République Algérienne Démocratique Et Populaire

Ministère De L'Enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique

Université Dr.Yahia Farès De Médéa

Faculté Des Sciences

Département De Mathémathiques Et De L'Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

Diplôme De Master En Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Par

BENALLEL Amira

&

BOUCHAKOUR MOUSSA Amina

Thème

Etude de comportement du nombre de domination de certains graphes dynamiques

Devant le Jury**:**

M^r.	K. SERIER ABDALLAH	M.A.A	U.D.Y.F-Médéa	Président.
M^r.	R. LEMDANI	M.A.A	U.D.Y.F-Médéa	Examinateur.
M^r.	N. IKHLEF ESCHOUF	M.C.B	U.D.Y.F-Médéa	Examinateur.
M^r.	K. TABLENNEHAS	M.A.A	U.D.Y.F-Médéa	Encadreur.

Date de soutenance: 12 JUIN 2017

Résumé

Ce travail est consacré à l'étude de comportement du nombre de domination de certains graphes dynamiques.

Etant donné un graphe $G = (V, E)$ où V est l'ensemble des sommets et E est l'ensemble d'arêtes. Un sous-ensemble de sommets D de V est dit dominant de G si tout sommet de $V - D$ et adjacent à au moins un sommet de D. On désigne par $\gamma(G)$ le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G. Soit $G_t = (V_t, E_t)$ un graphe variant dans le temps (V_t est l'ensemble des sommets à l'instant t et E_t est l'ensemble d'arêtes à l'instant t) s'appele graphe dynamique.

Dans ce mémoire, nous présentons en premier lieu les opérations sur les graphes pour le nombre de domination. Ensuite nous donnons quelque définitions et modèle d'un graphe dynamique. Enfin, on étude le comportement de certains graphes au cours de temps (unicycle, arbres, cactus).

Abstract

This work is devoted to the study of domination behavior in dynamic graphs.

Given a graph $G = (V, E)$ that V set of vertices and E set of edges. A subset of vertices D of V and said dominant of G if all vertices of $V - D$ and adjacent to a vertex of D. We denote by $\gamma(G)$ the minimum cardinality of a dominant set of G. Let $G_t = (V_t, E_t)$ be a time varying graph (V_t is a set of vertices at time t and E_t set of edges at time t) is called a dynamic graph.

In this paper, we present first the operations on the graphs for the number of domination. Then we give some definitions and model of a dynamic graph. Finally, we study the behavior of a graph in the course of time (unicycle, trees, cactus).

Remerciements

Nous remercions en premier lieu **ALLAH** tout puissant pour nous avoir guidés vers le bon chemin de la lumière et du savoir et pour nous avoir donné du courage et de la volonté afin de pouvoir réaliser ce modeste travail.

En particulier. Nous remercions **Mr. K. TABLENNEHAS**, qui a accepté d'être notre encadreur de mémoire.

Nous remercions les enseignants qui ont accepté de jugé ce mémoire, **K. SERIER ABDALLAH** de l'honneur qu'il nous a fait en acceptant de présider le jury et de l'intérêt qu'il a porté à ce travail, **Dr N. IKHLEF ESCHOUF, Dr R. LEMDANI** de l'honneur qu'ils nous font d'être les examinateurs de ce mémoire.

A l'ensemble des étudiants de notre promotion 2016 /2017.

Dédicace

Je dédie ce mémoire de fin d'étude à:

Mes parents qui sont les plus chers au monde et qui m'ont beaucoup soutenu et encouragé

Mon mari Mohamed.

Mes frères.

Mes sœurs.

Toutes la famille Bouchakour Moussa et Mouzaoi et Boulariah .

Sans oublier mon binôme BENALLEL Amira .

Mes très chères amies.

Amina

Dédicace

À mes très chers parents

Les sacrifices que vous avez consenti pour ma réussite m'ont permis de vivre ce jour. Les mots me manquent pour exprimer toute la reconnaissance, la fierté et le profond amour que je vous porte.

Que vous trouvez ici le témoignage de mon attachement, gratitude et respect,

Que dieu vous préserve bonne santé et longue vie.

À mes frères et ma soeur :Fouzia, Mohamed et Abdelhedi

À ma grand mère et ma tante Mouna

J 'espère avoir atteindre le seuil de vos espérances. Que ce modeste travail soit l'expression de ma profonde affection.

Je vous remercie pour le soutient moral et l'encouragement que vous m'avez accordés.

Je vous souhaite tous le bonheur que vous méritez.

À mon mari : Ramadan et toute sa famille: GHRABA

A toute la famille de :

BENALLEL

sans exception

Sans oublier mon binôme BOUCHAKOUR MOUSSA Amina

à tous ceux qui m'ont aidé afin de réaliser ce travail, et à tous ceux que j'aime et qui m'aiment.

A tous, je dédie ce travail.

Amira

Table des matières

Résumé **iii**

Abstract **iv**

Remerciements **v**

Dédicace **vi**

Dédicace **vii**

Introduction **1**

1 Introduction générale **2**

1.1 Généralités sur la théorie des graphes 2

1.1.1 Graphe et graphe simple 2

1.1.2 Voisinage et voisinage privé 2

1.1.3 Degré et degré maximum 3

1.1.4 Distance, l'excentricité et diamètre 3

1.1.5 Quelques graphes particuliers 3

1.2 Aperçu sur la domination dans les graphes 8

1.2.1 Ensemble dominant 8

1.2.2 Minimalité d'un ensemble dominant 10

1.2.3 Bornes sur le nombre de domination 10

1.2.4 Quelques paramètres de domination 11

2 L'effet des opérations sur les graphes pour le nombre de domination 13

2.1 Terminologie 14

2.2 Opérations élémentaires 15

2.2.1 La suppression d'un sommet 15

2.2.2 La suppression d'une arête 17

2.2.3 L'ajout d'une arête 18

2.2.4 La contraction d'une arête 19

2.2.5 La subdivision d'une arête 20

3 Les graphes dynamiques 21

3.1 Définition des graphes dynamiques 21

3.2 Modèles de graphes dynamiques 22

3.2.1 Etude des propriétés des graphes dynamiques 22

3.3 Etude de comportement d'un graphe unicycle au cours du temps 24

3.3.1 Les opérations sur unicycle 25

3.4 Etude de comportement d'un arbre et cactus 32

3.4.1 Les opérations sur les arbres 32

3.4.2 Les opérations sur cactus. 33

Conclusion 35

Introduction

L'histoire de la théorie des graphes débute avec les travaux du mathématicien suisse **Leonhard Euler** au 18^esiècle, et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tel que celui des ponts de **Königsberg**, quand il se demandait s'il est possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même point et revenir à son point de départ. Dès le début du 20^e siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de König, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdös.

Ce mémoire s'inscrit a l'étude de comportement du nombre de domination de certains graphes dynamiques. Il aborde deux problèmes d'optimisation: les différentes opérations sur les graphes pour le nombre de domination. Rappelons qu'un ensemble dominant est un ensemble D de sommets tel que chaque sommet du graphe est soit dans D, soit voisin à au moins un élément de D. Nous avons aussi, Ils y proposent de modéliser le temps de manière discrète par une suite de dates et la dynamique du système par une suite de graphes statiques, un pour chaque date, donc le graphe dynamique est un graphe variant dans le temps.

Après une introduction, le mémoire s'articule autour de trois chapitres:

Le Chapitre 1 se scinde en deux grandes parties. Dans la première, nous donnons les définitions et les notions de base de la théorie des graphes et dans la deuxième partie nous avons parlé sur certain paramètre de domination.

Le chapitre 2 est consacré a l'étude de l'effet des opérations des modifications sur les graphes pour le nombre de domination.

Dans le chapitre 3, on étude des comportements de certains graphe au cours de temps en particulier, les unicycles, les arbres et cactus.

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 Généralités sur la théorie des graphes

1.1.1 Graphe et graphe simple

Un graphe non-orienté G est un couple $G = (V, E)$ composée d'un ensemble de sommets V, d'un ensemble d'arêtes $E \subset V \times V$.

On dira que deux sommets p et q sont des extrémités d'une arête si $\{p, q\} \in E$.

On considère un graphe simple connexe $G = (V, E)$ ayant $V(G)$ comme ensemble de sommets et $E(G)$ comme ensemble d'arêtes.

- Un graphe simple est un graphe sans boucle et sans arête multiple.
- Le nombre de sommets $|V(G)|$ dans un graphe G est appelé ordre de G et noté souvent par n.
- Le nombre d'arêtes $|E(G)|$ dans un graphe G est appelé taille de G et noté souvent par m.

