RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ Dr. YAHIA FARES DE MÉDÉA

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

DÉPARTEMENT DE GÉNIE DE LA MATIÈRE

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de Master En Génie Mécanique

option Conception Mécanique

Théme

Effet de certains paramètres d'influence sur les réponses statiques des composites stratifiés

Proposé et dirigé par : *Dr.BACHENE Mourad*

Présenté par: *Mr.BOUABIDA Sidahmed*

Promotion: 2013-2014

كلمة شكر

عملا بقوله تعالى:

« فاذكروني أذكركم و اشكروا لي و لا تكفرون »

سورة البقرة.

نشكر الله عز و جل الذي رزقنا من العلم ما لم نكن نعلم، و أعطانا من القوة والفهم بمقدار ما نحتاجه للوصول إلى هذا المستوى وإتمام هذا العمل المتواضع.
ومن تمام شكرالله تعالى، أن نشكر أهل الفضل فضلهم و جهدهم، وأن نعترف لهم بحقهم، لقوله صلى الله عليه وسلم:

« لا يشكر الله من لا يشكر الناس».

نتقدم بجزيل الشكر و خالص التقدير والعرفان لأستاذتنا الفاضلة
السيدة باشن مراد المشرف على مذكرة تخرجي و التي
أضفى على هذا البحث من خلال
دعمه المعلوماتي و المعرفي قيمة مضافة.
وعرفانا منا بالجميل اتجاه كل من مد لنا يد العون.
إلى هؤلاء جميعا...نقدم هذه الكلمة .

إهداء

الحمد لله ذي الجلال الذي عجزت عن إدراك كُنهه عقول العارفين، و الكمال الذي قصرت عن إحصاء ثنائه أللسنة الواصفين, و القدرة التي وجلت من رهبتها قلوب الخائفين، و العظمة التي عنت لعزتها وجوه الطائعين والعاكفين، و العلم الذي لم يدركه احد من العالمين، و أرسل الرسل مبشرين و منذرين، رحمة للعالمين, و ختمهم بنبينا محمد عليه أزكى الصلات و التسلم، و صل اللهم على**محمد** نبي المرسلين, وعلى اله و أصحابه و من والاه إلى يوم الدين.

*إلى من جعلت منا تاجا ذهبيا يعتلي أولى أولوياتها, ففرحت لأفراحنا و حملت مآسينا العمر كله و لم تشكي يوما ثقل أوزارنا.

*إلى من حملنا لها من المودة ما تفوق قلوبنا فأبت النفس إلا أن تهدي لها ثمرة الجهد وختام العمل.

*إلى قرة عيني، إلى من أعجز عن وصفها، إلى من الجنة تحت أقدامها، إلى الغالية على قلبي والتي أفديها بروحي أمي (باية) حفظها الله.

*إلى من علمني أن الحياة تجارب وأن النجاح لايكون إلا بجهد صادق,

* إلى من أوصلني إلى بر الأمان وإلى من وقف بجانبي ماديا ومعنويا.

* إلى من علمني كيف أصارع الحياة وأواجه نوائب الدهر، إلى أغلى الناس، أبي العزيز (محمد) رحمه الله.

*إلى كل أفراد عائلتي الموقرة فردًا فردا.

*إلى كل من وسعهم قلبي، عرفني، فأحبني و أحببته، رفاق الدرب في كل مراحله, من كانوا سندًا ومؤنساً ومرشدا،لهم جميعاً مني كل الاحترام والتقدير. أخص بذكر منهم : منير، محمود، سيدعلي، نورالدين، احمد ،جيلالي،عيسى، ...

*إلى كل من وسعهم قلبي ولم يسعهم قلمي.

* إلى هؤلاء جميعاً...أهدي هذا العمل.

سيدأحمد.

كلمة شكر

عملا بقوله تعالى:

« فاذكروني أذكركم و اشكروا لي و لا تكفرون »

سورة البقرة.

نشكر الله عز و جل الذي رزقنا من العلم ما لم نكن نعلم، و أعطانا من القوة والفهم بمقدار ما نحتاجه للوصول إلى هذا المستوى وإتمام هذا العمل المتواضع.

ومن تمام شكره تعالى، أن نشكر أهل الفضل فضلهم و جهدهم، وأن نعترف لهم بحقهم، لقوله صلى الله عليه وسلم:

« لا يشكر الله من لا يشكر الناس».

نتقدم بجزيل الشكر و خالص التقدير والعرفان لأستاذتنا الفاضلة

السيدة **معزوز نشيدة** المشرفة على مذكرة تخرجنا و التي

أضفت على هذا البحث من خلال

دعمها المعلوماتي و المعرفي قيمة مضافة.

وعرفانا منا بالجميل اتجاه كل من مد لنا يد العون

نقدم هذه الكلمة .

RESUME

Les matériaux composites sont aujourd'hui largement utilisés et touche de nombreux secteurs industriels. Pour les besoins de la technologie moderne, une bonne connaissance du comportement mécanique dans la conception ou la vérification de ces structures est indispensable. Pour atteindre de tels objectifs, la détermination des caractéristiques statiques ou dynamiques est nécessaire.

Le but de ce travail est l'étude par la méthode des éléments finis du comportement statique des plaques composites stratifiées. Le travail réalisé est présenté en deux grandes parties. La première est consacrée au développement de la formulation du comportement statique des plaques stratifiées. La deuxième est une analyse par éléments finis suivie par une présentation d’un programme informatique développé à cet effet, où plusieurs applications relatives à l’influence de certains paramètres sur la déflexion maximale et les contraintes maximales ont été traitées à savoir ; l’influences de la géométrie de la plaque, de l’orientation des fibres, de l’anisotropie et des conditions aux limites. Les résultats obtenus ont été comparés aux résultats de la littérature où une bonne corrélation à été constatée.

ABSTRACT

Composite materials are today widely used and foundin many industries. For the needs of modern technology, a good knowledge of the mechanical behavior of these structures is essential in the design or verification in a static or dynamic environment. To achieve these objectives, the determination of static characteristics is required.

The aim of this work is to study the static behavior of laminated composite plates. The finite element method is used in the analysis. The work done is presented in two main parts: the first is devoted to the development of the static formulation of laminated plates. The second is a finite element analysis followed by a presentation of a computer program developed for this purpose, where multiple applications related to the influence of some parameters on the maximum deflection and maximum stresses were treated namely, effects of plate's geometry, fiber orientation, material's anisotropy and boundary conditions. The results were compared with literature one where good accuracy was found.

ملخص

إن استخدام المواد المركبة اليوم في الكثير من الصناعات لأغراض التكنولوجيا الحديثة، لعجي من معرفة التصرف الميكانيكي لهذه الهياكل في التصميم أو التحقق من أي تشوه أمرا ضروريا.

الغرض من هذه الدراسة هو دراسة التصرف الميكانيكي الساكن للصفائح المركبة المتعددة الطبقات باستخدام طريقة العناصر المحددة. أنجز العمل في *قسمين* رئيسيين هما:

القسم الأول يحتوي على عرض موسع و شامل حول العلاقات الرياضية و الميكانيكية التي تسير التصرف الميكانيكي الساكن للصفائح المركبة.
والثاني هو تحليل لطريقة العناصر المحددة يتبع بعرض لبرنامج كمبيوتر. حيث تمت معالجة العديد من التطبيقات ذات الصلة. وقد تم تطوير برنامج كمبيوتر لحساب الانحراف الأقصى، والإجهاد الأقصى بين الطبقات و أيضا حساب الإجهاد الأقصى على السطح المتوسط للصفائح المركبة المتعددة الطبقات.

TABLE DES MATIERES

Notations principales
Liste des figures
Liste des tableaux

Chapitre I : Généralités sur les matériaux composite

I.1. Introduction 1
I.2. Généralités sur les matériaux 3
I.3. Caractéristiques générales 4
1.4. Classification des matériaux composites 4
1.4.1 Classification selon la forme des constituants 4
a) Composites à fibres 4
b) Composites à particules 4
1.4.2 Classification selon la nature des constituants 4
a) Composites à matrice organique 4
b) Composites à matrice métallique 4
c) Composites à matrice minérale 4
1.4.3 Classification suivant performance et diffusion 5
a) Les composites grandes diffusions 5
b) Les composites hautes performances 5
I.5. Éléments constituants d'un matériau composite 5
I.5.1. Divers types de résines 5
I.5.1.a. Les résines thermodurcissables 5
I.5.1.b. Les résines thermoplastiques 9
I.5.1.c. Les résines thermostables 9
I.5.2. Charges et les additifs 10
1.6. Les fibres et tissu 10
1.6.1. Formes linéiques 10
1.6.2. Fibres de formes surfaciques 10
a) Les mats 10
b) Les tissus et rubans 11
1.6.3. Structures tissées unidirectionnel 11
a) Tresses et préformes 11
b) Tissus multidirectionnels 12
1.6.4. Les principales fibres 12

1.6.4.1 Les fibres de verre 12
a) Elaboration des fibres de verre 12
b) Caractéristiques mécaniques des fibres de verre 13
1.6.4.2 Les fibres de carbone 14
a) Elaboration des fibres de carbone 14
b) Caractéristiques mécaniques des fibres de carbone 14
1.6.4.3 Les fibres aramides à caractéristiques mécaniques élevées 15
a) Caractéristiques mécaniques des fibres aramides 15
b) Domaines d'utilisation 16
1.6.4.4 Les fibres céramiques 16
a) Caractéristiques mécaniques et utilisation 16
1.6.4.5 Les fibres synthétiques thermostables 17
1.6.4.6 Autres fibres 17
a) les fibres d'origine végétale 17
b) les fibres d'origine minérale 17
c) les fibres synthétiques 17
d) les fibres métallique 18
1.7 Les stratifiés composites 18
1.7.1 Désignation des stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels 19
I.8. Conclusion 20

Chapitre 2: comportement en flexion des plaques stratifiées

2.1. Description du problème 21
2.1.1. Hypothèses simplificatrices 21
2.2. Loi des mélanges 22
2.2.1. Module d'élasticité longitudinale 22
2.2.2. Module d'élasticité transversale 23
2.2.3. Coefficient de poisson 25
2.2.4. Module de cisaillement 25
2.3. Champs des déplacements 26
2.4. Champs des déformations 28
2.5. Relation contraintes-déformations 28
2.5.1. Résultantes et moments 33
2.5.2. Equation constitutive 35
2.6. Equations fondamentales des plaques stratifiées 36

Chapitre 3: formulation par éléments finis

3.1.
Introduction 39

3.2. Discrétisation 40
3.3. Equations de l'énergie potentielle 43
3.3.1. Matrice de rigidité 45
3.3.2. Intégration de Gauss 46
3.4. Matrice de rigidité globale - vecteur force global 47
3.4. Résolution 47

Chapitre4 : Présentation du programme (ANSYS)
4.7 Analyse lainera de structurale 48
4.7.1 Analyse statique 48
4.7.1.1 MODÈLE 48
4.7.2 Analyse transitoire 55
4.7.2.1 MODÈLE 56

Chapitre 5: Résultats et discussions
5.1. Introduction 62
5.2. Applications 62
5.2.1. Validations 64
a. Calcule de la flèche 64
b. Calcul des contraintes 65
5.2.2. Influence du nombre des couches 67
5.2.3. Influence de l'orientation des fibres 69
5.2.4. Influence de la séquence d'empilement 71
5.2.5. Influence du rapport géométrique (a/b) de la plaque 73
5.2.6. Influence de l’anisotropie du matériau E1/E2 75

LISTE DES FIGURES

1.1	*Chaine et trame d'un tissu*	11
1.2	*Modèle de base des stratifiés*	18
1.3	*Exemple de désignation d'un stratifié*	19
1.4	*Convention de sigue pour la désignation des stratifiés*	20
2.1	*Chargement longitudinal*	22
2.2	*chargemant transversal*	24
2.3	*Changement donnant le cisaillement*	26
2.4	*Schéma d'une plaque stratifiée*	27
2.5	*Directions principales dans un pli*	29
2.6	*Changement du repère dans un pli*	32
2.7	*Représenté les résultantes en cisaillement*	34
2.8	*Représenté les résultantes en membrane Les moments de flexion et de torsion*	34
2.8	*Représenté les résultantes en membrane Les moments de flexion et de torsion*	34
3.1	*Elément de référence*	40
4.1	*Boîte de dialogue pour récupérer les résultats sur la base d'éléments numéros de séquence*	49
4.2	*Plaque en mailles*	50
4.3	*Créer et modifier la boîte de dialogue Shell articles*	51
4.4	*Les conditions aux limites*	52

4.5	*Liste des fréquences des modes*	54
4.6	*déformation de première mode*	55
4.7	*utilisation de l'outil fonction*	57
4.8	*Télécharger l'équation*	58
4.9	*application de l'équation*	58
4.10	*application de la charge*	59
4.11	*contrôle du temps*	60
4.12	*Variation dans le temps de la z-déplacement au point milieu*	61
5.1	*Représentation d'une plaque soumise à une charge uniforme*	63
5.2	*Flèche maximale adimensionnelle* (w^*) *en fonction du rapport (a/h) n=2 et n=10, empilement (-θ/ θ) avec θ=45°, charge uniforme*	65
5.3	*Variation des contraintes maximales en fonction du rapport (a/h) pour une plaque carrée sur appuis simples n=2 et n=10, empilement (-θ/ θ) avec θ=45°,*	67
5.4	*Influence du nombre de couches "n" sur la flèche maximale adimensionnelle Plaque carrée sur appuis simples, charge uniforme, empilement* (θ/-θ/θ/-θ)	68
5.5	*Influence du nombre de couches sur les contraintes maximales d'une plaque carrée simplement appuyée constituée d'un stratifié équilibré antisymétrique (-45°/45°/-45°…)*	69
5.6	*variation de la flèche maximale en fonction de l'angle d'orientation des fibres pour une plaque carrée simplement appuyée à une seule couche sous une charge uniforme*	70
5.7	*variation de la flèche maximale en fonction de l'angle d'orientation des fibres pour une plaque carrée simplement appuyée à une seule couche sous une charge uniforme*	71
5.8	*Influence de la séquence d'empilement sur la flèche maximale* (w^*) *pour une plaque carrée simplement appuyée sous une charge uniforme*	72
5.9	*Influence de la séquence d'empilement sur la contrainte maximale* σ_{xx}^* *pour une plaque carrée simplement appuyée sous une charge uniforme*	73

5.10	*Influence du rapport a/b sur la flèche maximale (w^*), plaque carrée sur appuis simples empilement (0° /90°). Charge uniforme*	74
5.11	*Influence du rapport a/b sur les contraintes normales et , plaque carrée sur appuis simples empilement (0° /90°). Charge uniforme*	74
5.12	*Influence du rapport a/b sur les contraintes normales σ_{xx}^* et σ_{yy}^* , plaque carrée sur appuis simples empilement (0° /90°). Charge uniforme.*	75
5.13	*Influence de l'anisotropie de matériau sur le contrainte maximale (σ^*) sous l'effet d'une charge répartie sinusoïdale, pour une plaque carrée sur appuis simples*	76

LISTE DES TABLEAUX

1.1 *Caractéristiques générales des composites*. 3

1.2 *Diverses caractéristiques de résines polyesters* 6

1.3 *Diverses caractéristiques des résines phénoliques* 7

1.4 *Diverses caractéristiques des résines époxydes.* 8

1.5 *Diverses caractéristiques des résines thermoplastiques* 9

1.6 *Caractéristiques mécaniques des verres type E et R mesurées sur monofilaments à la sortie de la filière [1*] 13

1.7 *Caractéristiques à la rupture d'un fil silionne industriel déduites des caractéristiques mesurées sur un composite unidirectionnel verre/époxyde [1]* 13

1.8 *Caractéristiques des fibres de carbone et du verre E* 15

1.9 *Caractéristiques mécaniques de différents types de monofilaments aramides* 15

1.10 *Caractéristiques mécaniques de quelques fibres céramiques* 16

1.11 *résume les caractéristiques mécaniques de quelques unes d'entre elles* 17

5.1 *Flèches maximale adimensionnelle, (w*), en fonction du nombre de couches, l'orientation des fibres, et le rapport a/h. Plaque carrée simplement appuyée, empilement (-θ/θ/-θ/...), Charge transversale sinusoïdale réparti (n =2 à 10, n = nombre de couches).* 64

5.2 *Contraintes adimensionnelles en fonction du nombre de couches, l'orientation des fibres, et le rapport a/h, pour une plaque carrée simplement appuyée, empilement (-θ/θ/-θ/...), Charge transversale sinusoïdale réparti (n=10, n = nombre de couches).* 66

NOMENCLATURE

$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, F_{ij}$: Coefficients de rigidité respectivement en membrane, membrane–flexion, flexion et en cisaillement.

a, b, h : Respectivement la longueur, la largeur et l'épaisseur de la plaque.

$\{\delta\}$: Vecteur des déplacements globaux.

$[B_i]$: Matrice d'interpolation des déformations.

$\{d_i\}$: Vecteur des déplacements nodaux.

E : L'énergie cinétique totale de la plaque.

E_1 : Module d'Young longitudinal.

E_2 : Module d'Young transversal.

G_{12} : Module de cisaillement longitudinal.

G_{13}, G_{23} : Modules de cisaillement transversal.

g : Nombre de points d'intégration.

$[J]$: Matrice Jacobienne,

$[K]$: Matrice de rigidité globale.

$[K_e]$: Matrice de rigidité élémentaire.

M_x, M_y : Moments de flexion.

M_{xy} : Moment de torsion.

n : Nombre de couches

NE : Nombre des éléments.

nn : Nombre de nœuds par élément.

$[N_i]$: Fonctions d'interpolations des déplacements.

N_x, N_y, N_{xy} : Résultantes en membrane.

Q_x, Q_y : Résultantes en cisaillement

$[Q]$: Matrice de rigidité d'un pli exprimée dans le repère principal (*1, 2, 3*).

$[\overline{Q}]$: Matrice de rigidité d'un pli exprimée dans le repère du stratifié (*x, y, z*).

$[T]$: Matrice de changement de base des contraintes.

$[T']$: Matrice de changement de base des déformations.

u, v, w	:	Les déplacements suivant les directions *x, y, z*.
V	:	Volume de la plaque
W_a, W_b	:	Coefficients de pondération.
(*x,y,z*)	:	Axes liés au stratifié.
(*1,2,3*)	:	Axes principaux liés au pli.
$\alpha_{i,j}$	:	Facteurs de correction en cisaillement.
ε	:	Déformation linéaire.
(ξ,η)	:	Système d'axes local.
θ	:	L'angle que font le repère (*1,2)* et le repère (*x,y)*.
θ_x, θ_y	:	Respectivement, les rotations de la normale à la surface moyenne autour des axes *x, y*.
ν_{12} , ν_{21}	:	Coefficients de Poisson.
π	:	L'énergie potentielle totale de la plaque
ρ	:	La masse volumique d'un pli.
σ	:	Contrainte normale.
σ^*	:	Contrainte maximale adimensionnelle de plaque.
τ	:	Contrainte tangentielle.
Ω	:	Surface de la plaque.
w	:	Flèche maximale de plaque.
w^*	:	Flèche maximale adimensionnelle de la plaque.

Chapitre I

Généralités sur les matériaux composites

Chapitre I : Généralités sur les matériaux composites

I.1. Introduction

L'un des objectifs de l'industrie est de concevoir et d'élaborer des matériaux présentant une performance la plus élevée possible. Tous ces matériaux présentent un défaut majeur, ils sont fragiles et donc cassant ; un petit défaut suffit pour amorcer la rupture totale de la structure ; on n'obtient donc pas la résistance théorique espérée. Si ces mêmes matériaux sont fabriqués sous forme de fibres, leurs résistances pratiques sont augmentées considérablement. L'exemple le plus connu est celui du verre. Une plaque de verre casse facilement ; par contre, un ensemble de fibres de verre résiste à une contrainte de traction de l'ordre de 3000MPa, soit deux fois la résistance d'un acier très haute résistance. Cela tient au fait que :

- ✓ La probabilité d'avoir un défaut est plus faible sur une fibre que sur une plaque.
- ✓ Un défaut dans une fibre n'entraîne que la rupture de celle-ci ; le défaut ne se propage pas.

Pour utiliser pratiquement ces fibres, il est nécessaire de les lier par une matrice. Cette dernière a un rôle mécanique important ; en traction elle retransmet l'effort d'une fibre cassée vers les autres fibres ; en compression elle stabilise les fibres en flambage. Un tel matériau , constitué de fibres unidirectionnelles assemblées par une matrice ; est hétérogène puisqu'il est constitué de deux phases distinctes (fibre et matrice). Les caractéristiques macroscopiques peuvent cependant être considérées comme indépendantes du point géométrique considéré mais elles sont bien évidemment très dépendantes de la direction étudiée. On est en présence d'un matériau homogène anisotrope. Les propriétés sont élevées uniquement dans la direction des fibres. Pour réaliser des structures soumises à des efforts multiaxiaux, il est nécessaire d'orienter cet élément de base (pli ou monocouche) suivant des directions déterminées en fonction des sollicitations [1],[2] et [3] .

Le but de ce chapitre est de :

- ✓ Donner les caractéristiques importantes des fibres.
- ✓ Donner les caractéristiques des résines.

- ✓ Donner les domaines d'application de chaque résine et fibres.
- ✓ Donner les avantages et les inconvénients de chaque fibre.

I.2. Généralités sur les matériaux composites

Un matériau composite est une combinaison de deux matériaux distincts que l'on appelle généralement la matrice et le renfort, aux propriétés souvent complémentaires, qui associés possèdent des caractéristiques physiques complètement différentes de leurs composants.

La matrice a généralement pour rôle mécanique de fournir une certaine cohésion entre les différents éléments de renfort et ainsi joue le rôle de « ciment » en assurant un minimum d'homogénéité à l'ensemble. Dans la majorité des matériaux composites, les propriétés mécaniques sont essentiellement fournies par les renforts, de telle sorte que le taux de renfort dans la matrice ainsi que la qualité de l'interface renfort / matrice conditionnent directement les propriétés mécaniques du matériau composite.

I.3. Caractéristiques générales

Un matériau composite consiste dans le cas le plus général d'une ou plusieurs phase discontinues réparties dans une phase continue. Dans le cas de plusieurs phases discontinues de natures différentes, le composite est hybride. La phase discontinue est habituellement plus dure avec des propriétés mécaniques supérieures à celle de la phase continue. La phase continue appelée la matrice et la phase discontinue est appelée renfort

Les propriétés des matériaux composites résultent :

- ➢ Des propriétés des matériaux constituants.
- ➢ De leur distribution géométrique.
- ➢ De leurs interactions.

Ainsi pour accéder à la description d'un matériau composite, il sera nécessaire de spécifier :

- ➢ La nature des constituants et leurs propriétés.
- ➢ La géométrie du renfort, sa distribution.
- ➢ La nature de l'interface matrice-renfort.

La géométrie de renfort sera caractérisée par : sa forme, sa taille, la concentration du renfort, sa disposition, etc.

Tableau (I-1) : *Caractéristiques générales des composites*.

Type de composite	Constituante	Domaines d'application
1. Composites à matrice organique Papier, carton Panneaux de particules Panneaux de fibres Toiles enduites Matériaux d'étanchéité Pneumatiques Stratifiés Plastiques renforcés	Résine/charge/fibres cellulosiques Résine/copeaux de bois Résine/fibres de bois Résine souples/tissus Elastomères/bitume/textiles Caoutchouc /toile/acier Résine/charges/fibres de verre, Carbone, etc Résines/microsphères	Imprimerie, emballage, etc. Menuiserie Bâtiment Sports Toiture, terrasse, etc. Automobile Domaines multiples
2. Composites à matrice minérale Béton Composite carbone-carbone Composite céramique	Ciment /sable/granulats Carbone /fibres de carbone Céramique/fibres céramiques	Génie civil Aviation, espace, sports, bio-médecine, etc. Pièces thermomécaniques
3. Composites à matrice métallique	Aluminium/fibres de bore Aluminium/fibres de carbone	Espace
4. Sandwiches $\begin{cases} Peaux \\ Ames \end{cases}$	Métaux, stratifiés, etc. Mousses, nids d'abeilles, balsa, plastiques renforcés, etc	Domaines multiples

1.4. Classification des matériaux composites

La distinction entre les différents types de composites peut se faire selon les critères suivants :

1.4.1 Classification selon la forme des constituants

a) Composites à fibres

La matière renforçant se présente sous forme de fibres longues, courtes ou coupées, dont l'arrangement et l'orientation déterminent les propriétés mécaniques du matériau permettant une conception adaptée à l'application (conception à la carte) en agissant sur :

- ✓ La nature des constituants.
- ✓ La proportion de chaque constituant.
- ✓ L'orientation des fibres.

b) Composites à particules

Dans ce cas le renfort se présente sous forme de particules, qui sont utilisées pour l'amélioration de certaines propriétés mécaniques et physiques de la matrice (rigidité, tenue à la température, résistance à l'abrasion...) ou simplement pour diminuer le coût de production du matériau sans altérer ses caractéristiques.

1.4.2 Classification selon la nature des constituants

Selon la nature de la matrice et du renfort on rencontre plusieurs combinaisons possibles :

a) Composites à matrice organique

Résines et charges associées à :

- ✓ Des fibres minérales : verre, carbone.
- ✓ Des fibres organiques : kevlar, polyamides.
- ✓ Des fibres métalliques : bore, aluminium.

b) Composites à matrice métallique

Métaux légers et leurs alliages associés à :

- ✓ Des fibres minérales : carbone, carbure de silicium (SiC) .
- ✓ Des fibres métalliques : bore.
- ✓ Des fibres métallo-minérales : fibres de bore revêtues de SiC.

c) Composites à matrice minérale

Céramiques associées à :

- ✓ Des fibres métalliques : bore ;
- ✓ Des particules métalliques : cermets ;

- ✓ Des particules minérales : carburent, nitrures, etc.

1.4.3 Classification suivant performance et diffusion

a) Les composites grandes diffusions

De caractéristiques moyennes, ils sont orientés vers l'optimisation des coûts. Ils représentent 95% des composites utilisés et ont un domaine d'application très large : capotage, conserveries, décoration, etc.

b) Les composites hautes performances

Ils sont orientés vers l'optimisation des caractéristiques mécaniques et thermiques tout en diminuant le poids au maximum. Leurs coûts sont très élevés, ils sont réservés aux applications de pointe tel que l'aéronautique et l'espace, l'armement, le sport de haut niveau, etc.

I.5. Éléments constituants d'un matériau composite

Un matériau composite est constitué d'une matrice et d'un renfort, constitué de fibres. La matrice est elle-même composée d'une résine (polyester, époxyde, etc.) et de charge dont le but est améliorer les caractéristiques de la résine en diminuant le cout de production, d'un point vue mécanique, l'ensemble résine-charges se comporte comme un matériau homogène, et le composite est considéré comme constitué d'une matrice et d'un renfort. Le renfort apporte aux matériaux composite ses performances mécaniques élevées, alors quel matrice a pour rôle transmettre aux fibres les sollicitations mécaniques extérieurs et de protéger les fibres vis-à-vis des agressions extérieures.

I.5.1. Divers types de résines

Les résines utilisées dans les composites ont pour rôle de transférer les sollicitations mécaniques aux fibres et de les protéger de l'environnement extérieur. Les résines doivent donc être assez déformables et présent une bonne compatibilité avec les fibres. En outre, elles doivent avoir une masse volumique faible de manière à conserver aux matériaux composites des caractéristiques mécaniques spécifiques élevées.

I.5.1.a. Les résines thermodurcissables

Les principales résines thermodurcissables utilisées dans la mise en œuvre des

matériaux composites sont par ordre décroissant en tonnage :

- **Les résines polyesters**

Les résines polyesters insaturées viennent de très loin en tête dans la mise en œuvre des matériaux composites. Leur développement est le résultant :

- ✓ D'un faible coût de production.
- ✓ De leur diversité offrant de multiples possibilités.
- ✓ D'une adaptation à des procédés de fabrication faciles à mettre en œuvre et à automatiser.

Le tableau suivant illustre les diverses caractéristiques :

Tableau (I-2) : *Diverses caractéristiques de résines polyesters.*

Masse volumique	1200 kg/m^3
Module d'élasticité en traction	2.8 à 3.5 GPa
Module d'élasticité en flexion	3 à 4,5 GPa
Contrainte à la rupture en traction	50 à 80 MPa
Contrainte de rupture en flexion	90 à 130 MPa
Allongement à la rupture en traction	2 à 5 %
Allongement à la rupture en flexion	7 à 9 %
Résistance en compression	90 à 200 MPa
Résistance en cisaillement	10 à 20 MPa
Température de fléchissement sous charge 1,8 (MPa)	60 à 100 °C

Parmi les avantages des polyesters insaturés :

- ✓ Une bonne rigidité résultant d'un module d'élasticité assez élevé.
- ✓ Une bonne stabilité dimensionnelle.
- ✓ Une bonne mouillabilité des fibres et des tissus.
- ✓ La facilité de mise en œuvre.
- ✓ Une bonne tenue chimique.
- ✓ Un faible cout de production.
- ✓ Une bonne résistance chimique aux hydrocarbures.

Parmi les inconvénients, nous noterons :

- ✓ Une tenue médiocre en température : inférieur à 120°C en service continu.
- ✓ Une sensibilité à la fissuration, essentiellement dans les cas de chocs.

- ✓ Un mauvais comportement à la vapeur, à l'eau bouillante avec risque d'hydrolyse.
- ✓ Une dégradation à la lumière par les rayons ultraviolets.
- ✓ Une inflammabilité.

- **Les résines de condensation**

Les résines de condensation comportent les résines phénoliques, les aminoplastes et les résines furaniques.

