République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Médéa

Faculté des Sciences



Electricité et magnétisme

Cours et exercices

Dr. Haireche Sofiane

Médéa, Octobre 2018

Préface

Ce polycopiée est un support de base en électricité et magnétisme aux étudiants du premier cycle universitaire SM et ST ainsi qu'aux étudiants des classes préparatoires. L'objectif principal de ce manuscrit est de donner aux étudiants et aux enseignants les fondements de l'électricité et le magnétisme d'une façon simple et pédagogique. Un rappel de cours détaillé pour chaque chapitre accompagné d'un ensemble d'exemples résolus et d'autres problèmes sont disponibles pour aider les étudiants ainsi que les enseignants à comprendre les phénomènes physiques. Dans ce polycopié, on expose de nombreux examens résolus qui ont été faites durant la carrière professionnelle de l'auteur au niveau de l'université de Blida et l'université de Médéa.

Ce polycopié contient six chapitres qui sont conforme avec les programmes des années préparatoires en sciences techniques, sciences de la matière, sciences de la nature et de la vie et mathématique et informatique.

TABLE DES MATIERES

Préface

Chapitre I : Rappels mathématiques…… 01

I.1 Analyse dimensionnelle …… 01

I.1.1 Grandeur physique…… 01

I.1.1.1 Définition…… 01

I.1.1.2 Nature de la grandeur physique …….... 01

I.1.1.3 Equations aux dimensions …….. 01

I.1.1.4 Systèmes d'unités (MKSA, CGS) …….... 03

I.2 Erreurs et incertitudes…… 04

I.2.1 Erreur…… 04

I.2.1.1 Erreur absolue…….. 04

I.2.1.2 Erreur relative…….. 04

I.2.2 Incertitude…….... 04

I.2.2.1 Incertitude absolue…….. 04

I.2.2.2 Incertitude relative…….. 05

I.1.3 Procédure de calcul des incertitudes…… 05

I.1.3.1 Méthode de différentielles totales …… 05

I.1.3.2 Méthode de différentielles logarithmiques…… 06

I.1.4 Chiffres significatifs et décimaux…… 07

I.1.4.1 Chiffre significatif …… 07

I.1.4.2 Détermination du nombre de décimales…… 07

I.1.4.3 Règles mathématiques…….. 08

I.1.4.4 Arrondissement d'un nombre…… 08

I.3 Analyse vectorielle…….. 09

I.3.1 Introduction…….. 09

I.3.2 Vecteur…… 09

I.3.3 Addition de deux vecteurs (Somme) …….. 09

I.3.4 Cas de soustraction…….. 10

I.3.5 Composantes d'un vecteur…….... 10

I.3.6 Produit scalaire…… 12

I.3.6.1 Définition…….. 12

I.3.6.2 Application : condition d'orthogonalité ……... 12

I.3.6.3 Propriétés du produit scalaire…… 12

I.3.6.4 Expression analytique du produit scalaire…… 13
I.3.7 Produit vectoriel…… 13
I.3.7.1 Définition…… 13
I.3.7.2 Propriétés du produit vectoriel…… 13
I.3.7.3 Expression analytique du produit vectoriel…… 14
I.3.7.4 Application (aire d'un parallélogramme) …… 14
I.3.8 Produit mixte…… 14
I.3.8.1 Définition…… 14
I.3.8.2 Application : volume d'un parallélépipède …… 15
I.3.9 Dérivée d'un vecteur…… 15
I.3.9.1 Définition…… 15
I.3.9.2 Quelques propriétés de la dérivation vectorielle…… 15
I.3.10 Le gradient, la divergence, la rotationnelle…… 16
I.3.10.1 Le gradient…… 16
I.3.10.2 La divergence…… 16
I.3.10.3 La rotationnelle…… 17
Exercices et problèmes…… 18

Chapitre II : Interaction électrique…… 21
II.1 Interaction électrique…… 21
II.2 Interprétation de l'électrocution selon la structure de la matière…… 22
II.3 Electrocution par frottement…… 23
II.4 Electrocution par contact…… 23
II.5 Charge électrique (balance de Cavendish) …… 24
II.6 Loi de Charles de Coulomb (1736 - 1806) …… 24
II.7 Comparaison entre la force gravitationnelle et la force électrostatique…… 25
II.8 Principe de superposition des forces…… 26
Exercices et problèmes…… 28

Chapitre III Champ et potentiel électriques…… 31
III.1 Introduction…… 31
III.2 Champs électriques créés par des charges ponctuelles…… 32
III.3 Lignes du champ électrique…… 32
III.4 Potentiel électrique…… 32
III.5 Principe de superposition (cas de deux charges ponctuelles) …… 33

III.6 Lignes du champ et surfaces équipotentielles…… 34
III.7 Travail…… 35
III.8 Energie potentielle d'une charge ponctuelle …….. 35
III.9 Généralisation : calcul du champ et de potentiel électrique…… 35
III.9.1 Cas de n charges ponctuelles…… 35
III.9.2 Cas d'une distribution homogène de charges…… 36
III.10 Passage du champ au potentiel électrique et l'inverse…….. 36
III.11 Energie interne de deux charges ponctuelle…….. 42
III.12 Application : Dipôle électrique…… 42
III.12.1 Définition…… 42
III.12.2 Applications…… 43
III.12.3 Potentiel et champ créés par un dipôle électrique à grande distance……... 43
III.12.4 Dipôle électrique placé dans un champ électrique constant…… 45
III.12.5 Energie potentielle d'un dipôle électrique…… 45
III.13 Flux du champ électrique (Théorème de GAUSS) …….. 46
III.13.1 Notion de l'angle solide…….. 46
III.13.2 Définition…… 46
III.13.3 Application…….. 46
III.13.4 Théorème de GAUSS (Karl F. GAUSS 1777-1855)……... 46
Exercices et Problèmes…… 50

Chapitre IV : Conducteur à l'état d'équilibre…… 53
IV.1 Conducteur à l'état d'équilibre…… 53
IV.1.1 Définition…….. 53
IV.1.2 Propriétés d'un conducteur en équilibre électrostatique…… 53
IV.2 Champ électrique à l'extérieur, au voisinage et à l'intérieur d'un conducteur…… 54
IV.3 Pression électrostatique……... 54
IV.4 Capacité propre d'un conducteur isolé dans l'espace…… 55
IV.5 Energie interne d'un conducteur chargé et isolé dans l'espace…….. 56
IV.6 phénomènes d'influence entre conducteurs chargé…… 57
III.6.1 Influence d'un conducteur neutre isolé…… 57
IV.6.2 Influence d'une charge sur un conducteur en équilibre…… 57
IV.6.3 Conducteur relié à un potentiel constant dans un champ créé par q…….. 58
IV.6.4 Influence d'un conducteur chargé sur un autre isolé…….. 58
IV.6.5 Cas d'un conducteur entouré par un autre…… 59

IV.6.6 Cas d'un conducteur creux (Effet d'écran) …….. 59
IV.7 Condensateur…….. 59
IV.7.1 Définition…….. 59
IV.7.2 Type de condensateur…… 60
IV.7.3 Calcul de la capacité d'un condensateur…… 60
IV.7.4 Energie électrique d'un condensateur…….. 61
IV.7.5 Association des condensateurs…….. 61
Exercices et Problèmes …… 63

Chapitre V Electrocinétique…….. 67
V. 1 Intensité du courant électrique i…….. 67
V. 2 Densité du courant électrique…….. 67
V. 3 Loi d'Ohm (loi microscopique) …….. 67
V. 4 Résistance d'un conducteur…… 68
V. 5 Association de résistance…… 68
V.5.1 résistances en série…….. 68
V.5.2 Résistances en parallèle…… 69
V. 6 Influence de la température sur la résistivité…….. 69
V.7 Eléments d'un circuit électrique……... 70
V.7.1 Définition……... 70
V.7.2 Générateurs…… 70
V.7.3 Récepteurs…… 72
V.7.4 Puissance électrique…….. 72
V. 8 Lois de KIRCHHOFF (Gustav Robert Kirchhoff, 1824-1887)…….. 73
V. 8. 1 Loi des Nœuds (Conservation du courant) ……..... 73
V. 8. 2 Loi des Mailles (conservation de tension) …….. 73
Exercices et Problèmes…… 80

Chapitre VI Magnétostatique……... 84
VI.1 Introduction : (Historique) …… 84
VI.2. Création du champ magnétique : (Expérience d'Oersted, 1820)…… 84
VI.3 Force magnétique ou force de Lorentz…… 85
VI.4 Mouvement d'une charge dans un champ magnétique…… 87
VI.5 Force magnétique agissant sur un courant électrique…… 88
VI.6 Moment dipolaire magnétique d'une charge électrique ……..…... 88

VI. 7 Champ magnétique créé par un courant électrique……. 89
VI.7.1 Expériences…..……... 89
VI.7.2 Loi de Biot et savart…..…….. 90
VI.7.3 Applications…..…….. 90
VI.7.3.1 Fil rectiligne indéfini…..…….. 90
VI.7.3.2 Spire circulaire…..…… 91
VI.7.3.3 Solénoïde…..…… 92
Exercices et problèmes…..……. 94

Annexe A : Constantes Physiques…..…… 98
Annexe B : Fonctions primitives…..…….. 99
Annexe C : Dérivée des fonctions usuelles …..……. 100
Annexe D : Formules trigonométriques…..…… 101

Références …..…… 102

Chapitre I : Rappels mathématiques

I.1. Analyse dimensionnelle

I.1.1. Grandeur physique

I.1.1.1. Définition

La grandeur physique est une notion ou idée dont on se sert pour expliquer ou analyser un phénomène physique.

Exemple :

- On a besoin de la grandeur "**température**" pour analyser et comprendre le phénomène de la chaleur de l'environnement
- On a besoin du "**temps**" et de "l'**espace**" pour décrire un mouvement quelconque.
- On a besoin de l'intensité du "**courant électrique**" pour quantifier le nombre de l'électricité qui passe dans un fil métallique.

