\}} \{q_{c_i} + p_{c_i}\} \right\},$$

La formule donnée dans le théorème précédent n'est pas facile à calculer en général. Mais elle peut être calculé dans le cas de graphes sans P_4, ce qui conduit au résultat suivant:

Théorème 2.5.3 *[7] Soit G un graphe sans P_4*

(i) Si G est connexe, alors $\chi_d(G) = \chi(G)$.

(ii) Si G n'est pas connexe, soit $k \geq 2$ le nombre de composants de G et h le nombre de composants de G ayant un sommet universel. Alors :

- Si G a une composante H qui a un sommet universel et vérifie $\chi(H) = \chi(G)$, alors, $\chi_d(G) = \chi(G) + 2k - h - 1$.
- Sinon $\chi_d(G) = \chi(G) + 2k - h - 2$.

2.6 Quelques résultats existants sur Le nombre chromatique dominant

2.6.1 Le nombre chromatique dominant de quelques graphes élémentaires

Proposition 2.6.1 *[9] Soit G un graphe connexe d'ordre n. Alors* $\chi_d(G) = n$ *si et seulement si G est le graphe complet* K_n .

Proposition 2.6.2 *[1] Soit G un graphe d'ordre n. Alors* $\chi_d(G) = n$ *si et seulement si* $G = K_a \cup (n-a) K_1$, *ou* $1 \leq a \leq n$.

Proposition 2.6.3 *[1] Si G est un graphe d'ordre n, alors* $\chi_d(G \circ K_1) = n + 1$.

Théorème 2.6.1 *[1] :*

- *Soit G un graphe connexe d'ordre n. Alors* $\chi_d(G) = n - 1$ *si et seulement si l'un des cas suivants est valable :*

$G \neq K_n$ et K_{n-1} est un sous graphe de G.

$V(G) = V_1 \cup \{u, v\}$, où $\langle V_1 \rangle = K_{n-2}$, $d_G(u) = 1$, $uv \in E(G)$ et v est non adjacente à au moins un sommet de V_1.

- L'étoile $K_{1,n}$ a $\chi_d(K_{1,n}) = 2$.
- Soit $K_{a,b}$ est double étoile pour $a + b \geq 4$, $\chi_d(K_{a,b}) = 3$.
- Multi -étoile $K_n(a_1, a_2, ..., a_n)$ a $\chi_d(K_n(a_1, a_2, ..., a_n)) = n + 1$.
- Le graphe complet k-paretite $K_{a_1,a_2,...,a_k}$ a $\chi_d(K_{a_1,a_2,...,a_k}) = k$.
- Le graphe de Petersen $\chi_d(G) = 5$.

2.6.2 Les cycles et les chaînes

les chaînes P_n

Théorème 2.6.2 *[10] Soit P_n une chaîne d'ordre $n \geq 2$. Alors*

$$\chi_d(P_n) = \begin{cases} 1 + \lceil \frac{n}{3} \rceil \text{ si } n = 2, 3, 4, 5, 7 \\ 2 + \lceil \frac{n}{3} \rceil \text{ sinon} \end{cases}$$

Les cycles C_n

Pour le cycle C_n, nous avons [3]

Théorème 2.6.3 *[9] Soit C_n une cycle' d'ordre n. Alors*

$$\chi_d(C_n) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{3} \rceil, \ si \ n = 4. \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil + 1, si \ n = 5. \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil + 2, \ sinon. \end{cases}$$

2.6.3 Les chenilles

Théorème 2.6.4 *[10] Si G est une chenille dont les sommets de degrés inférieur à 3 sont indépendants, et si spaine de G contient exactement r sommets de degré au moins égal à 3, alors*

$$\chi_d(P_n) = r + 1.$$

2.6.4 Le nombre chromatique dominant d'un graphe biparti

Proposition 2.6.4 *[8] Soit G un graphe biparti d'ordre au moins 2. Alors*

$$\chi_d(G) = 2 \quad \text{si seulement si } G = K_{m,n}.$$

Proposition 2.6.5 *[8] Soit G un graphe biparti. Alors*

$$\chi_d(Cor(G)) = \lfloor \frac{\mid Cor\,(G) \mid}{2} \rfloor + 1.$$

Chapitre 3

Coloration dominante des arêtes

Dans ce chapitre, nous donnons Quelques bornes sur l'indice chromatique dominant des arêtes avec des valeurs exactes sur l'indice chromatique dominant des arêtes de certains graphes particuliers.

3.1 Définition de $\gamma'(G)$, $\chi^{'}(G)$ et $\chi^{'}_{d}(G)$

3.1.1 Coloration et domination des arêtes

Coloration des arêtes

Comme pour la coloration des sommet, l'intérêt est de trouver une coloration des arêtes avec un nombre minimum de couleurs .

Définition 3.1.1 *On appelle coloration des arêtes d'un graphe toute attribution d'une couleur à chaque arête* (*est une fonction* $c : E \to \{1; 2, 3, ..., k\}$ $(k \in \mathbb{N})$) , *telle que pour toutes deux arêtes* u *et* v *adjacentes* $c(u) \neq c(v)$.

G est k-arête-colorable si on peut colorer ses arêtes avec k couleurs distinctes, sans que deux arêtes adjacentes aient la même couleur.

Définition 3.1.2 *L'indice chromatique d'un graphe* G , *noté* $\chi^{'}(G)$,*et le plus petite entier positif* k *pour lequel* G *est* k*-arêtes-colorable*

Pour le graphe $G = \overline{C_6}$ de la Figure 3.1.1 , G est 3-colorable, et $\chi^{'}(G) = 3$.

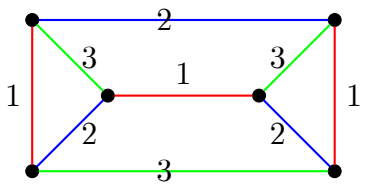


Figure 3.1.1 : L'indice chromatique de G .

Remarque 3.1.1 *Pour tout graphe G.*

- $\chi^{'}(G) = \chi(L(G))$, *où* $L(G)$ *est le graphe adjoint de* G.
- $\Delta(G) \leq \chi^{'}(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Domination des arêtes

Le concept de domination des arêtes a été introduit par Mitchell et Hedetniemi[16].

Définition 3.1.3 *Un sous-ensemble X de E est appelé un ensemble dominant de G si chaque arête dans $E - X$ est adjacente à une arête dans X.*

Le nombre de domination de l'arête $\gamma'(G)$ de G est la cardinalité minimum prise sur tous les ensombles dominants d'arêtes.

Par exemple pour le graphe G de la Figure 3.1.2 , $\gamma'(G) = 2$, et {1,5}, {4,2} et {6,1}sont des $\gamma'(G)-$ ensembles.

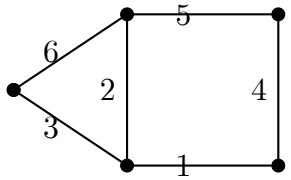


Figure 3.1.2 : le nombre de domination d'aretes de G est 2.