1.1.2 Voisinage et voisinage privé

Le voisinage ouvert d'un sommet est $N(v) = \{u \in V / uv \in E\}$, son voisinage fermé est $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Le degré d'un sommet v; noté par $d_G(v)$ est $|N(v)|$. Un sommet de

degré nul est dit isolé. Un sommet de degré un est appelé sommet pendant, et son voisin est dit sommet support.

Le voisinage privé d'un sommet v par rapport à un ensemble S noté $pn[v, S]$ est l'ensemble des sommets du voisinage fermé de v qui n'ont pas d'autres voisins dans S, i-e: $pn[v, S] = \{u \in V - S : N[u] \cap S = \{v\}\}$.

1.1.3 Degré et degré maximum

Le degré d'un sommet $v \in V(G)$ est le cardinal de son voisinage, est noté par

$$d_G(v) = |N_G(v)|$$

Le degré maximum d'un graphe est le degré maximum de tous ses sommets, noté par

$$\Delta(G) = max\{d_G(v), v \in V(G)\}$$

1.1.4 Distance, l'excentricité et diamètre

Soient u et v deux sommets d'un graphe G. On appelle distance entre u et v, notée $d(u, v)$, la longueur de la plus courte chaîne joignant u et v.

L'excentricité d'un sommet v dans un graphe $G = (V, E)$ est

$$exc(v) = \max\{d(v, w) : w \in V\}$$

et le diamètre de G, noté $Diam(G)$, est égal

$$Diam(G) = \max\{exc(v) : v \in V\}$$

1.1.5 Quelques graphes particuliers

Sous graphe et graphe partiel

Pour un sous-ensemble $S \subset V$, le sous-graphe induit par S noté $G[S]$ est le graphe ayant S comme ensemble de sommets et ses arêtes sont celles de E ayant leurs extrémités dans S.

Pour un-sous ensemble $U \subset E$, le graphe partiel de G défini par U noté G_U est le graphe dont les ensembles de sommets et d'arêtes sont respectivement V et U.

Graphe connexe

Un graphe G est dit connexe si pour toute paire de sommets distinctes du graphe il existe une chaîne les reliant. Une composante connexe d'un graphe est un sous graphe maximal connexe.

Un sommet d'articulation $a \in V$ si sa suppression fait augmener le nombre de composante connexe de G.

Une arête e est appelée un isthme si le graphe $G - e$ possède plus de composantes connexes que G i-e, si G est connexe alors $G - e$ n'est pas connexe.

Graphe complet

Un graphe G est dit complet si pour toute paire de sommets, il existe une arête les reliant, (tous les sommets sont deux à deux adjacents), un graphe simple complet d'ordre n noté K_n. Dans ce graphe, chaque sommet est de degré 5.

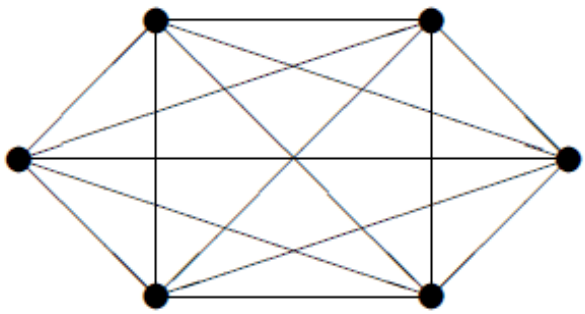


Figure 1.1.1 : K_6

Graphe statique

Un graphe statique G est un graphe $G = (V, E)$ composée d'un ensemble de sommets V , d'un ensemble d'arêtes $E \subset V \times V$ tel que les sommets et/ou les arêtes ne change pas dans le temps.

Graphe biparti et biparti complet

Un graphe $G = (V, E)$ est dit multiparti s'il existe une partition de V en k sous-ensembles $V_1, V_2, ..., V_k$ tels que chacun des $G[V_i]$ ne contient aucune arête (stable). Si $k = 2$ le graphe G est dit biparti. On appelle graphe biparti-complet, un graphe biparti tel que pour tout sommet $u \in V_1$ et $v \in V_2$, $uv \in E$: Si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$ alors le graphe biparti complet est noté $K_{p,q}$.

Graphe complémentaire

Le graphe complémentaire d'un graphe $G = (V, E)$ est le graphe noté $\overline{G}$, défini par

$$V(\overline{G}) = V(G) \text{ et } E(\overline{G}) = \{uv : u, v \in V(G) \text{ et } uv \notin E(G)\}.$$

Chaîne

Une chaîne dans $G = (V, E)$, est une suite ayant pour éléments alternativement des sommets et des arêtes, commençant et se terminant par un sommet, et telle que chaque arête est encadrée par ses extrémités. On dira que la chaîne relie le premier sommet de la suite au dernier sommet. En plus, on dira que la chaîne a pour longueur le nombre d'arêtes de la chaîne.

Étoile

L' étoile noté par $K_{1,t}$ est un cas particulier d'un graphe biparti complet tel que $|V_1| = 1$ et $|V_2| = t$.

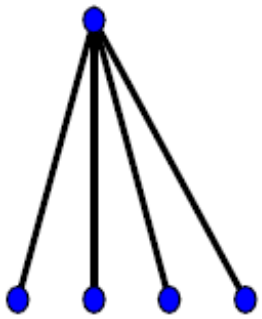


Figure 1.1.2 : $K_{1,4}$

Cycle

Un cycle est une chaîne dont les extrémités sont confondues.

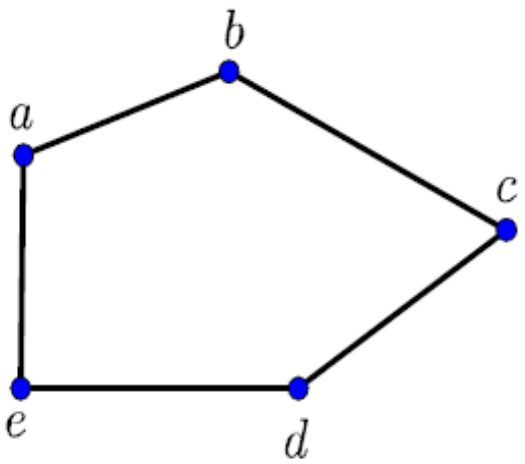


Figure 1.1.3 : C_5

Couronne

La couronne d'un graphe $G = (V, E)$, c'est le graphe $G \circ K_1$ obtenu à partir d'une copie de G en attachant à chaque sommet de G un nouveau sommet. Il est à noter que l'ordre de $G \circ K_1$ est $2\,|V|$.

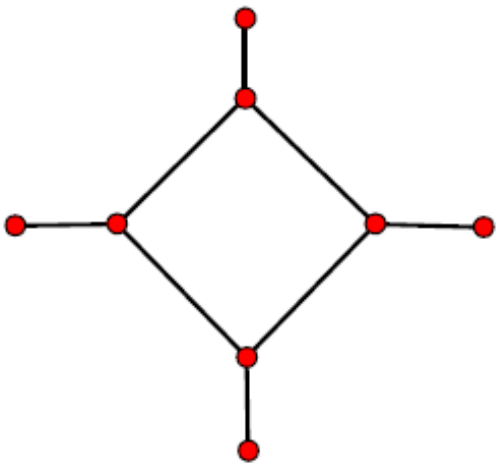


Figure 1.1.4 : $C_4 \circ P_1$

Cactus

Un cactus (parfois appelé un arbre de cactus) est un graphe connexe dans lequel deux cycles ont au plus un sommet en commun. De manière équivalente, il s'agit d'un graphe connexe dans lequel chaque arête appartient à au plus un cycle.

Arbre

On appelle arbre, et on note par T, un graphe connexe et sans cycle. Il comporte exactement $(n-1)$ arêtes. On appelle feuille d'un arbre, un sommet de degré 1, dit aussi sommet pendant. Dans un arbre T, tout sommet adjacent à un sommet pendant est appelé sommet support.

Foret

Un foret est un graphe où chaque composante connexe est un arbre.

L'union de deux graphes

Soient G et H deux graphes. L'union de G et H est le graphe $G+H$ dont l'ensemble des sommets est $V(G) \cup V(H)$ et l'ensemble des arêtes est $E(G) \cup E(H)$. Pour un entier k donné, l'union de k copies de G est notée par kG

1.2 Aperçu sur la domination dans les graphes

Dans cette partie, une présentation générale de la domination dans les graphes est donnée. L'objectif est de donner une idée globale sur les différents aspects qui caractérisent l'étude des ensembles dominants.

1.2.1 Ensemble dominant

Définition 1.2.1 *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un sous-ensemble $D \in V(G)$ est un ensemble dominant si tout sommet $v \in V$ est ou bien dans D ou bien $v \in V - D$ et adjacent à au moins un sommet de D.*

Définition 1.2.2 *Le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G est appelé nombre de domination et est noté par $\gamma(G)$. Un ensemble dominant D de cardinal $\gamma(G)$ est appelé $\gamma(G)$-ensemble ou simplement γ-ensemble.*

Exemple 1.2.1 *L'ensemble dominant représenté par les sommets noirs et* $\gamma(G) = 3, \Gamma(G) = 4$.