I.1.1.2. Nature de la grandeur physique

Toute grandeur physique est définie soit par un:

a- Scalaire où la grandeur nécessite pour sa détermination juste un module comme : la masse (***m)***, le temps (***t)***, l'énergie (***E)***, la température (***T)***…etc

b- Vecteur où la quantité nécessite pour sa détermination complète une direction en plus de son module comme la force $\left(\vec{F}\right)$, le champ $\left(\vec{E}\right)$, la vitesse $\left(\vec{v}\right)$, l'accélération $\left(\vec{\gamma}\right)$ …etc.

I.1.1.3. Equations aux dimensions :

L'équation aux dimensions est la formule qui nous permet de déterminer l'unité dans laquelle doit être exprimé le résultat final de la grandeur physique.

Dans l'ensemble, nous disposons de sept unités de références dites fondamentales (Tableau I.1) qui sont étalonnées selon des mesures expérimentales.

N°	Grandeur physique	Symbole	Unité	Symb. Unité	Dimension
01	Longueur	l	Mètre	m	L
02	Masse	m	kilogramme	kg	M
03	Temps	t	Seconde	s	T
04	Température	θ	Kelvin	K	Θ
05	Intensité du courant électrique	i	Ampère	A	I
06	Quantité de la matière	n	Mole	mol	N
07	Intensité lumineuse	j	Candéla	cd	J

Tableau I.1 : Grandeurs Physiques fondamentales

Notation :

- Exemple : la grandeur physique « temps » est représentée par la dimension ***T***, le symbole ***t*** et l'unité seconde (***s***). alors on fait la notation spécifique de chaque caractéristique :

  (t) = s unité. [t] = T dimension.

- La grandeur physique qui ne possède aucune dimension doit être représentée par 1. Donc, on écrit :

  [G] = 1

Exemple 01:

1. La vitesse.

On sait que la vitesse est donnée par le rapport de la distance et le temps. Donc :

$$v = \frac{x}{t}$$

Alors : $[v] = \frac{[x]}{[t]} = \frac{L}{T} \Rightarrow [v] = LT^{-1}$

Maintenant, on utilise le tableau précèdent pour déterminer l'unité de la vitesse.

$$(v) = m.s^{-1}$$

2. L'angle θ (Figure I.1):

On sait que l'arc ***s*** est donné par le produit de l'angle et le rayon ***r***. Donc :

$s = r.\alpha \Rightarrow \theta = \frac{s}{r}$, avec $[s] = [r] = L$.

Donc : $[\theta] = \frac{L}{L} = 1$, alors l'angle n'a pas de dimension, mais son unité est le degré.

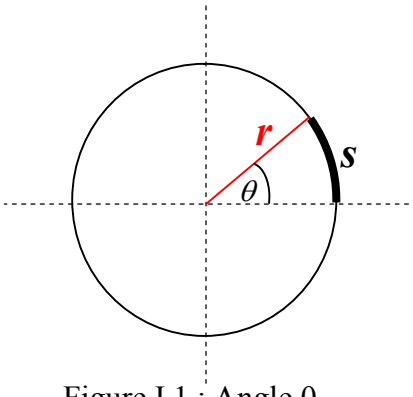


Figure I.1 : Angle θ

Généralisation :

Dans le cas général, une grandeur physique G peut se décomposer selon la relation générale en sept dimensions fondamentales.

$[G] = M^{\alpha} L^{\beta} T^{\gamma} I^{\chi} \Theta^{\lambda} J^{\eta} N^{\rho}$ Tel que : α, β, γ, χ, λ, η et ρ sont des entiers.

Exemple 02:

1. L'accélération

On sait que l'accélération est donnée par la formule suivante:

$a = \frac{v^2 - v_0^{\,2}}{2\Delta x}$ (pour un mouvement rectiligne uniformément varié)

Alors : $[a] = \frac{[v^2] - [v_0^{\,2}]}{[2\Delta x]} = \frac{L^{\not 2} T^{-2}}{\not L} = LT^{-2}$

Maintenant, on utilise le tableau précèdent pour déterminer l'unité de l'accélération.

$(a) = m.s^{-2}$

2. Energie cinétique :

On sait que l'énergie cinétique de translation est donnée par la formule suivante: $Ec = \frac{1}{2}mv^2$

Alors : $[Ec] = \frac{1}{2}[m][v^2] = 1ML^2T^{-2} = T^{-2}ML^2$

L'unité de l'énergie cinétique est donc : $(Ec) = s^{-2}.kg.m^2$.

L'unité de l'énergie cinétique obtenue représente le ***joule***.

I.1.1.4. Systèmes d'unités (MKSA, CGS):

Pour que les travaux scientifiques soient acceptés, les unités des grandeurs physiques doivent être reconnues mondialement soit dans le système MKSA ou le Système CGS.

1. CGS : c'est le système le plus ancien de l'abréviation :
   C : Centimètre, G : Gramme et S : Seconde
2. MKSA : : c'est le système international, actuellement le plus utilisé et le plus standard dans les revues et les ouvrages scientifiques de l'abréviation :
   M : Mètre, K : Kilogramme, S : Seconde et A : Ampère.

On note aussi qu'il y a d'autres systèmes d'unités utilisés spécialement pour des domaines spécifiques.

Exemple : Longueur : **Mile** (domaine de la marine)

: **Année de lumière** (domaine d'astrophysique)

: **Angström** (domaine microscopique)

I.2. Erreurs et incertitudes:

I.2.1 Erreur :

I.2.1.1 Erreur absolue:

L'erreur absolue commise sur la mesure d'une grandeur physique G est la différence entre la valeur mesurée et la valeur exacte.

Donc : $\delta G = G_m - G_e$

Remarque :

On signale que la grandeur exacte G_e n'existe pas en réalité à cause aux limites de l'expérience et donc la valeur de δG est toujours inconnue.

I.2.1.2 Erreur relative :

L'erreur relative est le rapport entre l'erreur absolue et la valeur exacte de la grandeur physique G, donc l'erreur relative est :

$$\frac{\delta G}{G_e}$$

Donc, en physique, on ne peut jamais déterminer les erreurs, mais on estime des valeurs proches à eux. On les appelle **incertitudes**.

I.2.2. Incertitude :

I.2.2.1 Incertitude absolue:

L'incertitude absolue ***ΔG*** commise sur la mesure d'une grandeur physique ***G*** est la limite supérieure de l'erreur absolue (estimation expérimentale).

Donc : $\Delta G \geq \delta G$

On va rappeler tout à l'heure la méthode utilisée pour obtenir l'incertitude estimée lors de l'expérience physique. De plus, on va rappeler que l'incertitude sur la mesure dépend de trois paramètres essentiels.

1. Incertitude de mesure ΔG_{mes}

   Ce type d'incertitude est calculé selon la relation suivante :

   $$\Delta G_{mesu} = MAX\left|G_i - G_{moy}\right|$$

   avec $G_{moy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} G_i}{n}$ et $i = 1, 2.....n$

2. Incertitude de lecture ΔG_{lect}

   Ce type d'incertitude est calculé en fonction de l'affichage des appareils :

   - Appareil à aiguille : $\Delta G_{lect} = \dfrac{\text{Petite graduation de l'echelle}}{2}$
   - Appareil digital : la différence maximale entre les digits qui clignotent.

3. Incertitude de l'instrument ΔG_{inst}

   Ce type d'incertitude est obtenu directement de l'appareil ou de son catalogue.

I.2.2.2. Incertitude relative:

L'erreur relative est le rapport entre l'incertitude absolue ΔG et la valeur mesurée de la grandeur physique ***G***. donc l'incertitude relative est donnée par :

$$\frac{\Delta G}{G_{moy}}$$

I.1.3. Procédure de calcul des incertitudes:

Dans les calculs mathématiques, on possède deux méthodes pour déterminer l'incertitude absolue lorsqu'il s'agit d'une fonction telle que : $\rho = \dfrac{m}{V}$, $F = ma$ ou $E = \dfrac{1}{2}mv^2$ …etc.

I.1.3.1. Méthode de différentielles totales :

Soit la fonction $f = f(x, y, z)$.

On sait que la dérivée totale est écrite comme suit : $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}dz$

Donc : $df = \left(f'\right)_x dx + \left(f'\right)_y dy + \left(f'\right)_z dz$.

On passe de la dérivation à la différence sauf si :

$$\left.\begin{array}{l} dx \to \Delta x \\ dy \to \Delta y \\ dz \to \Delta z \\ df \to \Delta f \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \Delta x \text{ tend vers } 0 \\ \Delta y \text{ tend vers } 0 \\ \Delta z \text{ tend vers } 0 \\ \Delta f \text{ tend vers } 0 \end{cases}$$

Cela n'est rien que la définition de la limite. Donc, on peut écrire la relation précédente comme suit :

$$\Delta f = \left(f_x'\right)\Delta x + \left(f_y'\right)\Delta y + \left(f_z'\right)\Delta z$$

En sciences physiques, on s'oriente toujours vers la somme des incertitudes, donc la relation devient :

$$\Delta f = \left|\left(f_x^{'}\right)\right|\Delta x + \left|\left(f_y^{'}\right)\right|\Delta y + \left|\left(f_z^{'}\right)\right|\Delta z$$

I.1.3.2. Méthode de différentielles logarithmiques :

On suppose l'exemple de la fonction $f = f(x,y,z)$ comme suit :

$$f(x,y,z) = \frac{x^2 y}{z}$$

Donc, on applique la fonction logarithmique sur les deux termes de l'équation, on trouve :

$$\ln f = \ln\left(\frac{x^2 y}{z}\right) \Rightarrow \ln f = \ln\left(x^2\right) + \ln\left(y\right) - \ln\left(z\right)$$
$$= 2\ln\left(x\right) + \ln\left(y\right) - \ln\left(z\right)$$

On sait que : $\ln x = \int\left(\frac{dx}{x}\right)$. Donc, $\int\left(\frac{df}{f}\right) = 2\int\left(\frac{dx}{x}\right) + \int\left(\frac{dy}{y}\right) - \int\left(\frac{dz}{z}\right)$

On fait deux considérations :

1/ Mathématique :

$$\left.\begin{array}{l} dx \to \Delta x \\ dy \to \Delta y \\ dz \to \Delta z \\ df \to \Delta f \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \Delta x \text{ tend vers } 0 \\ \Delta y \text{ tend vers } 0 \\ \Delta z \text{ tend vers } 0 \\ \Delta f \text{ tend vers } 0 \end{cases}$$

2/Physique : on fait toujours la somme des incertitudes

Donc : $\frac{\Delta f}{f} = 2\frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z}$

Exemple 1 : masse volumique

On sait que : $\rho = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta V}{V}$

Exemple 2 : fonction trigonométrique : *f(x)=cos(x)*

- *Méthode 1* : On cherche le Δf par la méthode de différentielles totales, alors :

$$\Delta f = \left(\cos x\right)_x^{'} \Delta x \ \Rightarrow \ \boxed{\Delta f = \sin(x)\Delta x}$$

- *Méthode 2* : On cherche le Δf par la méthode de différentielles logarithmiques, alors :

$$\frac{df}{f} = \frac{d(\cos x)}{\cos x} \Rightarrow df = f.\frac{\sin x}{\cos x}dx \Rightarrow df = \cancel{\cos x}.\frac{\sin x}{\cancel{\cos x}}dx = \sin(x)dx$$

Donc : $\boxed{\Delta f = \sin x \Delta x}$

Question aux étudiants :

À votre avis, quelle est la méthode la plus efficace entre la différentielle totale et la différentielle logarithmique?