3.1.2 Coloration dominante des arêtes

Définition 3.1.4 *Une coloration dominante d'un graphe simple G, est une coloration propre telle que tout arêtes domine au moins une classe de couleur.Explicitement, soit e une arête et C une classe de couleur. e domine C s'il est adjacent à toutes les arêtes de C ou si e est la seule arête de C.*

Définition 3.1.5 *l'indice chromatique dominant des arêtes d'un graphe G, noté $\chi_d^{'}(G)$ est le nombre minimum de couleurs nécessaires dans une coloration dominante des arêtes de G. Il est noté $\chi_d^{'}(G)$ et une coloration dominante des arêtes minimum est dite une $\chi_d^{'}(G)$-coloration.*

Pour le graphe $G = \overline{C_6}$ de la Figure 3.1.3 , $\chi_d^{'}(G) = 5$.

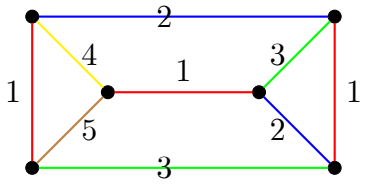


Figure 3.1.3 : L'indice chromatique dominant de G .

3.2 Quelques bornes sur l'indice chromatique dominant des arêtes

3.2.1 Résultats préliminaires

Soit G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$ et de taille $m \geq 1$. La coloration qui attribue une couleur diffrénte de chaque arête de G est une coloration propre.

Ainsi, l'indice chromatique dominant des arêtes est défini pour chaque graphe, et $\chi_d^{'}(G) \leq m$. Nous considérons d'abord l'indice chromatique dominant des arêtes pour quelques cas simples. Il est facile d'observer ce qui suit.

Proposition 3.2.1 *pour tout graphe G on a,*

$$\chi_d^{'}(G) \geq \chi^{'}(G)$$

Proposition 3.2.2 *Pour un graphe connexe G d'ordre $n \geq 2$, on a :*

$$\chi_d^{'} \leq m - \beta_0 + 1.$$

Preuve. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe et soit B un couplage maximum de G c'est à dire $\mid B \mid = \beta_0$. Posons $E(G) - B = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_{m-\beta_0}\}$. Soit c une coloration dominante définie de la manière suivante: $c(e_i) = \begin{cases} i \text{ si } 1 \leq i \leq m - \beta_0 \\ m - \beta_0 + 1 \text{ si } i \geq m - \beta_0 + 1 \end{cases}$. Il est claire que si $e_i \in E(G) - B$, alors l'arête e_i se domine lui même, pour tout $1 \leq i \leq m - \beta_0$. Comme le graphe G est connexe, toute arête $e_i \in B$, $i \geq m - \beta_0 + 1$, alors e_i domine au moins une arête dans $E(G) - B$. Il s'ensuit que la coloration c est propre et dominante. La définition de $\chi_d^{'}(G)$ implique que $\chi_d^{'}(G) \leq m - \beta_0 + 1$. ■

Théorème 3.2.1 *Soit G un graphe non connexe avec $G_1, G_2, G_3, ..., G_k$ les composentes connexes de G et $m(G_i) \geq 1$, $1 \leq i \leq k$. Alors*

$$\max_{i \in \{1;2 \cdots k\}} \chi_d^{'}(G_i) + K - 1 \leq \chi_d^{'}(G) \leq \sum_{i=1}^{k} \chi_d^{'}(G_i)$$

Preuve.

- **La borne supèrieure**: Pour tout $1 \leq i \leq k$, soit $V_{i,1}, V_{i,2}, ...; V_{i,\ \chi_d^{'}(G_i)}$ une coloration dominante des arêtes pour chaque composante G_i. Il est claire que $\bigcup_{i=1}^{i=k} \{V_{i,1}, V_{i,2}, ...; V_{i,\ \chi_d^{'}(G_i)}\}$ est une coloration dominante des arête de G. Ceci implique que

$$\chi_d^{'}(G) \leq \sum_{i=1}^{k} \chi_d^{'}(G_i).$$

- **La borne inférieure**: soit G_j la composente de G tell que $\chi_d^{'}(G_j) = \max_{i \in \{1;2 \cdots k\}} \chi_d^{'}(G_i)$. Colorons la composente G_j par $\chi_d^{'}(G_j)$. Pour colorer $G \backslash G_j$ nous avons besoin à au moins une nouvelle couleur dans chaque composente connexe. Par conséquent,

$$\max_{i \in \{1;2 \cdots k\}} \chi_d^{'}(G_i) + k - 1 \leq \chi_d^{'}(G).$$

■

Remarque 3.2.1 *Les deux bornes du théorème 3.2.1 sont atteintes.*

Si $G = G_k = \frac{n}{2}\ K_2$, alors $\chi_d^{'}(K_{1;n}\ ) = \sum_{i=1}^{k} \chi_d^{'}(G_i)$.
Si $G = G_k = K_{1,n}\ $, alors $\max_{i\in\{1;2\cdots k\}} \chi_d^{'}(G_i) + k - 1 = \chi_d^{'}(G)$.

Théorème 3.2.2 *Soit G un graphe simple. Alors*

$$\max\{\chi^{'}(G), \gamma^{'}(G)\} \leq \chi_d^{'}(G) \leq \quad \chi^{'}(G) + \gamma^{'}(G)\,.$$

Preuve. La borne inférieure:

Comme la coloration dominante des arêtes est une coloration propre, alors

$$\chi^{'}(G) \leq \chi_d^{'}(G) \tag{1}$$

Soient c une coloration dominante minimale des arête de G et C_i, $1 \leq i \leq \chi_d^{'}(G)$ les classes de couleurs de c. Pour tout $1 \leq i \leq \chi_d^{'}(G)$ soit $e_i \in C_i$ une arête dans la classe C_i.

Soit $S = \{e_i, 1 \leq i \leq \chi_d^{'}(G).\}$. D'après la définition de la coloration dominante des arête chaque arête $e_i \in S$ domine au moins une classe de couleur. Ceci implique que S et un ensemble dominant des arêtes de G. D'où :

$$\gamma^{'}(G) \leq \chi_d^{'}(G). \tag{2}$$

Donc d'après les inégalités (1) et (2), on obtient $\chi_d^{'}(G) \geq \max\{\chi^{'}(G), \gamma^{'}(G)\}$.

La borne supérieure :

Soit S un ensemble dominant des arêtes de G. Colorons les arêtes de $E(G) - S$ par les couleurs $1, 2, ...,\ \chi^{'}(G)$. Colorons les arêtes de S par les couleurs $\chi^{'}(G) + 1, \chi^{'}(G) + 2, ..., \chi^{'}(G) + \gamma^{'}(G)$.