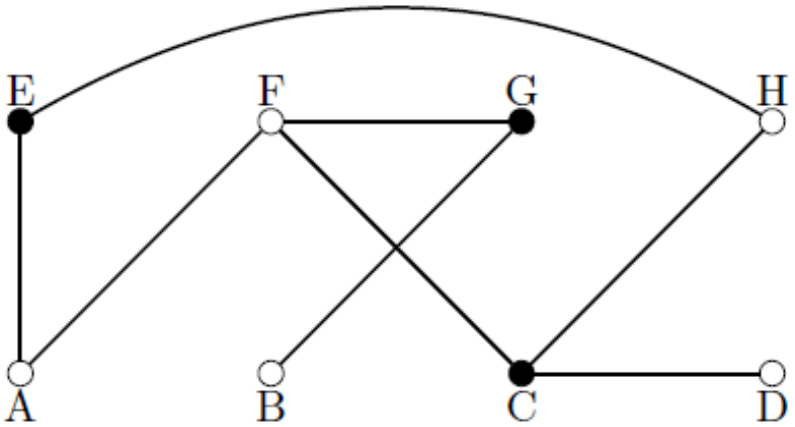


Figure 1.2.1 : graphe G

Remarque 1.2.1 *Un ensemble dominant D d'un graphe G contient tous les sommets isolés de G.*

Puisque le nombre de domination est défini pour tout graphe, et puisque tout graphe est dominé par son ensemble de sommets, nous avons l'encadrement suivant:

Remarque 1.2.2 *Pour tout graphe G, on a* $1 \leq \gamma(G) \leq |V(G)|$.

- $\gamma(G) = 1$, si et seulement si G posséde un sommet v de degré $n-1$ (sommet universel), dans ce cas $\{v\}$ est un ensemble dominant minimum de G.
- $\gamma(G) = |V(G)| = n$, si et seulement si $G = \overline{K_n}$ est le complémentaire d'une graphe complet, dans ce cas $V(G)$ est l'unique ensemble dominant de G.

Définition 1.2.3 *On dit qu'un sommet est $\gamma-$ bon s'il appartient à au moins un $\gamma(G)$-ensemble et $\gamma-$ mauvais sinon.*

1.2.2 Minimalité d'un ensemble dominant

Définition 1.2.4 *Un ensemble dominant de G est dit minimal s'il ne contient aucun sous-ensemble strict qui domine les sommets de G.*

La définition d'un ensemble dominant minimal nous permet de définir le nombre de domination supérieur.

Définition 1.2.5 *Le nombre de domination supérieur est le cardinal maximum d'un ensemble dominant minimal sur G et est noté par $\Gamma(G)$.*

Théorème 1.2.1 *[13] Soit D un ensemble dominant d'un graphe $G = (V, E)$. Alors D est un dominant minimal de G si et seulement si tout sommet $v \in D$ vérifie au moins l'une des propriétés suivantes:*

1. il existe un sommet $w \in V - D$ tel que $N(w) \cap D = \{v\}$.
2. le sommet v ne possède aucun voisin dans D.

Remarque 1.2.3 *Un ensemble dominant D est minimal si et seulement si $pn[v, D] \neq \Phi$ pour tout $v \in D$.*

Théorème 1.2.2 *[13]Si $G = (V, E)$ est un graphe sans sommets isolés, alors le complémentaire $V - D$ de tout ensemble dominant minimal est un ensemble dominant.*

1.2.3 Bornes sur le nombre de domination

Nous avons vu auparavant que pour un graphe G quelconque d'ordre n, on avait $1 \leq \gamma(G) \leq n$, et si nous intéressons aux graphes sans sommets isolés, nous avons:

Théorème 1.2.3 *[13]Si $G = (V, E)$ est un graphe sans sommes isolés, alors*

$$\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$$

Théorème 1.2.4 *[16]pour un graphe G d'ordre n pair sans sommets isolés $\gamma(G) = \frac{n}{2}$, si et seulement si les composantes de G sont le cycle C_4 ou la couronne $H \circ K_1$ de n' importe quel graphe connexe H.*

Théorème 1.2.5 [12] *Soit G un graphe d'ordre n et de degré maximum Δ. Alors*

$$\gamma(G) \leq n - \Delta$$

Remarque 1.2.4 *Pour un graphe G nom connexe qui contient plusieurs composantes connexes $G_1, G_2, ..., G_n$, le nombre de domination est la somme de nombre de domination de chaque composantes connexes.*

$$\gamma(G) = \sum_{i=1}^{n} \gamma(G_i)$$

1.2.4 Quelques paramètres de domination

Dans cette partie, nous exposons certains paramètres de dominations où des conditions supplémentaires sont imposées sur l'ensemble dominant, sur l'ensemble dominé ou même sur la façon de dominer.

La domination stable

Définition 1.2.6 *Un ensemble dominant stable EDS de G est un ensemble dominant $D \subseteq V$ tel que le sous-graphe induit par D est un stable.*

Définition 1.2.7 *Le nombre de domination stable de G, noté $i(G)$ et $\beta(G)$ est le cardinal minimum et maximum d'un dominant stable respectivement.*

La domination totale

Définition 1.2.8 *Un ensemble dominant total EDT de G est un ensemble dominant $D \subseteq V$ tel que le sous-graphe induit par D ne contient pas de sommets isolés.*

Définition 1.2.9 *Le nombre de domination totale de G, noté $\gamma_t(G)$, est le cardinal minimum d'un dominant total.*

La domination couplée

Définition 1.2.10 *Un ensemble dominant couplée EDC de G est un ensemble dominant $D \subseteq V$ dont le sous-graphe induit par D contient un couplage parfait.*

Définition 1.2.11 *Le nombre de domination couplée de G, noté $\gamma_{pr}(G)$, est le cardinal minimum d'un dominant couplé.*

la domination double

Définition 1.2.12 *Un sous-ensemble D de V est dit ensemble dominant double EDD de G si tout sommet de V est dominé par au moins deux sommets de D. C'est à dire ou bien le sommet $v \in D$ et possède au moins un voisin dans D, ou bien $v \in V - D$ et possède au moins deux voisins dans D.*

Définition 1.2.13 *Le nombre de domination double, noté $\gamma_{\times 2}(G)$, est la taille minimum d'un ensemble dominant double de G. Et tout ensemble dominant de cardinal $\gamma_{\times 2}(G)$ est appelé $\gamma_{\times 2}(G)$-ensemble.*

Chapitre 2

L'effet des opérations sur les graphes pour le nombre de domination

Une considération importante dans la conception topologique d'un réseau est la tolérance aux pannes, c'est-à-dire la capacité du réseau à fournir un service même lorsqu'il contient un ou plusieurs composants défectueux. Le comportement d'un réseau en présence d'un défaut peut être analysé en déterminant l'effet que l'enlèvement d'une arête ou d'un sommet de son graphe sous-jacent G sur le critère de tolérance de panne. Par exemple, un $\gamma - ensemble$ de G représente un ensemble minimum de processeurs qui communiquent directement avec tous les autres processeurs du système. S'il est essentiel pour les serveurs de fichiers d'avoir cette propriété et que le nombre de processeurs désignés comme serveurs de fichiers soit limité alors le nombre de domination de G est le critère de tolérance de panne. Dans cet exemple, il est important que $\gamma(G)$ n'augmente pas lorsque G est modifient en supprimant un sommet ou une arête.

D'une autre perspective, les réseaux peuvent être tolérants aux pannes en fournissant des liaisons de communication redondantes (en ajoutant des arêtes). Par conséquent, nous examinons les effets sur $\gamma\,(G)$ lorsque G est modifié en supprimant un sommet ou en supprimant ou en ajoutant une arête.

2.1 Terminologie

Les auteurs ([8][1]) ont examiné les problèmes de caractérisation des graphes G dans les six classes suivantes: $G - v$ (respectivement, $G - e$) désignent le graphe formé en enlevant le sommet v (respectivement arête e) de G. Nous utilisons des acronymes pour désigner les classes de graphes suivantes (C: représente le changement, U: unvariant(ne change pas) , V :sommet , E:arête, R: suppression, A: ajout).