I.1.4. Chiffres significatifs et décimaux

I.1.4.1 Chiffre significatif :

Les chiffres utiles qui mesurent une grandeur physique sont dits significatifs (CS).

Détermination du nombre de CS:

- Zéros qui précèdent un nombre

  Les zéros qui précèdent un nombre ne sont pas des chiffres significatifs car ils n'appartiennent pas au nombre, ils servent à situer la décimale.

Exemple : **0,04005** contient **4** chiffres significatifs

0,4005 contient **4** chiffres significatifs

0,00004005 contient **4** chiffres significatifs

- b. Zéros qui suivent un nombre

  Les zéros qui suivent un nombre sont des chiffres significatifs car ils appartiennent au nombre et font partie de la mesure.

Exemples : **1,340** contient **4** chiffres significatifs

1,3400 contient **5** chiffres significatifs

0,134000 contient **6** chiffres significatifs

0,04020 contient **4** chiffres significatifs

I.1.4.2. Détermination du nombre de décimales

Les décimaux sont tous les chiffres d'un nombre qui suivent la virgule.

Exemples : **3,4056** contient **4** décimales et **5** chiffres significatifs

0,002037 contient **6** décimales et **4** chiffres significatifs

I.1.4.3. Règles mathématiques :

a. Multiplication ou division

Dans le cas d'une multiplication ou d'une division, le résultat aura le même nombre de chiffres significatifs que la mesure qui en possède le moins.

Exemple :

$\frac{225,0}{5,0} = 45$ → La réponse contient **2** chiffres significatifs

$2,540 \times 0,2 = \cancel{0,508}$

$= \cancel{0,51}$ → La réponse contient **1** chiffre significatif

$= 0,5$

b. Addition ou soustraction

Dans le cas d'une addition ou d'une soustraction, le résultat aura le même nombre de décimal que la mesure qui en possède le moins.

Exemples :

5,45 + 6,322 - 5,2 = 6,572 = 6,6 → La réponse contient **1** décimal

2,500 + 5 - 10,88809 = -3,38809 = -3,3881= -3,388= -3,39= -3,4= -3

→ La réponse contient **0** décimale.

I.1.4.4. Arrondissement d'un nombre

- Plus petit que 5 :

  Si le chiffre à éliminer est plus petit que 5, le chiffre précédent demeure le même.

  Exemple : 80,54 arrondit au dixième devient 80,5

- Plus grand ou égal à 5

  Si le chiffre à éliminer est plus grand ou égal à 5, le chiffre précédent est majoré de 1.

  Exemples : 6, 345641 arrondit au centième devient 6,35

I.3. Analyse vectorielle

I.3.1 Introduction

La mécanique comme toute branche de la physique exprime ses phénomènes par des lois ou des formules mathématiques, pour cela on va définir quelques notions mathématiques qui nous aident aux chapitres qui suivent.

I.3.2 Vecteur :

Le vecteur est une notion purement mathématique dont la représentation graphique comporte (Figure I.2):

a- Point d'enfoncement (ou d'influence).

b- Direction.

c- Sens.

d- Module, noté : $\left\|\overrightarrow{A}\right\|$, A , $\left|\overrightarrow{A}\right|$

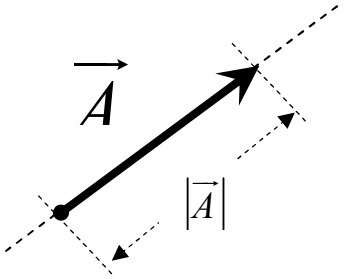


Figure I.2 : Vecteur

I.3.3. Addition de deux vecteurs (Somme) :

Soient les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$, leur somme $\overrightarrow{S}$ s'écrit $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$ (Figure I.3) mais analytiquement on va représenter d'abord les angles qu'ils séparent :

$\widehat{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}} = \alpha \quad \widehat{\overrightarrow{S}, \overrightarrow{v_1}} = \beta \quad \widehat{\overrightarrow{S}, \overrightarrow{v_2}} = \gamma$

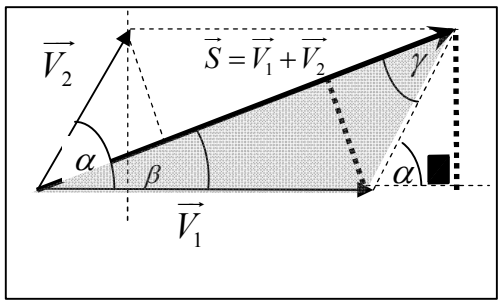


Figure I.3 : Addition de deux vecteurs

Maintenant, on peut appliquer la loi du triangle rectangle : $S^2 = (v_1 + v_2 \cos\alpha)^2 + (v_2 \sin\alpha)^2$

On peut simplifier la relation comme suit :

$$S^2 = {v_1}^2 + 2v_1.v_2 \cos\alpha + {v_2}^2 \cos\alpha^2 + {v_2}^2 \sin\alpha^2 = {v_1}^2 + 2v_1.v_2 \cos\alpha + {v_2}^2$$

Alors, le module du vecteur de la somme devient : $S = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + 2v_1.v_2 \cos\alpha}$

Application : loi de sinus :

On peut aussi vérifier la loi de sinus (Figure I.4) (on sait $\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha)$) donc :

$$\begin{cases} v_2 \sin\alpha = S \sin\beta \\ v_1 \sin\beta = v_2 \sin\gamma \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{v_2}{\sin\beta} = \frac{v_1}{\sin\gamma} = \frac{S}{\sin\alpha}}$$

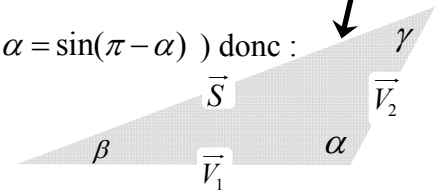


Figure I.4 : Loi de Sinus

I.3.4. Cas de soustraction :

La différence de deux vecteurs $\overrightarrow{D}$ qui s'écrit $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}$ (Figure I.5) revient au calcul de la somme puisque :

$\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_2} + (-\overrightarrow{v_1}) = \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}$

Telque $-\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_3}$ ($\overrightarrow{v_3}$ est l'opposé de $\overrightarrow{v_1}$)

D'abord on va définir les angles entre les vecteurs

$\widehat{\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1}} = \alpha \quad \widehat{\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{D}} = \beta \quad \widehat{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{D}} = \gamma$

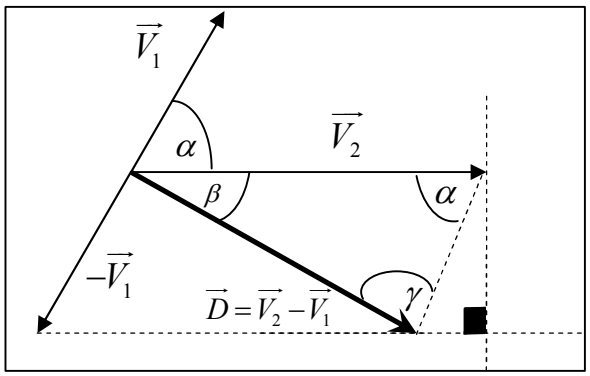


Figure I.5 : Différence de deux vecteurs

Maintenant, on applique la loi du triangle rectangle :

$D^2 = (v_2 - v_1 \cos\alpha)^2 + (v_1 \sin\alpha)^2$

On peut simplifier la relation comme suit :

$D^2 = v_2^2 + v_1^2 \cos\alpha^2 + v_1^2 \sin\alpha^2 - 2v_1.v_2 \cos\alpha = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1.v_2 \cos\alpha$

Alors le module du vecteur de la soustraction devient : $D = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1.v_2 \cos\alpha}$

Application :

De la même façon, on trouve la loi de sinus :

$$\boxed{\frac{v_2}{\sin\gamma} = \frac{v_1}{\sin\beta} = \frac{D}{\sin\alpha}}$$

I.3.5 Composantes d'un vecteur :

Tout ensemble de vecteurs, dont l'addition nous donne le vecteur $\vec{v}$ constitué les composantes de ce vecteur. Généralement, on utilise les composantes rectangulaires.