Comme S est un dominant et les couleurs de S sont distincts, alors chaque arête dans S domine lui même et chaque arête dans $E(G) - S$ domime au moins une classe de couleur dans S. Donc cette coloration est dominante. Ceci implique que $\chi_d^{'}(G) \leq 1 + 2 + ... + \chi^{'}(G) + \ \chi^{'}(G) + 1, \chi^{'}(G) + 2, ..., \chi^{'}(G) + \gamma^{'}(G)$.

d'où

$$\chi_d^{'}(G) \leq \quad \chi^{'}(G) + \gamma^{'}(G)\,.$$

■

3.2.2 Graphe complet

Proposition 3.2.3 *Soit K_n un graphe complet avec $n \geq 3$. Alors:*

$$\chi_d^{'}(K_n) \leq \begin{cases} 2n-3 \text{ si } n \text{ est impair} \\ 2n-2 \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

Preuve. Soit $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ l'ensemble des sommets de K_n. D'aprè [21]

$\chi^{'}(K_n) \leq \begin{cases} n-1 \text{ si } n \text{ pair} \\ n \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$

Soit v un sommet quelconque de K_n. Il est claire que $K_n - v$ est un graphe complet d'ordre $n-1$. Donc

$\chi^{'}(K_{n-1}) \leq \begin{cases} n-2 \text{ si } n-1 \text{ pair} \\ n-1 \text{ si } n-1 \text{ impair} \end{cases}$

Colorons $K_n - v$ par $\chi^{'}(K_{n-1})$. Maintenant, on ajoute le sommet v. Il est claire que v est incident à $n-1$ arêtes. Colorons les arêtes qui sont incidentes à v par des couleurs distincts et qui ne sont pas présentes dans $K_n - v$. On peut vérifier facilement que chaque arête incidente à v se domine lui même et chaque arête de $K_n - v$ domine au moins une arête incidente à v. Par conséquent, cette coloration est dominante. Ceci implique que

$\chi_d^{'}(K_n) \leq \chi^{'}(K_{n-1}) + n - 1 = \begin{cases} 2n-3 \text{ si } n-1 \text{ pair} \\ 2n-2 \text{ si } n-1 \text{ impair} \end{cases}$.

D'où

$$\chi_d^{'}(K_n) \leq \begin{cases} 2n-3 \text{ si } n \text{ impair} \\ 2n-2 \text{ si } n \text{ pair} \end{cases}$$

■

3.2.3 Graphes bipartis

Proposition 3.2.4 *Soit $K_{n,m}$ un graphe bipartite complet avec $m \neq n$, Alors:*

$$\max\{m, n\} \leq \chi_d^{'}(K_{n,m}) \leq m + n - 1.$$

Preuve.

- Pour la borne inférieure :

On a $\chi_d^{'}(K_{n,m}) \geq \chi^{'}(K_{n,m})$ et d'après [21], $\chi^{'}(K_{n,m}) = \Delta = \max\{m, n\}$.

Ceci implique que $\chi_d^{'}(K_{n,m}) \geq \chi^{'}(K_{n,m}) = \Delta = \max\{m, n\}$.

D'où

$$\chi_d^{'}(K_{n,m}) \geq \max\{m, n\}$$

- Pour la borne supérieure :

Soit $K_{n,m}$ un graphe bipartite complet avec $V(K_{n,m}) = X \cup Y$ tell que $\mid X \mid = m$ et $\mid Y \mid = n$. On pose $X = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ et $Y = \{v_{m+1}, v_{m+2}, ..., v_{m+n}\}$.

Comme $m \neq n$ on distingue deux cas :

$\underline{1^{ère} \text{ Cas :}}$ Si $\mid X \mid - \mid Y \mid = 1$ c'est-a-dire $m - n = 1$:

On pose $X = \{v_1, v_2, ..., v_{m-1}\} \cup \{v_m\}$

Si on supprime le sommet v_m, alors $\mid X - \{v_m\} \mid = \mid Y \mid$ le graphe obtenu $G - v_m = K_{n,n}$. On rappel que $\chi^{'}(G - v_m) = \chi^{'}(K_{n,n}) = n$.

D'autre part, si on ajoute le sommet v_m à $K_{n,n}$, le graphe obtenu est $G = K_{n+1,n}$. Colorons les arêtes de $K_{n,n}$ par n couleurs. Colorons les arêtes incidentes à v_m par des couleurs distinctes et qui ne sont pas présentes dans $G - v_m$. Chaque arête dans $G - v_m$ domime au moins une arête incidente à v_m et chaque arête incidente à v_m domine lui même. La coloration obtenue est propre et dominante. D'où, $\chi_d^{'}(K_{n,m}) \leq n + 1, n + 2, ..., n + n$, et comme $m - n = 1$ alors $n = m - 1$.

Par conséquent,

$$\chi_d^{'}(K_{n,m}) \leq m + n - 1.$$

$\underline{2^{ème} \text{ Cas :}}$ Si $\mid X \mid - \mid Y \mid \geq 2$ c'est-a-dire $m - n \geq 2$:

$X = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ et $Y = \{v_{m+1}, v_{m+2}, ..., v_{m+n}\}$.Si on supprime un sommet v_i, $1 \leq i \leq m$, alors $G - v_i = K_{n,m-1}$. Il est clair que $\chi^{'}(K_{n,m-1}) = \Delta = \max\{m - 1, n\}$. Comme $m - 1 \geqslant n$, alors $\chi^{'}(K_{m-1,n}) = m - 1$.

Maintenant, on ajoute le sommet v_i. Colorons les arêtes de $G - v_i$ par $m - 1$ couleurs. Colorons toutes les arêtes qui sont incidences à v_i par n couleurs distinctes qui ne sont pas présentes dans $G - v_i$. Il est claire que la coloration précédente est propre et dominante.

D'où,

$$\chi_d^{'}(K_{n,m}) \leq m + n - 1.$$

■

Remarque 3.2.2 *Les bornes de la proposition 3.2.4 sont atteintes.*

Si $G = K_{3,4}$, alors $\chi_d^{'}(K_{3,4}) = m + n - 1$.
Si $G = K_{1,n}$, alors $\chi_d^{'}(K_{1,n}) = \max\{m, n\}$.

Proposition 3.2.5 *Soit $K_{n,n}$ un graphe bipartite complet, Alors:*

$$n \leq \chi_d^{'}(K_{n,n}) \leq 2n.$$

Preuve.

- La borne inférieure:

On a

$$\chi_d^{'}(K_{n,m}) \geq \max\{m, n\}$$

et comme $n = m$ on obteient $\chi_d^{'}(K_{n,m}) \geq \max\{n, n\} \geq n$
d'ou

$$\chi_d^{'}(K_{n,n}) \geq n$$

- La borne supérieure :

Soit $X = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ tell que $\mid X \mid = n$.

On supprime un sommet v_i, $1 \leq i \leq m$. Il est claire que le graphe $G - v_i = K_{n-1,n}$. D'autre part, $\chi^{'}(K_{n,n}) = \Delta = \max\{n-1, n\}$, et comme $n \succ n-1$ alors $\chi^{'}(K_{n-1,n}) = n$.

Maintenant, on ajoute le sommet v_i. Colorons les arêtes de $G - v_i$ en utilisant n couleurs. Colorons toutes les arêtes qui sont incidentes à v_i par n couleurs distincts. Il est claire que cette coloration est propre et dominante. Ceci implique que $\chi_d^{'}(K_{n,n}) \leq n+1, n+2, ..., n+n$. D'où,

$$\chi_d^{'}(K_{n,m}) \leq 2n$$

■

Remarque 3.2.3 *Les bornes de la Proposition 3.2.5 sont atteintes.*

Si $G = K_{3,3}$, alors $\chi_d^{'}(K_{3,3}) = 2n$.
Si $G = K_{1,n}$, alors $\chi_d^{'}(K_{1,n}) = n$.