- **Les résines phénoliques**

Sont les plus anciennes des résines thermodurcissables dont la plus connue est la bakélite.

Les caractéristiques de ces résines sont les suivants :

Tableau (I-3) : *Diverses caractéristiques des résines phénoliques.*

Masse volumique	1200 kg/m^3
Module d'élasticité en flexion	3 GPa
Contrainte à la rupture en traction	40 MPa
Allongement à la rupture en traction	2,5%
Contrainte à la rupture en flexion	90 MPa
Résistance à la compression	250 MPa
Température de fléchissement sous charge	120°C

Parmi les avantages, nous citerons :

- ✓ Une excellente stabilité dimensionnelle.
- ✓ Une bonne tenue à la chaleur et au fluage.
- ✓ Une bonne résistance aux agnats chimiques.
- ✓ Un faible retrait.
- ✓ De bonnes caractéristiques mécaniques.
- ✓ Un faible cout.

Parmi les inconvénients, nous noterons :

- ✓ Une mise en œuvre sous pression, donc à faible cadences.
- ✓ Les couleurs foncées des résines.
- ✓ Le non adaptation à des utilisations alimentaire.

- **Les caractéristiques des résines aminoplastes**

Sont voisines de celles des résines phénoliques. Aux avantages de ces résines, il faut ajouter :

- ✓ La possibilité d'utilisation alimentaire.

- ✓ La possibilité de colorer les résines.

- **Les résines puraniques**

Sont assez peu utilisées en Fran ce à couse de leur cout, trois fois plus élevé que les résine polyester. Parmi leurs avantages :

- ✓ Un durcissement plus rapide que les résines phénolique.
- ✓ Une grande inertie vis-à-vis des agnats chimique corrosifs.

Cette dernière caractéristique conduite à utiliser les résines furaniques dans le cas de matériaux devant résister aux produits chimiques : citernes, tuyaux, bacs.

- **Les résines époxydes**

Les résines les plus utilisées après les résines polyesters sont les résines époxydes. Elles ne repesent cependant que de l'ordre de 5% du marché composite, à cause de leur prix élevé.

Les caractéristiques mécaniques générales des résines époxydes sont les suivent :

Tableau (I-4) : *Diverses caractéristiques des résines époxydes.*

Masse volumique	1100 à 1500 kg/m^3
Module d'élasticité en traction	3à 5 GPa
Contrainte à la rupture en traction	60 à 80 MPa
Allongement à la rupture en traction	2 à 5%
Contrainte à la rupture en flexion	100 à 150 MPA
Résistance au cisaillement	30 à 50 MPa
Température de fléchissement sous charge	190°C

Parmi les avantages des résines époxydes, nous retiendrons :

- ✓ De bonnes propriétés mécaniques.
- ✓ Une bonne tenue aux températures élevés jusqu'à 150°C à 190°C en continue.
- ✓ Une excellente résistance chimique.
- ✓ Un faible retrait au moulage.
- ✓ Une bonne mouillabilité des renforts.
- ✓ Une excellente adhérence aux matériaux métalliques.

Parmi les inconvénients, sont :

- ✓ Un temps de polymérisation long.
- ✓ Un coût élevé.
- ✓ La nécessité de prendre des précautions lors de la mise en œuvre.
- ✓ Une sensibilité à la fissuration.

I.5.1.b. Les résines thermoplastiques :

La famille des résines thermoplastiques est très vaste, et peut être séparée en plastique de grande diffusion et plastique techniques :

Les plastiques de grande diffusion sont mis en œuvre soit par injection pour obtenir des objets moulés, soit par extraction pour obtenir des films, des plaques, des tubes, etc. Les plastiques techniques sont mis en œuvre par injection.

Parmi les résines thermoplastiques nous citerons : le polychlorure de vinyle, le polyéthylène, le polypropylène, polyamide.

Les caractéristiques de polypropylène et polyamide :

Tableau I-5 : *Diverses caractéristiques des résines thermoplastiques.*

	polypropylène	polyamide
Masse volumique (kg/m^3)	900	1140
Contrainte à la rupture (MPa)	20-35	60-85
Module d'élasticité (GPa)	1.1-1.4	1.2-2.5
Température de fléchissent sous charge (°C)	50-60	65-100

I.5.1.c. Les résines thermostables

Les résines thermostables sont développées surtout dans les domaines de l'aviation et de l'espace, ou les laboratoires cherchent à mettre au point de nouvelles résines. Parmi les résines thermostables, nous donnons quelques éléments sur les résines bismaléimides et poly imides.

- **Les résines bismaléimides**

Les résines bismaléimides sont des résines dont le réseau se constitue par addition, sans produits de réaction, vers 180 à 200°C. L'application principal des composites à résines bismaléimides est moins la réalisation de matériaux de structures que leur emploi comme support dans les circuits imprimés.

- **Les résines poly imides**

Les poly imides sont des résines à haute résistance thermique, mais de prix très élevés. Ces résine permettent d'obtenir des composites de résistance supérieure, à 250°C, à la résistance de l'aluminium.

I.5.2. Charges et les additifs

Différents produits peuvent être incorporés pour lui conférer des caractéristiques particulières ou en réduire le cout. La quantité des produits ajoutés peut varier de :

- ✓ Quelque dizaines de % dans le cas de charges.
- ✓ A quelques % et mois dans le cas d'additifs.

L'addition de ces produits a pour fonction soit d'améliorer les caractéristiques mécaniques et physiques du produit fini. Soit d'en facilité de mise en œuvre.

1.6. Les fibres et tissu

1.6.1. Formes linéiques

Les fibres sont élaborées en filaments unitaires de 5 à 15 µm de diamètre, appelés monofilaments. Ces filaments sont ensuite réunis en fils ou en mèches pour faciliter leur utilisation. Les fils continus ou discontinus sont caractérisés par leur masse linéique dont l'unité est le tex qui représente la masse en gramme d'un fil de 1 Km de longueur, soit :

1 tex = 1g/km ou 1 tex = 10-6 kg/m

L'utilisation directe des formes linéiques pour la mise en œuvre de composites est limitée à quelques procédés particuliers tels que l'enroulement filamentaire et la pultrusion.

1.6.2. Fibres de formes surfaciques

Les fils sont transformés par les techniques de l'industrie papetière et de tissage pour réaliser des formes surfaciques : mats, tissus ou rubans, qui facilitent la manipulation et la mise en œuvre des renforts**.**

a) Les mats

Se sont des nappes de fils continus ou discontinus dispersés dans un plan et assemblés par un liant soluble ou non dans la résine, l'absence d'orientations préférentielles des fibres conduit à un comportement isotrope du mat dans son plan. Les mats de fils coupés, plus déformables, permettent d'obtenir des formes embouties. Les mats de fils continus sont utilisés pour réaliser des formes complexes par moulage.

b) Les tissus et rubans

Un tissu (ou ruban) est un ensemble surfacique de fils, mèches, etc., réalisé sur un métier à tisser. L'ensemble est maintenu par l'entrecroisement des fils suivant deux directions (figure I.1).

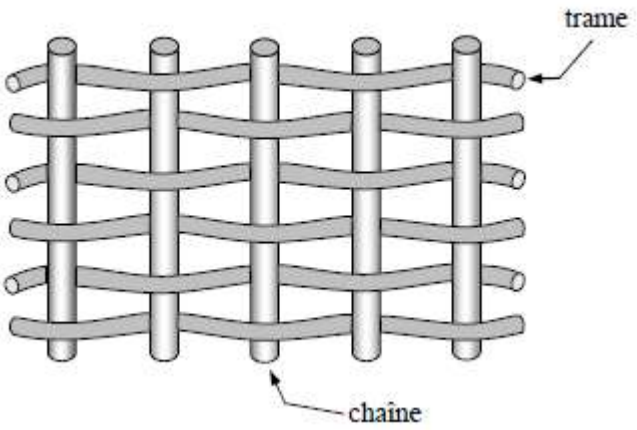


Figure (I.1). *Chaine et trame d'un tissu*

- ✓ Une direction chaîne, ensemble de fils parallèles répartis dans un plan suivant la longueur du tissu.
- ✓ Une direction trame, ensemble de fils s'entrecroisant avec les fils de chaîne.

Les tissus diffèrent par le type de fils utilisés, donc par la masse linéique du fils,et par le mode d'entrecroisement (ou armure) des fils de chaîne et des fils de trame. Les armures classiques utilisées sont : toile (ou taffetas), satin, sergé, armure haut module, armure unidirectionnelle. Ces deux dernières donnent les meilleures performances (l'absence d'entrecroisement supprime les effets d'ondulation et de cisaillement des fils). Les mats et tissus sont caractérisés par leur masse surfacique en gramme/m^2.

1.6.3. Structures tissées unidirectionnel

a) Tresses et préformes

Des tissus tabulaires (tresses ou préformes) peuvent être obtenus par tissage cylindrique ou conique : les fils s'entrecroisent en hélice, dont la variation de pas permet d'ajuster la tresse à la forme qu'elle doit couvrir. On peut ainsi réaliser une pièce de révolution

ayant un diamètre variable le long de son arc, ce qui permet d'obtenir divers tissus en forme de « chaussettes » coniques, ogivales ou hémisphériques. Ces tissus sont utilisés dans les constructions aéronautiques (cône de rentrée, tuyères, etc.).

b) Tissus multidirectionnels

Des tissages volumiques sont également utilisés. Ils se caractérisent par le nombre de directions de tissage 3D et 4D. La structure la plus simple est celle du tissage 3D où les fils sont disposés suivant trois directions orthogonales.

1.6.4. Les principales fibres

1.6.4.1 Les fibres de verre

Le comportement du verre dans sa forme massive est dominé par son caractère fragile. En revanche, lorsqu'il est élaboré sous forme de fibres de très faibles diamètres, il devient tenace et révèle de bonnes caractéristiques mécaniques. Les fibres sont obtenues à partir du verre textile composé d'un mélange d'oxydes : silice, alumine, chaux, magnésie, et oxyde de bore. Les proportions du mélange, et l'ajout d'oxydes modificateurs donnent au matériau final ses propriétés spécifiques. Différents types de verre peuvent être distingués :

- ✓ Le verre E à usage général, bonnes propriétés électriques.
- ✓ Le verre D à hautes propriétés diélectriques, utilisé pour la construction de matériel de télécommunications.
- ✓ Le verre C résistant aux agents chimiques, enrobage des structures sévèrement exposées.
- ✓ Les verres R et S à caractéristiques mécaniques élevées, utilisés pour la réalisation de structures de hautes performances mécaniques.

a) Elaboration des fibres de verre

Les fibres de verre sont produites par étirement à grande vitesse et refroidissement de filaments obtenus par l'écoulement du verre en fusion à travers les orifices calibrés d'une filière. Les filaments sont aussitôt enduits d'un agent d'ensimage qui a pour rôles essentiels de protéger les filaments contre l'abrasion, de faciliter par la suite leur imprégnation par la résine et d'améliorer leur liaison avec cette dernière.

Deux procédés d'étirage peuvent être utilisés :

- Etirage mécanique donnant des fibres continues assemblées en fils de base silionne.
- Etirage pneumatique donnant des fibres discontinues assemblées en ruban verranne.

b) Caractéristiques mécaniques des fibres de verre

Les valeurs de référence pour les caractéristiques mécaniques des fibres de verre sont celles mesurées sur des monofilaments prélevés à la sortie de la filière. Le tableau (I.6) donne les valeurs usuelles de ces grandeurs. Cependant, les valeurs les plus représentatives, et en particulier pour les caractéristiques à la rupture des fibres (tableau I.7), sont celles déduites des caractéristiques mesurées sur un composite unidirectionnel où la liaison verre-résine favorise une répartition assez homogène de la charge entre les filaments dont les caractéristiques sont diminuées par les différentes sollicitations mécaniques et chimiques subies lors des opérations de transformation en fils industriels.

Tableau I.6 : *Caractéristiques mécaniques des verres type E et R mesurées sur monofilaments à la sortie de la filière [1]*

Caractéristiques			Verre E	Verre R
Masse volumique	ρ	kg/m^3	2600	2550
Module de Young	E_f	GPa	73	86
Contrainte à la rupture	σ_{fu}	MPa	340	4400
Allongement à la rupture	ε_{fu}	%	4.4	5.2
Coefficient de Poisson	ν_f		0.22	—

Tableau (I.7) : *Caractéristiques à la rupture d'un fil silionne industriel déduites des caractéristiques mesurées sur un composite unidirectionnel verre/époxyde [1]*

	Verre E	Verre R
Contrainte à la rupture (Mpa)	2400-2600	3000-3600
Allongement à la rupture	3.4	4

En plus de leurs bonnes caractéristiques mécaniques, les fibres de verre ont aussi une bonne tenue thermique, elles conservent ces caractéristiques jusqu'à des températures assez élevées 200 °C pour le verre E et 250 °C pour le verre R.

1.6.4.2 Les fibres de carbone

La mise en œuvre des fibres de carbone est motivée par les caractéristiques spécifiques remarquablement élevées que prévoit la théorie pour la structure cristalline hexagonale du graphite. Les fortes liaisons entre atomes voisins d'un même plan cristallographique donnent un module de Young de l'ordre de 1200 GPa et une contrainte à la rupture de 20000 MPa dans les directions parallèles aux plans cristallographiques, pour une masse volumique inférieure à 2000 kg/m^3. Malgré les imperfections des cristaux obtenus par les procédés industriels, l'élaboration de fibres d'axes parallèles aux plans cristallographiques permet d'obtenir des fibres parmi les plus performantes (650 GPa pour le module de Young et 4000 MPa pour la contrainte à la rupture).

a) Elaboration des fibres de carbone

Les fibres de carbone sont élaborées par décomposition thermique sans fusion d'un polymère *précurseur* fibres ou fils. Trois opérations successives sont nécessaires : oxydation, carbonisation sous gaz inerte et graphitisation. Le *précurseur* peut être :

- **Des fibres acryliques**

Des mèches de filaments acryliques, obtenus à partir du poly acrylonitrile (PAN), sont traitées thermiquement. Après carbonisation les fibres de carbone obtenues ont une haute résistance (fibres HR). Une transformation supplémentaire par graphitisation permet d'obtenir des fibres à haut module de Young (HM) ou très haut module (THM). Les deux types de fibres HR et HM, subissent un traitement de surface (ensimage) pour amélioration de la liaison fibre-résine.

- **Le brai**

Le fil obtenu à partir du brai (résidu pâteux de la distillation du charbon ou du pétrole) donne après traitement un carbone de haut module, mais de caractéristiques légèrement plus faibles que celles des fibres (HM) obtenues par le procédé (PAN).

b) Caractéristiques mécaniques des fibres de carbone

Sur le tableau 1.6 est reportée une comparaison des caractéristiques des fibres de carbone et des fibres de verre E. Les fibres de carbone se distinguent en plus par une excellente tenue à la température, jusqu'à 1500 °C environ, d'où le développement de composites à fibres de carbone et matrice de carbone à haute tenue thermique utilisés dans les tuyères, les disques de freins, etc.

Tableau (I.8) : *Caractéristiques des fibres de carbone et du verre E*

Caractéristiques			**Verre E**	**Carbone HR**	**Carbone HM**	**Carbone THM**	**Carbone HM (brai)**
Masse volumique	ρ	(kg/m^3)	2600	1750	1810	1950	2000
Diameter		(μm)		8	8	8	12
Module de Young	E_f	(Gpa)	73	220	400	600	380
Module spécifique	$E_{f/\rho}$	(MN m/kg)	28	120	210	310	190
Contrainte à la rupture	σ_{fu}	(Mpa)	3400	3000-3500	2800	2000	2000-2400
Contrainte spécifique	σ_{fu}	(kN m/kg)	1300	1710-2800	1550	1030	1000-1200
Prix de revient / aux fibres de verre			1	25-30	50-60	65-70	25-30

1.6.4.3 Les fibres aramides à caractéristiques mécaniques élevées

Les fibres aramides à caractéristiques mécaniques élevées sont des fibres de synthèse plus connues sous la désignation commerciale de fibres de « Kevlar », lancée par Dupont de Nemours (USA) depuis 1972. D'autres industriels commercialisent également ces fibres sous des désignations propres à chacun (Twaron, Technora, etc.). Elles sont élaborées par filage d'une solution sulfurique concentrée d'un haut polymère, polyaramide ou polyamide. Les fibres sont ensuite étirées et traitées thermiquement pour augmenter leur module d'élasticité.

a) Caractéristiques mécaniques des fibres aramides

Le tableau I.9 résume les caractéristiques de différents types de fibres aramides, mesurées sur monofilaments. Les valeurs de contrainte à la rupture de ces fibres sont proches de celles des fibres de carbone HR, pour un prix de revient 3 à 5 fois moindre. Des ensimages adaptés sont développés pour améliorer l'adhérence fibre-résine. Les fibres de Kevlar sont associées à d'autres fibres (verre, carbone) pour former des composites hybrides.

Tableau I.9 : *Caractéristiques mécaniques de différents types de monofilaments aramides*

Caractéristiques			**Kevlar 29**	**Kevlar 49**	**Kevlar 149**	**Twaron**	**Technora**
Masse volumique	ρ	(kg/m^3)	1440	1450	1470	1440	1390
Diamètre		(μm)	12	12	12	12	12
Module de Young	E_f	(Gpa)	60	130	200	100	90
Module spécifique	$E_{f/\rho}$	(MNm/kg)	42	90	136	70	65
Contrainte à la rupture	σ_{fu}	(Mpa)	3000	3600	3000	3500	38000
Contrainte spécifique	$\sigma_{fu/\rho}$	(kNm/kg)	2080	2480	2040	2430	2730
Allongement à la rupture		(%)	4	3	1.5	3	4

b) Domaines d'utilisation

L'une des premières utilisations des fibres d'aramides a été le remplacement des armatures d'acier dans les pneumatiques. En raison de leur légèreté et de leur résistance au choc et à l'impact, leur usage s'est développé dans la fabrication de protections contre projectiles (blindages, gilets pare-balles.., etc.), ainsi que dans certains articles de sports (skis, raquettes de tennis.., etc.).

1.6.4.4 Les fibres céramiques

Le principal intérêt des céramiques est leur caractère réfractaire. Diverses fibres sont obtenues par dépôt chimique en phase vapeur d'un revêtement céramique :
de bore (fibres de bore B), de bore-carbure de bore (fibres B-B4C), de silicium (fibres de silicium) ou de bore-silicium (fibres BorSic), sur un fil support en tungstène ou en carbone

a) Caractéristiques mécaniques et utilisation

Les différentes fibres céramiques ont des caractéristiques assez voisines (tableau 1.10). Ces caractéristiques restent maintenues jusqu'à des températures allant de 500 à 1000 °C. Les fibres SiC et BorSic sont utilisées avec des matrices métalliques ou céramiques pour la fabrication des aubes de compresseurs et de turbines. Les fibres de bore et de bore-carbure de bore associées aux résines thermoplastiques et thermodurcissables, notamment époxydes, sont utilisées dans les domaines des sports et loisirs.

Tableau I.10 : *Caractéristiques mécaniques de quelques fibres céramiques*

Caractéristiques			**Bore**	**Bore + B4C**	**SiC**
Masse volumique	ρ	(kg/m^3)	2600	2600	3000
Diamètre		(μm)	100-150	100-150	100-150
Module de Young	E_f	(Gpa)	430	430	410
Module spécifique	E_f/ρ	(MN	165	165	140
m/kg)			3800	400	3900
Contrainte à la	σ_{fu}	(Mpa)			
rupture			1460	1540	1300
Contrainte spécifique	σ_{fu}/ρ	(kNm/kg)			

1.6.4.5 Les fibres synthétiques thermostables

Les fibres synthétiques thermostables sont des fibres organiques obtenues par synthèse. Leurs caractéristiques mécaniques sont faibles mais restent conservées aux températures élevées.

Elles sont associées à des résines thermostables pour obtenir des matériaux composites de bonne tenue thermique, utilisés dans les isolants électriques et thermiques, les protections thermiques : boucliers de missiles et cônes de rentrée de véhicule spatial. Chaque fabricant propose sa propre formule sous une désignation commerciale.

Tableau I.11 : *résume les caractéristiques mécaniques de quelques unes d'entre elles.*

Caractéristiques			**Kermel**	**Nomex**	**Kynol**	**PBI**	**Apyeil**
Masse volumique	ρ	(kg/m3)	1350	1380	1270	1430	1380
Module de Young	E_f	(Gpa)	7	16	4.5	6	17
Contrainte à la rupture		(Mpa)	470	670	280	500	660
Allongement à la rupture	ε_{fu}	**%**	20	45	20-60	30	40

1.6.4.6 Autres fibres

Il existe d'autres fibres utilisées pour des applications particulières. Ces fibres sont généralement à faibles module et contrainte à la rupture, excepté les fibres métalliques, et dont l'utilisation est réservée à la recherche de :

- ✓ produits à bas prix de revient.
- ✓ produits à haute isolation thermique.
- ✓ produits de bonne conductivité thermique ou électrique.

Parmi ces fibres nous avons :

a) les fibres d'origine végétale

- ✓ Le bois, utilisé sous forme de fibres orientées, feutres, papiers imprégnés, etc.
- ✓ Le sisal, le jute, le lin, de moins en moins utilisés au profit des fibres de verre.

b) les fibres d'origine minérale

- ✓ l'amiante (interdite dans certaines utilisations).
- ✓ la silice.

c) les fibres synthétiques

- ✓ fibres polyester (tergal, dacron, térylène, etc.).
- ✓ fibres polyamides.

d) les fibres métalliques

- ✓ acier.
- ✓ cuivre.
- ✓ aluminium.

Ces fibres sont utilisées avec des matrices métalliques afin d'obtenir des composites:

- ✓ de bonne conductivité thermique et électrique.
- ✓ de caractéristiques thermomécaniques élevées.

1.7 Les stratifiés composites

Les stratifiés sont des composites formés par un empilement de couches successives de renfort-matrice appelées plis ou encore monocouches constituant l'élément de base de toute structure composite. Les plis sont caractérisés par la forme du renfort (mat, fils, stratifié, tissu,..., etc.) qui détermine leur comportement mécanique, une répartition aléatoire de fibres courtes ou longues (mat par exemple) correspond à une couche pratiquement isotrope dans son plan, une orientation privilégiée des fibres correspond à une anisotropie marquée.

Les couches peuvent être de natures différentes en matière des fibres et forme du renfort. Ces deux paramètres, en plus de l'empilement et de l'orientation, permettent de moduler les caractéristiques du stratifié pour répondre au mieux aux sollicitations imposées.

La désignation d'un stratifié doit tenir compte de tous ces paramètres. Elle se fait généralement selon un code établi pour les stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels auxquels peut se ramener l'étude de tout autre type de stratifiés (figure I.2).

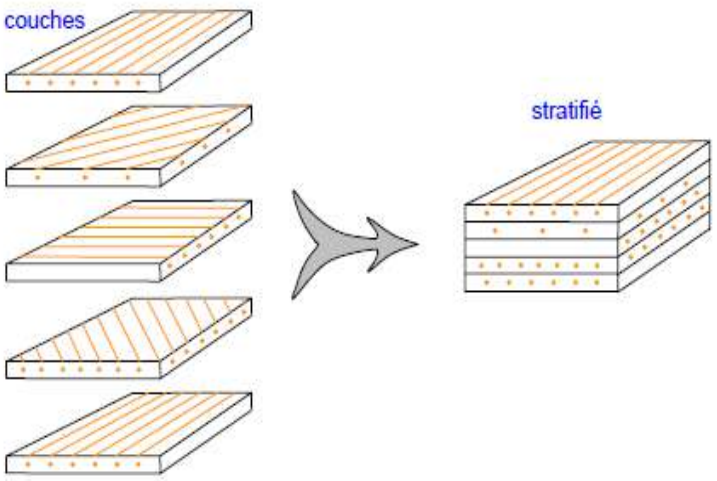


Figure (I.2). *Modèle de base des stratifiés*

1.7.1 Désignation des stratifiés à base de fils ou de tissus unidirectionnels

Les règles de désignation d'un stratifié sont les suivantes :

- Chaque couche est désignée par la valeur de son angle d'orientation (angle d'orientation des fibres en degrés par rapport à l'axe x de référence). Le sens de l'orientation est pris en compte (positif ou négatif), la désignation dépend donc du référentiel choisi (figure I.3).
- Les couches successives d'angles différents sont séparées par un / si leurs anglais sont différence.
- Les couches successives de même orientation sont désignées par un indice numérique indiquant le nombre de couches dans cette direction.
- Si deux couches successives ont des orientations de même valeurs et de sens opposés, elles peuvent être désignées par le signe ± :

  $+\theta / -\theta = \pm\theta$ $\quad\quad$ $-\theta / +\theta = \pm\theta$

- La désignation se fait couche par couche en allant d'une face à l'autre, des crochets indiquant le début et la fin.

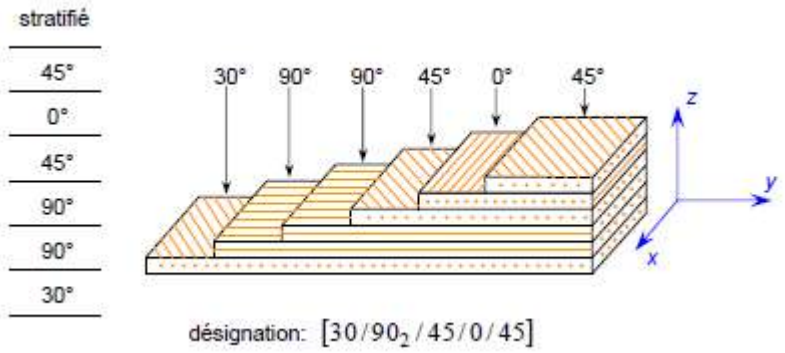


Figure (I.3). *Exemple de désignation d'un stratifié*

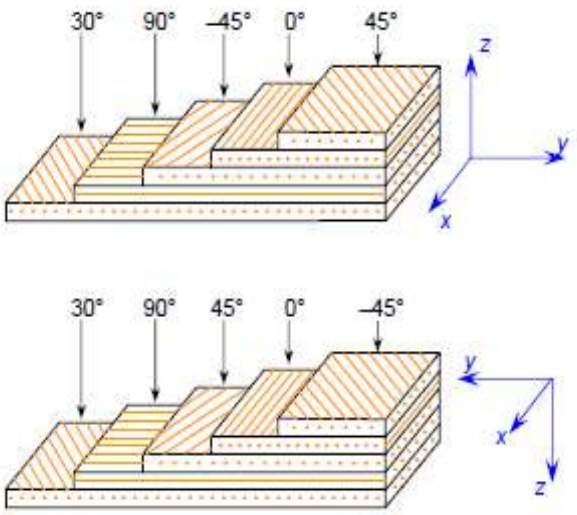


Figure (I.4). *Convention de sigue pour la désignation des stratifiés*

I.8. Conclusion

Ce chapitre, a fait une présentation des notions liées aux matériaux composites, dans le but de donner une vision assez large des différents constituants d'un matériau composite et ses caractéristiques mécaniques.

Chapitre II

COMPORTEMENT EN FLEXION DES PLAQUES STRATIFIEES

CHAPITRE 2

COMPORTEMENT EN FLEXION DES PLAQUES STRATIFIEES

2.1. DESCRIPTION DU PROBLEME

Dans ce travail nous allons étudie le phénomène de flexion des plaques stratifiées, il s'agit d'une plaque stratifiée de longueur '*a*', de largeur '*b*' et d'épaisseur '*h*'. La théorie utilisée est celle de Reissner-Mindlin et Stavsky [4]. C'est une extension de la théorie de Mindlin aux plaques composites qui tien compte de l'effet des déformations en cisaillement transverse. La relation contraintes–déformations diffère de celle des plaques homogènes du fait de l'existence de couplage entre les déformations planes et celles en courbures.

2.1.1. Hypothèses simplificatrices

Pour une formulation simple du modèle mathématique, nous allons considérer quelques approximations :

1. Les contraintes normales à la surface moyenne sont négligeables par rapport aux autres contraintes. $\sigma_z \approx 0$
2. La normale à la surface moyenne avant déformation reste droite mais pas nécessairement normale à la surface moyenne après déformation. Ceci revient à la prise en compte de cisaillement transverse.
3. Les déplacements sont très petits par rapport à l'épaisseur de la plaque.
4. Les différentes couches composites restent parfaitement collées.

2.2. LOI DES MELANGES

Pour déterminer les caractéristiques mécaniques d'un composite, nous étudions un assemblage de géométrie donné de deux phases (fibre et matrice) de caractéristiques mécaniques différentes, soumis à des sollicitations simples.

2.2.1. Module d'élasticité longitudinale

Considérons un chargement ***F*** parallèle au plan de séparation de la fibre et de la matrice. Les deux matériaux étant considérés parfaitement collés par hypothèse, la matrice (m) et la fibre (f) possèdent la même déformation longitudinale e_L que le matériau composite:

$$\varepsilon_{Lm} = \varepsilon_{Lf} = \varepsilon_L \tag{2.1}$$

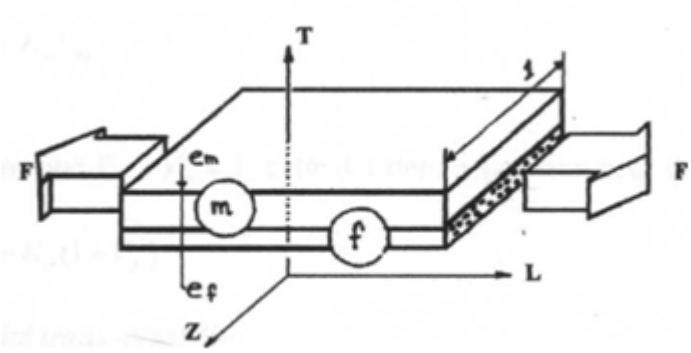


Figure.2.1.*Chargement longitudinal*

L'état de contrainte dans chaque matériau est un état de traction pure, et les contraintes de traction sont données par:

$\sigma_m = E_m \varepsilon_L$ dans la matrice.