Base orthonormée :

Une base est dite orthonormée si sauf ces vecteurs de bases sont des vecteurs unitaires (module égale à 1) et sont perpendiculaires entre eux.

$$\boxed{\text{Orthonormée}} \Leftrightarrow \begin{cases} (1)\ \text{Orthogonale(orthogonaux)} \Rightarrow \vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k} \\ (2)\ \text{Normale(normaux)} \Rightarrow \left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = \left\|\vec{k}\right\| \end{cases}$$

1. 1D :

Dans une base unidimensionnelle $(\vec{i})$, on peut exprimer le vecteur comme le produit de son module avec son vecteur unitaire (Figure I.6)

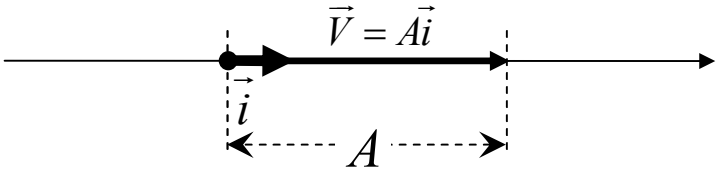


Figure I.6 : Représentation d'un vecteur à 1D

2. 2D :

Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on peut exprimer le vecteur comme la somme de deux vecteurs perpendiculaires (Figure I.7)

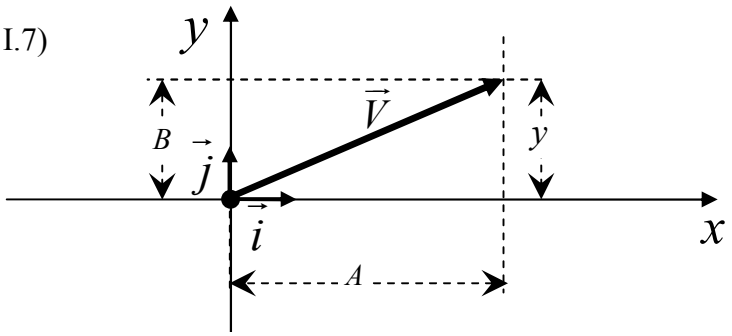


Figure I.7: Représentation d'un vecteur à 2D

$\vec{V} = \vec{A} + \vec{B}$, donc $\vec{V_1} = A\vec{i} + B\vec{j}$

Alors, suivant le schéma ci-dessus, on trouve : $\left|\vec{V_1}\right| = \sqrt{A^2 + B^2}$

3. 3D : Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on peut exprimer le vecteur comme la somme de trois vecteurs perpendiculaires (Figure I.8)

$$\vec{V} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$$

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

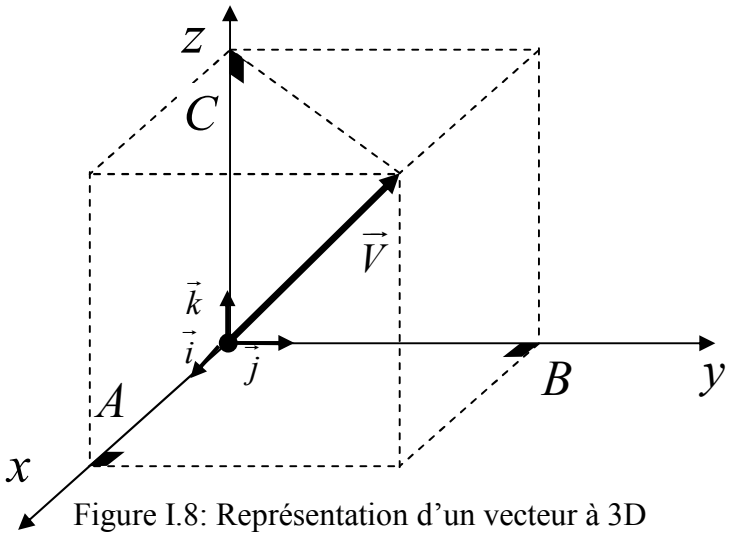


Figure I.8: Représentation d'un vecteur à 3D

4. Cas général :

Soient deux points ***M₁*** et ***M₂*** dans un espace lié à une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les points sont donnés par les coordonnées suivantes : ***M₁(x₁,y₁,z₁)*** ; ***M₂(x₂,y₂,z₂)***.

Donc, le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ (Figure I.8) s'écrit comme ça :

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

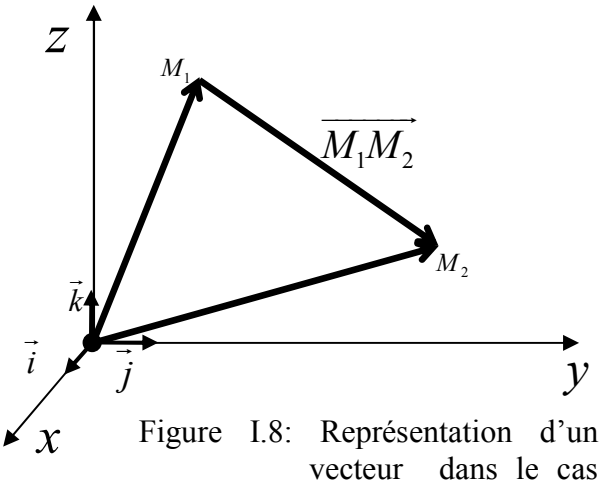


Figure I.8: Représentation d'un vecteur dans le cas général

5. Vecteur unitaire :

Le vecteur unitaire est un vecteur de module qui égale à 1 $\left(\left\|\overrightarrow{U_r}\right\| = 1\right)$. Certains sont alignés sur un axe du système de coordonnée comme les vecteurs ($\vec{i}$) dans la direction Ox, ($\vec{j}$) dans la direction ***Oy*** et ($\vec{k}$) dans la direction ***Oz***. D'autres sont alignés dans une direction reliée à un concept physique tel que ($\overrightarrow{U_r}$) dans la direction du vecteur de position $\vec{r}$.

I.3.6. Produit scalaire :

I.3.6.1. Définition :

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ noté $\vec{A}.\vec{B}$ (lire $\vec{A}$ scalaire $\vec{B}$) est un scalaire défini comme le produit des modules de $\vec{A}$ et $\vec{B}$ par le cosinus de l'angle entre $\vec{A}$ et $\vec{B}$, donc on écrit :

$$\vec{A}.\vec{B} = A.B.\cos(\widehat{\vec{A},\vec{B}}) = B.A.\cos(\widehat{\vec{B},\vec{A}})$$

Puisque la fonction cosinus est paire, donc : $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$.

I.3.6.2. Application : condition d'orthogonalité

si $\vec{A} \neq \vec{0}$ et $\vec{B} \neq \vec{0}$

on a $\vec{A} \,.\, \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{A} \perp \vec{B}$

car $\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

I.3.6.3. Propriétés du produit scalaire :

1. Les vecteurs unitaires orthonormés satisfont :

   $\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$ puisque cos(0)=1

   $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$ puisque $\cos(\frac{\pi}{2})$=0

2. Le produit scalaire est commutatif :

   $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$ puisque cos (α)=cos(-α)

3. Le produit scalaire est distributif :

   $\vec{A}.(\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A}.\vec{B}) + (\vec{A}.\vec{C})$

Remarque : On remarque que ***A.B.cos(α)*** égale à ***A*** multiplié par la projection de ***B*** sur ***A***.

I.3.6.4. Expression analytique du produit scalaire :

Soient deux vecteurs non nuls définis par leurs composantes cartésiennes :

$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$

$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$

$\vec{A}.\vec{B} = (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}).(B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k})$

$= (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)$ en utilisant $\begin{cases} \vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1 \\ \vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0 \end{cases}$

Application : Module d'un vecteur

$\vec{A}.\vec{A} = |\vec{A}|.|\vec{A}|\cos(\widehat{\vec{A},\vec{A}}) = A.A = A^2$

$\vec{A}.\vec{A} = A_x A_x + A_y A_y + A_z A_z = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2$

donc $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

I.3.7. Produit vectoriel :

I.3.7.1. Définition :

Le produit vectoriel est un vecteur qui s'écrit $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ (ce qu'on lit $\vec{A}$ vectoriel $\vec{B}$) tel que :

- Le module de $\vec{C}$ est défini comme le produit des modules de $|\vec{A}|$ et $|\vec{B}|$ par le sinus de l'angle entre les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$, donc $|\vec{C}| = |\vec{A}|.|\vec{B}|\sin(\widehat{\vec{A},\vec{B}})$
- La direction de $\vec{C}$ est perpendiculaire à $\vec{A}$ et $\vec{B}$ (ou au plan constitué par $\vec{A}$ et $\vec{B}$) et son sens soit direct suivant la trièdre $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ ou bien avec la méthode des trois doigts de la main droite)

I.3.7.2. Propriétés du produit vectoriel :

1. Le produit vectoriel est anticommutatif

   Soient $\vec{A} \neq \vec{0}$ *et* $\vec{B} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$ puisque $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

2. Soient Soient $\vec{A} \neq \vec{0}$ *et* $\vec{B} \neq \vec{0}$

   Si $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \vec{A} // \vec{B}$ ou bien $\vec{A} = \lambda \vec{B}$ (**Condition de parallélisme**)

3. Pour les vecteurs unitaires de la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

   $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$

   $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$

I.3.7.3. Expression analytique du produit vectoriel :

On suppose que l'espace est défini selon une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soient les vecteurs $\vec{A}$ *et* $\vec{B}$ tels que :

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = (A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}) \wedge (B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k})$$

Puisque le produit vectoriel est distributif donc :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = A_xB_x\left(\vec{i} \wedge \vec{i}\right) + A_yB_y\left(\vec{j} \wedge \vec{j}\right) + A_zB_z\left(\vec{k} \wedge \vec{k}\right) +$$

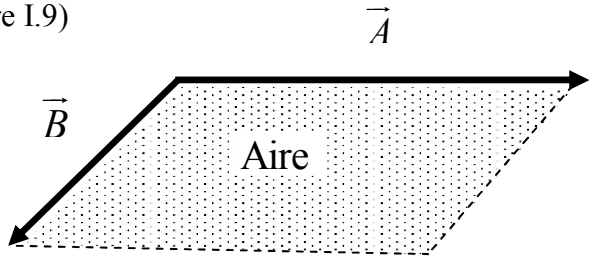
$$A_xB_y\left(\vec{i} \wedge \vec{j}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\vec{i} + \left(A_zB_x - A_xB_z\right)\vec{j} + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

I.3.7.4. Application (aire d'un parallélogramme):

Le vecteur résultant du produit vectoriel représente en module la surface ou l'aire limitée par les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ (Figure I.9)



$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$: $|\vec{C}|$ = l'aire limitée par $\vec{A}$ et $\vec{B}$

Figure I.9: Aire limitée par deux vecteurs

I.3.8. Produit mixte :

I.3.8.1. Définition :

On appelle produit mixte le produit $\vec{A}.\left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right)$ ce qui nous donne un scalaire est défini par :

$$\vec{A}.\left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

I.3.8.2. Application : volume d'un parallélépipède

Le produit mixte représente le volume d'un parallélépipède limité par trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ (Figure I.10) .