3.3 L'indice chromatique dominant de certains graphes particuliers

3.3.1 L'indice chromatique dominant de quelques graphes élémentaires

Proposition 3.3.1 *Pour la chaîne P_n d'ordre $n \geq 2$, on a*

$$\chi_d^{'}(P_n) = \begin{cases} 1 + \lceil \frac{n-1}{3} \rceil, \ si\ n = 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8 \\ 2 + \lceil \frac{n-1}{3} \rceil, \ sinon \end{cases}$$

Preuve. *On utilise la définition du graphe adjoint on trouve $\chi_d^{'}(P_n) = \chi_d(L(P_n))$*

D'après le Théorème 2.6.2 $\chi_d(L(P_n)) = \chi_d(P_{n-1}) = \begin{cases} 1 + \lceil \frac{n-1}{3} \rceil, \ n-1 = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7 \\ 2 + \lceil \frac{n-1}{3} \rceil, \ sinon \end{cases}$

d'où

$$\chi_d^{'}(P_n) = \begin{cases} 1 + \lceil \frac{n-1}{3} \rceil, \ si\ n = 3, 4, 5, 6; 8 \\ 2 + \lceil \frac{n-1}{3} \rceil, \ sinon \end{cases}$$

■

Proposition 3.3.2 *Pour le cycle C_n d'ordre $n \geq 3$, on a*

$$\chi_d^{'}(C_n) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{3} \rceil \ si\ n = 4. \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil + 1 \ si\ n \ = 5. \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil + 2 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Preuve. On utilise la définition de graphe adjointe on trouve $\chi_d^{'}(C_n) = \chi_d(L(C_n)) = \chi_d(C_n)$

et d'après le Théorème 2.6.3, on obtient $\chi_d(C_n) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{3} \rceil, \text{ si } n = 4. \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil + 1, \text{ si } n = 5. \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil + 2, \text{ sinon.} \end{cases} = \chi_d^{'}(C_n)$ ■

Proposition 3.3.3 *Soit $G = C(n_1, n_2, ...n_k)$ est une chenille, alors*

$$\chi_d^{'}(G) = \begin{cases} \gamma' + \Delta - 1 \quad si \ \mid D \cap E[N[v_{i_0}]] \mid = 1 \\ \gamma' + \Delta - 2 \quad si \ \mid D \cap E[N[v_{i_0}]] \mid = 2 \end{cases}$$

avec: D un $\gamma'-$ ensemble de G et v_{i_0} un sommet de degré Δ.

Preuve.

- Pour $1 \leq i \leq k$, soit $E_i\left(N\left[v_i\right]\right)$ les arêtes engendré par $N\left[v_i\right]$. Notons que $\left|E_i\left(N\left[v_i\right]\right) \cap D\right| = l_i$, $0 \leq l_i \leq 2$. Choisissons un sommet v_{i_0}, $1 \leq i_0 \leq k$ de dégré maximum. Notons que $1 \leq l_{i_0} \leq 2$. Colorons les arêtes de D par γ' couleurs distinctes. Colorons les arêtes de $E_{i_0}\left(N\left[v_{i_0}\right]\right) \setminus D$ par $\Delta - l_{i_0}$ couleurs distinctes et qui ne sont pas présentes dans D. Pour $1 \leq i \leq k$, $i \neq i_0$, Colorons les arêtes non colorées de $E_i\left(N\left[v_i\right]\right)$ par au plus $\Delta - l_{i_0}$ couleurs distinctes qui sont présentes dans $E_{i_0}\left(N\left[v_{i_0}\right]\right) \setminus D$. Il est facile de vérifier que cette coloration est propre et dominante.

D'où, $\chi_d^{'} \leq \begin{cases} \gamma' + \Delta - 1 & \text{si } \mid D \cap E[Nv_{i_0}] \mid = 1 \\ \gamma' + \Delta - 2 & \text{si } \mid D \cap E[Nv_{i_0}] \mid = 2 \end{cases}$.

- Pour montrer l'égalité, il suffit de monter

$$\chi_d^{'} \geq \begin{cases} \gamma' + \Delta - 1 & \text{si } \mid D \cap E[Nv_{i_0}] \mid = 1 \\ \gamma' + \Delta - 2 & \text{si } \mid D \cap E[Nv_{i_0}] \mid = 2 \end{cases}$$

Soit c une $\chi_d^{'}(G) -$ coloration dominante des arêtes de G. On distingue deux cas:

Cas 1:$\mid D \cap E[Nv_{i_0}] \mid = 1$

Supposons que $\chi_d^{'}(G) = p$ avec, $\chi^{'}(G) \leq p \leq \gamma' + \Delta - 2$. Comme $p \leq \gamma' + \Delta - 2$ alors $\mid D \cap E[Nv_{i_0}] \mid = 2$,

contradiction avec le fait que $\mid D \cap E[Nv_{i_0}] \mid = 1$.

Cas 2: $\mid D \cap E[Nv_{i_0}] \mid = 2$

Supposons que $\chi_d^{'}(G) = p$ avec, $\chi^{'}(G) \leq p \leq \gamma' + \Delta - 3$. Ceci implique que $\mid D \cap E[Nv_{i_0}] \mid \geq 3$.

Donc il exist une arête pendente $e_{i_0} \in D \cap E[Nv_{i_0}]$. Par conséquent, $D - e_{i_0}$ est un dominant. Ceci implique que $\gamma'(G) < |D|$,

contradiction avec la minimalite de D.

D'où :

$$\chi_d^{'} = \begin{cases} \gamma' + \Delta - 1 & \text{si } \mid D \cap E[Nv_{i_0}] \mid = 1 \\ \gamma' + \Delta - 2 & \text{si } \mid D \cap E[Nv_{i_0}] \mid = 2 \end{cases}$$

■

3.3.2 L'indice chromatique dominant de certains graphes particuliers

Dans ce paragraphe on donne la valeur exacte de l'indice chromatique dominant de quelques graphes particulier à savoir: le n-livre, l'arbre(n,k)-banana, le fan graph F_n, l'étoile subdivisée et la roue.

n-livre

Définition 3.3.1 *Un graphe n-livre, noté par B_n est le produit cartésien $S_{n+1} \times P_2$.*

Le graphe du 3-livre B_3 est illustré dans la figure suivante.

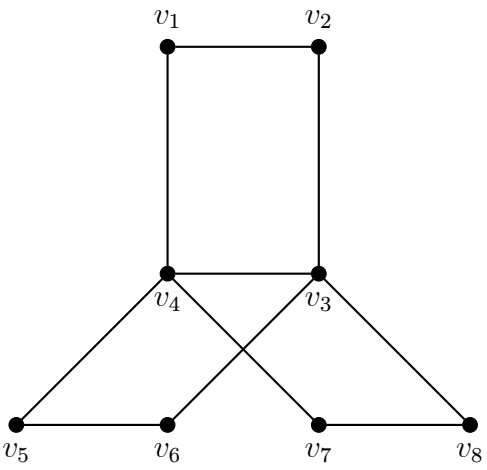


Figure 3.3.1 : graphe 3 livre B_3.

Proposition 3.3.4 *Pour tout graphe n-livre B_n, $n \geq 3$, on a:*

$$\chi_d^{'}(B_n) = n + 2.$$

Preuve. Sient u et v les deux sommets de dégrés maximum dans G. Considérons les trois ensembles suivants:

$E_1 = \{e_1, e_2, ..., e_{n+1}\}$ l'ensemble des arêtes qui sont incidentes à u.