$\sigma_f = E_f \varepsilon_L$ dans la fibre.

La charge totale appliquée est:

$$F = \sigma_f S_f + \sigma_m S_m \tag{2.2}$$

En reportant les expressions des contraintes dans (2.1), on obtient:

$$F = (E_f S_f + E_m S_m)\varepsilon_L \tag{2.3}$$

Les contraintes de traction dans le composite est définie par:

$$\sigma_L = F/S = E_L \varepsilon_L \tag{2.4}$$

En injecte l'expression (2.2) dans cette dernière relation on trouve:

$$E_L = E_f S_f/S + E_m S_m/S \tag{2.5}$$

Avec: $S = S_f + S_m$

Pour un composite de largeur et de longueur égales à l'unité, les fractions volumiques de la fibre (V_f) **,** et de la matrice (V_m) sont données par:

$$V_f = \frac{S_f \times 1}{S} = \frac{e_f}{e_f + e_m} \tag{2.6}$$

$$V_m = \frac{S_m \times 1}{S} = \frac{e_m}{e_f + e_m} \tag{2.7}$$

La combinaison des relations (2.5), (2.6) et (2.4) conduit à l'expression du module d'Young longitudinal:

$$E_L = E_f V_f + E_m (1 - V_f) \tag{2.8}$$

2.2.2. Module d'élasticité transversale

Le module d'Young transversal est déterminé par un essai de traction transversale ou le stratifié est chargé suivant la direction normale aux fibres.

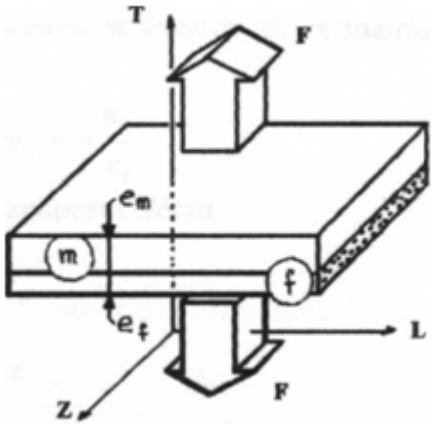


Figure.2.2.*chargemant transversal*

Dans ce cas les états de contrainte dans la fibre et dans la matrice sont identiques, et sont définies par la contrainte de traction dans le composite σ_T , tel que:

$$\sigma_T = \sigma_f = \sigma_m \tag{2.9}$$

Et la déformation transversale s'écrit :

$$\varepsilon_T = \frac{1}{E_m}\sigma_T = \frac{\Delta(e_m + e_f)}{e_m + e_f} = \frac{\Delta e_m}{e_m + e_f} + \frac{\Delta e_f}{e_m + e_f} = \varepsilon_{Tm} V_m + \varepsilon_{Tf} V_f \tag{2.10}$$

Cette déformation est liée à la contrainte σ_T par la relation

$$\sigma_T = E_T \varepsilon_T \tag{2.11}$$

La combinaison des relations (2.11) et (2.10) conduit à l'expression du module d'Young transversal:

$$\frac{1}{E_T} = \frac{V_m}{E_m} + \frac{V_f}{E_f} \tag{2.12}$$

Cette expression peut être réécrite suivant une relation sans dimension sous la forme:

$$\frac{E_T}{E_m} = \frac{1}{1+(\frac{E_m}{E_f}-1)V_f} \tag{2.13}$$

2.2.3. Coefficient de poisson

Le coefficient de Poisson ν_{LT} est défini comme étant le rapport entre des déformations transversales et les déformations longitudinales, pour un chargement longitudinal

$$\nu_{LT} = -\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_L} \tag{2.14}$$

En remplaçant la déformation transversale (ε_T) par son expression (2.10), nous obtenons **:**

$$\nu_{LT} = \frac{\varepsilon_{Tm}V_m + \varepsilon_{Tf}V_f}{\varepsilon_L} \tag{2.15}$$

Et en introduisant les coefficients de Poisson de la matrice et de la fibre pour la même déformation ($\varepsilon_{Lm} = \varepsilon_{Lf} = \varepsilon_L$).

$$\nu_m = \frac{\varepsilon_{Tm}}{\varepsilon_L} \quad \text{et} \quad \nu_f = \frac{\varepsilon_{Tf}}{\varepsilon_L} \tag{2.16}$$

Le coefficient de Poisson du composite s'écrit:

$$\nu_{LT} = \nu_m(1-\nu_f) + \nu_f V_f \tag{2.17}$$

2.2.4. Module de cisaillement

Le module de cisaillement G_{LT} est déterminé par un essai de cisaillement longitudinal. Les contraintes en cisaillement dans la fibre et dans la matrice sont égales:

$$\tau_{LTm} = \tau_{LTf} = \tau_{LT} \tag{2.18}$$

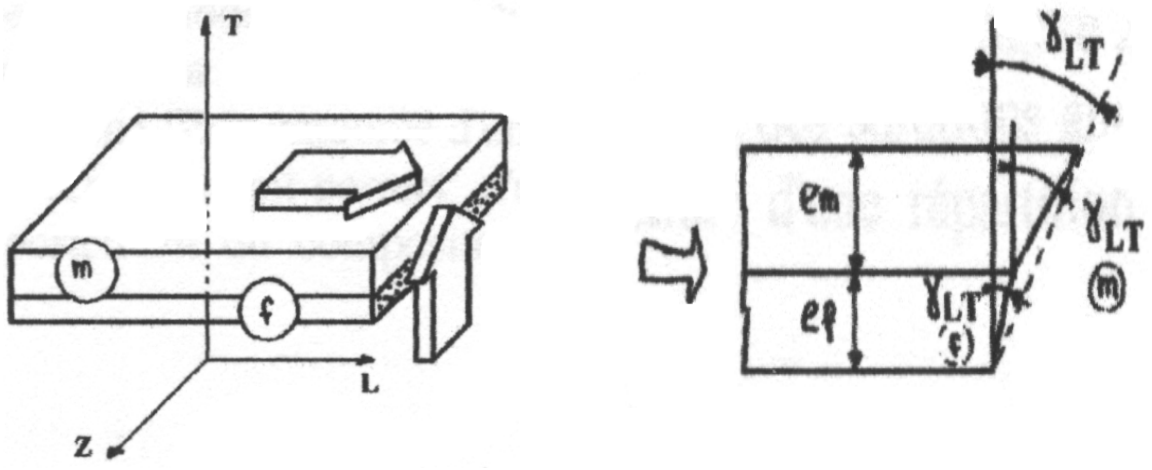


Figure.2.3. *Changement donnant le cisaillement*

La déformation angulaire (γ_{LT}) dans un matériau élastique est reliée à la contrainte de cisaillement par le module de cisaillement (G_{LT}) selon l'expression:

$$\gamma_{LT} = \frac{2(1+\nu_{LT})}{E_L}\tau_{LT} = \frac{\tau_{LT}}{G_{LT}} \tag{2.19}$$

D'autre part on observe sur la figure.2.3. que:

$$\gamma_{LT} \times (e_m + e_f) = \gamma_{LTm} \times e_m + \gamma_{LTf} \times e_f \tag{2.20}$$

Ce qui revient à écrire:

$$\gamma_{LT} = \gamma_{LTm} V_m + \gamma_{LTf} V_f \tag{2.21}$$

Finalement, en tenant compte de l'égalité des contraintes, le module de cisaillement du composite prend la forme:

$$G_{LT} = G_m \frac{1}{(1-V_f) + \frac{G_m}{G_f} V_f} \tag{2.22}$$

2.3. CHAMPS DES DEPLACEMENTS

Considérons une plaque stratifiée rectangulaire constituée de *n* couches de même matériau et d'orientations des fibres différentes. On définit un système de référence *(x,y,z)* situé sur la surface moyenne de la plaque dont l'axe *z* correspond à la direction suivant l'épaisseur. Les caractéristiques géométriques de la plaque sont indiquées sur la figure.2.4.

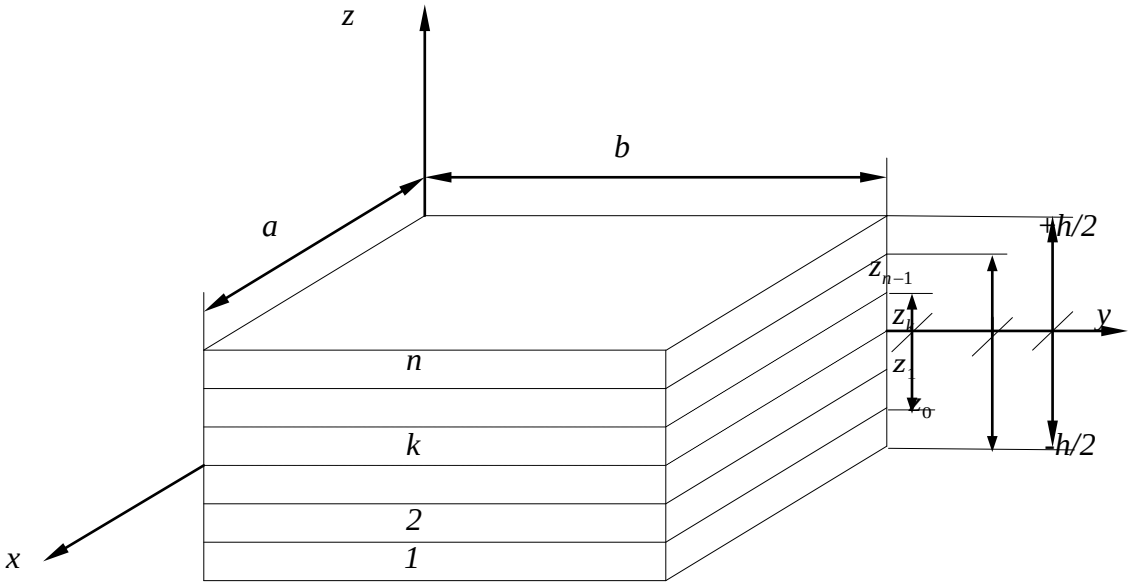


Figure.2.4. *Schéma d'une plaque stratifiée*

Le champ des déplacements d'un point quelconque *M*(*x,y,z*) de la plaque en présence du cisaillement transverse est approché par un polynôme linéaire en *z* à coefficients en (*x,y*) de la forme [2] :

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= u_0(x,y,t) + z\theta_x(x,y,t) \\ v(x,y,z,t) &= v_0(x,y,t) + z\theta_y(x,y,t) \\ w(x,y,z,t) &= w_0(x,y,t) \end{aligned} \tag{2.23}$$

où :

u, v, w Sont respectivement, les déplacements suivant les directions *x, y, z.*

u_0, v_0, w_0 Sont respectivement, les déplacements suivant les directions *x, y, z.* d'un point situé sur la surface moyenne de la plaque.

θ_x, θ_y Sont respectivement, les rotations de la normale à la surface moyenne autour des axes *x, y.*

Cette forme répond aux conditions de compatibilité des déformations [voir Annexe 1] et permet de prendre en compte le couplage entre les déformations planes et de courbures.

2.4. CHAMPS DES DEFORMATIONS

Le champ des déformations se déduit du champ des déplacements (2.23) et s'écrit :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_{x0} + z\kappa_x \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_{y0} + z\kappa_y \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = \gamma_{xy0} + z\kappa_{xy} \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \\
\gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Avec :

$$\varepsilon_{x0} = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \qquad \varepsilon_{y0} = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \qquad \gamma_{xy0} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}$$

$$\kappa_x = \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \qquad \kappa_y = \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, \qquad \kappa_{xy} = \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x}$$

2.5. RELATION CONTRAINTES-DEFORMATIONS

La loi de Hooke généralisée permet, pour une plaque composite stratifiée, d'écrire la relation entre les contraintes et les déformations. Il est nécessaire d'exprimer cette relation pour chaque pli *k* à cause de la discontinuité des contraintes interlaminaires. Par souci de simplification, on définit un système d'axes principal (local) (*1*,*2*,*3*) dont l'axe (*1*) correspond à la direction longitudinale des fibres (*Figure.2.5*).

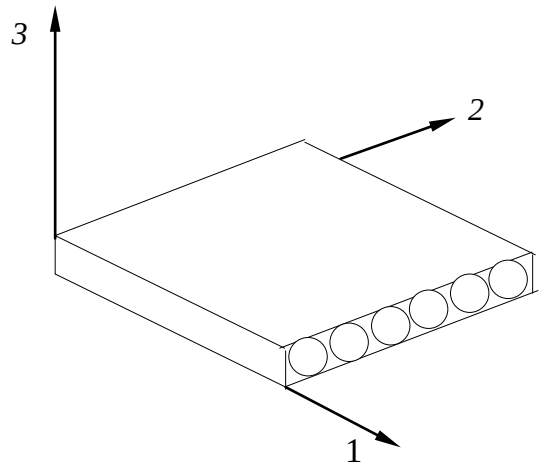


Figure.2.5. *Directions principales dans un pli*

La relation contraintes–déformations par rapport à ce système d'axe s'écrit [33] :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & Q_{33} & 0 & 0 \\ & sym & & Q_{44} & 0 \\ & & & & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix}^k \tag{2.25}$$

où :

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad , \quad Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \quad , \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$$
$$Q_{33} = G_{12} \quad , \quad Q_{44} = G_{23} \quad , \quad Q_{55} = G_{13}$$

Avec :

E_1 : Module d'Young longitudinal.

E_2 : Module d'Young transversal.

G_{12} : Module de cisaillement longitudinal.

G_{13}, G_{23} : Modules de cisaillement transversal.

ν_{12} , ν_{21} : Coefficients de Poisson.

La relation (2.25) peut s'écrire sous la forme condensée suivante :

$$\{\sigma\}_{123}^{k} = [Q]\{\varepsilon\}_{123}^{k} \tag{2.26}$$

Généralement, dans un stratifié, la direction des fibres est décalée d'un pli à un autre. Pour faire l'étude du comportement élastique de l'ensemble du stratifié, il est nécessaire d'exprimer la relation (2.25) par rapport au système d'axes global (*x,y,z*), cette opération est effectuée en faisant intervenir les matrices de changement de base des contraintes et des déformations [voir Annexe 2].

Soit donc pour le champ des contraintes :

$$\{\sigma\}_{xyz}^{k} = [T]\{\sigma\}_{123}^{k} \tag{2.27}$$

Où [*T*] est la matrice de changement de base des contraintes, elle est donnée par l'expression suivante :

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & -\cos\theta\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & \cos\theta\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2\cos\theta\sin\theta & -2\cos\theta\sin\theta & 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

θ : est l'angle que font le repère (*1,2)* et le repère (*x,y).*

L'expression du champ des déformations par rapport au repère (*x*,*y*,*z*) s'écrit :

$$\{\varepsilon\}_{xyz}^{k} = [T']\{\varepsilon\}_{123}^{k} \tag{2.29}$$

Où [*T'*] est la matrice de changement de base des déformations, elle est donnée par l'expression suivante :

$$[T'] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & -2\cos\theta\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 2\cos\theta\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos\theta\sin\theta & -\cos\theta\sin\theta & 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

Il est a noté que le changement de base est effectué en faisant une rotation -θ autour de la direction *3* (*Figure2.6*).

Nota: la différence entre les expressions de changement de base des contraintes et déformation résulte de l'introduction d'un facteur 2, en fonction des résultats obtenus, nous pouvons écrire:

$$T_{\varepsilon} = (T_{\sigma}^{-1})^{t}, \quad T_{\varepsilon}^{-1} = T_{\sigma}^{t} \tag{2.31}$$

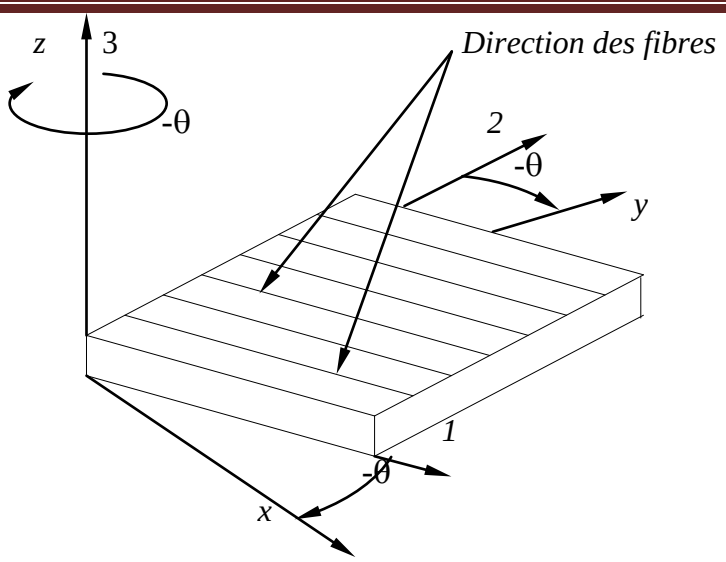


Figure.2.6. *Changement du repère dans un pli*

Par substitution de (2.27) et (2.29) dans (2.26), la relation contraintes–déformations devient :

$$\{\sigma\}_{xyz}^{k} = [\overline{Q}]\{\varepsilon\}_{xyz}^{k} \tag{2.32}$$

où $[\overline{Q}]$ est la matrice de rigidité du pli *k* exprimée dans le repère du stratifié (*x*, *y*, *z*) :

$$[\overline{Q}] = [T]^{-1}[Q][T'] \tag{2.33}$$

La relation (2.32) s'écrit sous la forme développée suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{k} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} & 0 & 0 \\ & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} & 0 & 0 \\ & & \overline{Q}_{66} & 0 & 0 \\ & sym & & \overline{Q}_{44} & 0 \\ & & & & \overline{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{k} \tag{2.34}$$

Les éléments de la matrice de rigidité $[\overline{Q}]$ s'écrivent en fonction des coefficients de la matrice dans les axes principaux [*Q*] et de l'angle θ :

$$
\begin{aligned}
\overline{Q}_{11} &= Q_{11}c^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{22}s^4 \\
\overline{Q}_{12} &= Q_{12}(c^4 + s^4) + (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})s^2c^2 \\
\overline{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})c^3s + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})s^3c \\
\overline{Q}_{22} &= Q_{11}s^4 + Q_{22}c^4 + (2Q_{11} + 4Q_{66})s^2c^2 \\
\overline{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})s^3c + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})c^3s \\
\overline{Q}_{66} &= (Q_{11} - 2Q_{12} + Q_{22} - 2Q_{66})s^2c^2 + Q_{66}(c^4 + s^4) \\
\overline{Q}_{44} &= Q_{44}c^2 + Q_{55}s^2 \\
\overline{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44})cs \\
\overline{Q}_{55} &= Q_{44}s^2 + Q_{55}c^2
\end{aligned}
\tag{2.35}
$$

Ou "c" représenté le "cos, et "s" le "sin"

2.5.1. **Résultantes et moments**

La discontinuité des contraintes à travers l'épaisseur du stratifié conduit à exprimer la relation contrainte–déformation en termes des résultantes et des moments

Les résultantes en membrane sont définies par: (Figure 2.8):

$$
N(x,y) = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \tag{2.36}
$$

De même, les résultantes en cisaillement sont définies par:(Figure 2.7)

$$
Q(x,y) = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \tau_{zy} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}_k dz \tag{2.37}
$$

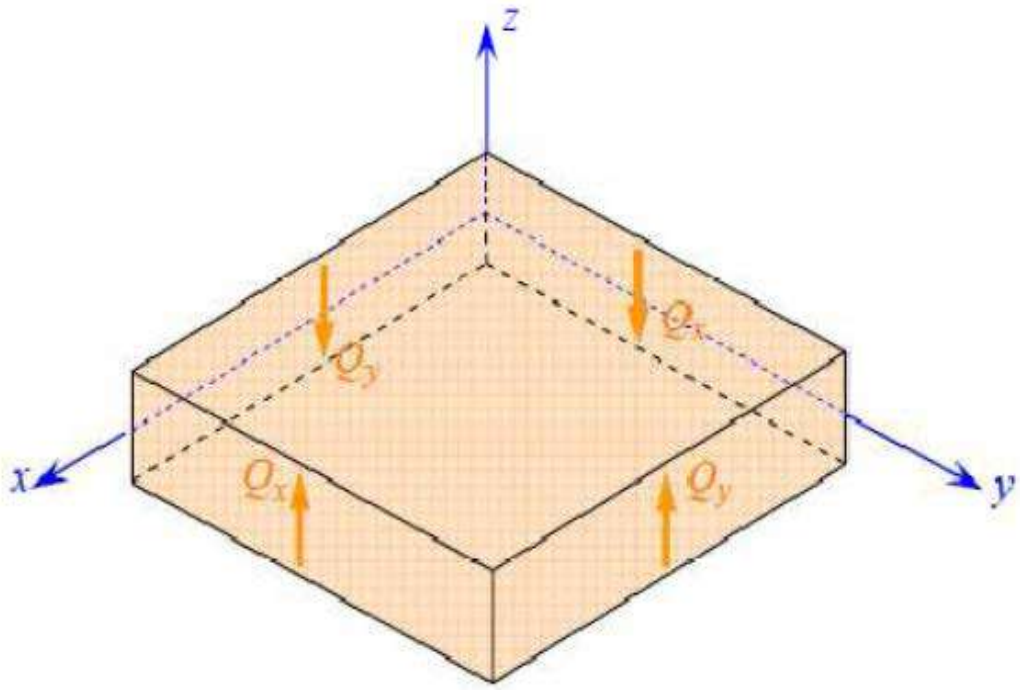


Figure 2.7 *Représenté les résultantes en cisaillement*

Les moments de flexion et de torsion sont donnés par: (Figure 2.8)

$$M(x,y) = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \qquad (2.38)$$

Où *n* représente le nombre de couches constituant le stratifié.

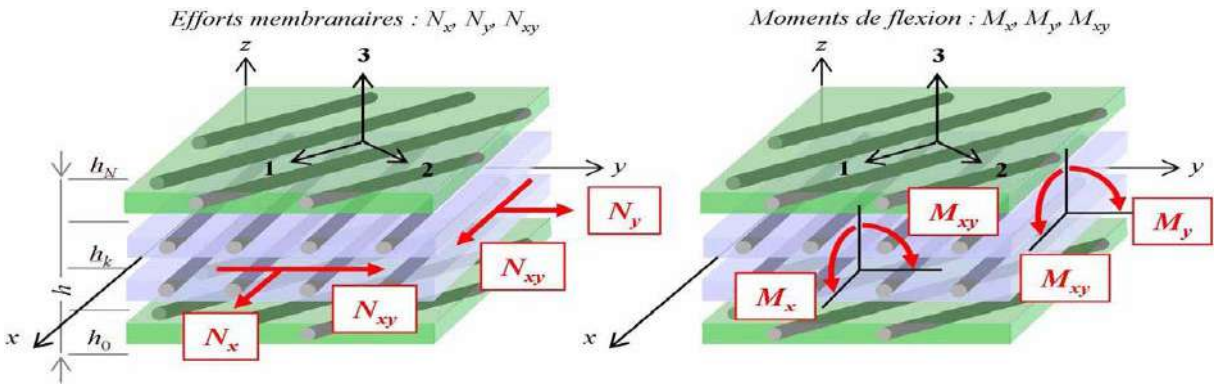


Figure 2.8 *représenté Les résultantes en membrane Les moments de flexion et de torsion*

Il faut bien noter que les relations (2.36), (2.37) et (2.38) sont définies par unité de longueur du stratifié.

2.5.2. Equation constitutive

La combinaison des relations (2.34) à (2.38) conduit à formuler l'équation constitutive du stratifié :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ & & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ & & & & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ & & sym & & & D_{66} & 0 & 0 \\ & & & & & & F_{44} & F_{45} \\ & & & & & & & F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \varepsilon_{xy0} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{2.39}$$

Ou sous forme contractée :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_f \\ Q \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa \\ \gamma \end{Bmatrix} \tag{2.40}$$

Avec :

$$[C] = \begin{bmatrix} [A] & [B] & 0 \\ [B] & [D] & 0 \\ 0 & 0 & [F] \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

Les coefficients de la matrice d'extension [A] , la matrice de couplage [B] et la matrice de flexion [D] sont définis comme suit :

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\overline{Q}_{ij})_k (1, z, z^2) dz, \qquad i, j = 1, 2, 6 \tag{2.42}$$

Par contre, les coefficients de la matrice de cisaillement transverse [F] sont définis par :

$$F_{ij} = \alpha_{ij} \sum_{k=1}^{n} \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\overline{Q}_{ij})_k \, dz, \qquad i, j = 4, 5 \qquad (2.43)$$

Où α_{ij} sont les facteurs de correction en cisaillement, permettant d'améliorer la théorie des plaques stratifiées avec cisaillement transverse. La détermination de ces facteurs a fait l'objet de plusieurs recherches [18]. On note que Timoshenko, Reissner et Mindlin ont pris ces facteurs respectivement égaux à 2/3, 5/6 et $\pi^2/12$. Il a été remarqué que les résultats obtenus avec des valeurs de 5/6 sont les plus satisfaisants.

2.6. EQUATIONS FONDAMENTALES DES PLAQUES STRATIFIEES

Il est nécessaire, pour développer les équations fondamentales des plaques stratifiées, de passer par les relations d'équilibre dynamique. Ces relations peuvent être obtenues directement en écrivant les conditions d'équilibre d'un élément infinitésimal [voir Annexe 3]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x &= \rho \ a_x \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y &= \rho \ a_y \\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z &= \rho \ a_z
\end{aligned} \qquad (2.44)$$

Où :

f_x, f_y, f_z Sont les composantes des forces volumiques exercées au point *M* du matériau.

ρ Est la masse volumique du point *M*.

a_x, a_y, a_z Sont les composantes du vecteur accélération du point *M*.

L'intégration des équations (2.44) suivant l'épaisseur du stratifié, en négligeant les forces volumiques et les contraintes inter laminaires et pour un problème statique, conduit aux relations suivantes

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=0\\
&\frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}=0\\
&\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+q=0\\
&\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x=0\\
&\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}-Q_y=0
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Les trois dernières équations permettent d'obtenir une relation indépendante des résultantes de cisaillement alors en peut écrire:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=0\\
&\frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}=0\\
&\frac{\partial^2 M_0}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_0}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_0}{\partial y^2}+q=0
\end{aligned} \tag{2.46}$$

La substitution de l'équation (2.39) dans les équations (2.46) conduit aux équations fondamentales des plaques stratifiées dont leurs expressions sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
&A_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+2A_{16}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}+A_{66}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+A_{16}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+(A_{12}+A_{66})\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}+A_{26}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}-\\
&B_{11}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}-3B_{16}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}-(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\partial y^2}-B_{26}\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}=0
\end{aligned} \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned}
&A_{16}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+(A_{12}+A_{66})\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}+A_{26}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}+A_{66}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}+2A_{26}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y}+A_{22}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}-\\
&B_{16}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}-(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial y}-3B_{26}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x\partial y^2}-B_{22}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^3}=0
\end{aligned} \tag{2.48}$$

$$D_{11}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}+4D_{16}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3\partial y}+D_{22}\frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2\partial y^2}+4D_{26}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x\partial y^3}-$$
$$B_{11}\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}-3B_{16}\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2\partial y}-B_{22}\frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3}-3B_{26}\frac{\partial^3 v_0}{\partial x\partial y^2}-(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 u_0}{\partial x\partial y^2}-B_{26}\frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} \quad (2.49)$$
$$-3B_{16}\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3}-(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2\partial y}=q$$

La solution analytique des équations précédentes est difficile à obtenir si l'on tient en compte de tous les termes de couplage. Elle n'est possible que si certains termes de ces équations sont négligés, ceci est réalisé dans quelques configurations de stratifiés simples telles les stratifiées croisées où le couplage $A_{16}=A_{26}=B_{16}=B_{26}=D_{16}=D_{26}=0$ Disparait. On peut aussi avoir une solution analytique dans le cas des stratifiées équilibres symétrique, les termes de couplage $A_{16}=A_{26}=B_{ij}=D_{ij}=0$, et de même les stratifiés équilibres antisymétriques les termes de couplage $A_{16}=A_{26}=B_{ij}=D_{16}=D_{26}=0$. Mise à part ces configurations, ou d'autres qui ne sont pas citées ici, il faut avoir recours aux méthodes numériques vu leur puissance dans la résolution de tels problèmes. L'utilisation de méthodes numériques facilite la solution de ces équations pour des problèmes d'importance pratique. Parmi les méthodes numériques les plus utilisées, on cite la méthode des éléments finis qui a montré son efficacité dans la résolution des problèmes de la dynamique des structures. La méthode sera utilisée dans le présent travail pour la recherche des réponses statiques des plaques composites stratifiées.

Chapitre III

Comportement statique par éléments finis

Chapitre3: Comportement statique par éléments finis

3.1. INTRODUCTION

La méthode des éléments finis (MEF) permet de ramener un problème de milieu continu d'un nombre infini de paramètres à un problème discret de nombre finis de paramètres. Dans l'analyse des plaques stratifiées, la méthode consiste à développer les équations du mouvement à partir des formulations énergétiques et de déterminer par la suite les contraintes et les déformations, cette analyse nécessite l'utilisation des éléments bidimensionnels pour la discrétisation. Avant d'entreprendre, il est intéressant d'effectuer une comparaison entre ces éléments afin de choisir l'élément de référence. Plusieurs tests ont été effectués sur des éléments types concernant la convergence des solutions, les remarques suivantes ont été tirées

- Les éléments quadrilatères donnent de meilleurs résultats que les éléments triangulaires.
- Pour un même nombre de degrés de liberté, les éléments à champ quadratique ont une précision meilleure que les éléments à champ linéaire.
- Les éléments basés sur la théorie de MINDLIN avec prise en compte du cisaillement transverse sont les mieux adaptés dans le cas des plaques épaisses.