Le volume limité par $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ est égale à : $\vec{A}.\left(\vec{B} \wedge \vec{C}\right)$

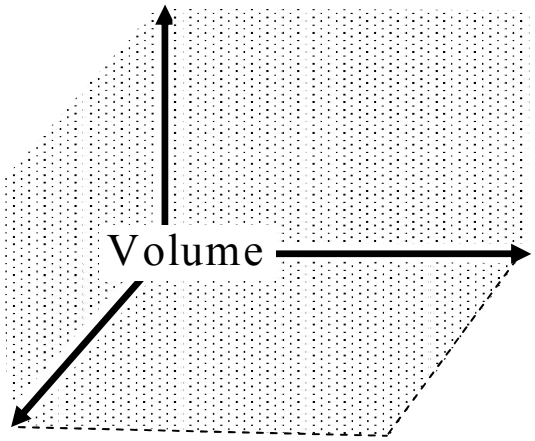


Figure I.10: Volume limitée par trois vecteurs

I.3.9. Dérivée d'un vecteur :

I.3.9.1. Définition :

Soit la fonction scalaire $f(x)$ telle que la dérivée par rapport à x est donnée par :

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

De même, on peut définir la dérivée d'une fonction vectorielle $\overrightarrow{A(r)}$ par rapport à ***r*** comme suit :

$$\overrightarrow{\dot{A}(r)} = \frac{d\overrightarrow{A(r)}}{dr} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\overrightarrow{A(r+\Delta r)} - \overrightarrow{A(r)}}{\Delta r}$$

Donc la dérivée d'un vecteur est un vecteur.

I.3.9.2. Quelques propriétés de la dérivation vectorielle :

Soient $\vec{A}$ et $\vec{B}$ deux vecteurs non nuls et λ est un réel.

1. $\dfrac{d\left(\lambda.\vec{A}\right)}{dt} = \lambda.\dfrac{d\left(\vec{A}\right)}{dt}$
2. $\dfrac{d\left(\vec{A}+\vec{B}\right)}{dt} = \dfrac{d\left(\vec{A}\right)}{dt} + \dfrac{d\left(\vec{B}\right)}{dt}$

3. $$\frac{d\left(\vec{A}.\vec{B}\right)}{dt}=\left(\left(\frac{d\left(\vec{A}\right)}{dt}\right).\vec{B}\right)+\left(\vec{A}.\left(\frac{d\left(\vec{B}\right)}{dt}\right)\right)$$

4. $$\frac{d\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right)}{dt}=\left(\left(\frac{d\left(\vec{A}\right)}{dt}\right)\wedge\vec{B}\right)+\left(\vec{A}\wedge\left(\frac{d\left(\vec{B}\right)}{dt}\right)\right)$$

I.3.10. Le gradient, la divergence, la rotationnelle:

On suppose que l'espace est défini selon une base orthonormée $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soient les fonctions scalaire $\phi(x,y,z)$ et vectorielle $\vec{A}\left(x,y,z\right)$. On considère l'opérateur vectoriel, appelé « NABLA » défini par :

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

A l'aide de ceci, on peut définir :

I.3.10.1. Le gradient :

L'application de Nabla sur la fonction $\phi(x,y,z)$ qui donne un vecteur tel que :

$$\vec{\nabla}\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}$$

Le vecteur $\vec{\nabla}\phi$ est appelé gradient de ϕ et s'écrit $\overrightarrow{grad}\phi$.

Exemple

Calculez le gradient des fonctions suivantes :

- $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$
- $f(x,y,z)=x^2y^3z^4$
- $f(x,y,z)=e^x\sin(y)\ln(z)$

I.3.10.2 La divergence :

L'application de Nabla sur la fonction vectorielle $\vec{A}(x,y,z)$ par un produit scalaire et qui nous donne un scalaire tel que :

$$\vec{\nabla}.\vec{A}=\frac{\partial Ax}{\partial x}+\frac{\partial Ay}{\partial y}+\frac{\partial Az}{\partial z}$$

Le scalaire $\vec{\nabla}.\vec{A}$ est appelé divergence $\vec{A}$ et s'écrit $div\vec{A}$.

Exemple

Déterminer $\vec{\nabla}.\vec{A}$ où $\vec{A}$ est le champ de vecteurs suivant :

- $\vec{A} = 2x^2 y\vec{e_x} + 2xy^2\vec{e_y} + xy\vec{e_z}$
- $\vec{A} = \sin(xy)\vec{e_x} + \cos(xz)\vec{e_z}$
- $\vec{A} = x(2y+z)\vec{e_x} - y(x+z)\vec{e_y} + z(x-2y)\vec{e_z}$
- $\vec{A} = \ln(x^2+1)\vec{e_x} - e^{(x+z)}\vec{e_y}$

I.3.10.3 La rotationnelle:

L'application de Nabla sur la fonction vectorielle $\vec{A}(x,y,z)$ par un produit vectoriel et qui nous donne un vecteur tel que :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ Ax & Ay & Az \end{vmatrix}$$

Le vecteur $\vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ est appelé rotationnelle de $\vec{A}$ et s'écrit $\overrightarrow{rot}\vec{A}$.

Exemple

Déterminer $\vec{\nabla} \wedge \vec{D}$ où $\vec{D}$ est le champ de vecteurs suivant :

- $\vec{D} = \dfrac{2x^2}{zy}\left(\vec{e_x} + \vec{e_y} + \vec{e_z}\right)$
- $\vec{D} = x\left(\sin(y)\vec{e_x} + \cos(z)\vec{e_z}\right)$
- $\vec{D} = x\left(\sqrt{2y+z}\right)\vec{e_x} - y\left(\sqrt{x+z}\right)\vec{e_y} + z\left(x-2y\right)^2\vec{e_z}$

Exercices et problèmes

Exercice 01 :

Pour chacune des grandeurs physiques suivantes, préciser si elles sont scalaires ou vectorielles puis préciser leurs dimensions et leurs unités:

- Intensité de courant électrique
- Quantité de charge
- Tension ou différence de potentiel
- Champ électrique
- Force électrique
- Résistance électrique
- Energie potentielle électrique
- Puissance électrique
- Conductance électrique
- Capacité électrique
- Inductance électrique
- Induction magnétique
- Flux électrique
- Flux magnétique

Exercice 02 :

1- La force d'attraction $\overrightarrow{F_G}$ qui s'exerce entre deux points matériels, de masse ***m*** et ***m'***, séparés par une distance ***r***, est donnée en module par la loi de Newton :

$$F_G = G\frac{mm'}{r^2}$$

2- La force électrostatique $\overrightarrow{F_e}$ qui s'exerce entre deux charges électriques ***q*** et ***q'***, séparés par une distance ***r***, est donnée en module par la loi de Coulomb :

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}$$

Donner les dimensions de la constante de gravitation ***G***, et de la permittivité ε_0.

Exercice 03 :

On donne la fréquence de vibration d'une goutte d'eau qui dépend de plusieurs grandeurs physique $f = k.R^x\rho^y A^z$

Où k est une constante sans dimension ; ***x***, ***y***, ***z*** sont des constantes entiers de R, ρ et A. R, le rayon de la goutte ; ρ la masse volumique et la dimension de A est celle d'une force par unité de longueur.

En déduire les valeurs de x, y, z

Exercice 04 :

Donnez les unités en système international (SI) des coefficients ***A***, ***B*** et ***C*** dans l'équation suivante : $v = At^2 - Bt + \sqrt{C}$ Où ***v*** est une vitesse et ***t*** un temps.

Exercice 05 :

L'expérience a montré que la force subit par une sphère immergée dans un fluide dépend du :

- Coefficient de viscosité du fluide η.
- Rayon de la sphère ***r***.
- Vitesse relative ***v***.

Trouver l'expression de cette force en la supposant de la forme : $f = k.\eta^x r^y v^z$

On donne : k coefficient numérique sans dimension et $[\eta] = L^{-1}MT^{-1}$

Exercice 06 :

Déterminer la dimension des deux paramètres α et β qui apparaissent dans la loi :

$F = \alpha(mv) + \beta v$ où ***F*** est une force, ***m*** est une masse et ***v*** est une vitesse.

Exercice 07 :

On considère les vecteurs $\vec{r_1} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{r_2} = 3\vec{j}$ et $\vec{r_3} = -2\vec{i}$.

1. Calculer leurs modules et leurs vecteurs unitaires $\vec{U_1}, \vec{U_2}$ et $\vec{U_3}$.
2. Construire géométriquement sur une feuille de papier millimétrée les vecteurs $\vec{S} = \vec{r_1} + \vec{r_3}$ et $\vec{D} = \vec{r_2} - \vec{r_3}$. Vérifier le résultat trouvé par un calcul analytique.
3. Déterminer le vecteur unitaire $\vec{U_D}$ porté par le vecteur $\vec{D}$.

Exercice 08 :

Trouver le nombre ***a*** pour que les vecteurs $\vec{A} = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{B} = a^2\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ soient perpendiculaires.

Exercice 09:

Calculer $2\vec{B}\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right)$ où $\vec{A} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ et $\vec{B} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

Exercice 10 :

Une parcelle d'un terrain agricole située sur une colline se présente sous forme d'un triangle dont les sommets sont ***A (1, -2, 0)*** ; ***B (2, 1, 0)*** et ***C (0, 0, 4)***. (Valeurs données en centaines de mètres).

Déterminer l'aire de la parcelle et exprimer le résultat en hectare ?

Exercice 11 :

Déterminez l'angle entre les diagonales d'un cube en utilisant le produit scalaire.

Exercice 12 :

(a) Montrez que le produit scalaire et le produit vectoriel sont distributifs.

(b) Le produit vectoriel est-il associatif ?

Exercice 13 :

Soient les vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ dans la base orthonormée $\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}$.