$E_2 = \{e_{n+1}, e_{n+2}, ..., e_{2n+1}\}$ l'ensemble des arêtes qui sont incidentes à v telles que l'arête e_i est parallèle à l'arête e_{n+i+1}, $1 \leq i \leq n$

$E_3 = E(G) \setminus (E_1 \cup E_2) = \{e_{2n+2},\ e_{2n+3},\ ...,\ e_{3n+1}\}$ telles que e_{2n+i+1} est adjacente à e_i, $1 \leq i \leq n$. Notons que $e_{n+1} \in E_1 \cup E_2$

- Il est claire que G est un graphe biparti. Ceci implique que $\chi'(G) = \Delta = n+1$. Supposons que G admet une coloration dominante c par $n+1$ couleurs. Comme les arêtes de E_i, $i = 1, 2$, sont adjacentes, alors les couleurs de E_i , $i = 1, 2$ sont distinctes.
  a) Colorons les arêtes de E_1 comme suit: Colorons e_i par la couleur i, $1 \leq i \leq n+1$.
  b) Colorons les arêtes de E_2 comme suit: Colorons e_{n+i} par $i-1$, $2 \leq i \leq n+1$.
  c) Soit $e_j \in E_3$. Il est claire que le voisinage de e_j est coloré par $i_j, 1 \leq i_j \leq n$.

Colorons e_j par j, $j \neq i_j \neq n+1$. Notons que la colore j est présente dans le voisinage d'une arête $e_k \in E_3$.

Colorons e_k par k, $1 \leq k \leq n$ et $k \neq j$. Ceci implique que e_k ne domine aucune classe de colore. Contradiction avec le fait que c est une coloration dominunte.

D'où

$$\chi'_d(B_n) \geq n+2 \tag{1}$$

- Pour montre que $\chi'_d(B_n) \leq n+2$. Il suffit de donner une coloration dominante des arête en utilisant $n+2$ couleurs.

a) Colorons les arêtes de E_1 comme suit: Colorons e_i par la couleur i, $1 \leq i \leq n+1$.
b) Colorons les arêtes de E_2 comme suit: Colorons e_{n+i} par $i-1$, $2 \leq i \leq n+1$.
c) Colorons toutes les arêtes de E_3 par la couleur $n+2$.

Cette coloration est propre et dominante. D'où,

$$\chi'_d(B_n) \leq n+2 \tag{2}$$

En combinant les deux inégalitées (1) et (2) , On obtient,

$$\chi'_d(B_n) = n+2.$$

■

Arbre(n,k)-banana

Définition 3.3.2 *Un arbre (n,k)-banana noté $B_{n,k}$ est un graphe obtenu en reliant exactement une feuille de chacune des n copies d'un graphe k-étoile à un nouveau sommet u. Ce sommet appelé racine.*

Un graphe banana $B_{2,4}$ est illustré dans la figure suivante:3.3.2 .

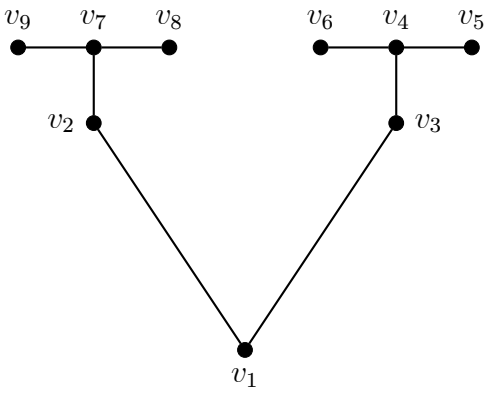


Figure 3.3.2 : graphe banana $B_{2,4}$.

Proposition 3.3.5 *Soit $B_{n,k}$ est un graphe banana avec $k \geq n+2$, alors :*

$$\chi_d^{'}(B_{n,k}) = n + k - 2$$

où k est l'ordre de chaque étoile et n est le nombre des étoiles.

Preuve. Soit $K^i_{1,k-1}$ $1 \leq i \leq n$ les étoiles de G. Soit u la racine de G. Soit $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ l'ensemble des sommet adjacents à u. Soit $E_i = \{e^i_1, e^i_2, ..., e^i_{k-2}, e^i_{k-1}\}$ l'ensemble des arêtes de l'étoile $K^i_{1,k-1}$, telles que e^i_{k-1} est incidente à v_i, $i \in \{1, ..., n\}$.

On utilise ce procédure pour trouver une coloration dominante des arêtes :

Pour $1 \leq i \leq n$, colorons l'arête e^i_{k-1} par i. Pour $1 \leq i \leq n$, et pour $1 \leq j \leq k-2$, Colorons l'arête $e^i_j \in E_i \backslash \left\{e^i_{k-1}\right\}$ par $n+j$. Colorons les arêtes incidentes à u par n couleurs distinctes qui sont présentes dans l'ensemble $E_i \backslash \left\{e^i_{k-1}\right\}$. Il est facile de vérifier que cette coloration est propre et dominante. D'où,

$$\chi_d^{'}(B_{n,k}) \leq n - 2 + k. \tag{1}$$

Maintenant, on montre que $\chi_d^{'}(B_{n,k}) \geq n-2+k$.

Pour que la coloration soit propre, il faut que les couleur atribuer à chaque ensemble E_i, $1 \leq i \leq n$ sont distinctes. Pour que la coloration soit dominante, il faut que dans chaque ensemble E_i, $1 \leq i \leq n$, il y a une couleur non répétée. Soit $1 \leq j_0 \leq k-2$. Donc on utilise n couleurs non répétés pour colorer l'ensemble $\left\{e_{j_0}^i,\, 1 \leq i \leq n\right\}$.

Colorons les arêtes de $E_i \backslash e_{j_0}^i$ par $k-2$ couleurs. Ceci implique qu'on utilise au moins $n+k-2$ couleurs. D'où,

$$\chi_d^{'}(B_{n,k}) \geq n+k-2 \tag{2}$$

En combinant les deux inégalitées (1) et (2) , On obtient,

$$\chi_d^{'}(B_{n,k}) = n-2+k.$$

■

Fan graph F_n

Définition 3.3.3 *Fan graph F_n peut être construit en joignant n copies du graphe de cycle C_3 avec un sommet commun. F_n est un graphe planaire non orienté avec $2n+1$ sommets et $3n$ arêtes.*

Un graphe F_3 est illustré dans la figure suivant 3.3.3 .

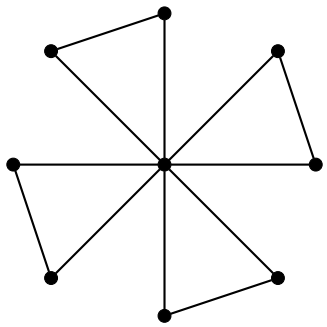


Figure 3.3.3 : fan grapheF_3.

Proposition 3.3.6 *Soit F_n un fan graphe avec $n \geq 2$. Alors*

$$\chi_d^{'}(F_n) = 2n$$

avec n le nombre de copies de C_3.

Preuve.

- Soit v, le sommet de degrès maximum.

Soit $E_1 = \{e_1, e_2, ..., e_{2n}\}$ l'ensemble des arêtes qui sont incidentes à v et soit $E_2 = \{e_{2n+1}, ..., e_{3n}\}$ le reste des arêtes de G.