- Les éléments quadratiques de la famille de SERENDIP présentent un comportement de verrouillage quelque soit l'ordre d'intégration utilisé ; un comportement sans verrouillage permet d'utiliser l'élément à la fois pour les plaques épaisses et pour les plaques minces.

- Les éléments avec intégration réduite de la famille de LAGRANGE comportent convenablement dans les situations des plaques minces.

D'après les remarques citées précédemment, un élément de la famille de LAGRANGE à champ quadratique peut répondre aux exigences imposées par le présent travail.

3.2. DISCRETISATION

Considérons la plaque de la figure 2.3 (paragraphe 2.2), la surface moyenne de cette plaque est discrétisée en un nombre fini d'éléments quadrilatères isoparamétriques à 9 nœuds, chaque nœud possède 5 degrés de liberté indépendants (trois déplacements et deux rotations).

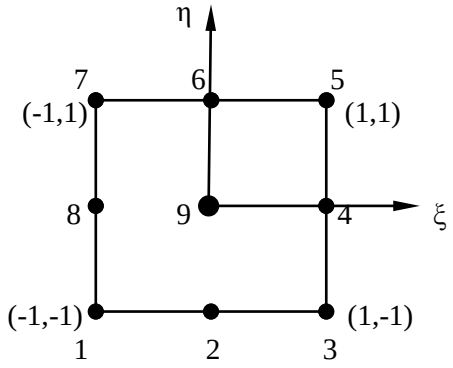


Figure 3.1. *Elément de référence*

Les déplacements élémentaires peuvent être définis par l'approximation suivante :

$$\{\delta\} = \sum_{i=1}^{nn} [N_i(\xi,\eta)]\{d_i\} \tag{3.1}$$

Avec :

- $\{\delta\} = \{u_0 \quad v_0 \quad w_0 \quad \theta_x \quad \theta_y\}$
- $\{d_i\}$: le vecteur des déplacements nodaux.

$$\{d_i\}^T = \{u_{0i} \quad v_{0i} \quad w_{0i} \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi}\}$$

- nn : le nombre de nœuds par élément.
- $[N_i]$: les fonctions d'interpolations des déplacements exprimées en terme de coordonnées naturelles.

Les fonctions d'interpolations N_i doivent être choisies de manière qu'elles vérifient la complétude et la continuité interélément. Pour un élément à 9 nœuds, ces fonctions sont définies comme suit :

Pour les nœuds de sommets : $\xi_i = \pm 1 \quad ; \quad \eta_i = \pm 1$

$$N_i = \frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)\xi\eta$$

Pour les nœuds d'interfaces :

$$N_i = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta\eta_i)\eta\eta_i \qquad \text{à} \qquad \xi_i = 0 \quad ; \quad \eta_i = \pm 1$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi\xi_i)\xi\xi_i \qquad \text{à} \qquad \xi_i = \pm 1 \quad ; \quad \eta_i = 0$$

Pour le nœud du centre :

$$N_i = (1-\xi^2)(1-\eta^2) \qquad \text{à} \qquad \xi_i = 0 \quad ; \quad \eta_i = 0$$

La relation déformations–déplacements élémentaires est obtenue de (3.1) comme suit :

$$\{\varepsilon\} = \sum_{i=1}^{nn} [B_i].\{\delta\}^e \tag{3.2}$$

Où $[B_i]$ est la matrice d'interpolation des déformations, elle est donnée par l'expression suivante :

$$[B_i]=\begin{bmatrix} \partial N_i/\partial x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial N_i/\partial y & 0 & 0 & 0 \\ \partial N_i/\partial y & \partial N_i/\partial x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial N_i/\partial x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial N_i/\partial y \\ 0 & 0 & 0 & \partial N_i/\partial y & \partial N_i/\partial x \\ 0 & 0 & \partial N_i/\partial x & N_i & 0 \\ 0 & 0 & \partial N_i/\partial y & 0 & N_i \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Les éléments de la matrice $[B_i]$ sont définis sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \tag{3.4}$$

[J] est la matrice Jacobienne, elle permet le passage du système de coordonnées cartésiennes au système de coordonnées naturelles.

La matrice Jacobienne est définie comme suit :

$$[J]=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

Dans laquelle :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^{NN} \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \xi} x_i \\
\frac{\partial y}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^{NN} \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \xi} y_i \\
\frac{\partial x}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^{NN} \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \eta} x_i \\
\frac{\partial y}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^{NN} \frac{\partial N_i(\xi,\eta)}{\partial \eta} y_i
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Les relations (3.1) et (3.2) peuvent êtres écrits sous les formes matricielles contractées suivantes :

$$\begin{aligned}
\{\delta\} &= [N]\{\delta\}^e \\
\{\varepsilon\} &= [B]\{\delta\}^e
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Avec :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & .... & N_{nn} \end{bmatrix}$$
$$[B] = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & .... & B_{nn} \end{bmatrix}$$
$$\{\delta\}^e = \{\{d_1\} \quad \{d_2\} \quad .... \quad \{d_{nn}\}\}^T$$

Les contraintes sont liées aux déformations par la matrice d'élasticité C,

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \tag{3.8}$$

3.3. EQUATIONS DE L'ENERGIE POTENTIELLE

L’analyse statique d’une telle structure revient à résoudre les équations qui régissent l'équilibre qui peuvent être obtenues en minimisant l'énergie potentielle totale du système. L'énergie potentielle totale de la structure sera la somme des énergies potentielles élémentaires :

$$\pi^e = U^e - W^e \tag{3.9}$$

Où U et W sont respectivement l'énergie de déformation et le travail des forces nodales équivalentes, elles sont données comme suit :

$$U^e = \frac{1}{2}\int_V [\sigma]^T (\varepsilon) dV \tag{3.10}$$

$$W^e = \{\delta\}^T \{F\} \tag{3.11}$$

L'expression de l'énergie potentielle totale π devient:

$$\pi = \frac{1}{2}\int_V [\sigma]^T \{\varepsilon\} dV - \int_V [\delta]^T \{p\} dV - \int_S [\delta]^T \{q\} dS \tag{3.12}$$

Dans le cas d'une plaque discrète, l'énergie potentielle totale π est la somme de toutes les énergies potentielles élémentaires :

$$\pi = \sum_{e=1}^{NE} \pi_e \tag{3.13}$$

NE est le nombre des éléments.

L'équation (3.12), peut être réécrite sous la forme :

$$\pi_e = \frac{1}{2}\int_{V_e} [\delta^e]^T [B]^T [D][B]\delta^e dV - \int_{V_e} [\delta^e]^T [N]^T p dV - \int_{S_e} [\delta^e]^T [N]^T q dS \tag{3.14}$$

où V_e est le volume de l'élément et s_e la surface chargée de l'élément

En minimisant l'énergie élémentaire par rapport aux déplacements nodaux δ^e , on obtient :

$$\frac{\partial \pi_e}{\partial \delta^e} = \int_{V_e} ([B]^T DB)\delta^e dV - \int_{V_e} [N]^T p dV - \int_{S_e} [N]^T q dS = 0 \tag{3.15}$$

On peut réduire la relation (3.15) à la forme ::

$$[K^e]\{\delta^e\} = \{F^e\} \tag{3.16}$$

Où $[K^e]$ est la matrice de rigidité élémentaire, elle est donnée par la relation suivante :

$$[K^e] = \int_{V_e} [B]^T [D][B] dV \tag{3.17}$$

De même, $\{F^e\}$ est le vecteur élémentaire des forces nodales équivalentes, il est donné par :

$$\{F^e\} = \int_{V_e} [N]^T P dV + \int_{S_e} [N]^T q dS \tag{3.18}$$

3.4.1. Matrice de rigidité

Les matrices de rigidité élémentaires sont définies par la relation (3.16). Elles sont symétriques d'ordre 45×45, leur forme est donnée comme suit :

$$[K_e] = \begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] & 0 & [K^{14}] & [K^{15}] \\ & [K^{22}] & 0 & [K^{24}] & [K^{25}] \\ & & [K^{33}] & [K^{34}] & [K^{35}] \\ & Sym & & [K^{44}] & [K^{45}] \\ & & & & [K^{55}] \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

Les éléments des matrices $[K^{\alpha\beta}]$ ($\alpha, \beta = 1,2, \ldots 5$) sont donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{11} &= A_{11}S_{ij}^{\xi} + A_{16}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + A_{66}S_{ij}^{\eta} \\
K_{ij}^{12} &= A_{12}S_{ij}^{\xi\eta} + A_{16}S_{ij}^{\xi} + A_{26}S_{ij}^{\eta} + A_{66}S_{ji}^{\xi\eta} \\
K_{ij}^{14} &= B_{11}S_{ij}^{\xi} + B_{16}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + B_{66}S_{ij}^{\eta} \\
K_{ij}^{15} &= B_{12}S_{ij}^{\xi\eta} + B_{16}S_{ij}^{\xi} + B_{26}S_{ji}^{\eta} + B_{66}S_{ji}^{\xi\eta} \\
K_{ij}^{22} &= A_{22}S_{ij}^{\eta} + A_{26}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + A_{66}S_{ij}^{\eta} \\
K_{ij}^{24} &= B_{16}S_{ij}^{\xi} + B_{66}S_{ij}^{\xi\eta} + B_{12}S_{ji}^{\xi\eta} + B_{26}S_{ij}^{\eta} \\
K_{ij}^{25} &= B_{66}S_{ij}^{\xi} + B_{26}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + B_{22}S_{ij}^{\eta}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
K_{ij}^{33} &= F_{44}S_{ij}^{\xi} + F_{45}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + F_{55}S_{ij}^{\eta} \\
K_{ij}^{34} &= F_{44}S_{ij}^{\xi 0} + F_{45}S_{ij}^{\eta 0} \\
K_{ij}^{35} &= F_{45}S_{ij}^{\xi 0} + F_{55}S_{ij}^{\eta 0} \\
K_{ij}^{44} &= D_{11}S_{ij}^{\xi} + D_{16}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + D_{66}S_{ij}^{\eta} + F_{44}S_{ij}^{0} \\
K_{ij}^{45} &= D_{12}S_{ij}^{\xi\eta} + D_{16}S_{ij}^{\xi} + D_{26}S_{ji}^{\eta} + D_{66}S_{ij}^{\xi\eta} + F_{45}S_{ij}^{0} \\
K_{ij}^{55} &= D_{66}S_{ij}^{\xi} + D_{26}(S_{ij}^{\xi\eta} + S_{ji}^{\xi\eta}) + D_{22}S_{ij}^{\eta} + F_{55}S_{ij}^{0}
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

Où :

$$
\begin{aligned}
S_{ij}^{\xi\eta} &= \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi}\frac{\partial N_j}{\partial \eta}\left|J\right| \, d\xi \, d\eta \\
S_{ij}^{00} &= S_{ij}^{0} \qquad (i, j = 1, 9) \\
S_{ij}^{\xi\xi} &= S_{ij}^{\xi}
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

$\left|J\right|$ est le déterminant de la matrice Jacobienne.

3.4.2. Intégration de Gauss

Les quantités S_{ij} peuvent être évaluées en utilisant l'intégration numérique dans le domaine (ξ ,η). La technique de l'intégration sélective avec 3×3 points de Gauss pour les termes de membrane, flexion et 2×2 points de Gauss pour les termes de cisaillement, donne avec un temps de calcule réduit, de meilleurs résultats [23].

L'intégrale (3.24) peut s'écrire :

$$
S_{ij} = \sum_{a=1}^{g}\sum_{b=1}^{g} W_a W_b \left|J\right| \tag{3.22}
$$

Où :

W_a, W_b sont les coefficients de pondération aux points d'intégration ξ_a ,η_b

g est le nombre de points d'intégration.

3.4. MATRICE DE RIGIDITE GLOBALE - VECTEUR FORCE GLOBAL

La matrice de rigidité globale [*K*] est obtenue par assemblage des matrices de rigidité élémentaires, l'assemblage s'effectue en additionnant terme à terme les éléments des matrices élémentaires communs en nœud et en degré de liberté. La même technique s'applique sur le vecteur force global.

3.5. RESOLUTION

Une fois la matrice de rigidité globale et le vecteur charge globale sont établis, on peut former l'équation de l'équilibre statique de la plaque. Un système de (Nnoeuds x Nddl) équations est obtenu et qui permet, après prise en compte des conditions aux limites, de calculer les déplacements nodaux. Dans la littérature, on trouve beaucoup de méthodes qui permettent la résolution numérique de l'équation de l'équilibre. Les contraintes et les déformations dans chaque élément peuvent être par la suite calculées à partir des déplacements obtenus précédemment.

On peut résumer les étapes de base pour calculer les solutions d'un problème d'équilibre statique par éléments finis comme suit :

- Sous-division de la plaque en éléments finis.
- Evaluation des matrices de rigidité et les charges élémentaires.
- Construction de la matrice de rigidité globale et le vecteur charge globale.
- Résolution du système d'équations après prise en compte des conditions aux limites.
- Evaluation des contraintes et des déformations de la plaque.

Chapitre VI

Présentation du programme (ANSYS)

Chapitre4: Présentation du programme (ANSYS)

EXEMPLES NUMÉRIQUES

4.1 Analyse linéaire de structure

4.1.1 Analyse statique :

Les étapes suivantes sont utilisées dans l'analyse statique par ANSYS Construire le modèle.

- Appliquer les charges et d'obtenir la solution.
- Développer les modes.
- Examiner les résultats.

Les résultats comprennent des fréquences naturelles, les formes des modes, et le champ de contraintes correspondant.

4.1.1.1 MODÈLE:

On va traiter un exemple type, afin de montrer les différentes étapes de l'analyse statique des plaques par ansys :

Preprocessor

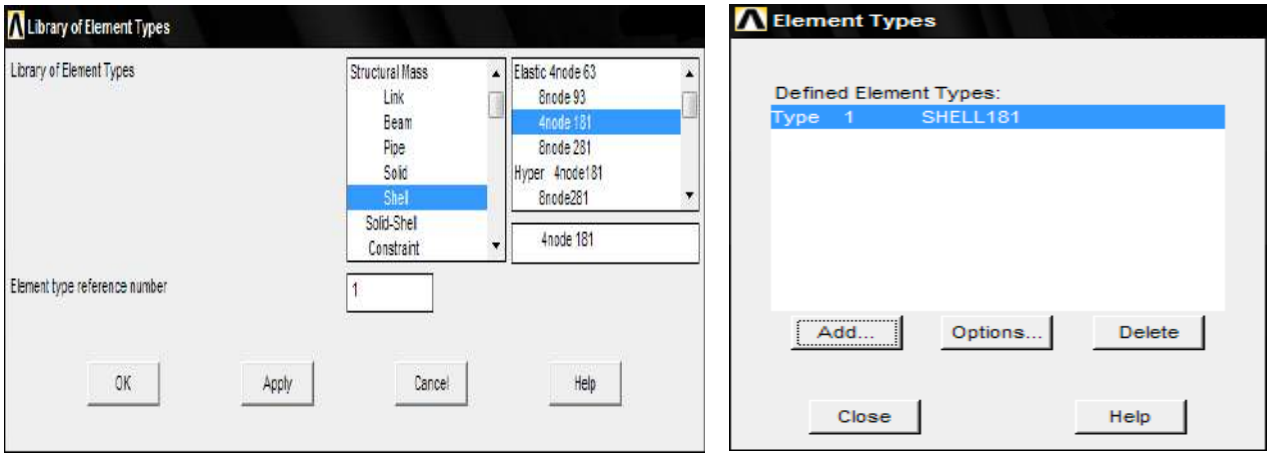
Définir un type d'élément

Il ya plusieurs éléments ANSYS qui permettent le traitement des plaques composites à titre d'exemple le SHELL181. Cet élément peut être utilisé pour des applications en couches stratifiées, pour la modélisation des coques composites ou pour les structures en sandwich. La précision de la modélisation des coques composites est régie par la théorie de Mindlin-Reissner.

- Définir les types d'éléments en utilisant le chemin de menu suivant:

Main Menu > Preprocessor > Element Type > Add/Edit/Delete

- Cliques sur Add
- Sélectionnez Shell dans la bibliothèque de l'élément de dialogue. Cliquez sur OK.
- Cliques sur **Close**



Figue(4.1) *Boîte de dialogue pour récupérer les résultats sur la base d'éléments numéros de séquence.*

- Spécifiez les constantes réelles (R commande) en utilisant le chemin de menu suivant :

  Main Menu > Preprocessor > Real Constants > Add/Edit/Delete

  - Mettez en surbrillance Type 1 SHELL181, cliquez sur OK.
  - Entrez 0.05 pour TK(I), cliquez sur OK.
  - Sortir de la boîte de dialogue des constantes réelles en cliquant sur **Close**
- Spécifier les propriétés des matériaux pour le faisceau (MP commande) en utilisant le suivre le chemin de menu:

  Main Menu > Preprocessor > Material Props > Material Models

Dans la boîte de définir un modèle de comportement des matériaux de dialogue, dans la fenêtre de droite, successivement double-cliquez sur structurel, linéaire, élastique, et, enfin. Orthotrope, ce qui fera apparaître une autre boîte de dialogue.

- Entrez E_1=210, E_2=E_3=19, υ_{12}=υ_{23}=υ_{13}= 0.25 cliquez sur OK.
- cliquez sur **densité** et Entrez 1000 sur DENS.
- Fermez la boite de dialogue en utilisant le chemin :

  Material > Exit

- Définir la géométrie de la pièce est généralement la 2

  Main Menu > Preprocessor > Modeling > Create > Areas > Rectangle >By Dimensions

Dans la boîte de dialogue qui s'affiche, entrez les valeurs suivantes:

X_1= 0, X2= 0.25

Y_1= 0, Y_2= 0.25

- Click OK.

  - Précisez le nombre de divisions sur toutes les lignes de commande (LESIZE) à l'aide le chemin de menu suivant :

Main Menu > Preprocessor > Meshing > Size Cntrls > ManualSize > Global > Size

Tailles éléments sur All boîte de dialogue Lignes sélectionnée apparaît, entrez 10 pour NDIV, cliquez sur OK

- Créer le maillage (LMESH commande) en utilisant le chemin de menu suivant :

  Main Menu > Preprocessor > Meshing > Mesh > Areas >Free

Choisissez le menu apparaît; cliquez sur **Pick All.**

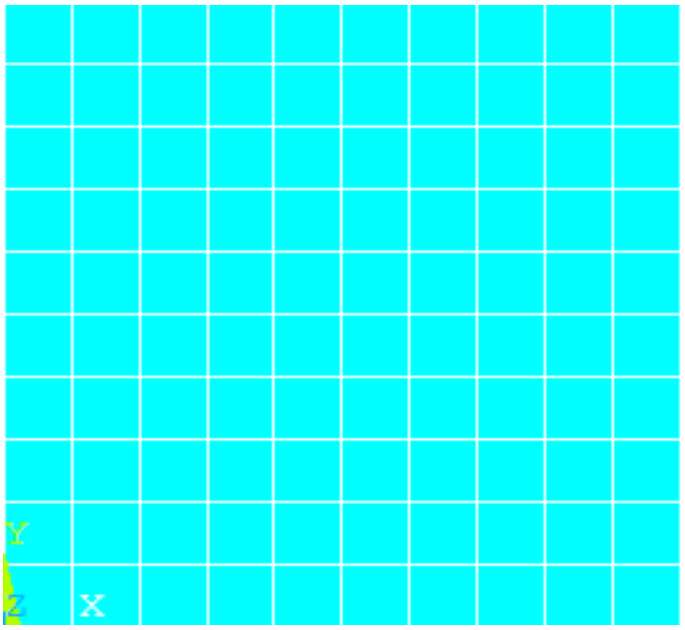


Figure (4.2) *Plaque en mailles*

- Précisez le nombre de couche à l'aide le chemin de menu suivant:

Main Menu >Preprocessor >Sections >Shell >Lay-up >Add/Edit.

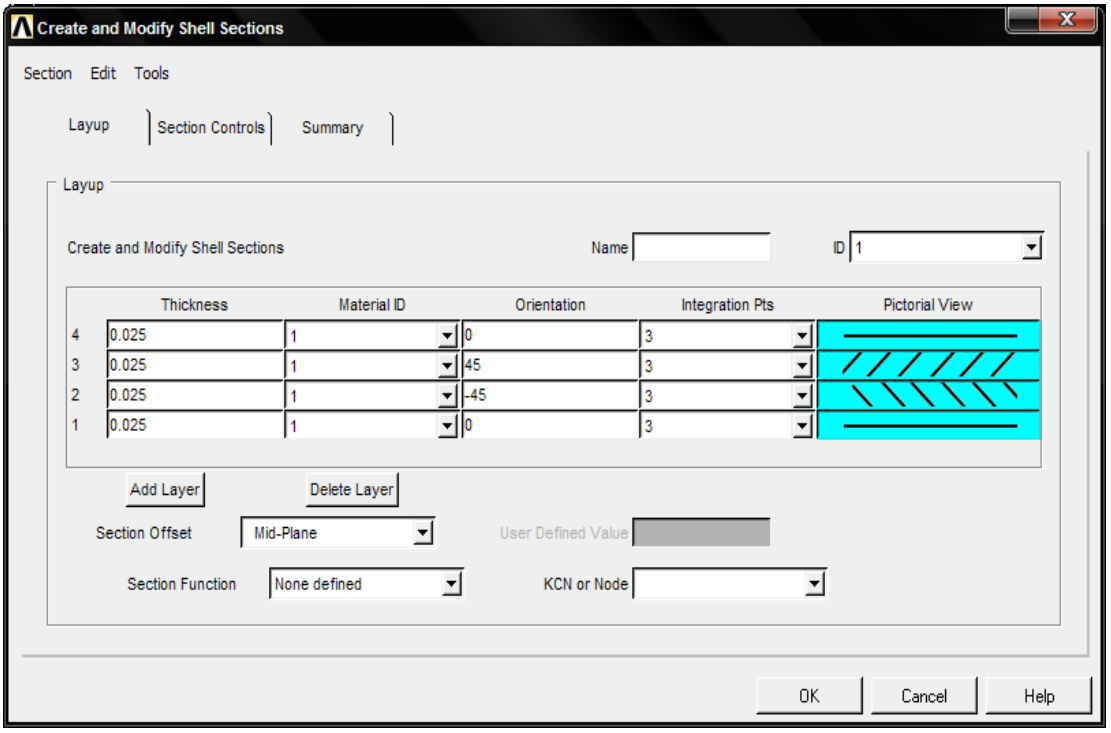


Figure (4.3) *Créer et modifier la boîte de dialogue Shell articles*

Solution

- Spécifiez le type d'analyse que Modale, en utilisant le chemin de menu suivant (**ANTYPE** commande), ce qui fera apparaître la boîte de dialogue Nouvelle analyse:

Main Menu > Solution > Analysis Type > New Analysis

- Cliquez sur le bouton statique; cliquez sur OK.

- Spécifiez les conditions aux limites de déplacement en utilisant le suivant chemin de menu:

  Main Menu > Solution > Define Loads > Apply > Structural > Displacement > On Nodes

$v_0 = w_0 = \theta_x = 0$ à y= 0, b

$u_0 = w_0 = \theta_y = 0$ à x= 0, a

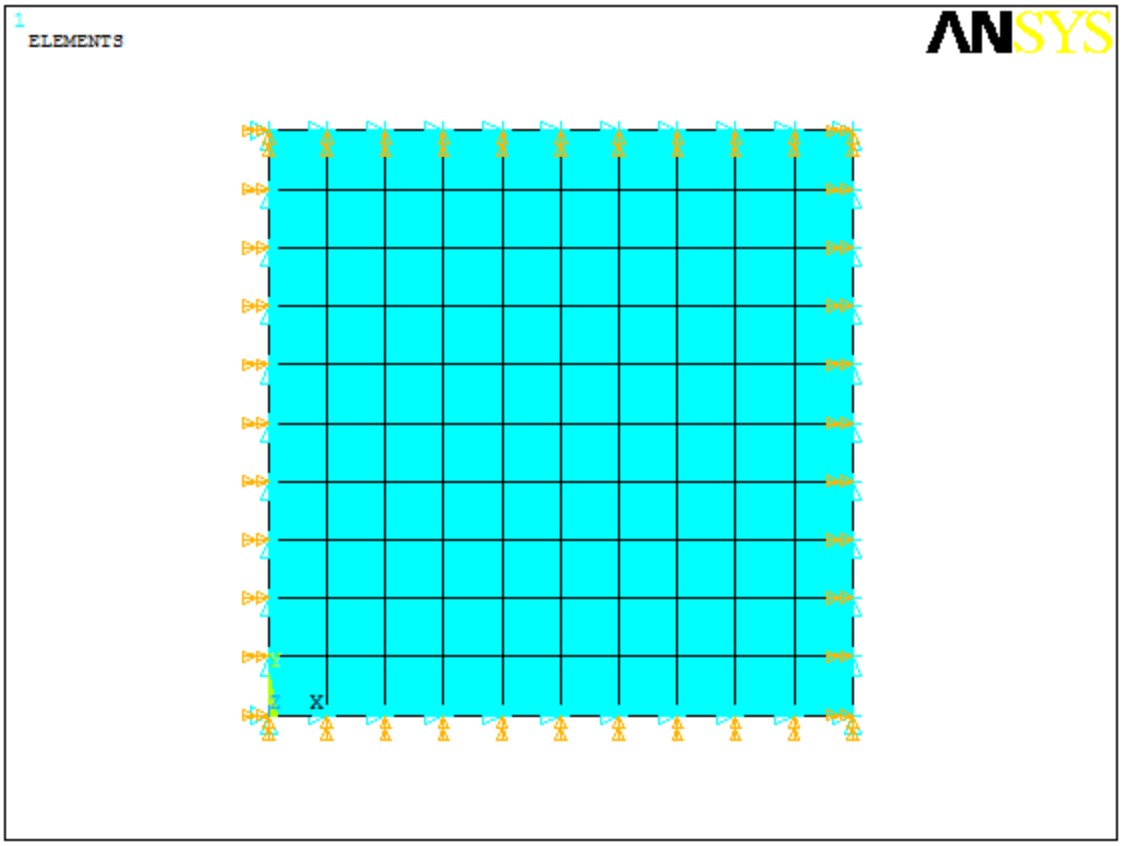


Figure (4.4) *Les conditions aux limites*

- Obtenir la solution en utilisant le chemin de menu suivant :

Charge uniforme :

- Appliquer la charge uniforme sur la surface de plaque en utilisant le chemin de menu suivant:

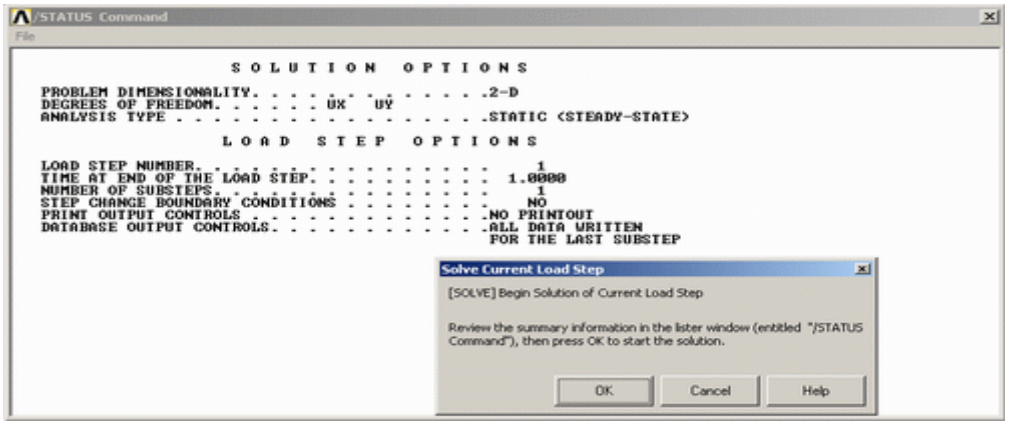
Main Menu > Solution > Define Loads > Apply > Structural > Pressure > On Areas

- Sélectionnez la surface; cliquez sur **OK.**

- Entre 1000 **(VALUE Load PRES value)**; cliquez sur **OK**.

Main Menu > Solution > Solve > Current LS

- Cliquez sur OK pour lancer la solution.
- Attendez que ANSYS réponde avec la **Solution is done!**





POSTPROCESSING

- Examiner les résultats en utilisant le chemin de menu suivant:

  Main Menu > General Postproc > Results Summary

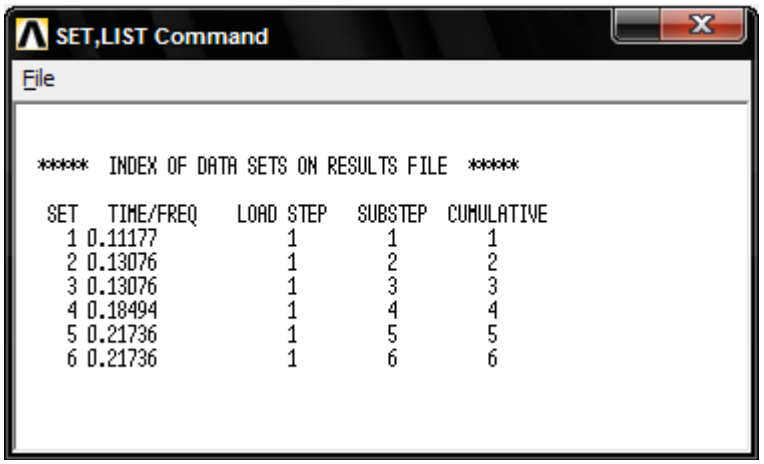


Figure (4.5) *Liste des fréquences des modes*

- Tracer les formes de mode

- Définir la solution de régler d'abord en utilisant le chemin de menu suivant :

  Main Menu > General Postproc > Read Results > First

- Tracer la forme de mode en utilisant le chemin de menu suivant:

  Main Menu > General Postproc > Plot Results > Deformed Shape

- Cliquez sur **Def+ undefedge ;** click sur OK.