1. (CVR): $\gamma(G - v) \neq \gamma(G)$ pour toute $v \in V$
2. (CER): $\gamma(G - e) \neq \gamma(G)$ pour toute $e \in E$
3. (CEA): $\gamma(G + e) \neq \gamma(G)$ pour toute $e \in E(\overline{G})$
4. (UVR): $\gamma(G - v) = \gamma(G)$pour toute $v \in V$
5. (UER): $\gamma(G - e) = \gamma(G)$pour toute $e \in E$
6. (UEA): $\gamma(G + e) = \gamma(G)$pour toute $e \in E(\overline{G})$

Il est utile d'écrire l'ensemble des sommets d'un graphe comme une union disjointe de trois ensembles selon la façon dont leur suppression affecte $\gamma(G)$.

$$\begin{aligned} V^0(G) &= \{v \in V : \gamma(G - v) = \gamma(G)\} \\ V^+(G) &= \{v \in V : \gamma(G - v) > \gamma(G)\} \\ V^-(G) &= \{v \in V : \gamma(G - v) < \gamma(G)\} \end{aligned}$$

De même, l'ensemble d'arête peut être divisé en

$$\begin{aligned} E^0 &= \{(uv) \in E(G) : \gamma(G - (uv)) = \gamma(G)\} \\ E^+ &= \{(uv) \in E(G) : \gamma(G - (uv)) > \gamma(G)\}. \end{aligned}$$

2.2 Opérations élémentaires

En utilisant un fonctionnement élémentaire, nous pouvons générer un nouveau graphe de l'original en appliquant un Changements sur le graphe initial. Dans cette section, nous présentons certains des résultats sur les opérations élémentaires avec le nombre de domination $\gamma(G)$ comme $CVR, CER, CEA, UVR, UER, UEA$, contraction d'arête et subdivision d'arête.

2.2.1 La suppression d'un sommet

Définition 2.2.1 *Soit $v \in V(G)$. La suppression d'un sommet v du graphe G produit le graphe noté $G-v$; obtenu suite à la suppression de v et de toutes les arêtes de G incidentes à v.*

Quelques propriétés de graphes CVR

Enlever un sommet peut augmenter le nombre de domination par plus d'un. Par exemple, le sommet central d'un graphe de roue W_n, $n > 4$. Mais il peut être diminuer d'au plus un. Par exemple, un sommet de l'éxtrémités d'un chaine P_3.En général, si $\gamma(G-v) \neq \gamma(G)$ pour tout $v \in V(G)$, alors $\gamma(G-v) = \gamma(G)-1$, pour tout $v \in V(G)$.F.Harary, J. Nieminen, C. L. Suffel [3][14]

Théorème 2.2.1 *[3]*

Pour tout arbre T avec au moins trois sommets $\gamma(T-v) > \gamma(T)$ si et seulement si v est dans chaque $\gamma - ensemble$ pour T.

Théorème 2.2.2 *[3]*

Si on supprime un sommet v de G est dans chaque $\gamma - ensemble$ pour G, alors $\gamma(G-v) > \gamma(G)$.

Théorème 2.2.3 *[4]*

Un graphe $G \in CVR$ si et seulement si chaque composante connexe de G est CVR .

En utilisant l'induction sur le nombre de composante connexe, le nombre de domination de G est déterminé par $R.C.$ Brigham et al.

Théorème 2.2.4 *[4]*

Soit G avoir b blocs B_1, B_2, ..., B_b. Si $G \in CVR$, alors $\gamma(G) = (\sum \gamma(B_i)) - b + 1$.

Théorème 2.2.5 *[5]*

Un sommet $v \in V^-$si et seulement si $pn[v, S] = \{v\}$ pour certains $\gamma-$ *ensemble* S contenant v.

Une fois que les conditions nécessaires et suffisantes sont connues, il est intéressant de déterminer les limites des graphes CVR.

Nous présentons quelques limites de ces graphes en termes de degré minimal et de degré maximum, en termes d'ordre, de degré et de diamètre.

Quelques propriétés de graphes UVR

Comme discuté précédemment, le retrait d'un sommet d'un graphe entraîne la modification ou la stabilité d'un ensemble dominant d'un graphe. Nous présentons maintenant quelques résultats sur UVR.

Théorème 2.2.6 *[3]*

Pour tout arbre T avec $n \geq 2$, il existe un sommet $v \in V$ tel que $\gamma(T - v) = \gamma(T)$.

En 1979, H. B. Walikar et B. D. Acharya ont fourni le théorème suivant sur les graphes UVR[2].

Théorème 2.2.7 *[2]*

Un graphe $G \in UVR$ si et seulement si G n'a pas de sommets isolés et pour chaque sommet, soit

1. Il existe un $\gamma - ensemble\ S'$tel que $v \notin S'$ et pour $\gamma - ensemble\ S$ tel que $v \in S$, $pn[v, S]$ contient au moins un sommet de $V - S$, ou

2. V est dans chaque γ -ensemble et il y a un sous-ensemble de $\gamma(G)$ sommets dans $G - N[v]$qui domine $G - v$.

2.2.2 La suppression d'une arête

Définition 2.2.2 *Soit $e \in E(G)$. La suppression de l'arête e du graphe G produit le graphe noté $G - e$; obtenu suite à la suppression de e .*

Remarque 2.2.1 *On note $G - e$ le graphe $G' = (V; E \setminus \{e\})$, c'est-à-dire $G - e$ est le graphe obtenu à partir de G en supprimant l'arête e.*

Quelques propriétés de graphes CER

Le retrait d'une arête de n'importe quel graphe laisse le nombre de domination inchangé, par exemple le graphe complet K_n, où $n \geq 3$, exemple une étoile. En général, si $\gamma\ (G-e) \neq \gamma\ (G)$ pour tout $e \in E(G)$, alors $\gamma(G-e) = \gamma(G) +1$, pour tout $e \in E(G)$. Ainsi, un graphe pour lequel le nombre de domination change lorsqu'une arête arbitraire est supprimée a la propriété de $\gamma(G - e) = \gamma(G) + 1$, pour tout $e \in E(G)$.

Les graphes en CER sont appelés $\gamma^+ - graphes\ critiques$.

Quelques propriétés de graphes UER

Les graphes pour lesquels le nombre de domination est inchangé lorsqu'une arête arbitraire est supprimé, c'est-à-dire $\gamma(G - e) = \gamma\ (G)$, pour tous les $e \in E(G)$ sont appelés graphes UER. En 1979, H. B. Walikar et al. Ont fourni une caractérisation classique des graphes UER [2].

Théorème 2.2.8 *[2]*

Un graphe $G \in UER$ si et seulement si pour $e = (uv) \in E(G)$, il existe un $\gamma - ensemble$ S tel que l'une des conditions suivantes est satisfaite.

i) $u, v \in S$.

ii) $u, v \in V - S$.

iii) $u \in S$ et $v \in V - S$ implique $|N(v) \cap S| \geq 2$.

2.2.3 L'ajout d'une arête

Définition 2.2.3 *Soit $xy \in E(\overline{G})$. L'ajout de l'arête xy au graphe G produit le graphe noté $G + xy$ résultant de l'ajout d'une arête entre x et y dans le graphe G.*

Quelques propriétés de graphes CEA

L'ajout d'une arête à un graphe ne peut pas augmenter le nombre de domination, par exemple, une étoile, et peut en diminuer d'au plus un, par exemple en ajoutant un arête entre un sommet de fin et un sommet de degré d'au moins 2 dans une couronne. En général, si

$\gamma\ (G+e) \neq \gamma(G)$ pour tous $e \in E(\overline{G})$, alors $\gamma(G+e) = \gamma(G)-1$, pour tous, $e \in E(\overline{G})$.En 1983, D.P. Sumner, P. Blitch ont caractérisé les graphes dans CEA et ils les ont appelés comme "graphes critiques de domination de arête". Les caractérisations initiales sur les graphes CEA ont été déterminées en [7].

Théorème 2.2.9 *[7]*

1. Un graphe G avec $\gamma(G) = 1$ est dans CEA si et seulement si G est K_n.
2. Un graphe G avec $\gamma\ (G) = 2$ est dans CEA si et seulement si G est un galaxie.

Théorème 2.2.10 *[6]*

$G \in CEA$ est un graphe connexe avec $\gamma(G) = 3$ si et seulement si $G = A \cup B$ où:

1 A soit trivial et $B \in CEA$ avec $\gamma\ (G) = 2$, ou

2 A est complet et B est un graphe complet moins 1 facteur.

Comme cela a été observé précédemment, le degré maximum, le degré minimum, l'ordre, le diamètre d'un graphe permettent de déterminer les limites du graphe.

Quelques propriétés de graphes UEA

Les graphes pour lesquels le nombre de domination est inchangé lorsqu'une arête arbitraire est ajoutée, c'est-à-dire $\gamma(G+e) = \gamma(G)$, pour tout, $e \in E(\overline{G})$,ont été caractérisés en termes de leurs ensembles de sommets par J. R. Carrington et al. [8].

Théorème 2.2.11 *[8]*

Un graphe $G \in UEA$ si et seulement si V^- est vide.