Pour montre que $\chi_d^{'}(F_n) \leq 2n$ il suffit de donner une coloration dominante des arête comme suite : Comme les arêtes de E_1 sont incidentes à v, alors colorons les arêtes de E_1 par des couleurs distintes.

Pour les arêtes de E_2, colorons chaque arête par une couleur qui est présente dans E_1 et n'existe pas dans son voisinage. Cette coloration est propre et dominante. Par conséquent, $\chi_d^{'}(F_n) \leq 2n$.

Maintenant, on montre que $\chi_d^{'}(F_n) \geq 2n$.

Comme $\triangle = 2n$, alors $\chi^{'}(F_n) \geq 2n$. Ceci implique que $\chi_d^{'}(F_n) \geq 2n$.

D'où,

$$\chi_d^{'}(F_n) = 2n \ . \ \blacksquare$$

Étoile subdivisée

Proposition 3.3.7 *Soit $K_{1,n}^*$ une étoile subdiviée. Alors*

$$\chi_d^{'}\left(K_{1,n}^*\right) = n + 1.$$

Preuve. Soit v un sommet de $K_{1,n}^*$ tel que $d(v) = \Delta$. Posons $E_1 = .\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ l'ensemble des arête qui sont incédentes à v et $E_2 = \{e_{n+1}, e_{n+2}, ..., e_{2n}\}$ le reste d'arête dans G.

On utilise Cette méthode pour trouve une coloration dominante des arêtes :

Colorons toutes les arêtes de E_2 par la couleur 1.

Colorons toutes les arêtes de E_1 par n couleurs distincres et différentes de 1.

Cette coloration est propre et dominante.

D'où $\chi_d^{'}\left(K_{1,n}^{*}\right) \leq n+1$

Comme $\chi^{'}(G) \geq \triangle = n$. $\chi_d^{'}(G) \geq n$.

Supposons que G admet une coloration dominante c par n couleurs.

Comme $d_G(v) = \triangle$, alors les couleurs affectées aux arêtes de E_1 sont distincres. Donc on utilise n couleurs pour colorer les arêtes de E_1. Soient e_i, $e_j \in E_2$. Notons que e_j est adjacente à $e_{j'} \in E_1$. Colorons e_i par $c(e_{j'})$. Ceci implique que e_j ne domine aucune classe de couleur. Contradiction. Ceci implique que

$\chi_d^{'}\left(K_{1,n}^{*}\right) \geq n+1$.

D'où $\chi_d^{'}\left(K_{1,n}^{*}\right) = n+1$. ■

La Roue

Définition 3.3.4 *La roue W_n est un graphe d'ordre $n \geq 4$ obtenu à partir de l'union d'un cycle d'ordre $n-1$ et un sommet en reliant ce sommet à tous les sommets du cycle.*

Soit la figure 3.3.4 , contient une roue.

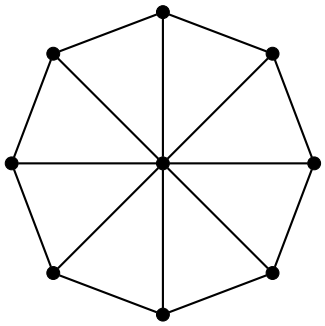


Figure 3.3.4 : graphe roue.

Proposition 3.3.8 *Soit W_n la roue d'ordre n, alors :*

$$\chi_d^{'}(W_n) = n-1$$

Preuve.

- Soit v un sommet de W_n tel que $d(v) = \Delta$. Posons $E_1 = \{e_1, e_2, ..., e_{n-1}\}$ l'ensemble des arête qui sont incidentes à v, $E_2 = \{e_n, e_{n+1}, ..., e_{2n-2}\}$ telles que pour $1 \leq i \leq n-1$, e_{n+i-1} est adjacentes à e_{2i} et e_{2i+1}.

  Pour $1 \leq i \leq n-1$, colorons e_i par i, colorons e_{n+i-1} par i.

Cette coloration est une coloration dominante des arêtes. Ceci implique que

$$\chi_d^{'}(W_n) \leq n-1 \qquad (*)$$

D'autre part, comme $\chi^{'}(W_n) \geq \Delta = n-1$, alors

$$\chi_d^{'}(W_n) \geq n-1 \qquad (**)$$

En utilisant $(*)$ et $(**)$, on obtient

$$\chi_d^{'}(W_n) = n-1.$$

■

Chapitre 4

L'effet de la suppression d'une arête sur l'ndice chromatique dominant

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'effet de la suppression d'une arête sur le nombre chromatique dominant des arête $\chi_d^{'}(G)$ pour certaines classes particulières des graphes. Le nombre chromatique dominant des arêtes $\chi_d^{'}(G)$ peut augmenter, ou diminuer ou rester inchangé lorsque le graphe G est modifié en supprimant une arête .

4.1 Graphe arête χ'_d-critique

Soit $uv = e$ une arête quelconque de G :

La suppression de l'arête e du graphe G produit le graphe noté $G - e$.

Théorème 4.1.1 *Soient G un graphe et e une arête de G. Alors*

$$\chi'_d\ (G) - 1 \leq\ \chi'_d(G - e) \leq\ \chi'_d(G) + 1.$$

Preuve. Posons $k = \chi'_d\,(G)$. Considérons une k- coloration c de G. Soient C_1, C_2 , ..., C_k, les classes des couleurs de c:

- La borne supèrieure:

Comme la coloration c est propre, alors

$$\text{Si une arête } e_i \in C_i \text{ domine la classe } C_j, \text{ alors } |C_j| \leq 2. \tag{10}$$

Supprimons une arête $e \in E(G)$. On distingue quatre cas:

1ère Cas : Si $e \in C_i$ et $|C_i| = 1$, et $\nexists\ e' \in E(G)$,telle que e' domine C_i. Dans ce cas c reste une coloration dominante de $G - e$. D'où,

$$\chi'_d(G - e) \leq \chi'_d(G). \tag{4.1.1}$$

2ème Cas : Si $e \in C_i$ et $|C_i| = 1$, et $\exists\ C_j$, $C_j = \{e'_j, e''_j\}$ et e'_j, e''_j domine C_i. Dans ce cas il suffi de recolorer l'une des deux arêtes e'_j, e''_j par la couleur de e. Ceci implique que c reste une coloration dominante de $G - e$.

D'où,

$$\chi'_d(G - e) \leq \chi'_d(G). \tag{4.1.2}$$

3ème Cas : Si $e \in C_i$ et $|C_i| = 1$, et $\exists\ C_j$, $|C_j| \geq 3$, et e'_j, e''_jdomine C_i.

recolorons l'une des deux arêtes e'_j, e''_j, disons e'_j par la couleur de e. Recolorons e''_j par $k + 1$.

Donc

$$\chi'_d(G - e) \leq \chi'_d(G) + 1. \tag{4.1.3}$$

4ème Cas : Si $e \in C_i$ et $|C_i| = 2$ et $\exists\ Cj = \{e',\ e''\}$, telle que e', e'' domine C_i.

Dans ce cas c reste une coloration dominante de $G - e$.