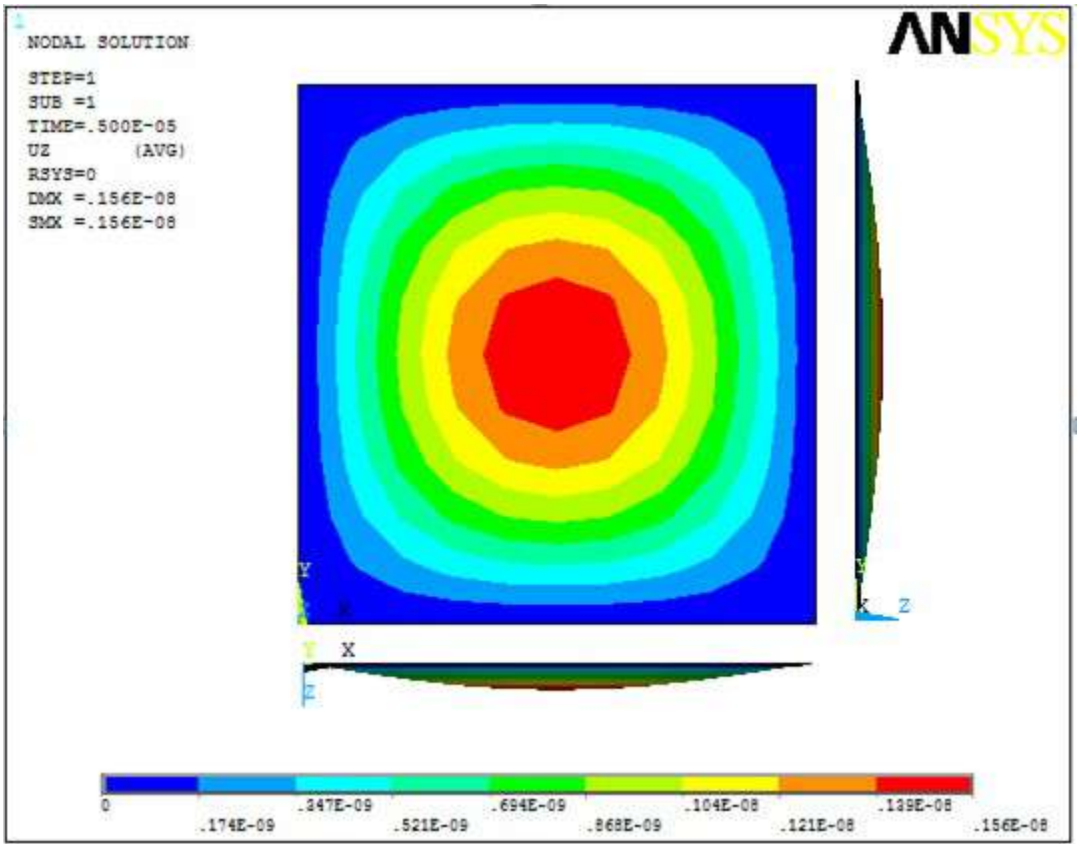


Figure (4.6) *déformation de première mode*

4.1.2 Analyse transitoire

Dans ANSYS., les étapes suivantes sont utilisées pour une analyse transitoire:

- Préciser les conditions initiales.
- Spécifiez les contrôles de solutions.
- Appliquer les charges.
- Écrire dans un fichier Étape charge
- Appliquer / modifier des charges et des contrôles solution pour la phase de charge suivante (s) et écrire Charger le fichier Etape (s).
- Obtenir une solution à partir de fichiers échelon de charge.
- Examiner les résultats.

4.1.2.1 MODÈLE:

Preprocessor

Le modèle éléments finis de Plaque carrée été créé à la section (Analyse modale) Par conséquent, le modèle ne sera pas régénéré ici.

Pour Créer le modèle par la lecture du fichier d'entrée de Plaque carrée en utilisant le chemin de menu suivant:

Utility Menu > File > Read Input from

- Parcourir pour le Plaque carrée à partir du dossier ci-dessus; cliquez sur OK.
- Attendez que le modèle soit généré.

Solution

- Spécifiez le type d'analyse que transitoire en utilisant le chemin de menu suivant:
  Main Menu > Solution > Analysis Type > New Analysis

- Cliquez sur **Transient**, cliquez sur **OK**
- Une nouvelle boîte de dialogue apparaît; cliquez sur **OK**

- Spécifier des contraintes de déplacement en utilisant le chemin de menu suivant:

  Main Menu > Solution > Define Loads > Apply > Structural > Displacement > On Nodes

$v_0 = w_0 = \theta_x = 0$ à y= 0, b

$u_0 = w_0 = \theta_y = 0$ à x= 0, a

Charge sinusoïdalement:

- Appliquer la charge sinusoïdalement sur la surface de plaque en utilisant le chemin de menu suivant:

  Parameters > functions >define/Edit

- Ecrive l'équation q=q_0 sin (π x/a)sin (π y/a)
- Enregistre l'équation

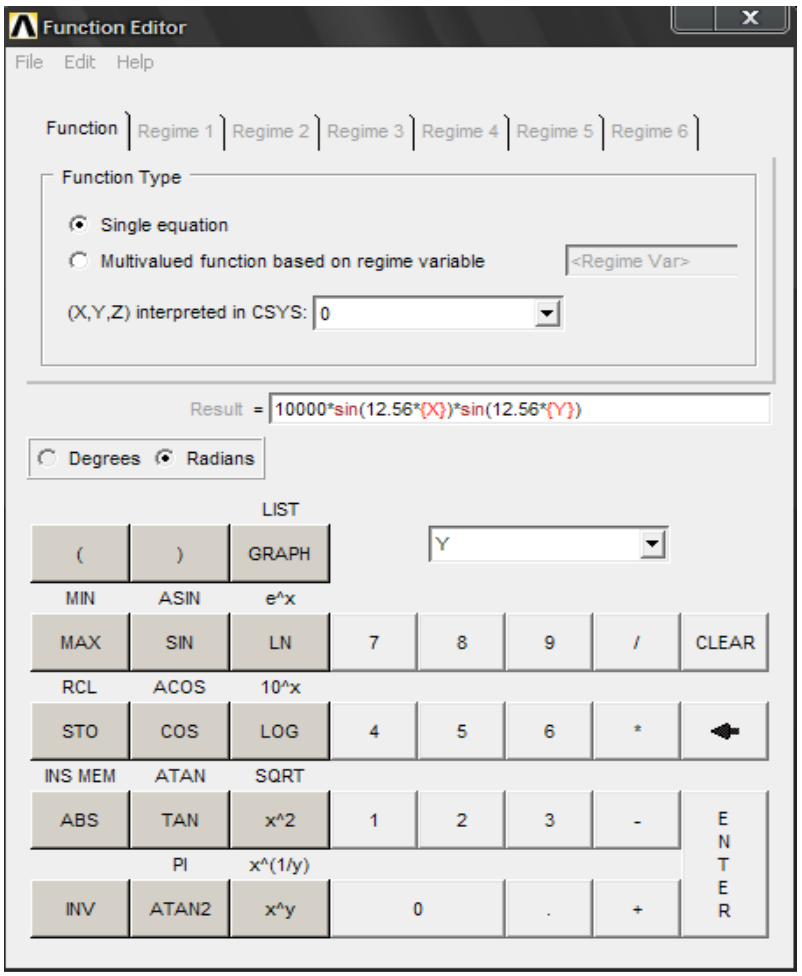


Figure (4.7) *utilisation de l'outil fonction*

Parameters > functions >Read from file

- Oeuvre le fiche
- Saisissez un nouveau nom pour le fiche

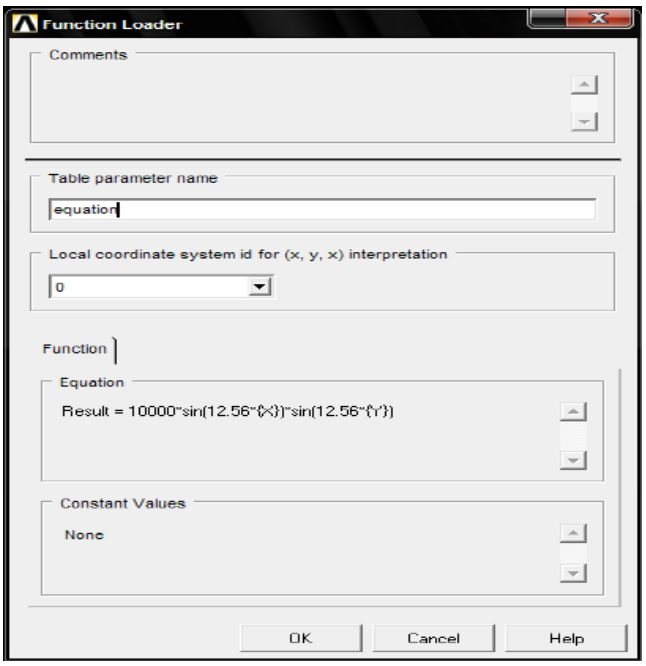


Figure (4.8) *Télécharger l'équation*

- Cliquez sur OK.

Main Menu > Solution > Define Loads > Apply > Structural > Pressure > On Areas

- Sélectionnez la surface; cliquez sur OK.
- [SFA](Apply PRES on areas as a) sélectionner **Existing table;** cliquez sur OK.

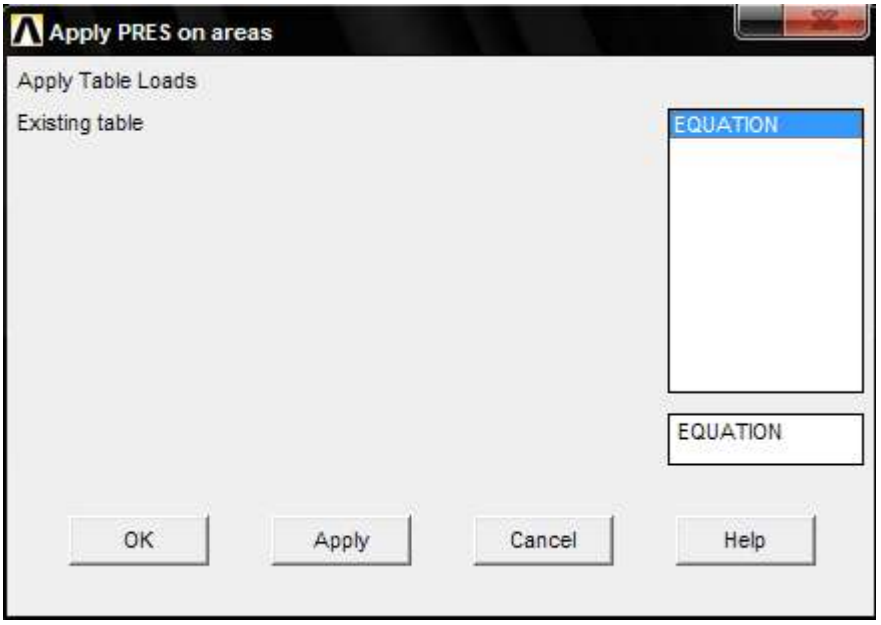


Figure (4.9) *application de l'équation*

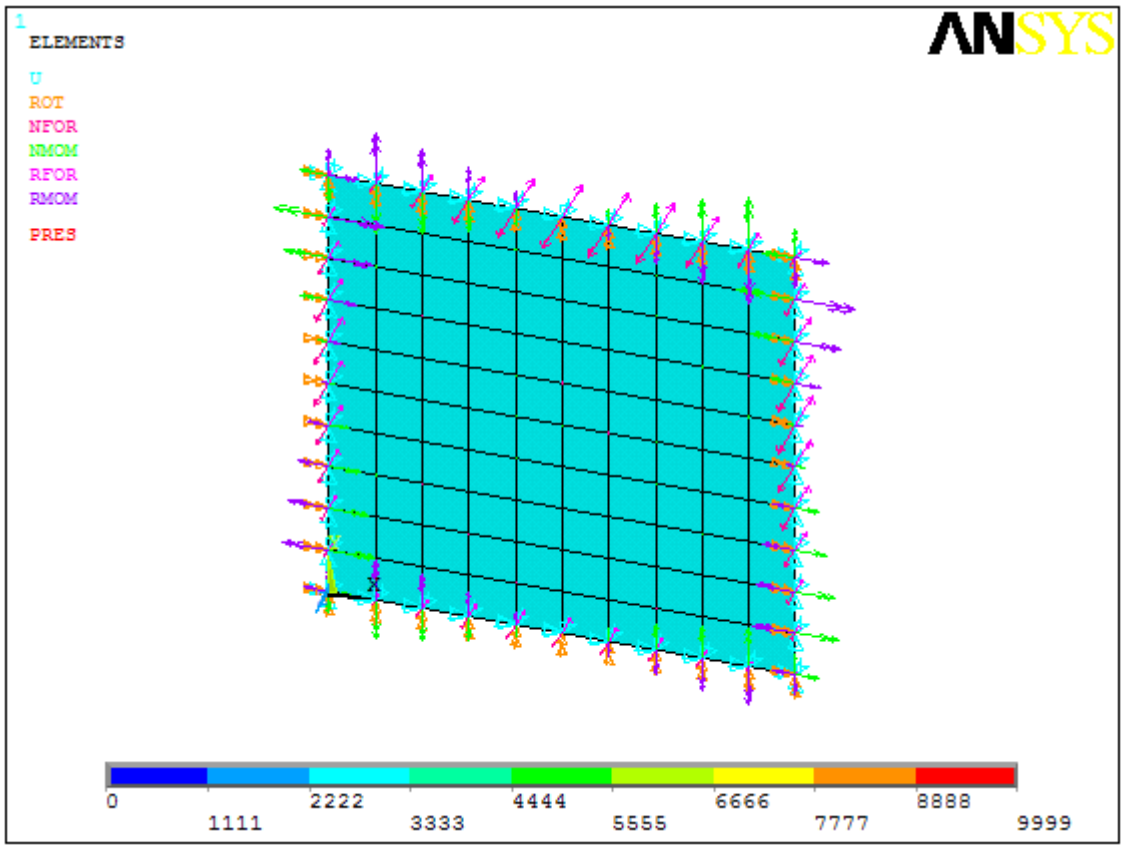


Figure (4.10) *application de la charge*

- Définir les options de solution pour l'aide le chemin de menu suivant:

Main Menu > Solution > Analysis Type > Sol'n Controls.

- Entre 360 e-6 dans(**Time at end of loadstep**) ,5e-6 dans(**Time increment**)
- cliquez sur (**write every Nth substep**) dans le menu déroulant Fréquence menu, cliquez sur **OK.**

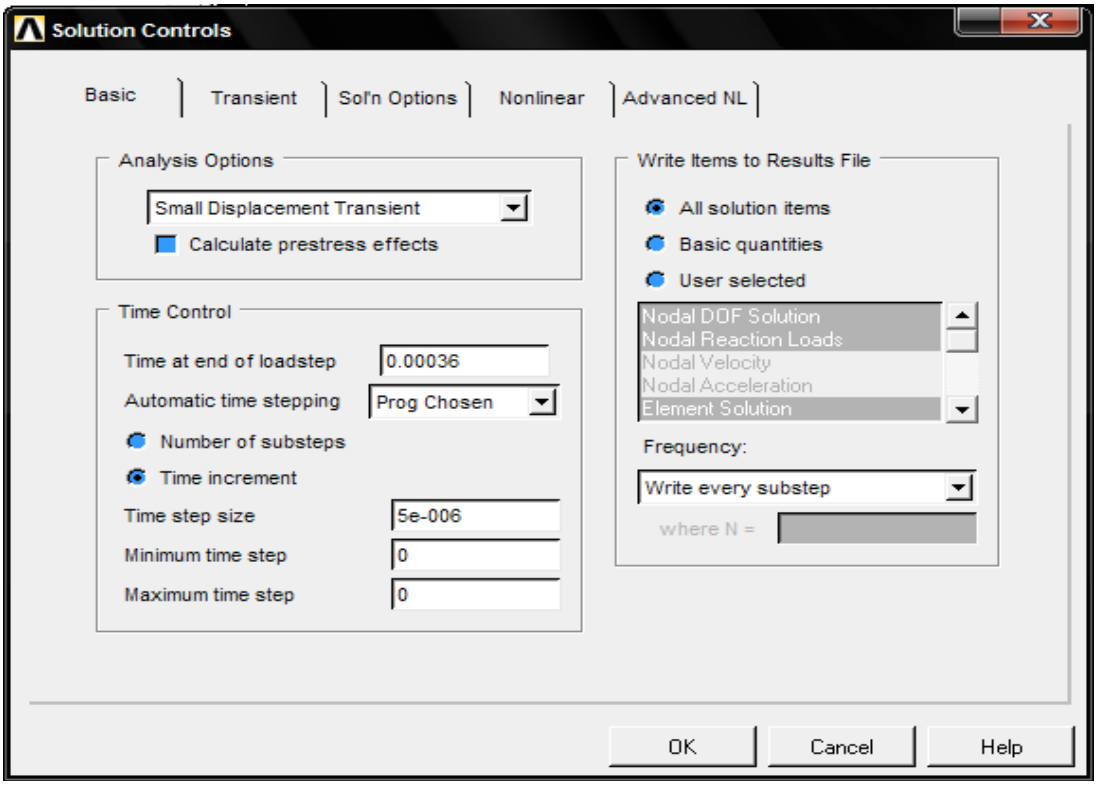


Figure (4.11) *contrôle du temps*

- Obtenir la solution en utilisant le chemin de menu suivant :

Main Menu > Solution > Solve > Current LS

- Cliquez sur OK pour lancer la solution.
- Attendez que (ANSYS) réponde avec la **Solution is done!**

Postprocessing

- Examen des déplacements au milieu dépendant du temps en utilisant le chemin de menu suivant:

Main Menu > TimeHist Postpro

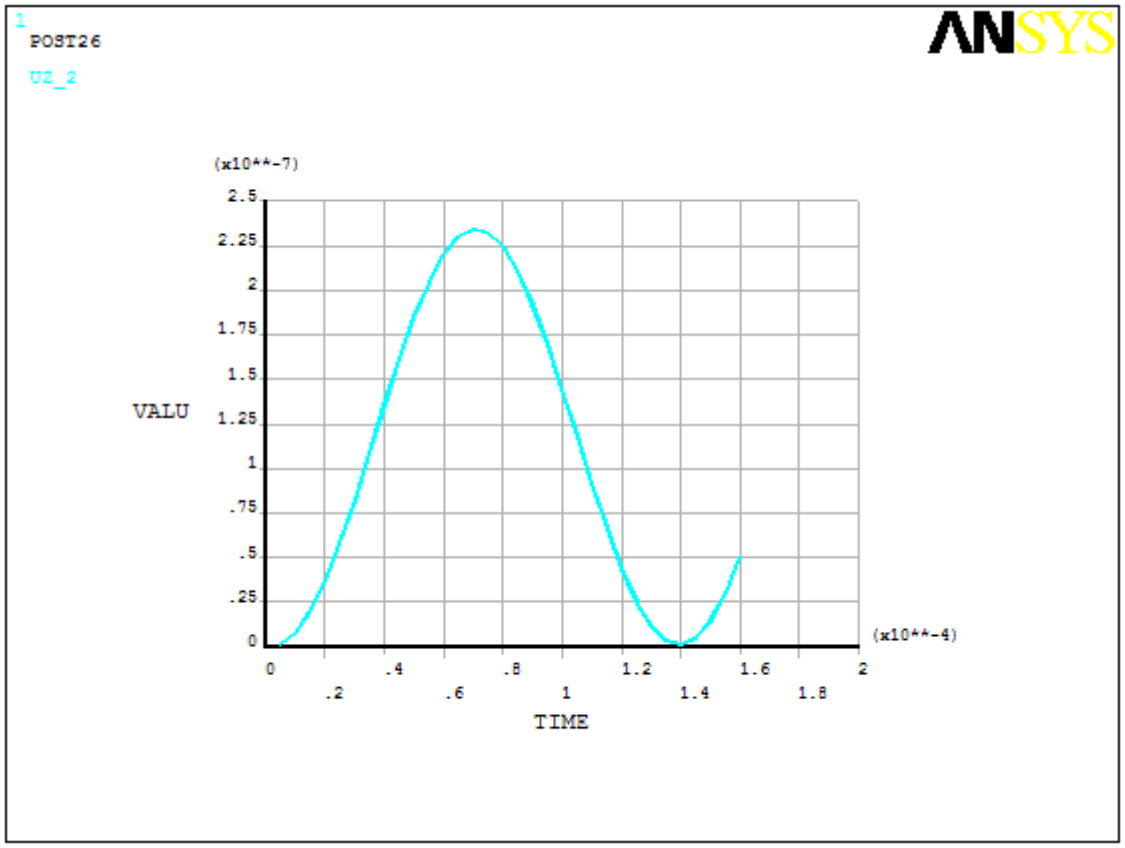


Figure (4.12) *Variation dans le temps de la z-déplacement au point milieu*

Chapitre V

Résultats et discussions

Chapitre 5 :

Resultats et discussions

5.1 INTRODUCTION

Dans le cas de l'étude de comportement statique des plaques stratifiées, l'analyse la plus complexe est celle des stratifiés constitués d'un empilement quelconque présentant des couplages membrane-flexion, membrane-torsion et flexion-torsion. Dans le but d'effectuer une étude qui tiens en compte les différentes configurations de couplages, nous avons établi un programme informatique permettant, par la méthode des éléments finis, de calculer les solutions statiques de ces plaques (flèche, déformations, contraintes). Le programme développé peut être utilisé pour l'analyse des plaques minces ou épaisses constituées d'un matériau isotrope ou composite anisotrope (à base de fibres unidirectionnelles de différentes orientations et diverses séquences d'empilement). Afin de vérifier le degré d'exactitude des résultats obtenus par le présent programme, une étude comparative sera faite tout d'abord, des études paramétriques seront par la suite effectuées.

5.2 APLICATIONS

Nous considérons dans toutes les applications qui viennent, le cas d'une plaque rectangulaire de dimensions $a \times b \times h$, cette plaque est discrétisée en 15×15 éléments, soit au total 4805 degrés de liberté. Les résultats sont présentés en termes adimensionnels dans le but de faciliter l'étude comparative.

Les conditions aux limites suivantes sont utilisées,

Pour une plaque en appuis simples sur les quatre cotés,

- x=0, x=a $\quad u_0 = w_0 = \theta_y = 0$
- y=0, y=b $\quad v_0 = w_0 = \theta_x = 0$

Pour une plaque encastrée sur les quatre cotés

- $u_0 = v_0 = w_0 = \theta_x = \theta_y = 0$.

La plaque est soumise à une charge repartie uniforme *q*.

L'expression adimensionnelle suivante est utilisée :

$$w^* = w_0\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right) * \frac{E_2 h^3}{a^4 q_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5.1)$$

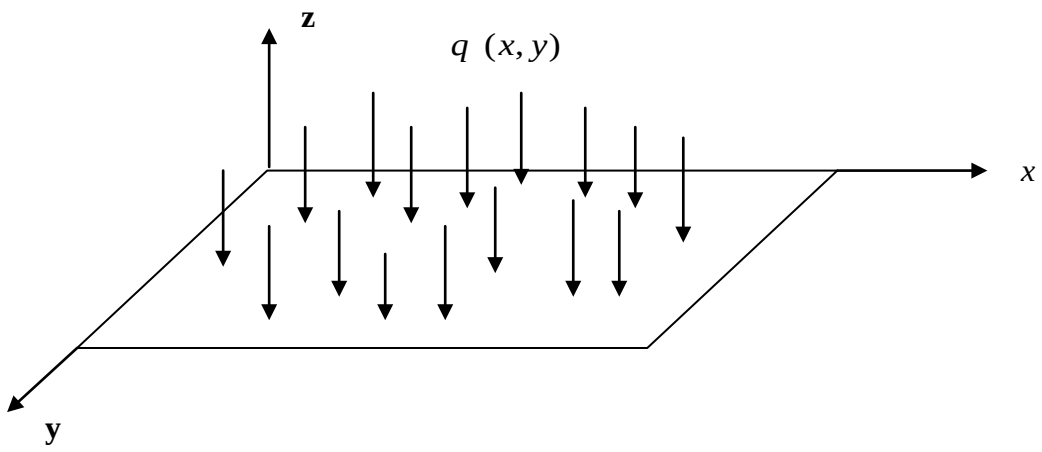


Figure 5.1 *Représentation d'une plaque soumise à une charge uniforme.*

Le matériau utilisé est un composite de caractéristiques mécaniques :

- E_1 = 210 GPa.
- $E_2 = E_3$ = 19 GPa.
- $G_{12} = G_{23} = G_{13}$ = 4.8 GPa.
- $\upsilon_{12} = \upsilon_{23} = \upsilon_{13} = 0.25$

5.2.1. VALIDATION :

a. Calcul de la flèche :

Dans cette application, l'effet de nombre de couches (*n*), de l'orientation de fibres (θ) et du rapport épaisseur/longueur (*a/h*) sur la déflexion au centre de la plaque (maximale) est examiné. La plaque est supposée carrée sur appuis simples. Le stratifié considéré est constitué de *n* couches équilibrés orientées suivant l'empilement (-θ/θ/-θ/θ…). Les valeurs de θ utilisées sont (θ=5° ,30° ,45°)

On trace la variation de la flèche en fonction du rapport *a/h* dans le cas de θ=45°. On remarque que la flèche adimensionnelle augmente avec le rapport *a/h*. elle augmente de sa valeur lorsqu'on passe de la situation des plaques épaisses vers la situation des plaques minces.(***Figure 5.2)***

Tableau 5.1: *flèches maximale adimensionnelle,* ***(w*),*** *en fonction du nombre de couches, l'orientation des fibres, et le rapport a/h. Plaque carrée simplement appuyée, empilement (-θ/θ/-θ/...), Charge uniforme répartie (n =2 à 10, n = nombre de couches).*

	$\theta=5^0$		$\theta=30^0$		$\theta=45^0$	
a/h	n=2	n=10	n=2	n=10	n=2	n=10
10	$0.674*10^{-9}$	$0.450*10^{-9}$	$0.133*10^{-8}$	$0.135*10^{-9}$	$0.127*10^{-8}$	$0.417*10^{-9}$
20	$0.259*10^{-8}$	$0.189*10^{-8}$	$0.653*10^{-8}$	$0.196*10^{-8}$	$0.490*10^{-8}$	$0.197*10^{-8}$
40	$0.138*10^{-7}$	$0.113*10^{-7}$	$0.321*10^{-7}$	$0.122*10^{-7}$	$0.272*10^{-7}$	$0.126*10^{-7}$
50	$0.251*10^{-7}$	$0.211*10^{-7}$	$0.560*10^{-7}$	$0.230*10^{-7}$	$0.500*10^{-7}$	$0.237*10^{-7}$
80	$0.951*10^{-7}$	$0.824*10^{-7}$	$0.196*10^{-6}$	$0.906*10^{-7}$	$0.190*10^{-6}$	$0.934*10^{-7}$
100	$0.12*10^{-6}$	$0.159*10^{-6}$	$0.368*10^{-6}$	$0.175*10^{-6}$	$0.365*10^{-6}$	$0.181*10^{-6}$

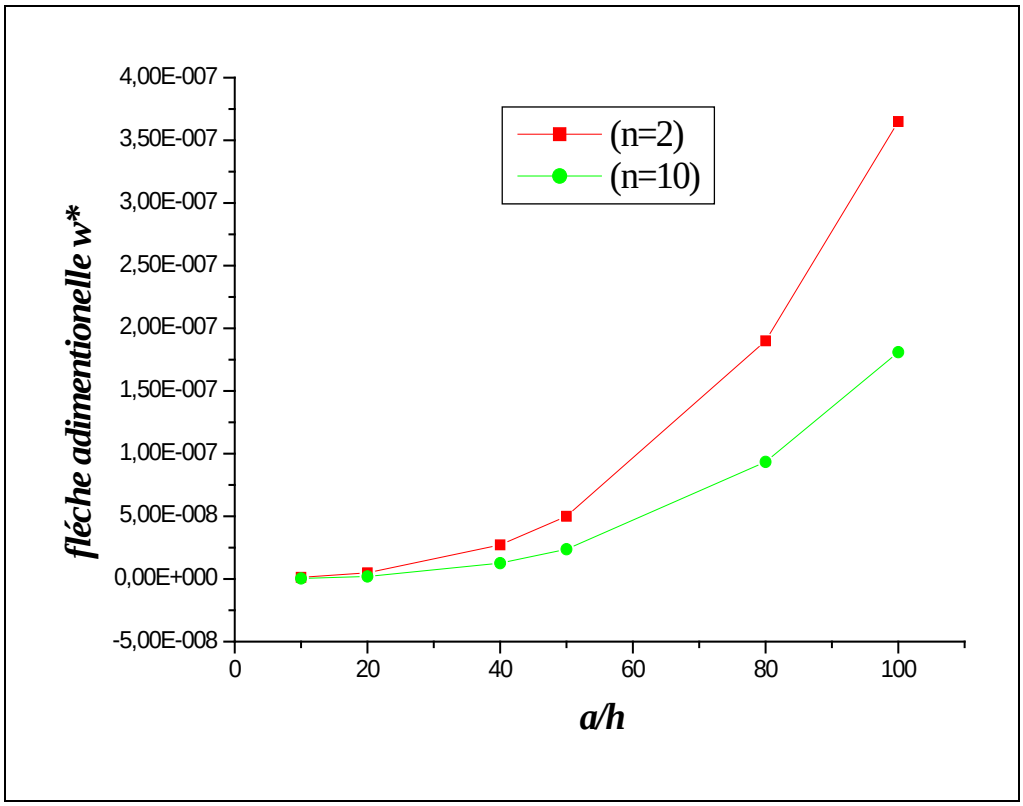


Figure 5.2 *Flèche maximale adimensionnelle* ***(*** w^* ***)*** *en fonction du rapport (a/h) n=2 et n=10, empilement (-θ/ θ) avec θ=45°, charge uniforme.*

b. Calcul des contraintes :

Afin de montrer l'efficacité du présent programme dans le calcul des contraintes, nous utilisons les mêmes données de l'application précédente pour calculer les contraintes normales et tangentielles maximales produites dans la plaque

Pour raisons de comparaison, nous exprimons les contraintes sous forme adimensionnelle comme suit :

$$\sigma_{xx}^{*}=\sigma_{xx}\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{h}{2}\right)\frac{h^2}{b^2q_0}\quad,\sigma_{yy}^{*}=\sigma_{yy}\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{h}{2}\right)\frac{h^2}{b^2q_0}\quad,\ \sigma_{xy}^{*}=\sigma_{xy}\left(0,0,\frac{h}{4}\right)\frac{h}{bq_0},$$

$$\sigma_{yz}^{*}=\sigma_{yz}\left(\frac{a}{2},0,0\right)\frac{h}{bq_0}\qquad,\sigma_{xz}^{*}=\sigma_{xz}\left(0,\frac{b}{2},0\right)\frac{h}{bq_0}\qquad(5.3)$$

Les résultats concernent les contraintes normales σ_{xx},σ_{yy} et la contrainte tangentielle σ_{xy} Une bonne exactitude est obtenue sur les valeurs calculées.