- Démontrez la règle « $BAC - CAB$ » : $\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C} \right) = \vec{B} \times \left(\vec{A} \,.\, \vec{C} \right) - \vec{C} \times \left(\vec{A} \,.\, \vec{B} \right)$
- En déduire que $\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C} \right) + \vec{B} \times \left(\vec{C} \times \vec{A} \right) + \vec{C} \times \left(\vec{A} \times \vec{B} \right) = \vec{0}$

Exercice 14 :

Calculez le gradient des fonctions suivantes :

1. $f(x,y,z) = xy + yz - zx$
2. $f(x,y,z) = x^2 - y^2$
3. $f(x,y,z) = \sqrt{y^2 - 3z}$
4. $f(x,y,z) = xye^z$
5. $f(x,y,z) = \ln \dfrac{x+y}{z}$

Exercice 15 :

Calculez la divergence et le rotationnel des fonctions vectorielles suivantes :

1. $\vec{A}(x,y,z) = x^2 \vec{i} - y^2 \vec{j} - z^2 \vec{k}$
2. $\vec{A}(x,y,z) = xy\vec{i} - z^2 \vec{k}$
3. $\vec{A}(x,y,z) = \ln\left(x^2\right)\vec{i} - e^{-y}\vec{j} - \dfrac{xy}{z^2}\vec{k}$
4. $\vec{A}(x,y,z) = y\cos\left(x^2\right)\vec{i} - z^2 \sin\left(x^2\right)\vec{k}$
5. $\vec{A}(x,y,z) = \sqrt{x^2 - y^2}\,\vec{j} - \dfrac{x}{\sqrt{z^2 - y^2}}\vec{k}$

Exercice 16 :

Montrer que : *div rot* $\vec{A} = 0$

Chapitre II

Interaction électrique

II.1. Interaction électrique

A l'antiquité, les scientifiques grecs savaient qu'un morceau d'ambre frotté dans un environnement sec, exerce une attraction sur des petites tiges de paille. Cette observation qui remonte loin dans le temps, marquait un premier pas en électronique actuelle. D'ailleurs le mot « électron » vient d'un mot grec « «élektron » qui signifie l'ambre.

Expérience 01 **:** Si on peigne nos cheveux par une règle en plastique (Figure II.1), on remarque avec l'approche de petits morceaux de papier une interaction bizarre (inconnue).

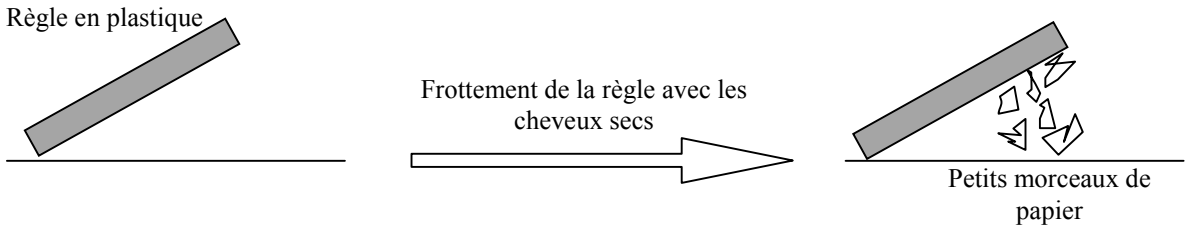


Figure II.1 : Phénomène de l'attirement de petits morceaux de papier vers une règle sèche.

Comme conclusion, on peut dire que sous l'effet de frottement, ces matériaux acquièrent une nouvelle propriété que nous appelons « **Electricité** ».

Remarque : d'une manière générale, tous les corps s'électrisent par :

1. Frottement.
2. Contact avec un autre corps électrisé.
3. En reliant le corps à une borne d'un générateur électrique.

Expérience 02 : frottement de différents matériaux sur les cheveux secs.

a/ Métal b/ Polystyrène c/ Verre d/ Ambre

Donc, par la suite on rapproche l'un des matériaux à l'autre, On remarque les réactions suivantes (Figure II.2):

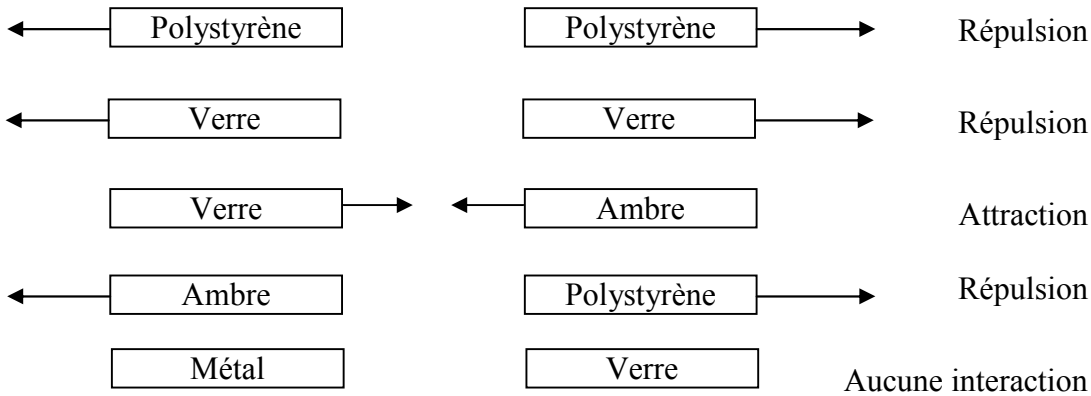


Figure II.2 : Réactions entre les différents matériaux

Conclusion : D'après ces expériences, on peut conclure qu'il y a des corps qui s'électrisent positivement et d'autres négativement.

II.2. Interprétation de l'électrocution selon la structure de la matière

- Modèle de l'atome (**Modèle de Bohr**)

L'atome est constitué selon le modèle de Bohr de (Figure II.3) :

1. Z (e-) tournant au tour du noyau.
2. Z (p) et Z (n) constituants le noyau.

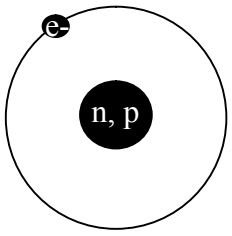


Figure II.3 : Atome (Modèle de Bohr)

- *Quelques propriétés intrinsèques des constituants de l'atome :*

$m(e-)=9,1.10^{-31}kg$, $m(p)= m(n)=1.67.10^{-27}kg$

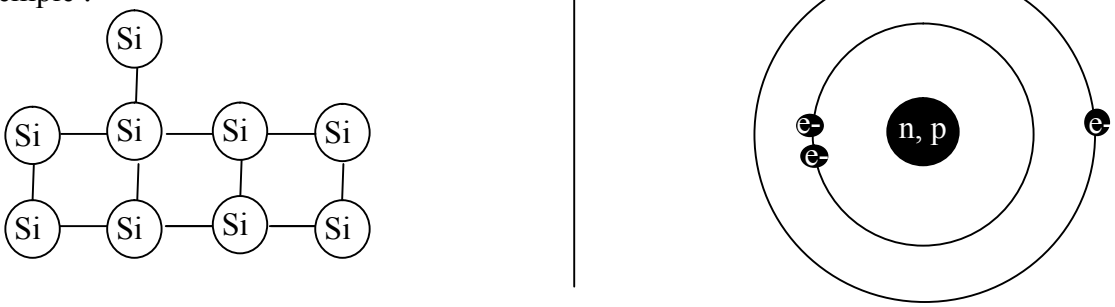
$q(e-)=-1,6.10^{-19}\,C$, $q(p)= 1,6.10^{-19}\,C$

$q(n)= 0\,C$

- *Explication du phénomène observé :*

Pour les isolants comme le verre, les électrons ne peuvent pas se déplacer d'un atome à l'autre, donc tout déséquilibre de charge reste localisé (Figure II.4). Par contre pour les métaux, le déséquilibre créé dans un endroit peut être comblé (dispatché) par un déplacement facile de tous les électrons puisque ils sont libres de nature.

Exemple :



Cas du carbone cas de lithium

Figure II.4 : Phénomène de transport des électrons

II.3. Electrocution par frottement

Dans tous les types de frottement, on possède un déplacement des électrons puisque leur masse est très faible devant la masse du proton et la masse de neutron. Donc on peut lier le phénomène d'électrocution à l'énergie de liaison de l'électron (Figure II.5).

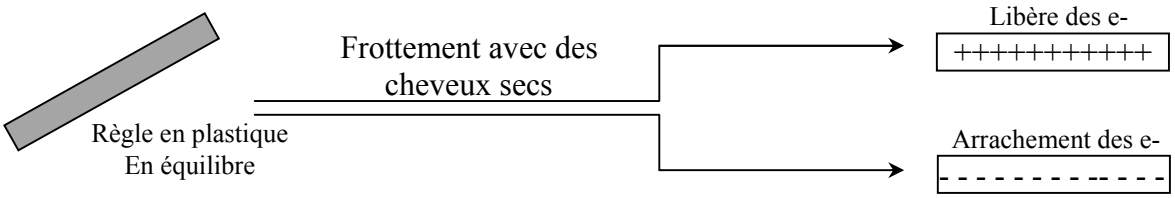


Figure II.5 : Exemple du phénomène d'électrocution par contact

- Si l'énergie de liaison des e- (cheveux) **>** l'énergie de liaison des e- (règle) → électrocution **positive** de la règle.

Résultat : la règle libère des e-

- Si l'énergie de liaison des e-(cheveux) **<** l'énergie de liaison des e- (règle) → électrocution **négative** de la règle

Résultat : la règle arrache des e-

II.4. Electrocution par contact :

L'exemple suivant donne les différents cas de l'électrocution avec contact (Tableau II.1). On suppose que A et B deux corps tels que :

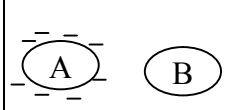
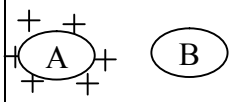
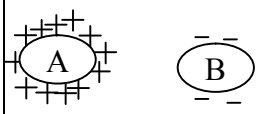
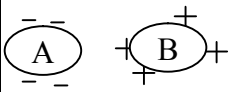
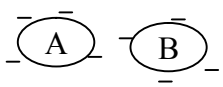
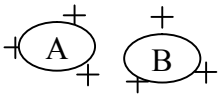
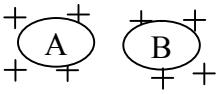
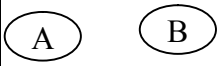
Cas N° :	I	II	III	IV
Avant contact	 $q_A<0$ $q_B=0$	 $q_A>0$ $q_B=0$	 $\lvert q_A\rvert=2\lvert q_B\rvert$	 $\lvert q_A\rvert= \lvert q_B\rvert$
Après contact				
Etat d'électrocution	e^- : A ⟶ B	e^- : B ⟶ A	e^- : B ⟶ A	e^- : A ⟶ B

Tableau II.1: Différents cas d'électrocution par contact

Dans tous les cas, on remarque un déplacement des e- d'un endroit à l'autre puisque il est difficile de déplacer des charges positives lourdes telles que les ions.