Donc:

$$\chi'_d(G - e) \leq \chi'_d(G). \tag{4.1.4}$$

de $(1), (2), (3)$et(4), on obtient $\chi'_d(G - e) \leq \chi'_d(G) + 1$.

- La borne inférieure:

Posons $k = \chi'_d(G - e)$. Soit c' une $\chi'_d(G - e) -$ coloration de $G-e$. Soient $C_1, C_2, ..., C_k$, les classes de couleurs de c':

Ajoutons l'arête e. Colorons e par $k+1$. Les autres arêtes gardent leurs anciènnes couleure. La coloration obtenue est propre et dominante de G. D'où,

$$\chi'_d(G-e) \geq \chi'_d(G) - 1. \qquad (**)$$

D'après $(*)$ et $(**)$, on obtient:

$$\chi'_d(G-e) - 1 \leq \ \chi'_d(G-e) \leq \ \chi'_d(G) + 1.$$

■

Définition 4.1.1 *Soit $G=(V,E)$ un graphe. On dit que G est arête$\chi_d^{'}-$stables si*

$$\forall e \in E(G), \ \chi'_d(G-e) = \chi'_d(G).$$

Définition 4.1.2 *Soit $G=(V,E)$ un graphe. On dit que G est arête$\chi_d^{'-}-$critique si*

$$\forall e \in E(G), \ \chi'_d(G-e) < \chi'_d(G).$$

Définition 4.1.3 *Soit $G=(V,E)$ un graphe. On dit que G est arête$\chi_d^{'+}-$critique si*

$$\forall e \in E(G), \ \chi'_d(G-e) > \chi'_d(G) + 1.$$

Proposition 4.1.1 *:*

1. P_n est $\chi_d^{'}-$stables si et seulment si $n=4$.
2. P_n est $\chi_d^{'-}-$critique si et seulment si $n=3,6$.
3. Si $n \neq 3,4,6$, alors P_n n'est pas stables et n'est pas critique.

Preuve. Il est claire que $P_n - e = P_{n-j} \cup P_j$.

alors $\chi_d^{'}(P_n - e) = \chi_d^{'}(P_{n-j} \cup P_j)$, tel que $j = 1, ..., \lceil \frac{m}{2} \rceil + 1$, avec m est le nombre des arêtes.

Notons que $\chi_d^{'}(P_n) = \begin{cases} \lceil (n-1)\backslash 3 \rceil + 1 \text{ si } n = 3,4,5,6,8 \\ \lceil (n-1)\backslash 3 \rceil + 2 \qquad \text{sinon} \end{cases}$

Si $n \leq 9$, alors il est facile de vérifier que la Proposition 4.1.1 est vraie.

Soit $n \geq 10$. il suffit de vérifier la diffirence entre $\chi_d^{'}(P_n - e)$ et $\chi_d^{'}(P_n)$.

Si $j=1$, alors $\chi_d^{'}(P_n - e) = \chi_d^{'}(P_{n-1}) = \lceil (n-2)\backslash 3 \rceil + 2$ et $\chi_d^{'}(P_n) = \lceil (n-1)\backslash 3 \rceil + 2$.

- Si $n = 0 \bmod 3$, alors

$$\chi_d^{'}(P_n - e) = \chi_d^{'}(P_n). \tag{1}$$

- Si $n = 1 \bmod 3$, alors

$$\chi_d^{'}(P_n - e) = \chi_d^{'}(P_n). \tag{2}$$

- Si $n = 2 \bmod 3$, alors

$$\chi_d^{'}(P_n - e) < \chi_d^{'}(P_n). \tag{3}$$

Si $j = 2$. Si $n \geq 11$, alors $\chi_d^{'}(P_n - e) = \chi_d^{'}(P_{n-2}) + 1 = \lceil (n-3)\backslash 3 \rceil + 3$ et $\chi_d^{'}(P_n) = \lceil (n-1)\backslash 3 \rceil + 2$.

- Si $n = 0 \bmod 3$, alors

$$\chi_d^{'}(P_n - e) = \chi_d^{'}(P_n). \tag{4}$$

- Si $n = 1 \bmod 3$, alors

$$\chi_d^{'}(P_n - e) > \chi_d^{'}(P_n). \tag{5}$$

- Si $n = 2 \bmod 3$, alors

$$\chi_d^{'}(P_n - e) = \chi_d^{'}(P_n). \tag{6}$$

Si $n = 10$

alors $\chi_d^{'}(P_n - e) = \chi_d^{'}(P_{n-2}) + 1 = \lceil (n-3)\backslash 3 \rceil + 2 = 5$ et $\chi_d^{'}(P_n) = \lceil (n-1)\backslash 3 \rceil + 2 = 5$.

$$\chi_d^{'}(P_{10} - e) = \chi_d^{'}(P_{10}). \tag{7}$$

Si $j = 3$ et $\{j = 10, 12, 13, ..., n\}$ alors
$\chi_d^{'}(P_n - e) = \chi_d^{'}(P_{n-3}) = \lceil (n-4)\backslash 3 \rceil + 2$ et $\chi_d^{'}(P_n) = \lceil (n-1)\backslash 3 \rceil + 2$.

- Si $n = 0 \bmod 3$, alors

$$\chi_d^{'}(P_n - e) = \chi_d^{'}(P_n). \tag{8}$$

si $n = 11$ d'après (6) et (3), P_{11} n'est pas stables et n'est pas critique.
Si $j = 7$ alors
$\chi_d^{'}(P_n - e) = \chi_d^{'}(P_{n-7}) + 1 = \lceil (n-8)\backslash 3 \rceil + 5$ et $\chi_d^{'}(P_n) = \lceil (n-1)\backslash 3 \rceil + 2$

- Si $n = 0 \bmod 3$, alors

$$\chi_d^{'}(P_n - e) > \chi_d^{'}(P_n). \tag{9}$$

On utilisant les relations (2) et (5) , on conclut que P_n n'est pas $\chi_d^{'}-$critique.

D'après les relations (8) et (9) P_n et n'est pas $\chi_d^{'}-$stables et n'est pas $\chi_d^{'}-$critique. ■

Proposition 4.1.2 *:*

1. C_n est $\chi_d^{'}-$stables si et seulment si $n = 4$ ou $n = 0 \bmod 3$, $n = 2 \bmod 3$ sauf $n = 6, 8$.
2. C_n est $\chi_d^{'-}-$critique si et seulment si $n = 6, 8$ ou bien $n = 1 \bmod 3$ sauf $n = 4$.

Preuve. Comme $C_n - e = P_n$, alors $\chi_d^{'}(C_n - e) = \chi_d^{'}(P_n) = \begin{cases} \lceil (n-1) \backslash 3 \rceil + 1 \text{ si } n = 3.4.5.6.8 \\ \lceil (n-1) \backslash 3 \rceil + 2 \text{ sinon} \end{cases}$

Si $n \leq 8$, alors il est facile de vérifier que la Proposition 4.1.2 est vraie. Si $n \geq 9$, alors il suffit de calculer la différence entre $\chi_d^{'}(C_n - e) = \lceil (n-1) \backslash 3 \rceil + 2$ et $\chi_d^{'}(C_n) = \lceil n \backslash 3 \rceil + 2$.