Tableau 5.2: *contraintes adimensionnelles en fonction de nombre du couches, l'orientation des fibres, et le rapport a/h, pour une plaque carrée simplement appuyée, empilement (-θ/θ/-θ/...), Charge transversale uniforme réparti (n=2, n = nombre de couches).*

a/h	θ=5^0			θ=30^0			θ=45^0		
	σ_{xx}^*	σ_{yy}^*	σ_{xy}^*	σ_{xx}^*	σ_{yy}^*	σ_{xy}^*	σ_{xx}^*	σ_{yy}^*	σ_{xy}^*
10	29.301	13.575	1.454	40.759	30.582	10.845	22.473	22.473	15.002
20	145.799	34.047	6.315	105.828	87.035	38.489	82.416	82.416	55.835
40	617.48	105.011	27.545	440.163	240.652	168.51	329.55	329.55	214.149
50	970.411	57.594	43.463	742.407	356.497	266.441	552.48	5552.485	334.873
80	24993	84.954	112.392	2062	830.262	687.706	1385	1385	855.555
100	3909	594.691	176.002	3297	1266	1074	2129	2129	1335

La **figure 5.3** montre la variation des contraintes normales σ_{xx}, σ_{yy} en fonction du rapport *a/h* (*a/h* varié de 10 à 100). On remarque que les contraintes normales maximale σ_{xx}, σ_{yy} augmente avec l'augmentation du rapport *a/h*. Elle se stabilise lorsque ce rapport tend vers des valeurs élevées. On remarque aussi que les courbes des contraintes σ_{xx}^* et σ_{yy}^* sont confondues.

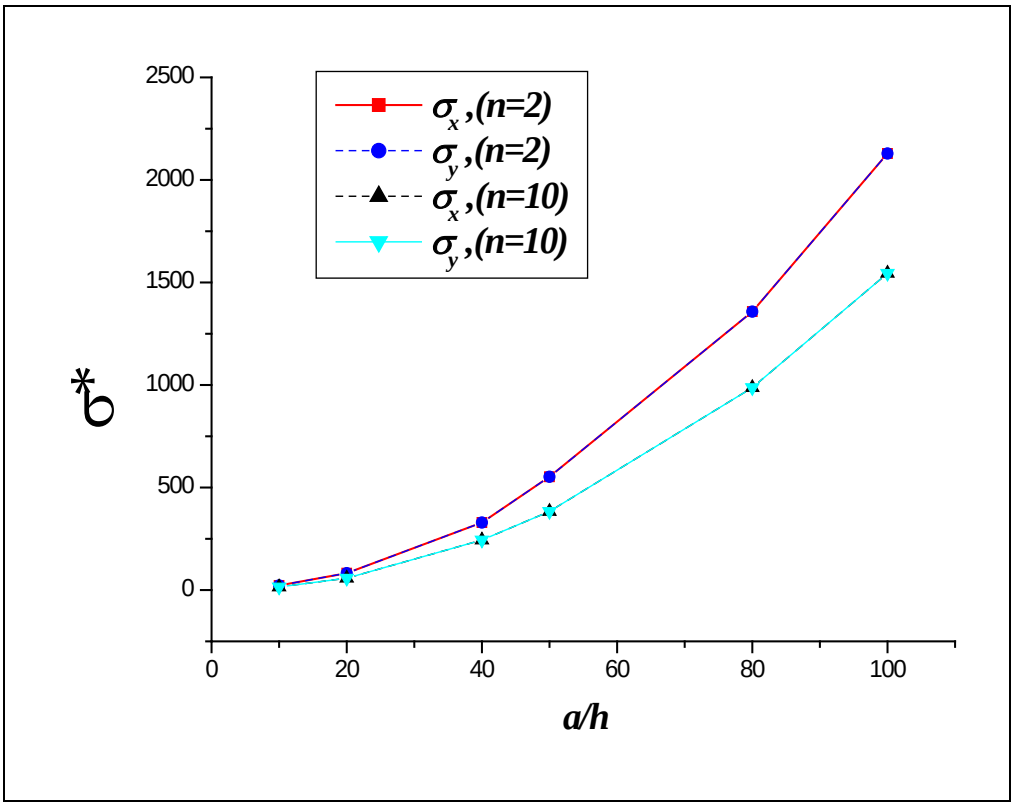


Figure 5.3 *Variation des contraintes maximales en fonction du rapport (a/h) pour une plaque carrée sur appuis simples n=2 et n=10, empilement (-θ/ θ) avec θ=45°,*

5.2.2. INFLUENCE DU NOMBRE DES COUCHES

Dans cette application, le cas d'une plaque carrée simplement appuyée est considéré, la plaque est constituée de *n* couches équilibrées orientées suivant l'empilement (-θ/θ/-θ/θ…). Le rapport *a/h* est pris égal à 20

Les résultats obtenus pour la flèche maximale sont tracé sur **la figure 5.4**. Ces résultats sont calculés pour des valeurs de n entre 2 et 20 couches et sont dimensionnalités par **l'expression 5.1**

On constate que la flèche décroit avec l'augmentation de nombre de couches, elle chute de plus de 40% en passant de 2 couches à 10 couches, puis elle se stabilise autour d'une seule valeur en dépassant le nombre de 11 couches .

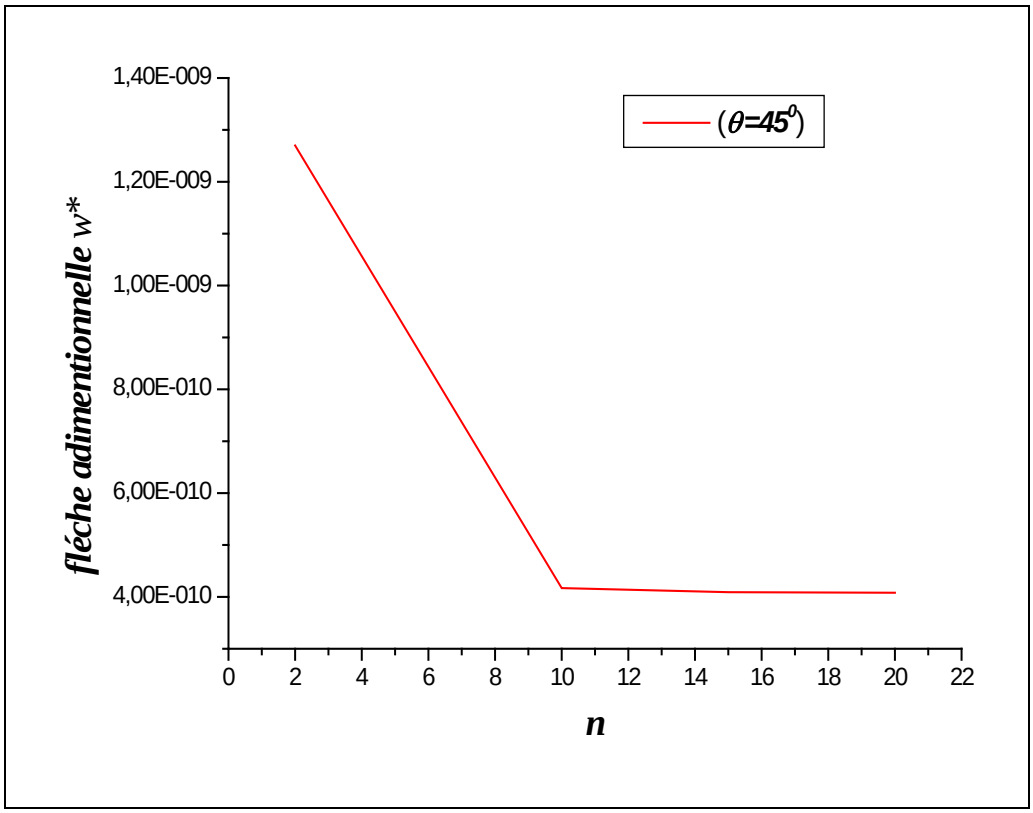


Figure 5.4 *Influence du nombre de couches "n" sur la flèche maximale adimensionnelle (w^*) Plaque carrée sur appuis simples, charge uniforme, empilement* (θ/-θ/θ/-θ…).

Sur **la figure 5.5** on montre l'effet du nombre de couches "*n*" sur les contraintes maximales σ_{xx}^*, σ_{yy}^*, σ_{xy}^*. Les courbes obtenues indiquent que les contraintes maximales se décroissent avec l'augmentation du nombres de couches jusqu'à *n*=10, elles chutent de plus de 65 % de ses valeurs lorsqu'on passe de la situation des plaques épaisses vers la situation des plaques minces, puis elles tendent par la suite vers une valeur constante pour *n*>10. On remarque aussi que les courbes des contraintes σ_{xx}^* et σ_{yy}^* sont confondues.

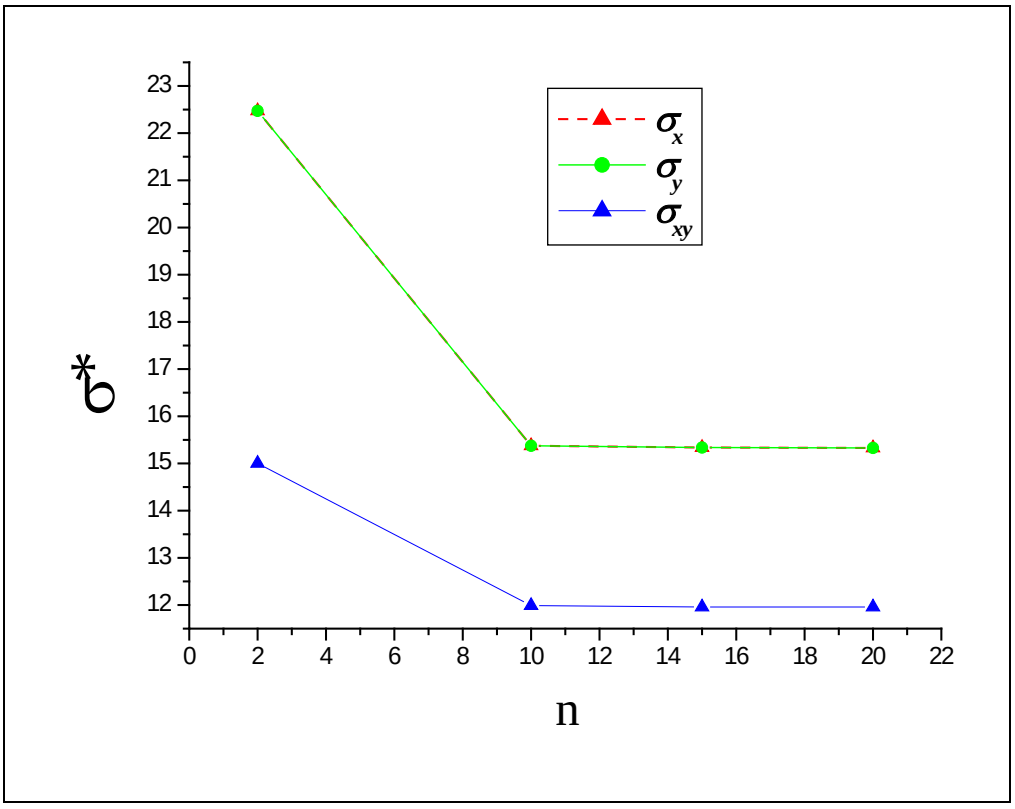


Figure 5.5 *Influence du nombre de couches sur les contraintes maximales d'une plaque carrée simplement appuyée constituée d'un stratifié équilibré antisymétrique (-45°/45°/-45°…)*

5.2.3. Influence de l'orientation des fibres

Nous examinons dans cette application l'effet de l'orientation des fibres sur la déflexion maximale d'une plaque carrée sur appuis simples. La plaque est constituée d'une seule couche orientée suivant θ. l'angle d'orientation varié de 0° à 90°. Le rapport *a/h* est pris égal à 20.

La variation de la flèche adimensionnelle w^* en fonction des orientations des fibres, pour les différentes orientations des fibres, est illustrée sur **la figure 5.6.** On remarque que la flèche w^* varié symétriquement autour de θ=45°, elle augmente avec l'augmentation de l'angle θ jusqu'à 45°. Les valeurs minimales sont obtenues lorsque la direction des fibres coïncide avec les directions *x* et *y* (0° et 90°).

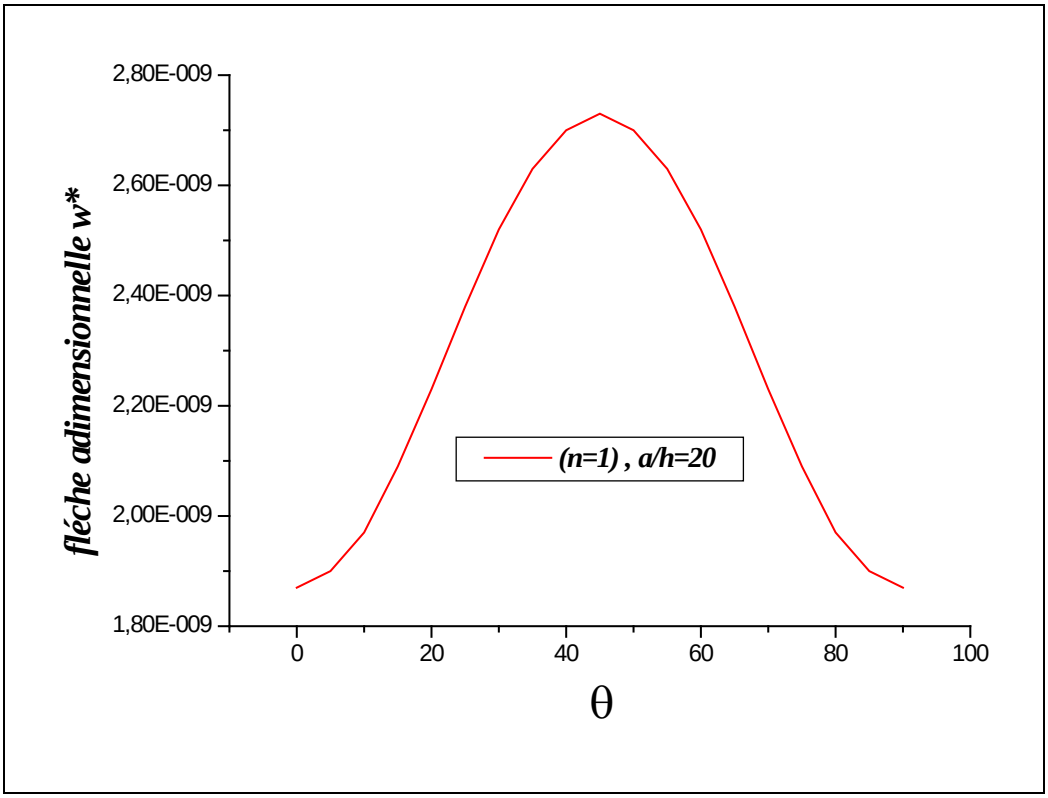


Figure 5.6 *variation de la flèche maximale en fonction de l'angle d'orientation des fibres pour une plaque carrée simplement appuyée à une seule couche sous une charge uniforme.*

Dans cette section, nous examinons la variation des contraintes maximales adimensionnelles en fonction de l'orientation des fibres pour une plaque rectangulaire de rapport *a/h=20.* La plaque est constituée d'une seule couche orthotrope. Les conditions aux limites utilisées sont celles de l'appui simple.

La figure 5.7 représente la variation des contraintes adimensionnelles en fonction de l'angle d'orientation des fibres. Les résultats obtenus pour les contraintes montrent que ces dernières varient symétriquement autour de θ=45°. Les résultats obtenus pour la contrainte σ_{xx}^{*}, sont symétrique à ceux de la contrainte σ_{yy}^{*}. On remarque aussi que les contraintes tangentielles σ_{xy}^{*} varient symétriquement autour de θ=45°,

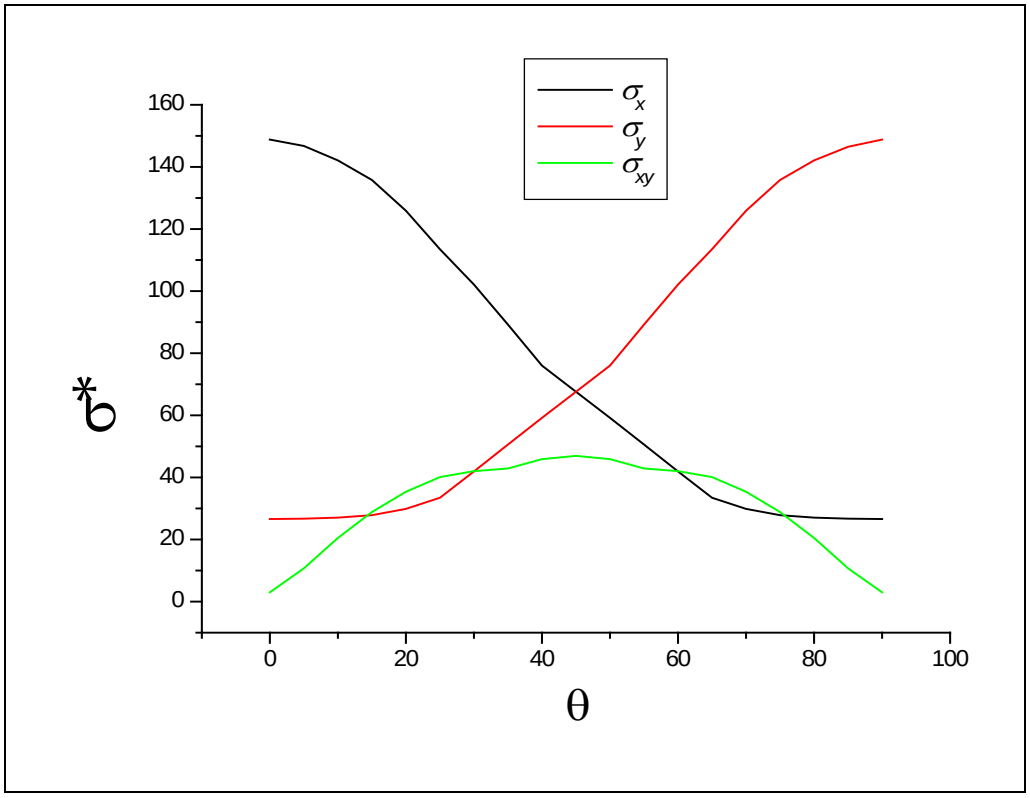


Figure 5.7 *Variation des contraintes normales et tangentielles en fonction de l'angle d'orientation des fibres pour une plaque carrée simplement appuyée à une seule couche sous une charge uniforme*

5.2.4. Influence de la séquence d'empilement

Nous considérons quatre types de stratifications (0° /90° /90° /0°) , (0° /90° /0° /90°), (45° /-45° /-45° /45°) et (0° /30° /45° /90°), d'une plaque carrée simplement appuyée. Les trois premiers types sont largement utilisés dans la pratique, car il assure certain découplage entre les déformations en membrane, en flexion et en torsion. Le dernier type est un stratifié quelconque. Le rapport *a/h* varié de 2 à 100.

Les résultats obtenus sont présentés sur **la figure 5.8**. Ils sont exprimés en terme adimensionnel. On constate que la déflexion maximale adimensionnelle augmente avec le rapport a/h, ceci est valable pour les quatre cas étudiés. Aussi, on observe que la flèche adimensionnelle est plus grand dans le cas des stratifiés quelconques comparativement aux

autres cas, par contre, la flèche adimensionnelle obtenue dans le cas de stratifié équilibré est la plus faible devant les autres types de stratification.

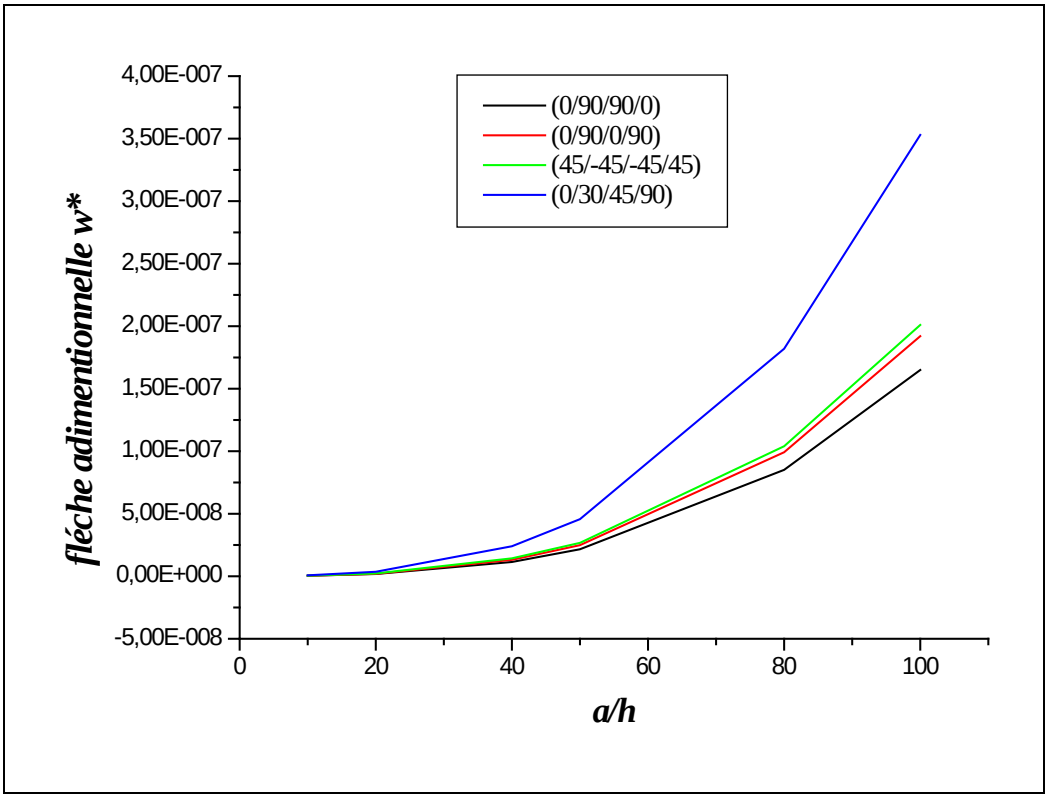


Figure 5.8 *Influence de la séquence d'empilement sur la flèche maximale (w^*) pour une plaque carrée simplement appuyée sous une charge uniforme.*

Nous considérons quatre types de stratifications (0° /90° /90° /0°), (0° /90° /0° /90°), (45° /-45° /-45° /45°) et (0° /30° /45° /90°), d'une plaque carrée simplement appuyée.

Les résultats obtenus sont présentés sur **la figure 5.9**. Ils sont exprimés en terme adimensionnel. On constate que la contrainte maximale adimensionnelle augmente avec le rapport a/h, ceci est valable pour les quatre cas étudiés. Aussi, on observe que la contrainte adimensionnelle est plus grand dans le cas des stratifiés quelconques comparativement aux autres cas, par contre, la contrainte adimensionnelle obtenue dans le cas de stratifié équilibré est la plus faible devant les autres types de stratification.

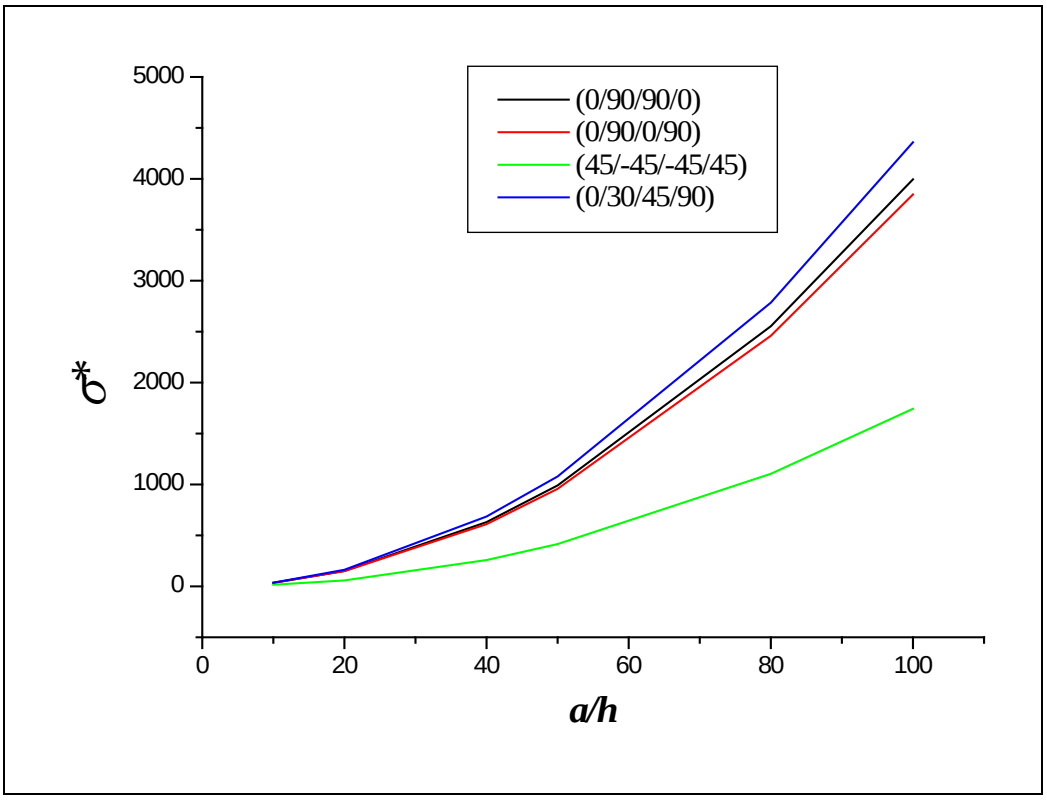


Figure 5.9: *Influence de la séquence d'empilement sur la contrainte maximale* σ_{xx}^{*} *pour une plaque carrée simplement appuyée sous une charge uniforme.*

5.2.5. Influence de rapport géométrique (*a/b*) de la plaque

Dans cette application, l'effet du rapport longueur / largeur de la plaque (*a/b*) sur la flèche maximale est examiné. La plaque rectangulaire est supposée sur appuis simples, elle est constituée d'un stratifié composé de deux couches de séquence d'empilement (0° /90°) le rapport (*a/h*) est pris égal à 10.

La figure 5.10 illustre la variation de la flèche maximale adimensionnelle (w^{*}) en fonction du rapport *a/b* (*a/b* varié de 2 à 14). On remarque que la flèche adimensionnelle maximale (w^{*}) décroit avec l'augmentation du rapport *a/b*. On remarque que la flèche adimensionnelle décroit avec le rapport *a/h*. Elle se stabilise lorsque ce rapport tend vers des valeurs élevées.

Sur **la figure 5.11**, on montre aussi la variation des contraintes normales σ_{xx}^{*} et σ_{yy}^{*} en fonction du rapport *a/b*. on remarque que la contrainte σ_{yy}^{*} est la plus affectée par ce rapport.