II.5. Charge électrique (Balance de Cavendish) :

Expérience 03 (Figure II.6) : Pour définir d'une manière quantitative la charge d'un corps électrisé, nous choisissons un corps ***M*** chargé ***Q*** et on le place à une distance ***d*** d'un autre corps de charge ***q*** en mesurant la force ***F*** qui s'exerce sur ***q***. on fait la même chose avec un autre corps chargé ***q'*** mais cette fois ci la charge ***q'*** est connue.

Les résultats de cette expérience montrent la proportionnalité suivante :

$$\frac{F}{q}=\frac{F'}{q'} \Rightarrow \boxed{\frac{F}{F'}=\frac{q}{q'}}$$

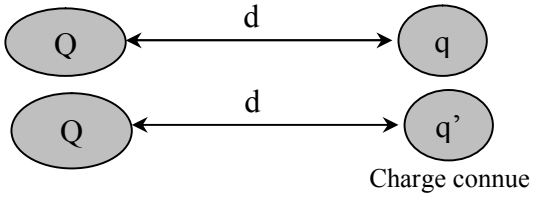


Figure II.6 : schéma de principe de la Balance de **Cavendish**

On a remarqué dans toutes les interactions électriques observées dans la nature que la charge totale d'un système isolé reste constante.

$$\boxed{Q_T = Cte \quad \Leftrightarrow \quad \Delta Q_T = 0}$$

II.6. Loi de Charles de Coulomb (1736 - 1806) :

On suppose que deux particules chargées (ou deux charges ponctuelles) ***q*** et ***q'*** et elles sont séparées d'une distance ***r***. la force électrostatique d'attraction ou de répulsion $\vec{F}$ est donnée par Coulomb comme suit (Figure II.7):

$\vec{F} = k.\frac{qq'}{r^2}\vec{U}_F$ avec $\vec{U}_F$ est le vecteur unitaire de la force electrostatique.

Tel que : $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9 \text{ N.m}^2.\text{c}^{-2}$

Selon les charges ***q*** et ***q'***, on distingue deux différentes forces (répulsive ou attractive)

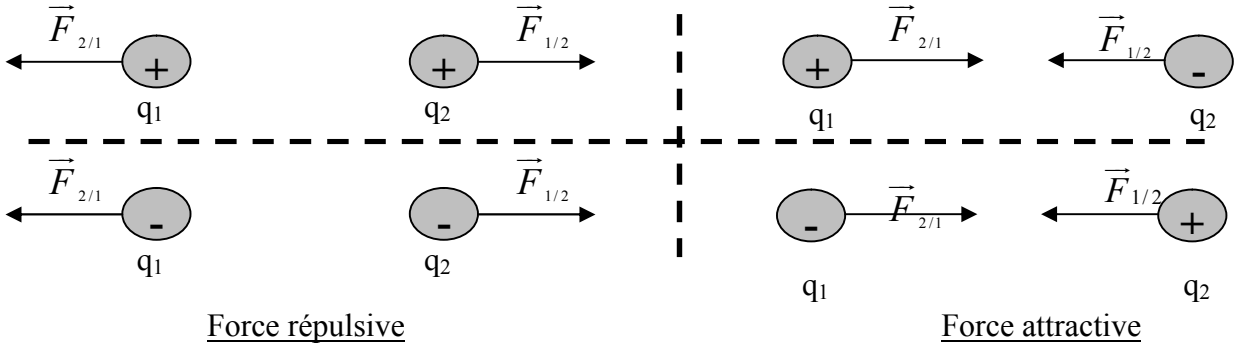


Figure II.7 : Forces électriques répulsive et attractive

II.7. Comparaison entre la force gravitationnelle et la force électrostatique:

Exemple 01 : interaction ***e⁻ - p⁺***

On prend deux particules, électron et proton distant de ***d=8.10⁻¹⁰m*** et on essaye de comparer les valeurs des deux différentes forces (Newton et Coulomb).

$$\left|\vec{F}_g\right| = G\frac{m_p.m_{e^-}}{d^2} = 6,67\times10^{-11}\frac{\left(9,1\times10^{-31}\right)^2.1836}{\left(8\times10^{-10}\right)^2} \approx 10^{-50}\,N$$

$$\left|\vec{F}_{e^-}\right| = k\frac{q_p.q_{e^-}}{d^2} = 9\times10^9\frac{\left(1,6\times10^{-19}\right)^2}{\left(8\times10^{-10}\right)^2} \approx 10^{-9}\,N$$

Donc, dans le domaine microscopique $\boldsymbol{F_{e^-}} >>> \boldsymbol{Fg}$. D'après ce résultat et dans tous les problèmes de l'électrostatique, on néglige la force de gravitation devant la force électrostatique.

Exemple 02 : Atome de l'hydrogène (Figure II.8) :

Calculer la force d'attraction électrostatique entre le proton de l'Hydrogène et son électron, en précisant la direction de ***F***.

Solution :

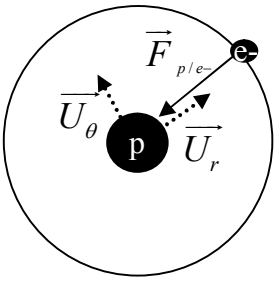


Figure II.8 : Forces d'attraction dans l'atome de l'Hydrogène

$$\left|\vec{F}_{e^-}\right| = k\frac{q_p.q_{e^-}}{d^2}\vec{U}_F$$

$$= 9\times10^9\frac{\left(1,6\times10^{-19}\right)\left(-1,6\times10^{-19}\right)}{\left(0,53\times10^{-10}\right)^2}\vec{U}_r$$

$$= -8,2\times10^{-8}\vec{U}_r \quad (N)$$

II.8. Principe de superposition des forces :

Considérons maintenant une charge ***q*** placée en un point ***M*** et se trouvant en présence d'autres charges q_i placées en des points M_i. Soit r_i la distance de ***Mi*** à ***M*** et $\vec{U}_i$ un vecteur unitaire porté par $\overrightarrow{M_iM}$ et dirigé de ***Mi*** vers ***M*** ; le principe de superposition permet d'écrire la force $\vec{F}$ s'exerçant sur la charge ***q*** sous la forme :

$$\vec{F} = \sum_i k\frac{q.q_i}{r_i^2}\vec{U}_i$$

Exemple : La figure ci-contre montre trois particules chargées dans le plan (xOy) comme suit :

$q_1=q_2=2q_3 = 2.10^{-16}$ C et les coordonnées de chaque charge est q_1(0, 0)m , q_2 (0, 2.10^{-10})m et q_3 (4.10^{-10}, 2.10^{-10})m.

1. Déterminer la force exercée sur la particule q_3 en module et en direction.
2. On suppose que la charge q_3 est négative, que devient la force ***F*** ?

Solution :

$\vec{F}_T = \vec{F}_{1/3} + \vec{F}_{2/3}$ (voir Figure II.9)

Calcul de $\vec{F}_{1/3}$

$$\vec{F}_{1/3} = k\frac{q_1.q_3}{d_{13}^2}\vec{U}_F = k\frac{q_1.q_3}{d_{13}^2}\left(\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}\right)$$

on calcul $\begin{cases}\sin\theta = \dfrac{4}{\sqrt{20}} = 0.89 \Rightarrow \theta = 63,43° \\ \text{et} \\ d_{13} = \sqrt{2^2+4^2} = 4.47\times10^{-10}\ m\end{cases}$

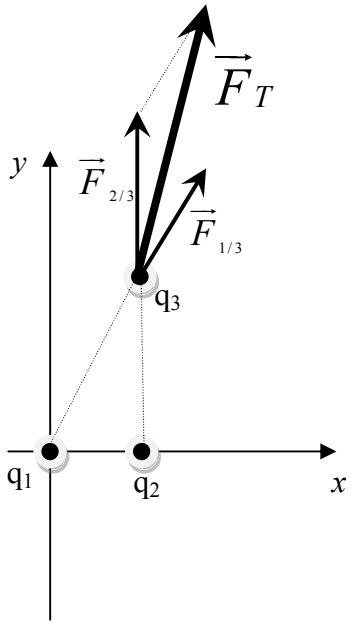


Figure II.9 : Représentation graphique des forces

$$\vec{F}_{1/3} = 9\times10^{9}\frac{\left(2\times10^{-16}\right)\left(10^{-16}\right)}{\left(4.47\times10^{-10}\right)^{2}}\left(\cos(63,43)\vec{i}+\sin(63,43)\vec{j}\right)$$

$$\vec{F}_{1/3} = 0.9\times10^{-3}\left(\cos(63,43)\vec{i}+\sin(63,43)\vec{j}\right)$$

$$\vec{F}_{1/3} = \left(4.02\vec{i}+8.04\vec{j}\right)\times10^{-4}(N)$$

Maintenant pour la force $\vec{F}_{2/3}$

$$\vec{F}_{2/3} = k\frac{q_2.q_3}{d_{23}^{\ 2}}\vec{U}_F = k\frac{q_2.q_3}{d_{23}^{\ 2}}\left(\cos\beta\vec{i}+\sin\beta\vec{j}\right)$$

on sait que : $\begin{cases}\beta = 90° = \pi/2\\ \text{et}\\ d_{23} = 4\times10^{-10}\ m\end{cases}$

$$\vec{F}_{2/3} = 9\times10^{9}\frac{\left(2\times10^{-16}\right)\left(10^{-16}\right)}{\left(4\times10^{-10}\right)^{2}}\left(\cancel{\cos(90)\vec{i}}+\sin(90)\vec{j}\right)$$

$$\vec{F}_{2/3} = 1.13\times10^{-3}\vec{j}\quad(N)$$

donc, on fait la somme de : $\begin{cases}\vec{F}_{1/3} = \left(4.02\vec{i}+8.04\vec{j}\right)\times10^{-4}(N)\\ \vec{F}_{2/3} = 1.13\times10^{-3}\vec{j}\quad(N\end{cases}$

$$\vec{F}_{T/3} = \left(4.02\vec{i}+18.17\vec{j}\right)\times10^{-4}(N)$$

Exercices et problèmes

Exercice 01 :

On frotte de la laine avec du plastique. Avant le processus, la laine et le plastique sont neutres. Après le processus, le plastique possède une charge de ***-3µC***.

a. Quelle est la quantité d'électrons transférée de la laine au plastique durant le processus ?

b. Quelle est la charge portée par la laine après le processus ?