- Si $n = 0 \bmod 3$, alors $n = 3k$ et donc :

$$\left.\begin{array}{l} \chi_d^{'}(C_n - e) = \lceil (3k-1) \backslash 3 \rceil + 2 = k + 2 \\ \chi_d^{'}(C_n) = \lceil 3k \backslash 3 \rceil + 2 = k + 2 \end{array}\right\} \tag{1}$$

- Si $n = 2 \bmod 3$, alors $n = 3k + 2$ et donc

$$\left.\begin{array}{l} \chi_d^{'}(C_n - e) = \lceil (3k+2-1) \backslash 3 \rceil + 2 = k + 3 \\ \chi_d^{'}(C_n) = \lceil (3k+2) \backslash 3 \rceil + 2 = k + 3 \end{array}\right\} \tag{2}$$

- Si $n = 1 \bmod 3$, alors $n = 3k + 1$ et donc

$$\left.\begin{array}{l} \chi_d^{'}(C_n - e) = \lceil (3k+1-1) \backslash 3 \rceil + 2 = k + 2 \\ \chi_d^{'}(C_n) = \lceil (3k+1) \backslash 3 \rceil + 2 = k + 3 \end{array}\right\} \tag{3}$$

D'après les équatios (1) et (2), on obtien $\chi_d^{'}(C_n - e) = \chi_d^{'}(C_n - e)$. Donc C_n est $\chi_d^{'}-$stables.

D'après l'équation (3), on obtien $\chi_d^{'}(C_n - e) < \chi_d^{'}(C_n - e) - 1$. Donc C_n est $\chi_d^{'-}-$critique.

■

Théorème 4.1.2 *Soit G un graphe, Soit v un sommet de G, et soit c une χ'_d- coloration de G. Alors :*

$$\chi'_d\ (G) - d_G(v) \leq\ \chi'_d(G - v) \leq\ \chi'_d(G) + d_G(v)$$

Preuve.

- Soit c' une χ'_d- coloration de $G-v$ tel que $C_1, C_2, ..., C_k$, les classes de couleurs de c'.

Ajoutons le sommet v à $G-v$. Colorons les arêtes incidentes à v et par des couleurs distictes et qui ne sont pas présentes dans $G-v$. La coloration obtenue et une coloration propre et dominante de G.

Par conséquent, $\chi'_d(G) \leq \chi'_d(G-v) + d_G(v)$.

D'où

$$\chi'_d\ (G) - d_G(v) \leq\ \chi'_d(G-v) \tag{1}$$

- soit c une χ'_d- coloration de G tel que $C_1; C_2; .....; C_k$, les classes des couleurs de c:

Supprimons un sommet v. dans tous les cas la coloration dominante de $G-v$ restent moins ou égale à la coloration dominante de G plus $d_G(v)$ ci-a-dire

$$\chi'_d(G-v) \leq\ \chi'_d(G) + d_G(v) \tag{2}$$

En utilisant les inégalitées (1) et (2) , on obtient

$$\chi'_d\ (G) - d_G(v) \leq\ \chi'_d(G-v) \leq\ \chi'_d(G) + d_G(v)$$

■

Conclusion

Dans ce mémoire, on s'est interèssé en premier lieu, à la notion de la coloration dominante des sommets, et le nombre chromatique dominant que notè $\chi_d^{'}(G)$. En second lieu, on a introduit la notion de la coloration dominante des arêtes. Et nous avons déterminé quelques bornes et quelques résultat exactes de certains graphes particuliers (les chaines, les cycles, les chenilles, les graphes n-livre, les arbres (n,k)-banana, les fan graphes, les étoiles subdivisées, et les roues) pour le paramètre $\chi_d^{'}(G)$. Nous avons abordé la notion des graphes dits arêtes $\chi_d^{'}$-critiques dont la suppression d'une arête quelconque d'un graphe a un effet sur l'ndice chromatique dominant.

Bibliographie

[1] S Arumugam, J. Bagga and K. Chandrasekar:On dominator colorings in graphs. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) Vol. 122, $No.4, r2012, pp.$ $561 - 571$

[2] Arumugam S, Raja Chandrasekar K, Misra N, Geevarghese P, Saurabh $S(2011)$ Algorithmic Aspects of Dominator Colorings in Graphs. IWOCA 2011 LNCS $7056 : 19 - 30$

[3] S. Arumugam and S. Velammal,edge domination in graphs, TAIWANESE JOURNAL OF MATHEMATICS Vol. 2, No. 2, pp. $173 - 179, June$ 1998.

[4] C. Berge, Theory of Graphs and its Applications, no. 2 in Collection Universitaire de Mathematiques, Dunod, Paris, 1958.

[5] H. Boumediene Merouane and M. Chellali, On the dominator colorings in trees. Discussiones Mathematicae Graph Theory $32(2012)677 - 683$.

[6] H. Boumediene. ·M.Chellali.An algorithm for the dominator chromatic number of a tree.LAMDA-RO Laboratory.B.P.270,Blida;algeria.

[7] M. Chellali and F. Maffray. Dominator colorings in some classes of graphs. Graphs and Combinatorics, pages $1 - 11, 2011$.

[8] R, Gera: On the dominator colorings in bipartite graphs. Inform. Technol.NewGen. ITNG'07, 947–952 (207).

[9] R, Gera: On dominator colorings in graphs. Graph Theory Notes N. Y. LII, 25–30 (2007).

[10] R, Gera; Horton, S., Rasmussen, C.: Dominator colorings and safe clique partitions. Congress.Num. 181, 19 − 32 (2006).

[11] R. Gera. On dominator coloring in graphs. In Graph Theory Notes of New York, pages 25 − 30. LII, 2007.

[12] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, et P. J. Slater, "Domination in Graphs: Advanced Topics", Marcel Dekker, New York, 1998.

[13] S. Hedetniemi, S. Hedetniemi, A. McRae, and J. Blair. Dominator colorings of graphs. Preprint, 2006.

[14] K. Kavitha, N.G. David, "Dominator Coloring of Central Graphs",pp.0975 − 8887, Vol. 51, 2012.

[15] Marcel Dekker, "Fundamentals of Domination in Graphs", New York, 1998.

[16] S. Mitchell and S. T. Hedetniemi, Edge domination in trees, Congr. Numer.19(1977), 489 − 509.

[17] D.A. Mojdeh , E. Nazari , S. Askari, Total dominator chromatic number in graphs,Department of Mathematics, University of Mazandaran, Babolsar, Iran,Department of Mathematics, University of Tafresh, Tafresh, Iran.

[18] Nima Ghanbari and Saeid Alikhani, Introduction to total dominator edge chromatic number, October 4, 2018,Department of Mathematics, Yazd University, 89195 − 741, Yazd, Iran.

[19] T.Ramachandran, A.Naseer Ahmed, "Dominator Coloring Number of Middle Graph", IOSR Journal of Mathematics, Vol.10, $Iss.6, Ver.IV, pp38 - 40, December2014$.

[20] D, Seinsche: On a property of the class of n-colorable graphs. J. Combin. Theory B 16, 191 − 193(1974)

[21] Tina Beşeri, edge coloringe of a graph, June, 2004.İzmir Institute of Technology,Turkey.

[22] L. Volkmann, On graphs with equal domination and covering numbers, Discrete Appl. Math. 51(1994)211 − 217.

[23] Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae Vol 8 (1736), 128–140.