2.2.4 La contraction d'une arête

Définition 2.2.4 *La contraction d'une arête ou l'identification de deux sommets adjacents est une opération qui consiste à remplacer ces deux sommets par un nouveau sommet dont le voisinage ouvert est l'union des voisinages ouverts des deux sommets remplacés. D'une façon formelle, l'identification de deux sommets adjacents u et v forme un nouveau sommet, désigné par $\overline{uv}$; dont le voisinage ouvert est $(N(u) \cup N(v)) - \{u, v\}$.*

Notation 2.2.1 *une contraction d'une arête est une opération qui supprime une arête d'un graphe tout en fusionnant simultanément les deux sommets auxquels il a précédemment rejoint. Pour une paire de sommets u, v de G, désigné par $G \cdot uv$ le graphe obtenu en identifiant u et v. Soit (uv) le sommet identifié. Ainsi, $G \cdot uv$ peut être considéré comme le graphe obtenu de G en supprimant les sommets v et u et en ajoutant un nouveau sommet, noté (uv), qui est adjacent à tous les sommets de $G - v - u$ qui étaient à l'origine adjacents à soit de u ou v [9].*

Lemme 2.2.1 *[20]Si $u, v \in V(G)$ pour un graphe G tel que $N[v] = N[u]$, alors $\gamma(G) = \gamma(G \cdot uv)$.*

Remarque 2.2.2 *La contraction d'une arête d'un graphe G fait diminuer le nombre de domination par au plus un c'est-à-dire $\gamma(G) - 1 \leq \gamma(G_e) \leq \gamma(G)$.*

2.2.5 La subdivision d'une arête

Définition 2.2.5 *[18]La subdivision d'une arête uv d'un graphe G introduit un nouveau sommet w tel que $E(G \cup \{w\}) = ((E(G) - \{uv\})) \cup \{uw, wv\}$.*

Notation 2.2.2 *Une subdivision d'une arête uv d'un graphe est l'opération de la remplacer par un chemin uwv en ajoutant un sommet w.*

Remarque 2.2.3 *Le nombre de domination augmente*

1. Si u, v les deux sommets est $\gamma - mouvais$, ou
2. u ou $v \in D$ est un support forte ,ou
3. $uv \in E(K_{1,n})$, alors $\gamma(G_s) = \gamma(G) + 1$.
4. Sinon $\gamma(G_s) = \gamma(G)$.

Chapitre 3

Les graphes dynamiques

Dans le chapitre suivant, nous allons donner les définitions des graphes dynamiques et quelques modèles de graphes dynamiques qui ont été utilisées pour représenter les capacités de communication de certains graphe dynamiques.

3.1 Définition des graphes dynamiques

Définition 3.1.1 *Un graphe dynamique $G_t = (V_t, E_t)$ est un graphe qui évolue au cour du temps, tel que V_t ensemble de sommets à l'instant t et E_t ensemble d'arêtes à l'instant t.*

Définition 3.1.2 *Un graphe dynamique est une suite de graphe statique $G_0, G_1, ..., G_n$ tel que*

$$G_{t+1} = G_t \bar{+} \{sommet,\ arête\}$$

Exemple 3.1.1 *Transformation de graphe $G_t \underset{\delta_{t,t+1}}{\dashrightarrow} G_{t+1} \underset{\delta_{t+1,t+2}}{\dashrightarrow} G_{t+2}$ tell que*

1. $\delta_{t,\,t+1}$ =la suppression d'un sommet $\{e\}$
2. $\delta_{t,\,t+2}$ =L'ajout d'un arête (a, e)

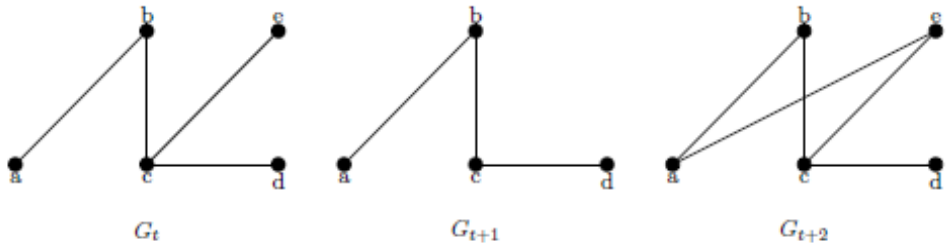


Figure 3.1.1 : Graphe dynamique $G = (G_t, G_{t+1}, G_{t+2})$

3.2 Modèles de graphes dynamiques

Dans [11], on peut observer que les auteurs classifient la dynamique d'un graphe selon les entités qui peuvent changer au fils du temps comme suit :

- Un graphe non orienté (ou orienté) sommets dynamiques ou l'ensemble des sommets varient dans le temps. En d'autres termes, au fil du temps il existe quelques sommets qui peuvent rejoindre le graphe ou des sommets qui peuvent le quitter voir les deux. Notons que lors de la disparition d'un sommet l'ensemble des arêtes (ou arcs) qui le lie a d'autres sommets disparaissent aussi.

- Un graphe non orienté (ou orienté) à arête (ou arc) dynamiques tel que l'ensemble des arêtes (ou des arcs) peuvent varier au fil du temps, c'est- a- dire qu'il existe quelque arêtes (ou arcs) qui peuvent rejoindre le graphe ou le quitter.

- Un graphe à sommets à poids dynamique lorsque les sommets sont pondérés et que leurs poids peut varier dans le temps.

- Un graphe a arête (ou arc) à poids dynamique lorsque les arêtes sont pondérés et que leurs poids peut varier dans le temps aussi.

3.2.1 Etude des propriétés des graphes dynamiques

- Pour rappel, dans un graphe dynamique il est possible que le graphe vérifié la Propriété P ou bien nom pour chaque instant t.

Arbres dynamiques

Un modèle d'arbre dynamique [17]permet de représenter un graphe dynamique dont la topologie peut changer a condition de rester toujours un arbre. En d'autres termes, dans le modèle d'arbre dynamique il est possible de changer la racine de l'arbre ou de rajouter/supprimer un sommet ou un sous arbre dans l'arbre initial. Notez qu'une insertion ou une suppression d'arête tout en gardant la structure d'une forêt implique l'ajout d'un sommet ou d'un sous arbre dans la forêt initiale.

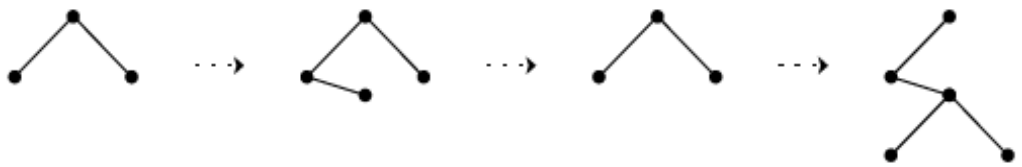


Figure 3.2.1 : *Arbres dynamiques*

La connexité

Il est possible qu'un tel graphe ne soit jamais connexe à un instant donné si on a la suppression d'un sommet d'articulation ou la suppression d'un isthme ou bien l'ajout d'un sommet, mais qu'il permette une forme de connexité à travers le temps. C'est le cas ci-dessus, où les sommets peuvent communiquer indirectement, par exemple a peut faire parvenir une information à e en passant par exemple par b, c et d au fil du temps. On parle alors de chemin temporel ou simplement de trajet, et la forme de connexité qui en résulte est appelée connexité temporelle. Un graphe est temporellement connexe si tous les sommets peuvent s'atteindre au moins une fois (c'est le cas ci-dessus). Quand le temps est infini, on parle de connexité temporelle récurrente si, à tout moment, le futur du graphe est temporellement connexe [19].

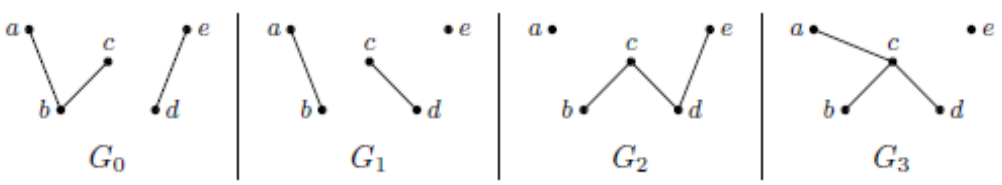


Figure 3.2.2 : Graphe dynamique $G = (G_0, G_1, G_2, G_3)$

3.3 Etude de comportement d'un graphe unicycle au cours du temps

D'apres l'étude des graphes dynamiques et ces propriétés, on va choisit une classe de graphe appelé **unicycle** et on applique tout les opérations sur cette classe.

Définition 3.3.1 *Un graphe unicycle $G = (V, E)$ est un connexe contient un seule cycle C_k et $|V| = |E|$.*

Exemple 3.3.1 $|V| = 14, |E| = 14, \gamma(G) = 5$.