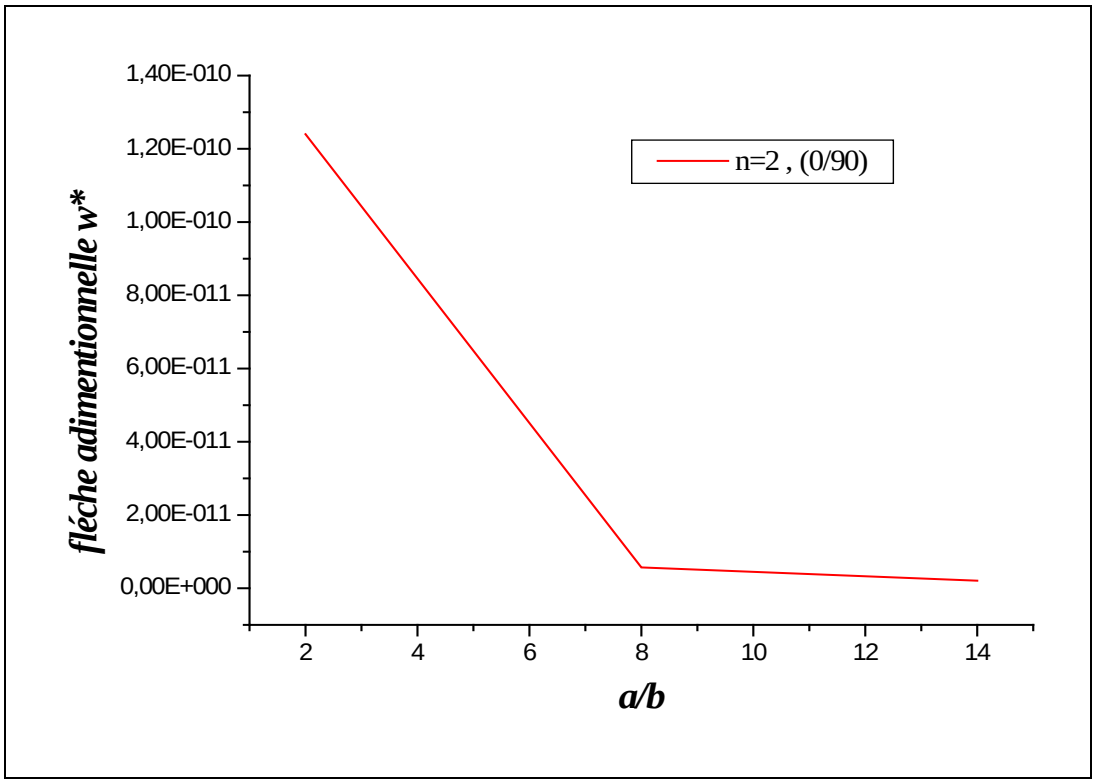


Figure 5.10 *Influence du rapport a/b sur la flèche maximale (w^*), plaque carrée sur appuis simples empilement (0° /90°). Charge uniforme.*

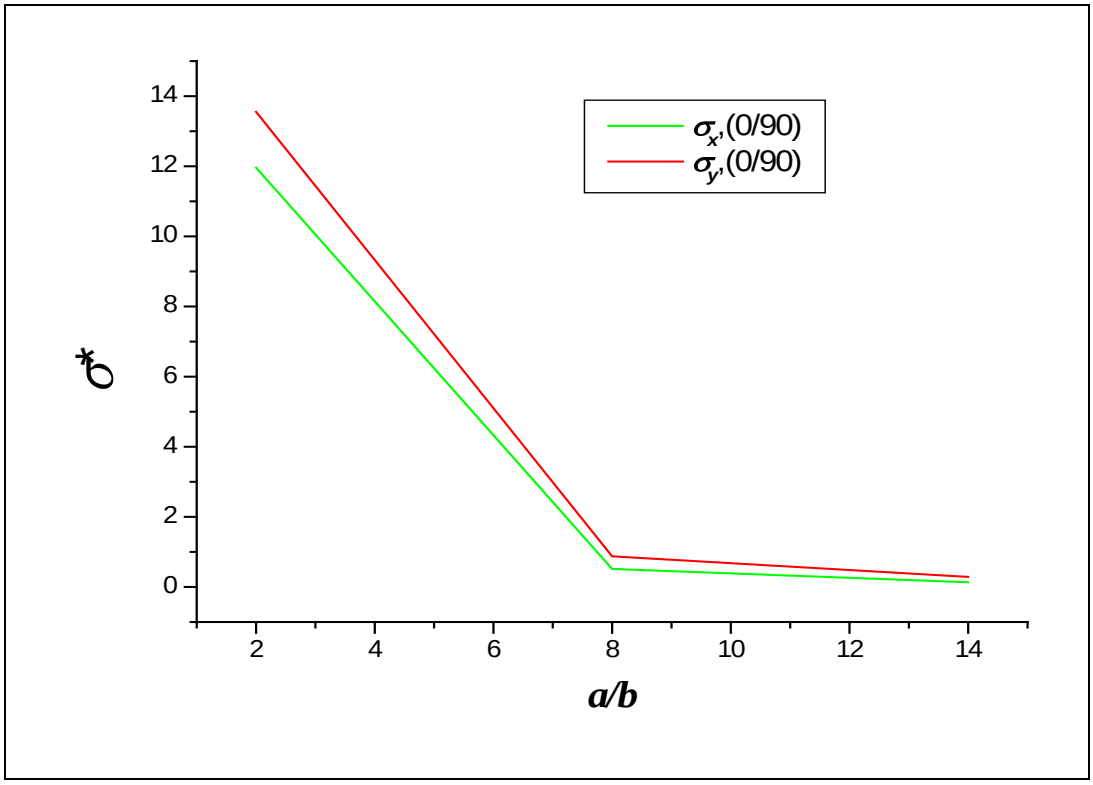


Figure 5.11 *Influence du rapport a/b sur les contraintes normales σ_{xx}^* et σ_{yy}^* , plaque carrée sur appuis simples empilement (0° /90°). Charge uniforme.*

5.2.6. Influence de l'anisotropie du matériau E_1/E_2

Dans le but d'examiner l'influence de l'anisotropie du matériau E_1/E_2. Nous considérons une plaque carrée simplement appuyée du rapport a/h=10, constituée de deux couches orientées suivant l'empilement (0°/90°). L'effet de l'anisotropie du matériau sera examiné pour des rapports E_1/E_2 variant de 2 à 100.

La variation de la flèche maximale adimensionnelle (w^*), en fonction du rapport E_1/E_2, est reportée sur **la figure 5.12.** On remarque que la flèche (w^*) augmente avec l'augmentation du rapport E_1/E_2. Elle se stabilise lorsque ce rapport tend vers des valeurs élevées, l'augmentation devient moins importante.

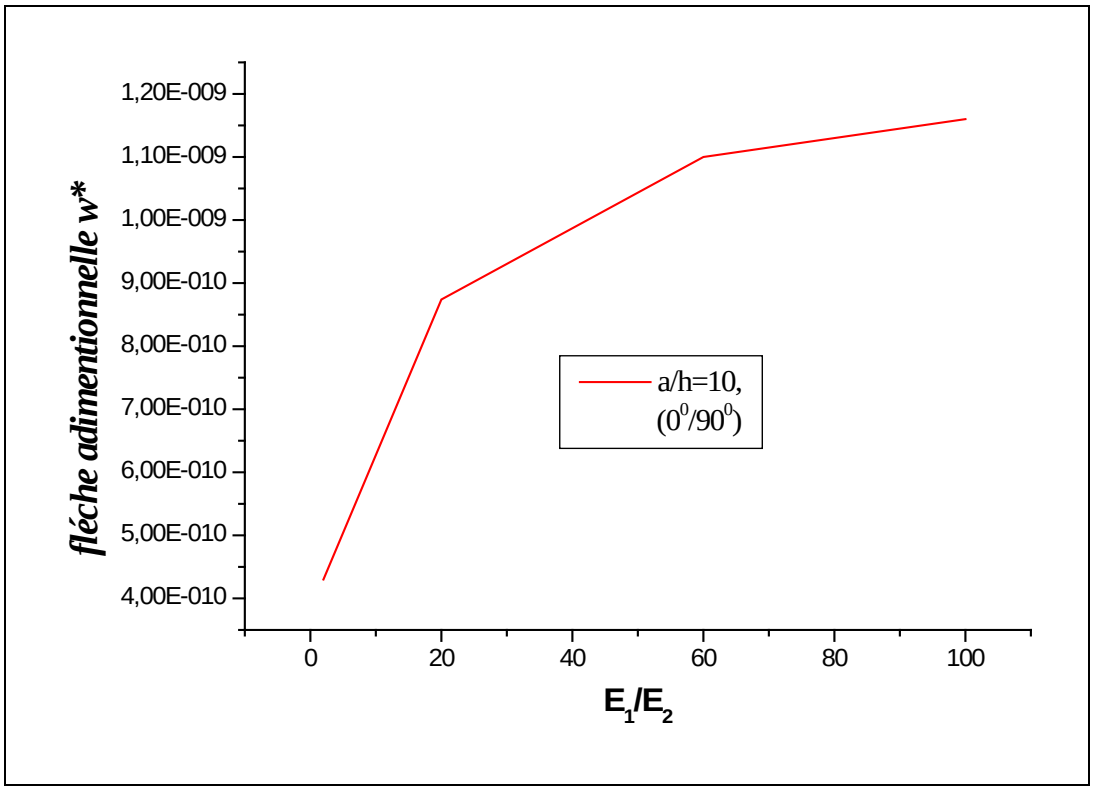


Figure 5.12 *Influence du rapport a/b sur les contraintes normales* σ_{xx}^* et σ_{yy}^* *, plaque carrée sur appuis simples empilement (0° /90°). Charge uniforme.*

Les résultats obtenus pour les contraintes $\sigma_{xx}^{*}, \sigma_{yy}^{*}$ σ_{xy}^{*} sont présentés sur **la figure 5.13**. Les rapports E_1/E_2 considérés varient de 2 à 100. On observe sue les contraintes sont maximales pour le cas isotrope (E_1/E_2 =1). Une augmentation remarquable des contraintes en fonction de l'anisotropie dans l'intervalle limite [0 20], puis elles se diminuent lorsque ce rapport tend vers des valeurs élevées.

On observe une légère variation de la contrainte tangentielle.

Ceci permet de dire que l'anisotropie du matériau a un effet positif sur la rigidité de la plaque.

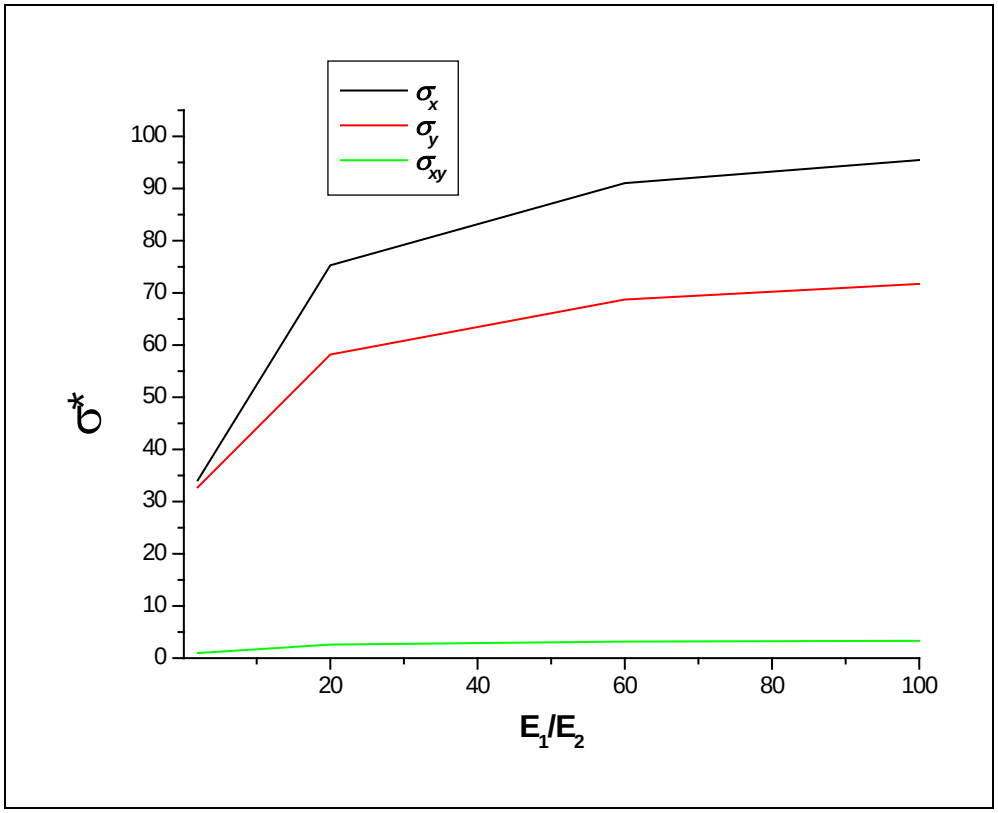


Figure 5.14: *Influence de l'anisotropie de matériau sur le contrainte maximale (σ^{*}) sous l'effet d'une charge répartie sinusoïdale, pour une plaque carrée sur appuis simples*

5.2.7. Influence des conditions aux limites

Afin d'étudier l'influence des conditions aux limites sur la déflexion maximale, les cas de fixation suivantes sont utilisées :

- SSSS : simplement appuyée sur les quatre côtés
- CCCC : encastrée sur les quatre côtés
- CLCL : Encastrée – Libre – encastrée – Libre

La plaque étudier est de forme carrée, les stratifications suivantes sont considérées :

- Equilibrée symétrique (45°/-45°/-45°/45°)
- Croisée antisymétrique (0°/90°/0°/90°)
- Croisée (0°/90°)

Les figures 5.15 et 5.16 montrent la variation de la flèche maximale adimensionnelle en fonction du rapport *a/h*. Une nette décroissance de la flèche adimensionnelle en fonction de l'accroissement du rapport *a/h* est remarquée dans la zone des plaques épaisses (*a/h*<10), l'augmentation du rapport *a/h* n'a ensuite aucun effet remarquable sur la flèche. Aussi, on constate que la flèche dans le cas où la plaque est encastrée sur ses quatre côtés est moins faible que dans les autres cas. Ceci est valable pour tous les types de stratification considérés.

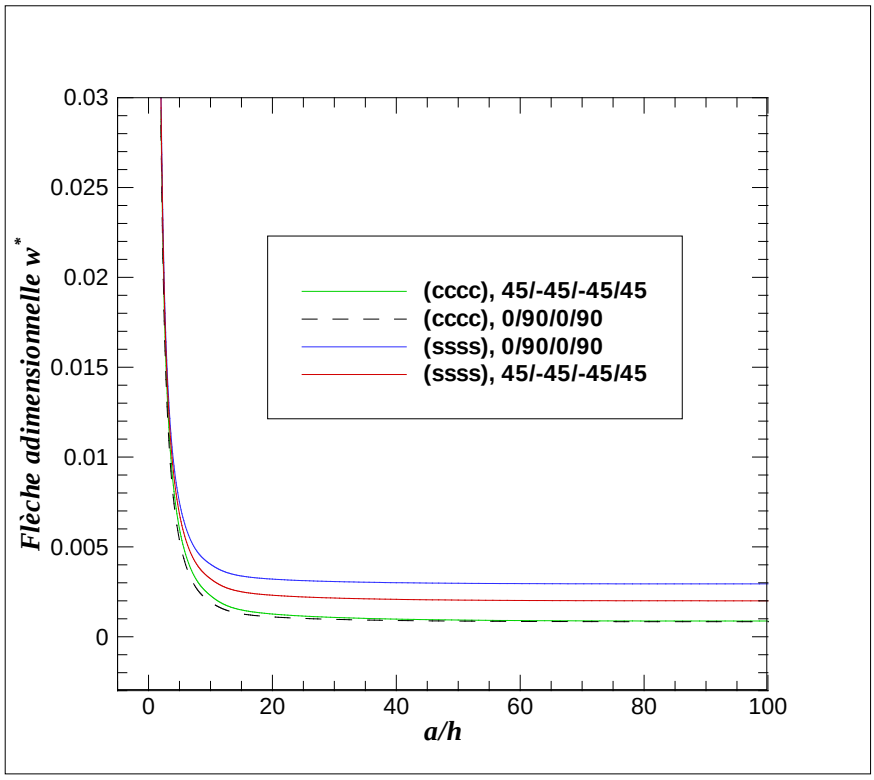


Figure 5.15 *Variation de la flèche maximale (w^*) en fonction de rapport (a/h), pour différentes conditions aux limites. Plaque carrée sous une charge sinusoïdale*

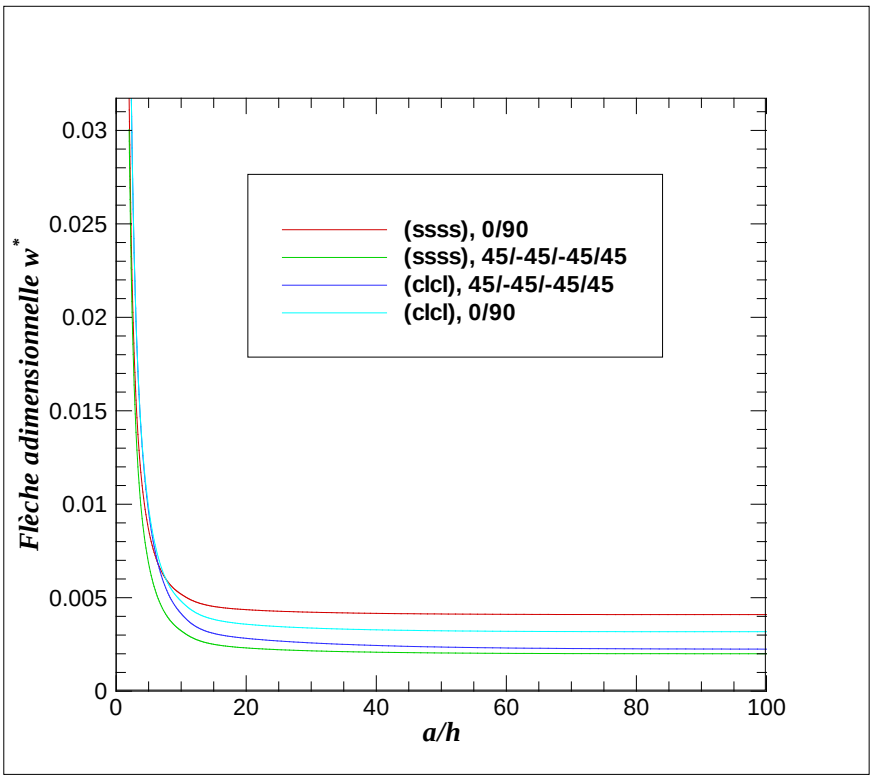


Figure 5.16 *Variation de la flèche maximale (w^*) en fonction de rapport (a/h), pour différentes conditions aux limites. Plaque carrée sous une charge sinusoïdale*

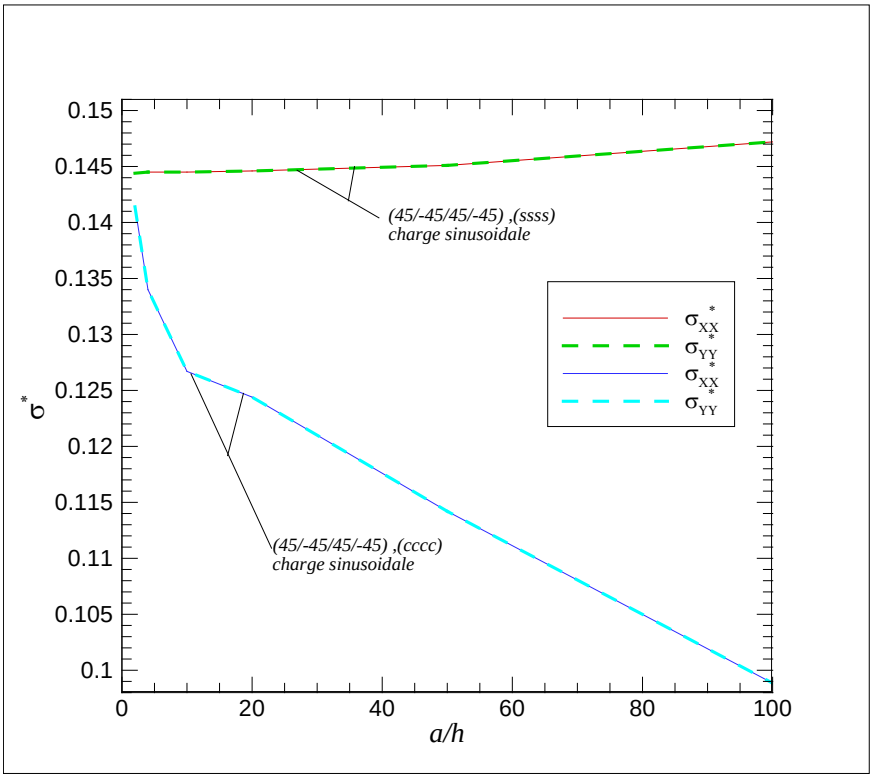


Figure 5.17 *Variation des contraintes maximales $\sigma_{xx}^{*}, \sigma_{yy}^{*}$ en fonction de rapport (a/h), pour différentes conditions aux limites. Plaque carrée sous une charge sinusoïdale*

La figure 5.17 montre l'effet des conditions aux limites sur les contraintes $\sigma_{xx}^{*}, \sigma_{yy}^{*}$ où elles sont maximales lorsque les conditions aux limites utilisées sont celles de l'appuis simple.
Aussi, on observe que la contrainte σ_{yy}^{*} est très affectée par le rapport *a/h.*

5.2.8. EFFET DU TYPE DE LA CHARGE

Nous examinons dans ce paragraphe l'effet du type de la charge sur les déflexions et les contraintes maximales dans le cas d'une plaque carré sur appuis simples. Deux types de chargement sont considérés (*i*) charge uniformément répartie d'intensité $q(x, y) = cte = q_0$ et (*ii*) charge répartie suivant une fonction sinusoïdale de la forme $q(x, y) = q_0 \cos\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{b}$.
avec $q_0 = 10$
Les deux cas suivants de starifications sont utilisés :

- stratifié croisé antisymétrique (0°/90°/0°/90°) et
- stratifié équilibré symétrique (45°/-45°/-45°/45°)

Les résultats obtenus pour la flèche maximale et les contraintes maximales $\sigma_{xx}^{*}, \sigma_{yy}^{*}$ σ_{xy}^{*} sont respectivement présentés sur les figures 5.18 et 5.19 . Ces courbes ont été tracés pour des rapports *a/h* varient de 2 à 100. On voit bien que la plaque est plus affectée par la charge constante q_0 que par la charge sinusoïdale. L'écart est bien visible dans la représentation de la flèche.

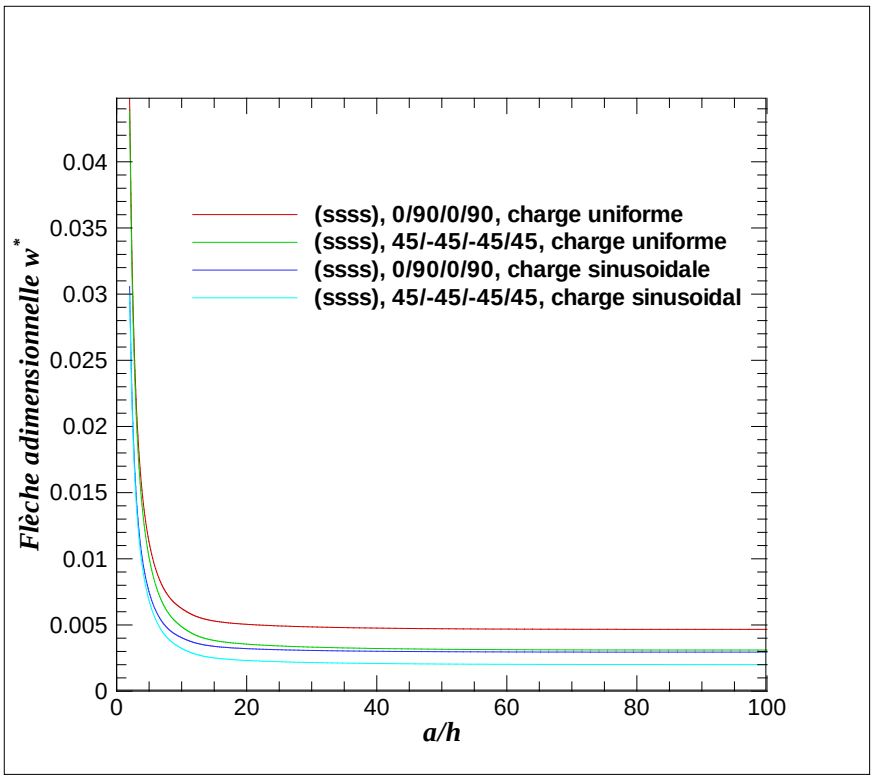


Figure 5.18 *Effet du type de charge sur la flèche maximale (w^*)*

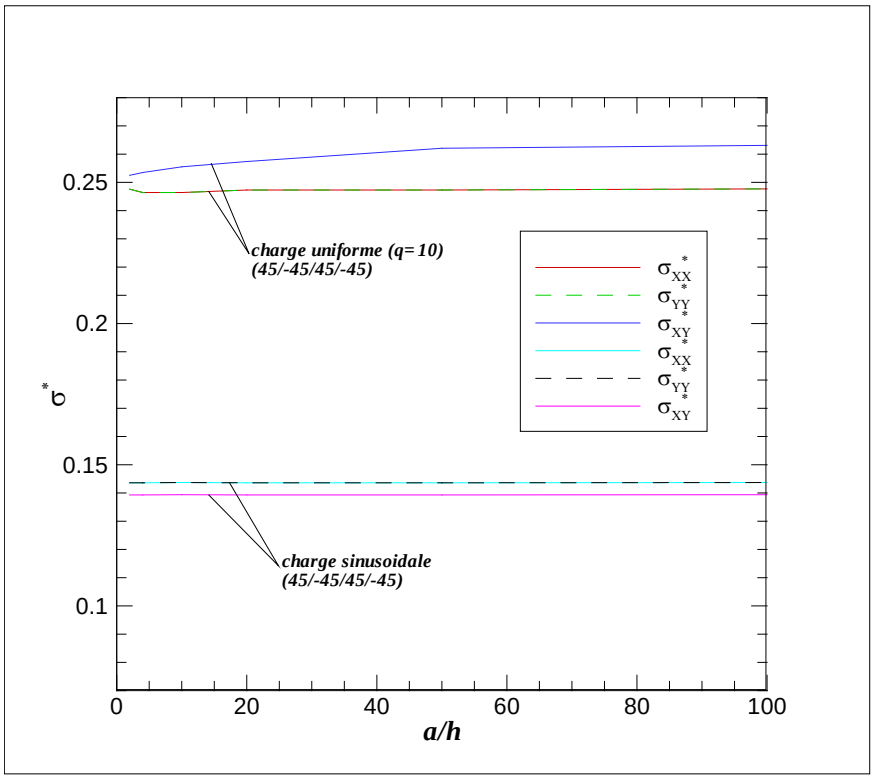


Figure 5.19 *Effet du type de charge sur les contraintes normales tangentielles*

5.2.9. CALCUL DES CONTRAINTES INTERLAMINAIRES

Les contraintes interlaminaires peuvent être calculées à l'aide des équations (2.34) présenté au chapitre 2. Dans cette section, nous allons traiter le cas d'une plaque carrée sur appuis simples constituée de quatre couches d'épaisseur égales. Le rapport *a/h* est pris égal à 4. La plaque est supposée soumise à une charge répartie distribuée suivant une forme sinusoïdale. Deux types d'empilement sont considérés ; croisé antisymétrique (0°/90°/0°/90°) et équilibré antisymétrique (45°/-45°/45°/-45°)

Les figures 5.20 à 5.29 représentent l'évolution des contraintes σ^*_{xx}, σ^*_{yy}, τ^*_{xy}, τ^*_{xz}, τ^*_{yz}, suivant l'épaisseur de la plaque. Sur les mêmes courbes on représente aussi les contraintes normales σ^*_{11}, σ^*_{22}, τ^*_{12}, τ^*_{13}, τ^*_{23} exprimées dans le repère local (1,2,3).