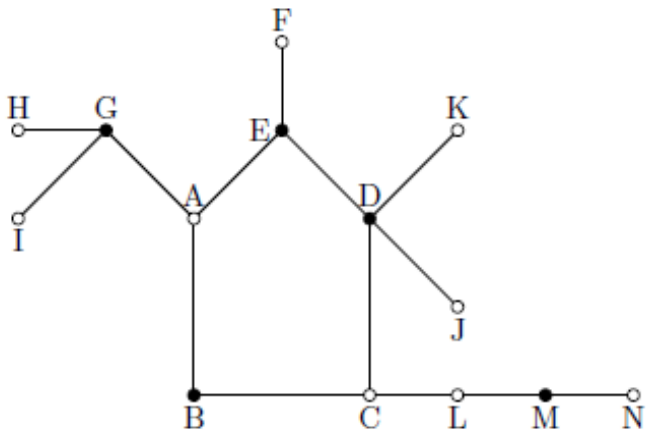


Figure 3.3.1 : G_t : *unicycle*

Théorème 3.3.1 *[10]Pour tout graphe unicycle G on a:*

- $\gamma(G) = \Gamma(G)$
- $\gamma(G) = \beta(G)$
- $i(G) = \beta(G)$
- $i(G) = \Gamma(G)$

Notation 3.3.1 *Le graphe $C_k \circ G$ est un graphe qui contient un cycle C_k et chaque sommet de C_k a relié a un graphe G.*

Remarque 3.3.1 *Voici quelques valeur exacte du nombre de domination dans un unicycle:*

1. $\gamma(C_k \circ P_1) = \frac{n}{2}$.
2. $\gamma(C_k \circ P_2) = \frac{n}{3}$.
3. $\gamma(C_k \circ P_3) = \begin{cases} \frac{3n}{8} & si \quad k \quad pair \\ \frac{n}{4} + \left\lceil \frac{n}{12} \right\rceil & \text{sinon} \end{cases}$.
4. $\gamma(C_k \circ P_4) = \frac{2n}{5}$.

3.3.1 Les opérations sur unicycle

Transformation d'un unicycle $G_t = (V_t, E_t)$ et on obtient deux cas:

Unicycle dynamique

La suppression d'un sommet Si v est un sommet pendant, le graphe $G_{t+1} = G_t - v$ reste toujours un *unicycle*, avec $v = K$.

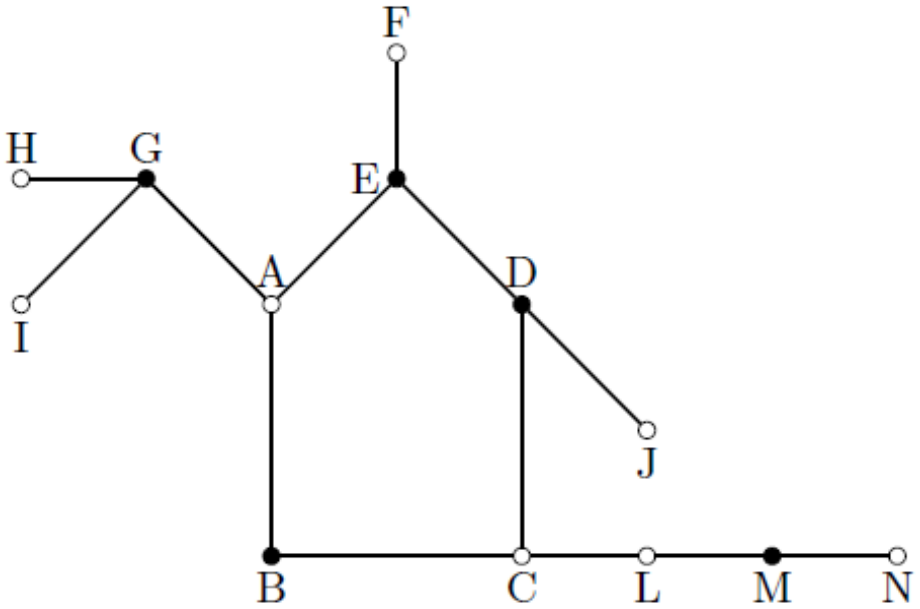


Figure 3.3.2 : *unicycle*

La subdivision d'une arete

1er*cas*:

G_{t+1}est un unicycle tel que $|V| = n+1$ et $|E| = m+1$ de cycle C_{k+1} si $e \in C_k$, avec $e = CB$.

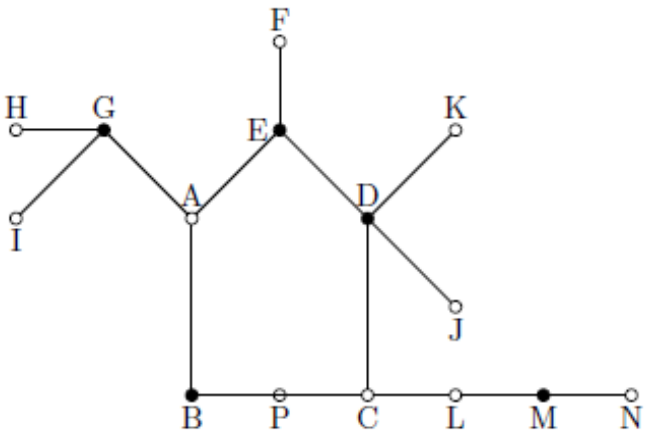


Figure 3.3.3 : *unicycle*

2eme*cas*:

G_{t+1} est un unicycle tel que $|V| = n+1$ et $|E| = m+1$ de cycle C_k si $e \notin C_k$, avec $e = DK$.

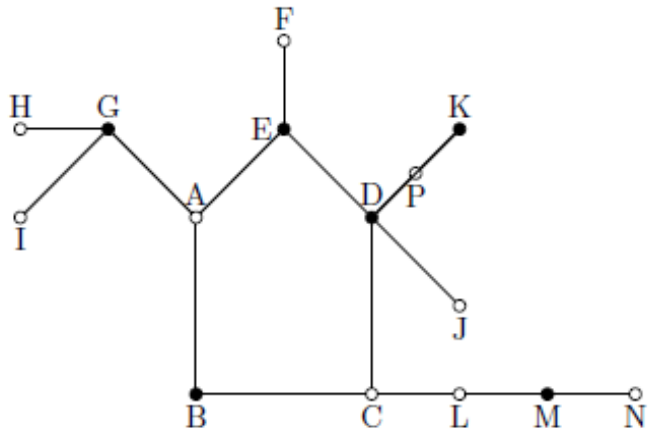


Figure 3.3.4 : *unicycle*

La contraction d'une arête $\forall e$ on a G_{t+1} est un unicycle, tel que G_t est un unicycle avec C_k et $k \geq 3$.

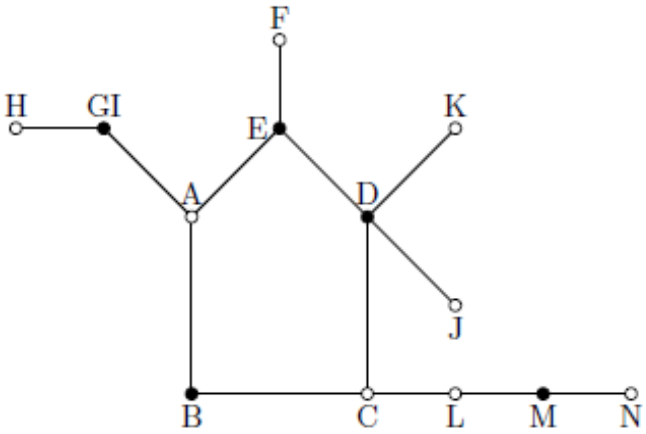


Figure 3.3.5 : un unicycle

Graphe dynamique

La suppression d'un sommet $1^{er}cas$:

Si $v \in C$, le graphe $G - v$ est un *arbre,* avec $v = B$,ou une *forêt,* avec $v = C$.

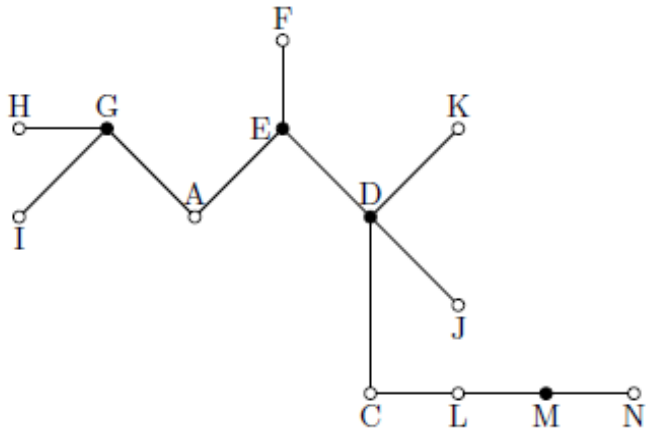


Figure 3.3.6 : *arbre*

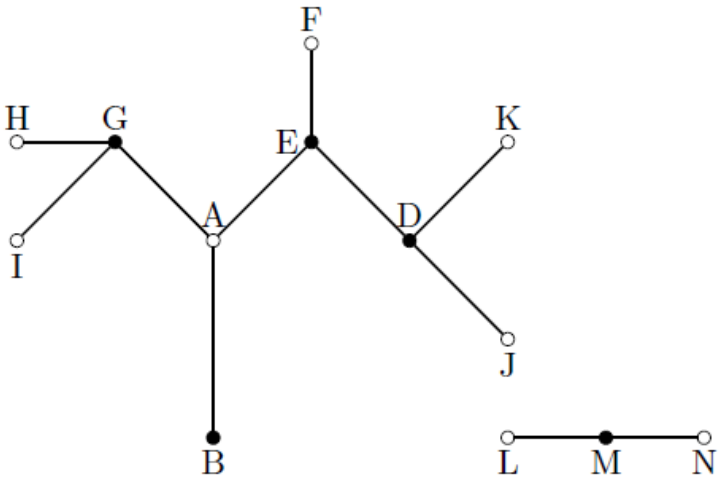


Figure 3.3.7 : *forêt*

$2^{eme} cas$:

Si $v \notin C$,et est un support forte donc $G_{t+1} = G_1 + G_2 + G_3$, avce G_1 est un *unicycle* et G_2, G_3 des *arbres*, avec $v = G$.

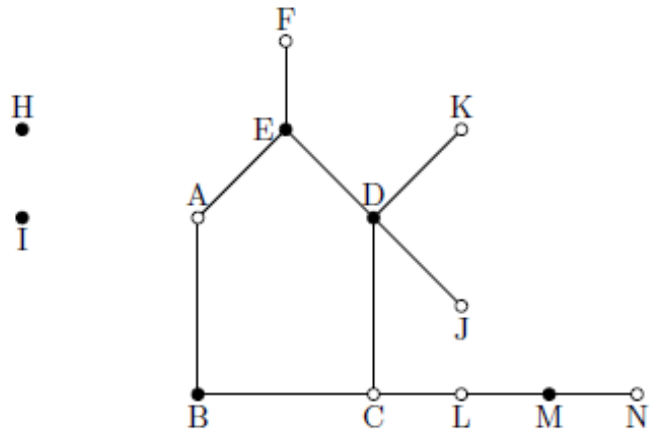


Figure 3.3.8 : unicycle + des *arbres*

$3^{eme} cas$:

Sinon$G_{t+1} = G_t - v = G_1 + G_2$, avce G_1 est un *unicycle*, G_2 est un *arbre,* avec $v = L$.

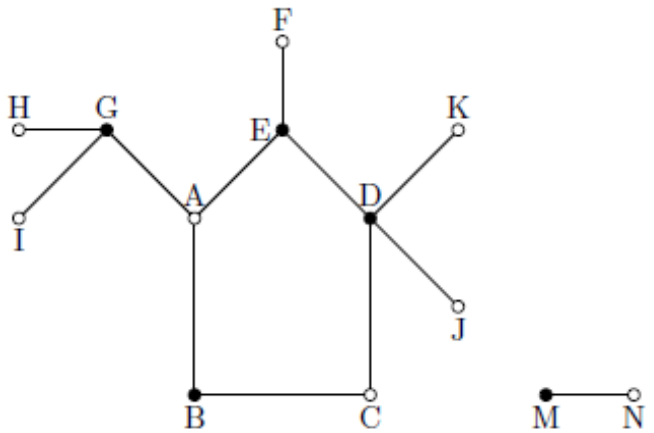


Figure 3.3.9 : *arbre + unicycle*

La suppression d'une arête

$1^{er} cas$:

Si $e \in C$, le graphe $G_{t+1} = G_t - e$ est un *arbre,* avec $e = AB$.

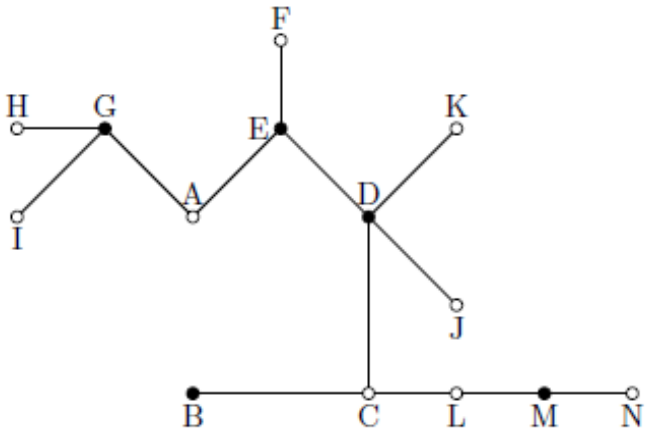


Figure 3.3.10 : *arbre*

2eme*cas* **:**

Sinon $G_{t+1} = G_t - e = G_1 + G_2$, *avec* G_1 est un *unicycle*, G_2 est un *arbre*, et $e = AG$.

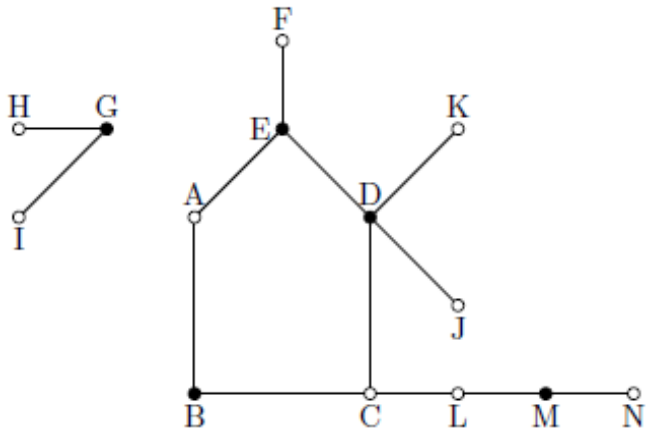


Figure 3.3.11 : *unicycle* + *arbre*

L'ajout d'une arête $1^{er}cas$:

Si $e \in E_t\left(\overline{G_t}\right)$ et $e = HI$ tq $H, I \notin V(C)$, G_{t+1} est un *cactus*.

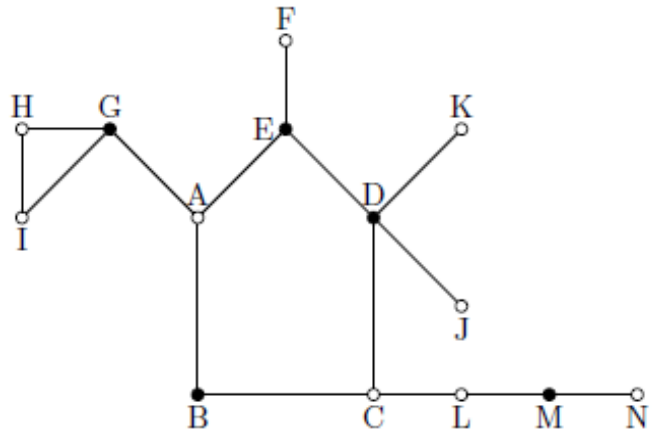


Figure 3.3.12 : *cactus*

$2^{eme} cas$:

Si $C_k + e$ on a G_{t+1} un graphe.

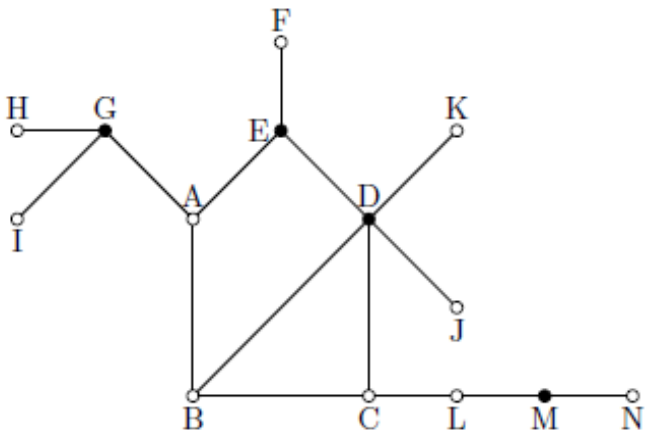


Figure 3.3.13 : *graphe*

La contraction d'une arête Si $e \in E_t\,(C_3)$ alore G_{t+1}est un arbre, avec $e = AC$.