Un examen global de ces courbes permet de tirer les constatations suivantes :

- les contraintes obtenues dans le cas du stratifié (0°/90°/0°/90°) sont plus grande que celles du stratifié (45°/-45°/45°/-45°).
- Les contraintes σ^*_{xx}, σ^*_{yy}, σ^*_{11} et σ^*_{22} varient d'une façon linéaire suivant l'épaisseur du stratifié, avec la présence de discontinuités entre les plis,
- Les contraintes τ^*_{xz}, τ^*_{yz}, τ^*_{13} et τ^*_{23} sont constantes à travers l'épaisseur dans le cas du stratifié (45°/-45°/45°/-45°). Par contre, une discontinuité des contraintes est obtenue dans le cas des stratifié (0°/90°/0°/90°)

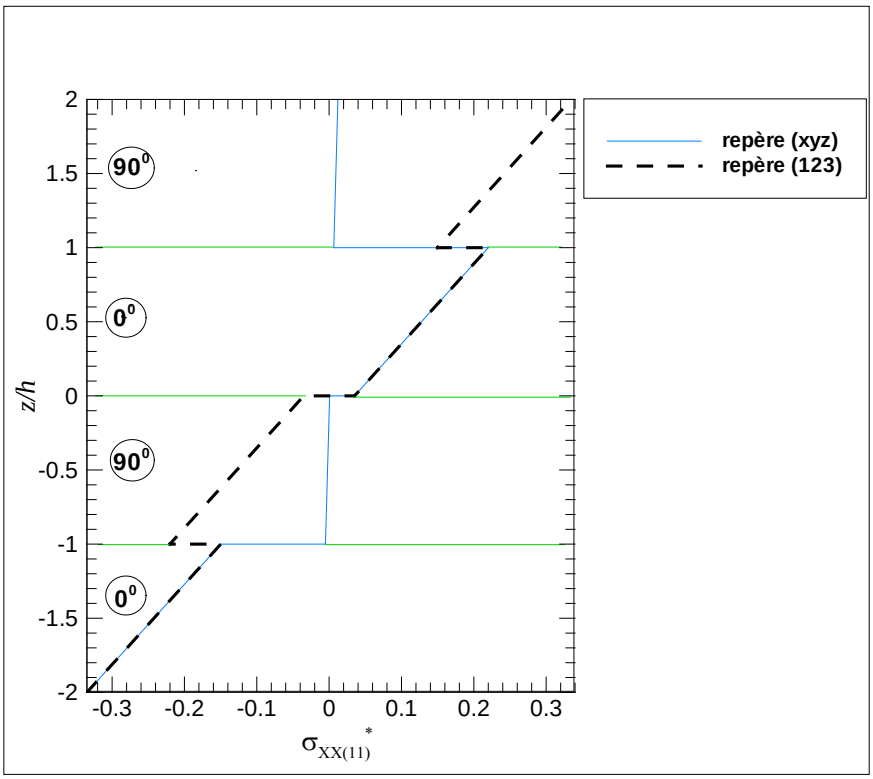


Figure 5.20: *Distribution des contraintes* σ_{xx}^{*} , σ_{11}^{*} *à travers l'épaisseur du stratifié*

Plaque carrée sur appuis simples, empilement (0/90/0/90)

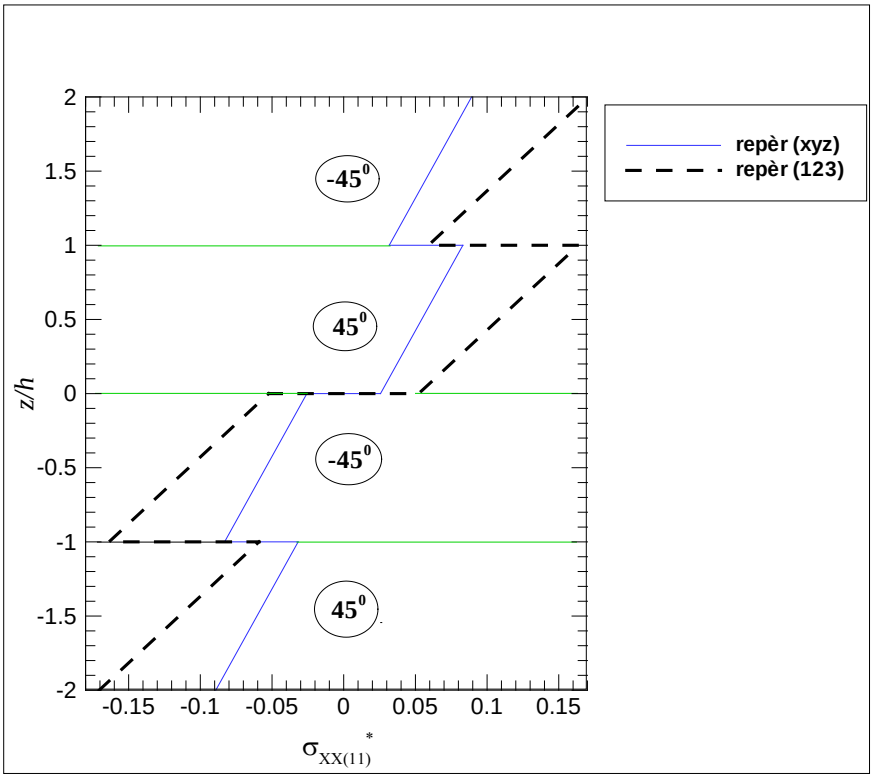


Figure 5.21: *Distribution des contraintes* σ_{xx}^{*} , σ_{11}^{*} *à travers l'épaisseur du stratifié*

Plaque carrée sur appuis simples, empilement (45/-45/45/-45)

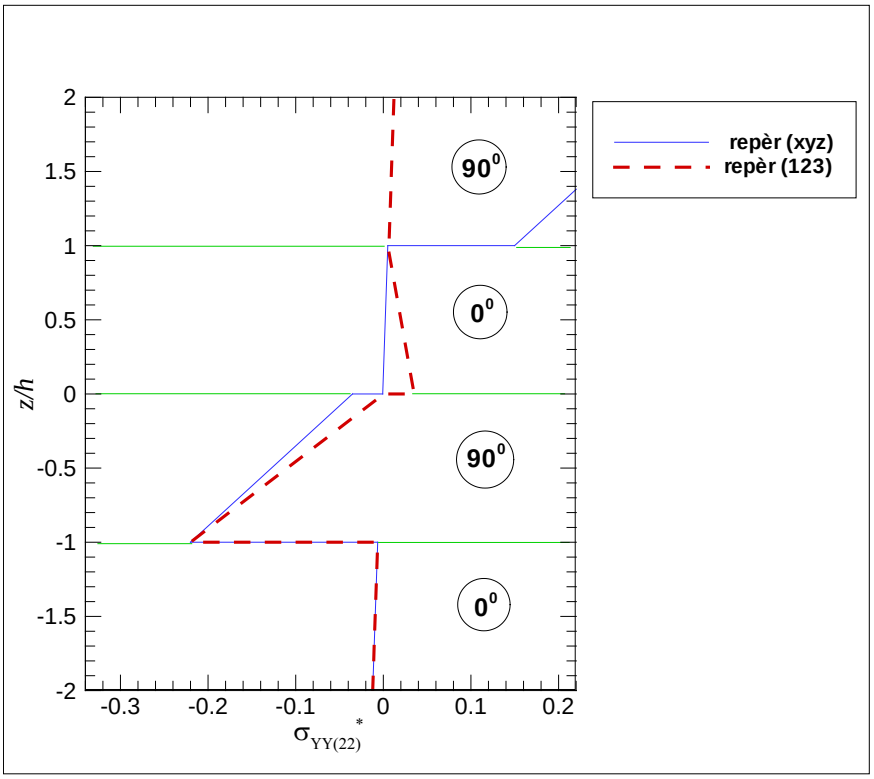


Figure 5.22: *Distribution des contraintes* σ^*_{yy} σ^*_{22} *à travers l'épaisseur , appui simple ,(0/90/0/90) stratifié soumis à une charge répartie sinusoïdale distribués*

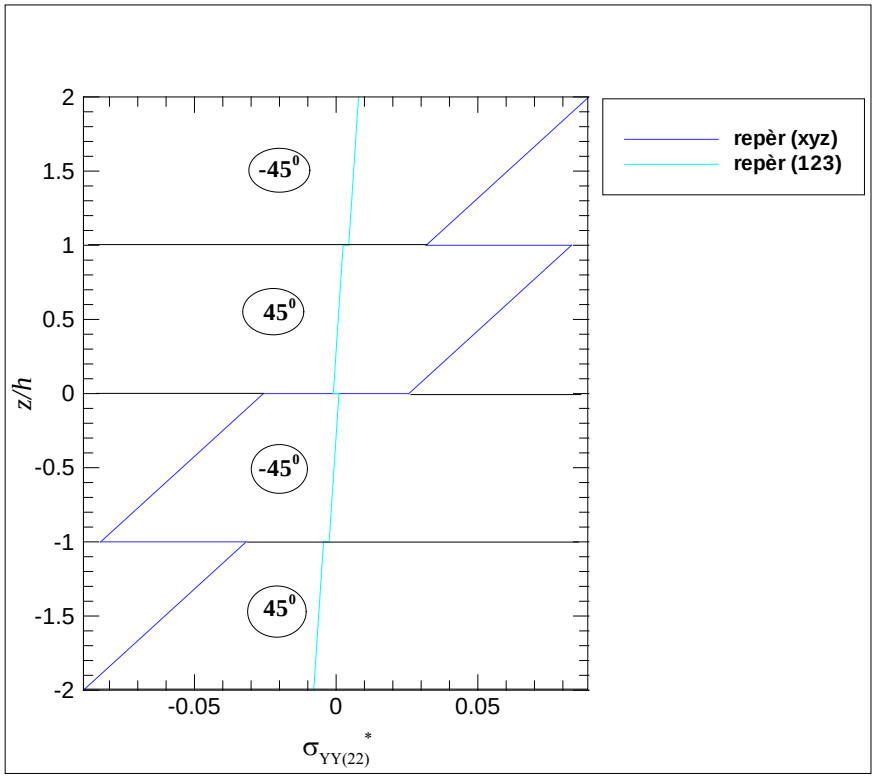


Figure 5.23: *Distribution des contraintes* σ^*_{yy} σ^*_{22} *à travers l'épaisseur, appui simple, (45/-45/45/-45) stratifié soumis à une charge répartie sinusoïdale*

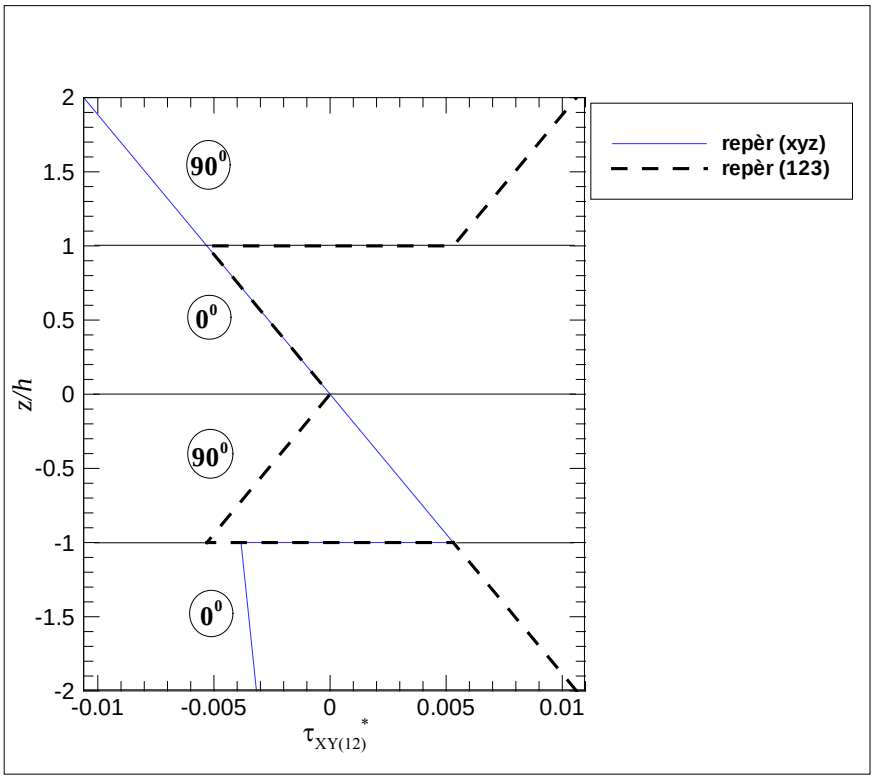


Figure 5.24: *Distribution des contraintes tangentielles* τ_{12}^{*} τ_{xy}^{*} *à travers l'épaisseur, appui simple, (0/90/0/90) stratifiés soumis à une charge répartie sinusoïdale*

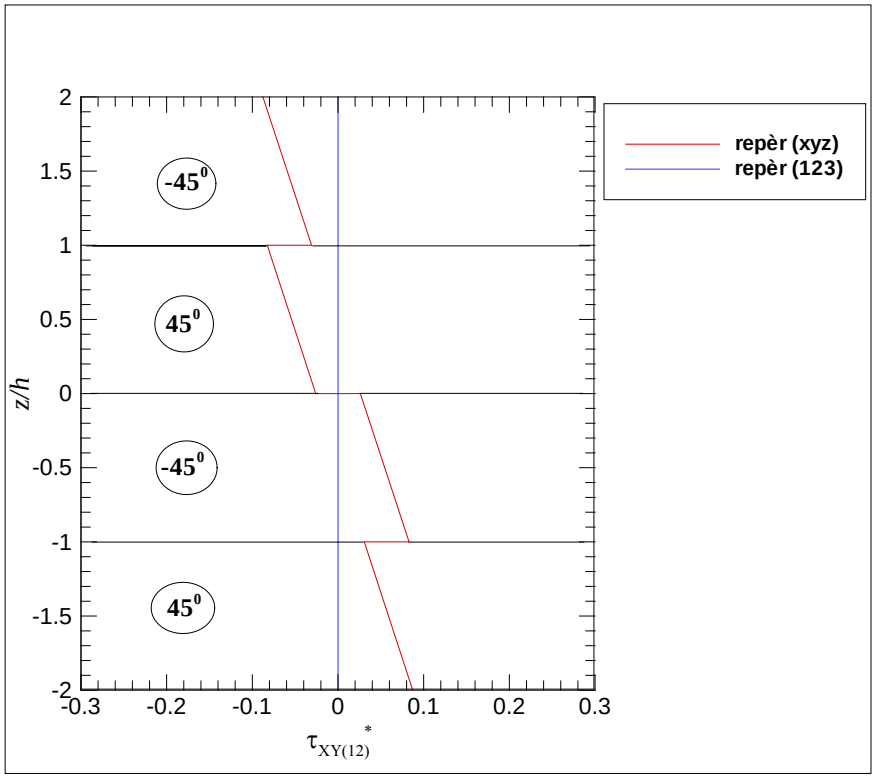


Figure 5.25: *Distribution des contraintes tangentielles* τ_{xy}^{*} τ_{12}^{*} *à travers l'épaisseur , appui simple, (45/-45/45/-45) stratifiés soumis à une charge répartie sinusoïdale*

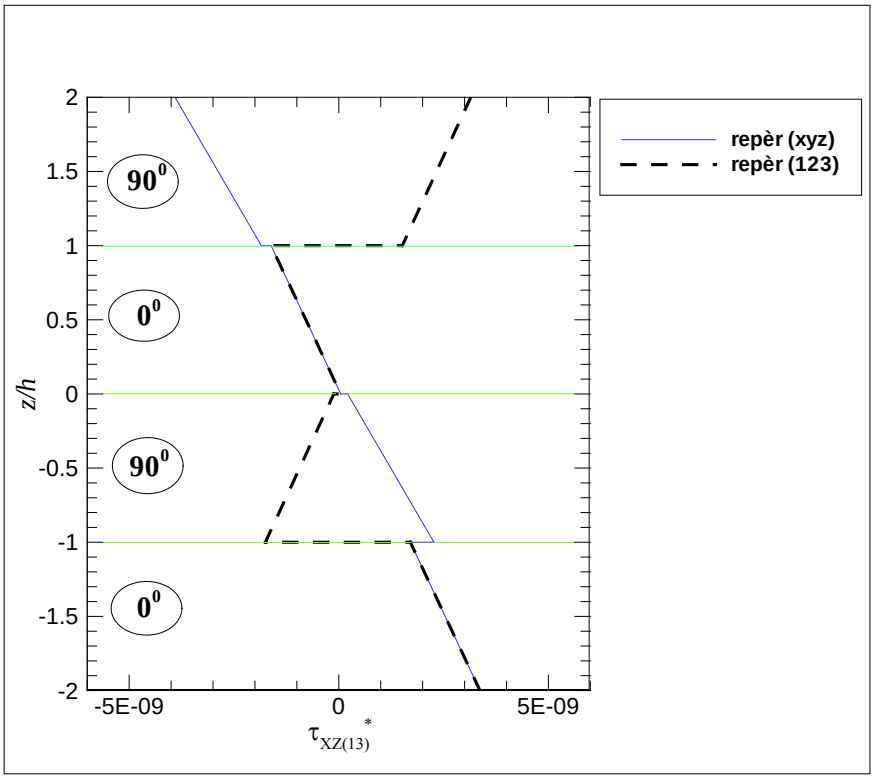


Figure 5.26: *Distribution des contraintes tangentielles* τ_{xz}^{*} τ_{13}^{*}*, à travers l'épaisseur, appui simple ,(0/90/0/90) stratifié soumis à une charge répartie sinusoïdale*

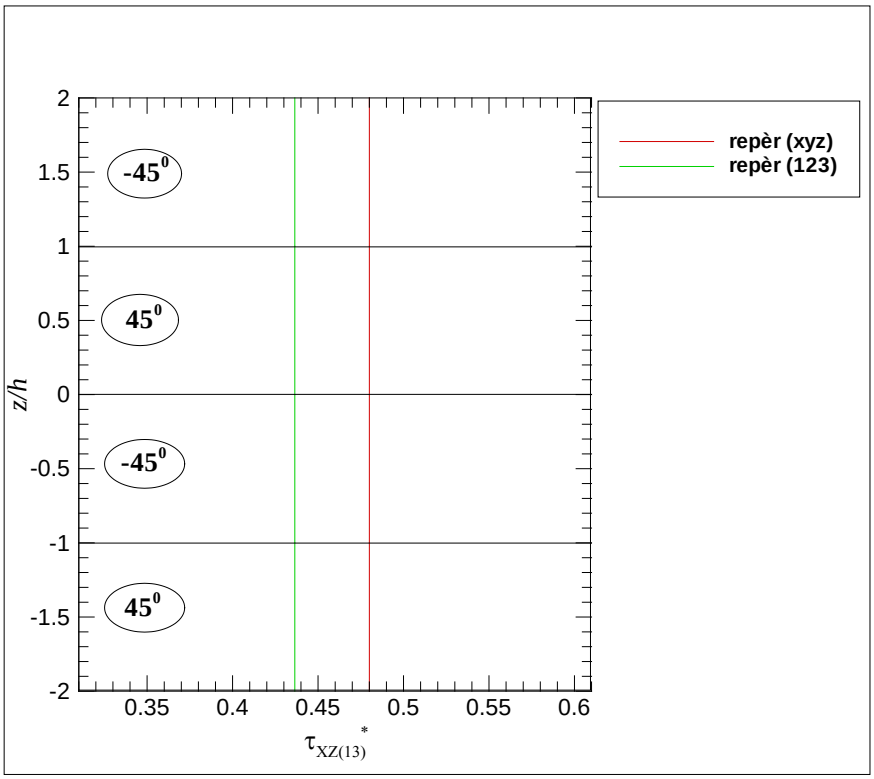


Figure 5.27: *Distribution des contraintes tangentielles* τ_{xz}^{*} τ_{13}^{*}*, à travers l'épaisseur appuis simple, (45/-45/45/-45) stratifié soumis à une charge répartie sinusoïdale*

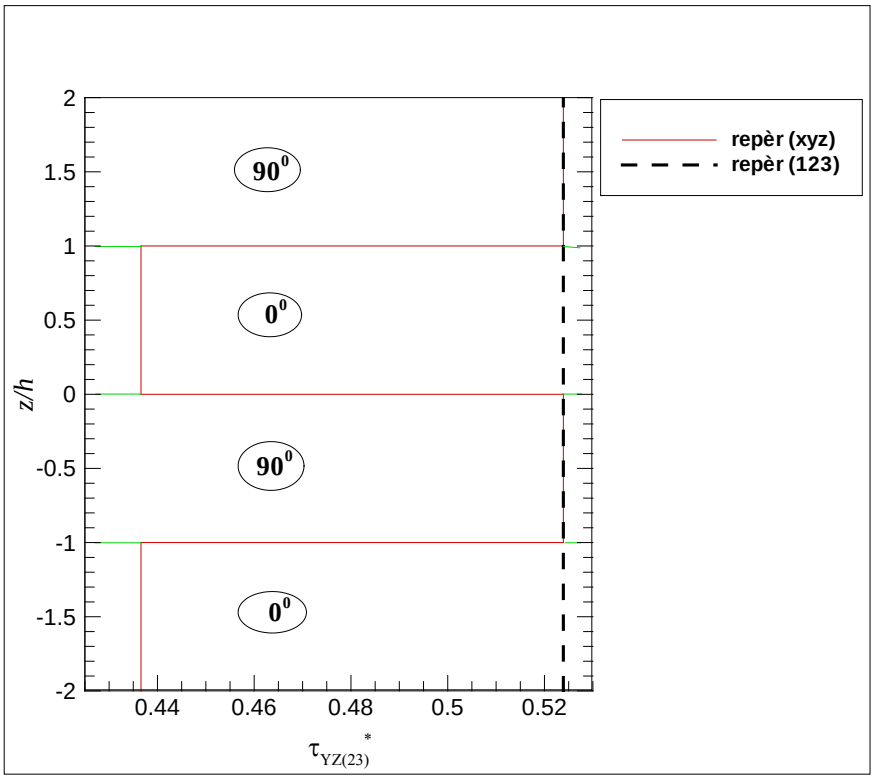


Figure 5.28: *Distribution des contraintes tangentielles τ^*_{yz} τ^*_{23} à travers l'épaisseur, appuis simple, (0/90/0/90) stratifié soumis à une charge répartie sinusoïdale*

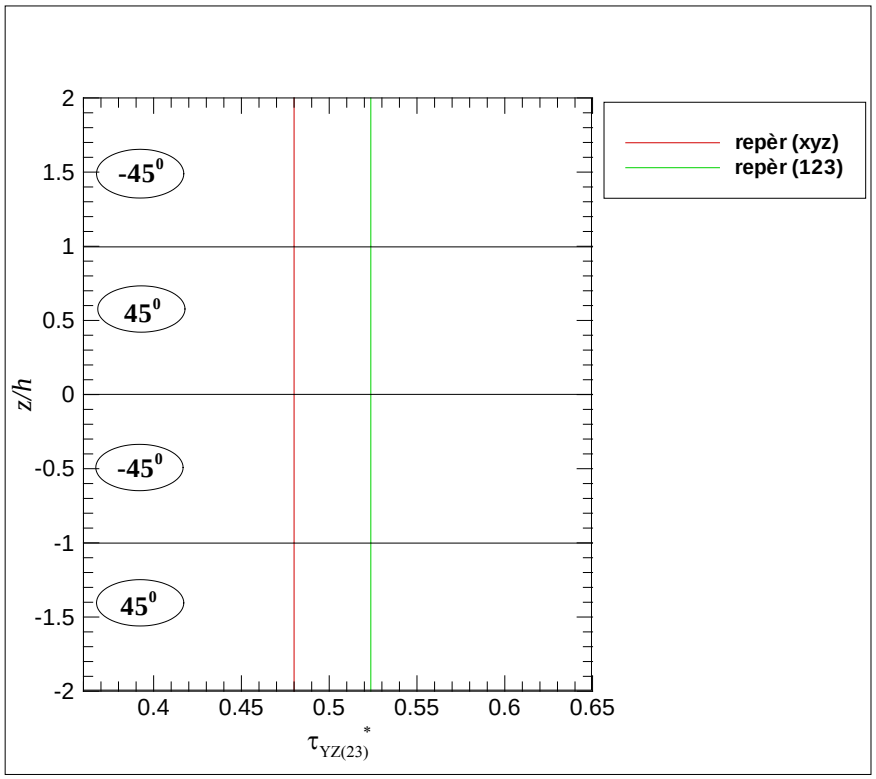


Figure 5.29: *Distribution des contraintes tangentielles τ^*_{yz} τ^*_{23} à travers l'épaisseur appui simple, (45/-45/45/-45) stratifié soumis à une charge répartie sinusoïdale*

CONCLUSION GENERALE

Dans ce mémoire, une étude du comportement statique des plaques composites stratifiées à base de fibres unidirectionnelles à été faite. L'étude a été effectuée par la méthode des éléments finis, où un champ de déplacement basé sur la théorie de REISSNER - MINDLIN a été utilisé. Cette théorie permet, en tenant compte de certaines conditions, de traiter à la fois les plaques minces et les plaques épaisses. Un programme informatique **(ANSYS)** a été établi par la suite dans le but de rechercher les solutions statiques des plaques stratifiées (déplacements, contraintes)

Le travail a été présenté en quatre chapitres ; le premier chapitre est une présentation générale des matériaux composites, leurs caractéristiques et leurs domaines d'applications. Le deuxième chapitre a été consacré à l'analyse du comportement mécanique des plaques stratifiées, où les équations d'équilibre statique ont été développées. Dans le troisième chapitre, la formulation par élément finis du comportement statique à été traitée. Une présentation du programme informatique développé (**ANSYS**) a été faite au chapitre 4. Le calcule des réponses statiques (flèches et contraintes) à fait l'objet du cinquième chapitre

Des applications portent sur la variation de la déflexion maximale et les contraintes normales et tangentielles en fonction, (*i*) des dimensions de la plaque, (*ii*) de l'anisotropie du matériau, (*iii*) de l'orientation des fibres, (*iv*) de l'empilement des couches, (*v*) du rapport a/h.

Il a été constaté lors de ces applications que :

- La flèche adimensionnelle augmente avec le rapport *a/h*. elle augmente de sa valeur lorsqu'on passe de la situation des plaques épaisses vers la situation des plaques minces.

- Les contraintes normales maximale, augmente avec l'augmentation du rapport a/h. Elle se stabilise lorsque ce rapport tend vers des valeurs élevées. On remarque aussi que les courbes des contraintes σ_{xx}^{*} , σ_{yy}^{*} sont confondues.
- la flèche décroit avec l'augmentation de nombre de couches, elle chute de plus de 40% en passant de 2 couches à 10 couches, puis elle se stabilise autour d'une seule valeur en dépassant le nombre de 11 couches .
- La variation de la flèche et des contraintes en fonction des orientations des fibres est symétrique autour de θ=45°, elle augmente avec l'augmentation de l'angle θ jusqu'à 45°. Les valeurs minimales sont obtenues lorsque la direction des fibres coïncide avec les directions *x* et *y* (0° et 90°).
- la contrainte maximale adimensionnelle augmente avec le rapport a/h, ceci est valable pour les quatre cas étudiés. Aussi, on a vu que la contrainte adimensionnelle est plus grand dans le cas des stratifiés quelconques comparativement aux autres cas.
- Une augmentation remarquable des contraintes et de fléche en fonction de l'anisotropie dans l'intervalle limite [0 20], puis elles se diminuent lorsque ce rapport tend vers des valeurs élevées.

D'après les résultats obtenus, on peut dire que l'emploi du programme **(ANSYS)** constitue une approche appropriée pour la recherche des solutions statiques des plaques composites stratifiées à base de fibres unidirectionnelles.

REFERENCES

[1]. J.-M. Berthelot, Matériaux composites, comportement mécanique et analyse des structures, Masson (1999).

[2]. J. N. REDDY, Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells, Theory and Analysis, (2004)

[3]. O.O.OCHOA and J.N.REDDY ,Finite Element Analysis of Composite Laminates,(1992)

[4]. Y. Stavsky, On the theory of symmetrically heterogeneous plates having the same thickness variation of the elastic moduli, in D. Abir et al. (eds), Topics in Applied Mechanics, American Elsevier, New York, p. 105 (1965).

[5]. R. D. Mindlin, Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates. J. Appl. Mech. **18**, 31-38 (1951)

.

[6]. P. C. Yang, C. H. Norris and Y. Stavsky, Elastic wave propagation in heterogeneous plates. Int. J. Solids Struct., **2**, 665-684 (1966).

[7]. J. M. Whitney and C. T. Sun, A higher-order for extensional motion of laminated composites, J. Sound Vib., **30**, 55-97 (1973).

[8]. R. Barboni and P. Gaudenzi, *A class of C^0 finite elements for the static and dynamic analysis of laminated plates*, Comput. Struct. **44**(6), 1169-1178 (1992).

[9]. E. Hinton and N. Bicanic, A comparison of lagrangian and serendipity mindlin plate elements for free vibration analysis, Comput. Struct. **10**, 483-493 (1979).

[10]. J. M. Whitney, Shear correction factors for orthotropic laminates under static loads. J. Appl. Mech. **15**, 63-69 (1984)

[11]. L. W. Chen and J. Y. Yang, Dynamic stability of laminated composite plates by the finite element method, Comput. Struct. **36**(5), 845-851 (1990).

[12]. N. S. Putcha and J. N. Reddy, On dynamics of laminated plates using a refined mixed plate element, ASME Winter Annual Meeting, New Orleans, Louisiana, 161-169 (1984).

[13]. O. Saarela, Computer programs for mechanical analysis and design of polymer matrix composites. Prog. Polym. Sci. **19**, 171-201 (1994).

[14]. T. Kant, J. H. Varaiya and C. P. Arora, Finite element transient analysis of composite and sandwich plates based on refined theory and implicit time integration shemes. Comp. Struct. **36**, N°3, 401-420 (1990).

[15]. O. C. Zienkiewicz, The finite element method in engineering science, Mac Graw-Hill, New York (1977).

[16]. R. H. Gallagher, Introduction aux éléments finis. Editions Pluralis (1976).

[17]. T. Y. Yang, Finite element structural analysis, Prentice Hall (1986).

[18]. E. Hinton, Numerical methods and software for dynamic analysis of plates and shells, Pineridge Press, Swansea, U.K. (1988).

[19]. G. Datt et G. Touzot, Une présentation de la méthode des éléments finis, Maloine S.A. Editeur (1984).

[20]. H. Babaamer, Fortran 77 cours et exercices, Berti Editions (1989).

[21]. J. -F. Imbert, Analyse des structures par éléments finis. Cepadués – Editions (1991).

[22]. K. -J. Bathe and E. L. Wilson, Numerical methods in finite element analysis. Prentice Hall (1976).

[23]. W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky and W.T.Vetterling, Numerical recipes the art of scientific computing, Cambridge University Press (1986).

[24].R.AMMI, M.BACHEN, Analyse dynamique des plaques composites stratifies, Université de Médéa, 2011.2012.

[25].A.BEN AISSA, M.BACHEN, Analyse par éléments finis du comportement statique en flexion des plaques composites stratifiées, Université de Médéa, 2010.2011.