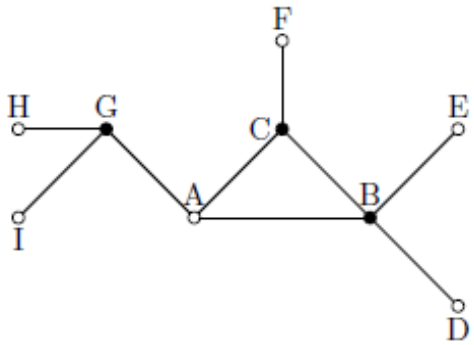


Figure 3.3.14 : *unicycle de* C_3

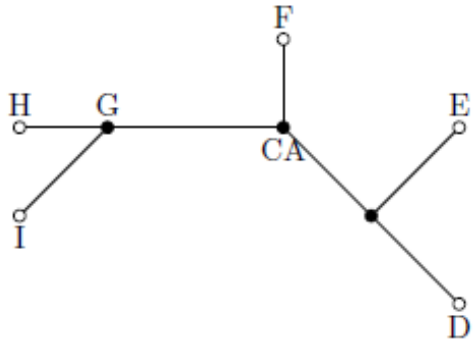


Figure 3.3.15 : un arbre

3.4 Etude de comportement d'un arbre et cactus

D'après l'étude du graphe G_t qui est un unicycle, on va remarquer que le graphe G_{t+1} est un unicycle ou bien arbre ou bien la réunion ou cactus. Donc on appliquera tous les opérations précédentes sur l'arbre et cactus.

3.4.1 Les opérations sur les arbres

Soit $G_{t+1} = (V_{t+1}, E_{t+1})$ est un arbres.

La suppression d'un sommet

Si v est un sommet pendant, le graphe $G_{t+2} = G_{t+1} - v$ reste toujours un *arbre*.

Sinon, $G_{t+2} = G_1 + G_2$ avec G_1, G_2 des arbres.

La suppression d'une arête

$G_{t+2} = G_{t+1} - e = G_1 + G_2$ avec G_1, G_2 des arbres.

L'ajout d'une arête

$G_{t+2} = G_{t+1} + e$ est un unicycle, $e \in E\left(\overline{G_{t+1}}\right)$.

La contraction d'une arête

$\forall e$ on a G_{t+2}est un arbre.

La subdivision d'une arête

$\forall e$ on a G_{t+2}est un arbre.

3.4.2 Les opérations sur cactus.

Soit $G_{t+1} = (V_{t+1}, E_{t+1})$ est un cactus de deux cycle C_{k1} et C_{k2}.

La suppression d'un sommet

Si $v \in V_{t+1}(C_{k1})$ ou $V(C_{k2})$, alors $G_{t+2} = G_{t+1} - v$ est un unicycle.

Si $v \in V_{t+1}(C_{k1})$et$V(C_{k2})$,alors $G_{t+2} = G_1 + G_2$avec G_1, G_2 des arbres.

Si v est un sommet pendant, le graphe G_{t+2}est un cactus .

Sinon, $G_{t+2} = G_1 + G_2$ avec G_1 est un arbre et G_2 est un cactus.

La suppression d'une arête

Si $e \in E_{t+1}(C_{k1})$ ou $E(C_{k2})$, alors G_{t+2} est un unicycle.

Si e entre C_{k1}et C_{k2}, alors $G_{t+2} = G_1 + G_2$avec G_1, G_2 des unicycle.

Sinon, $G_{t+2} = G_1 + G_2$ avec G_1 est un cactus et G_2 est un arbre.

L'ajout d'une arête

On a $e \in E_{t+1}\left(\overline{G_{t+1}}\right)$

Si e entre C_{k1}et C_{k2}, alors G_{t+2} est un cactus contient 3 cycle.

Sinon, est un graphe qui contient un corde dans le cycle.

La contraction d'une arête

Si $e \in E_{t+1}\left(C_{k1}\right)$ ou $E\left(C_{k2}\right)$,alors G_{t+2} est un unicycle, avec $k1$ ou $k2 = 3$.

Sinon G_{t+1} est un cactus.

La subdivision d'une arête

$\forall e$ on a G_{t+2} est un cactus.

Remarque 3.4.1 *Selon tous les études sur l'unicycle et l'arbre et cactus, on a trouvé quelque soit l'opération on obtient les classes suivants:*

$$G_t = \begin{cases} G_1 \text{ est un unicycle.} \\ G_2 \text{ est un arbre.} \\ G_3\text{est un cactus.} \end{cases}$$

$G_t \dashrightarrow G_{t+1} \dashrightarrow G_{t+2}$ *avec* :

$G_{t+1} = G_1$ *ou* $G_{t+1} = G_2$ *ou* $G_{t+1} = G_1 + G_2$ *ou* $G_{t+1} = G_3$

$G_{t+2} = G_1$ *ou* $G_{t+2} = G_3$ *ou* $G_{t+2} = G_1 + G_2$ *ou* $G_{t+2} = G_2$

Conclusion

Nous sommes intéressés dans ce mémoire à l'étude de comportement du nombre de domination de certains graphes dynamiques. Nous avons, dans un premier temps, rappelé quelques définitions sur la domination dans les graphes. Nous avons ensuite étudié les diérentes opérations sur les graphes pour le nombre de domination $\gamma(G)$. Ainsi, nous avons donnons quelque modèle du certains classes de graphe en particulier les arbres, unicycle et cactus et notons respectivement G_1, G_2, G_3. Nous concluons que si $G_t \in \{G_1, G_2, G_3\}$ alors G_{t+1} est un graphe où chaque composante connexe est soit un arbre, soit un unicycle, soit un cactus. On propose d'étudier le comportement de d'autre classe de graphe au cours de temps pour d'autre paramétre du graphe.

Bibliographie

[1] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi. et P. J. Slater, "Fundamentals of Domination in Graphe", Marcel Dekker, New York, 1998.

[2] H. B. Walikar, B. D. Acharya, "Domination Critical Graphs", Nat. Acad. Sci. Lett., 2, 70 – 72, 1979.

[3] D. Bauer F. Harary, J. Nieminen, C. L. Suffel, "Domination Alteration Sets in Graphs", Discrete Mathematics, 47, 153 – 161, 1983.

[4] R.C. Brigham, P. Z. Chinn, R. D. Dutton, "Vertex Domination – Critical Graphs", Networks, 18, 173 – 179, 1988.

[5] E. Sampathkumar, P. S. Neeralagi, "Domination and Neighbourhood Critical, Fixed, Free and Totally Free Points", Sankhya (Special Volume), 54, 403 – 407, 1992.

[6] D. P. Sumner, "Critical Concepts in Domination", Discrete Mathematics, 86, 33 – 46, 1990.

[7] D. P. Sumner, P. Blitch P, "Domination Critical Graphs", Journal of Combinatorial Theory, Series B, 34, 65 – 76, 1983.

[8] J. R. Carrington, F. Harary, T. W. Haynes, "Changing and Unchanging the Domination Number of a Graph", Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 9, 57 – 63, 1991.

[9] T. Burton, D. P. Sumner, "Domination Dot – Critical Graphs", Discrete Mathematics, 306, 11– 18, 2006.

[10] J. Topp and P. D. "Vestergaard some classe of well-covered graphe". Technical Raport R-93-2009. Dept, Math. And Computer Science , Aalborg Univ ,1993.

[11] Frank Harary and Gopal Gupta. "Dynamic graph models". Mathematicaland Computer Modelling, 25(7) :79–87, 1997.

[12] C. Payan et N . H. Xuong, "Dmination balanced graphs", J. graphs theory 6, 23-32, 1982.

[13] C. Berge, "Theory of grahps and its applications", Methuen, London, 1962.

[14] Yamuna M and Karthika K, "A Survey on the Effect of Graph Operations on the Domination Number of a Graph", SAS, VIT University, Vellore, Tamilnadu, India, 632 014, 6 Dec 2016-Jan 2017.

[15] Iklhef Eshouf. N , "Graphes et algorithmes", Cours de M1 RO, Universite Yahia Farès de Médéa, 2015-2016.

[16] Klelifi . S,"La Domination dans les Graphes", Cours de M2 RO, Universite Yahia Farès de Médéa, 2016-2017.

[17] Daniel D Sleator and Robert Endre Tarjan. "A data structure for dynamic trees". In Proceedings of the thirteenth annual ACM symposium on Theory of computing, pages 114-122. ACM,1981.

[18] Vincent Nivoliers, "Graphes planaires", 18 mai 2007.

[19] Arnaud Casteigts,"Sujets de stage potentiels autour des graphes dynamiques", 2011-2015.

[20] Tamara Burton, David P. Sumner, "Domination dot-critical graphs", 22 December 2005.