Un corps conducteur portant une charge de ***5µC*** est mis en contact avec un corps conducteur identique portant une charge de ***-3 µC***.

a. Quelle est la charge totale des deux corps conducteurs ?

b. Quelle est la charge portée par chaque conducteur après avoir été mis en contact ?

Un corps conducteur portant une charge de ***-4µC*** est mis en contact avec un corps conducteur identique portant une charge de ***-6µC***.

a. Quelle est la charge portée par chaque conducteur après avoir été mis en contact ?

b. Combien d'électrons ont été transférés lors du contact entre les corps conducteurs ?

Exercice 02 :

On considère 2 billes d'acier de diamètre 1mm distantes de 3cm chargées avec ***+4nC*** et ***-4nC***.

1. Calculez et comparez les forces d'interaction gravitationnelle et électrostatique.
2. Calculez le rapport de ces forces.
3. Quelle conclusion peut-on tirer de ce calcul ?

Données : $G = 6{,}67.10^{-11}$ *SI*, $\rho_{acier} : 7800 kg/m^3$

Exercice 03 :

Deux sphères de ***1g*** sont suspendues à l'aide de cordes identiques de ***60cm*** de longueur(Figure 10). Les sphères sont initialement séparées par une distance de ***1m***. Après avoir chargé les deux sphères, les cordes font un angle de ***20°*** par rapport à la verticale. Si la charge totale (charge nette) portée par les deux sphères est de + ***0,5µC***, quelle est la charge portée par chacune d'elles ?

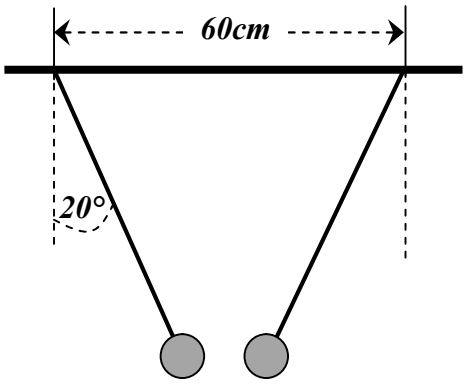


Figure II.10 : Pendules simples

Exercice 04 :

On considère trois charges égales à ***10 nC***. Elles sont placées aux points : A(0,-0.5), B(0,0.5) et C(1,0) (valeurs en mm)

- Déterminez et représenter les forces électrostatiques exercées sur chacune des charges.

Exercice 05 :

Deux charges ponctuelles Q sont placées aux points opposés B et C d'un carré de côté a. Deux autres charges q sont placées aux autres points du même carré (figure II.11).

1- Déterminer l'expression de la force électrique qui s'exerce sur la charge Q du point B.

2- Quelle doit – être la relation ente Q et q pour que cette force soit nulle.

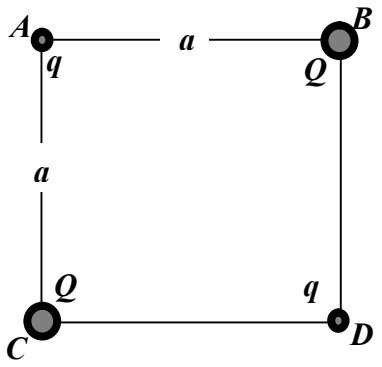


Figure II.11 : Pendules simples

Exercice 06 :

Soient trois charges ponctuelles $q_1=15\mu C$, $q_2=6\mu C$ et une charge négative q_3 alignées sur l'axe ***Ox*** selon la figure II.12.

1- Représenter qualitativement sur la figure les forces qui agissent sur q_3.

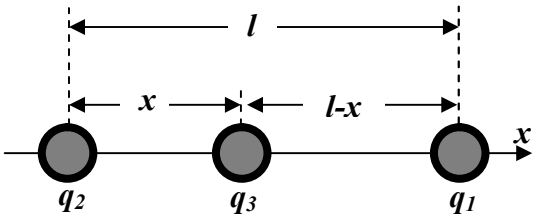


Figure II.12 : équilibre d'une charge ponctuelle (1)

2- Donner les expressions de ces forces en fonction de ***x***.

3- Quelle doit être la valeur de ***x*** pour que la force résultante sur q_3 soit nulle.

On donne $q_3 = -4\mu C$ et $l=2m$

Exercice 07 :

Deux sphères conductrices identiques portant des charges de signes opposés s'attirent avec une force de ***0.108N***, quand la distance qui les sépare est $d = 0.5m$. On les relie à l'aide d'un fil conducteur. Après avoir enlevé le fil, elles se repoussent avec une force de ***0.036N***, en restant à la même distance. Quelle était la charge initiale de chaque sphère ? (Les rayons des sphères sont très négligeables devant la distance ***d***)

Exercice 08 :

On considère le système de charges ponctuelles $q_1=q$, $q_2=q/9$ et $q_3=q$, représenté sur la figure II.13. Les charges positives q_1 et q_2 sont fixées respectivement aux points O et A distants de d.

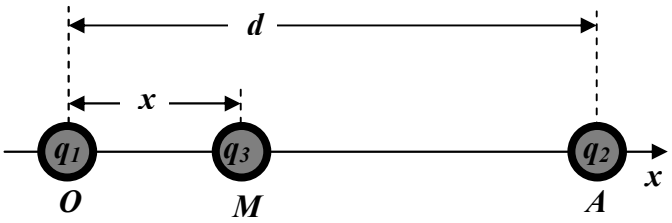


Figure II.13 : Equilibre d'une charge ponctuelle (2)

Soit une charge q_3, assujettie à se déplacer le long du segment OA.

1. Donner l'expression de la force qui s'exerce sur q_3 au point M.
2. A quelle abscisse x_0, la charge q_3 est dans une position d'équilibre ?

A.N: $d = 4cm$.

Chapitre III

Champ et potentiel électriques

III.1. Introduction

Toute région dans laquelle une charge électrique subit une force $\vec{F}$ est appelée un « champ électrique ». La force est due à la présence des autres charges dans cette région.

Exemple :

On suppose qu'on place une charge q_1 dans une région où se trouvent d'autres charges q_2, q_3, q_4,……q_n (Figure III.1) Donc la charge q_1 subit une force résultante totale comme suit :

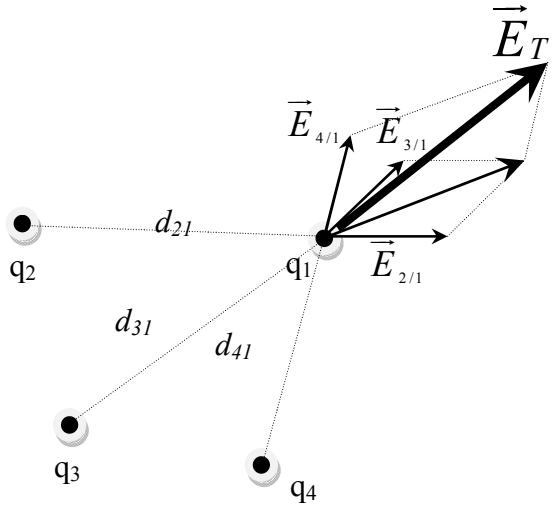


Figure III.1 : Champ électrique

$$\vec{F}_T = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \vec{F}_n$$

On sait que : $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q_1}$ alors par exemple

$$\vec{E}_2 = k\frac{q_2}{{d_{12}}^2}\vec{U}_F$$

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \vec{E}_n$$

Alors, nous disons que la charge q_1 est placée dans le champ créé par les charges qui restent. L'intensité du champ électrique en un point donné est par définition égale à la force par unité de charge placée en ce point, son symbole est ***E*** et son unité est (N/C).

Exemple 01:

Calculer le champ électrique créé par le proton de l'atome d'hydrogène, en précisant sa direction (Figure III.2).

Solution :

$$\vec{E}_p = \frac{\vec{F}_{p/e-}}{q_{e-}} = k\frac{q_p}{r^2}\vec{U}_r$$

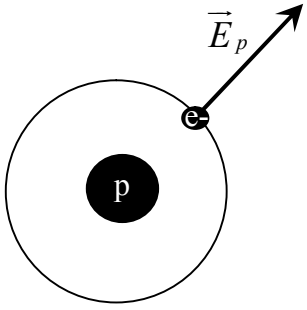


Figure III.2 : Champ électrique créé par le proton de l'hydrogène

$$\vec{E}_p = 9\times10^9 \frac{\left(1,6\times10^{-19}\right)}{\left(0,53\times10^{-10}\right)^2}\vec{U}_r = 5.12\times10^{10}\ \vec{U}_r \quad (N/c)$$

III.2. Champs électriques créés par des charges ponctuelles

On suppose qu'une charge quelconque est placée dans l'espace. Le champ électrique créé par cette charge dans l'espace est représenté comme fonction de signe de la charge. On distingue les différents cas suivants (Tableau III.1) : Avec : $\vec{E}_Q = k\frac{Q}{r^2}\vec{U}_r$

I	II	III	IV
$\vec{E}_Q$ q+	$\vec{E}_Q$ q-	$\vec{E}_Q$ q+	$\vec{E}_Q$ q-
Q>0	Q>0	Q<0	Q<0

Tableau III.1 : Représentation du champ électrique créé par une charge ponctuelle.

III.3. Lignes du champ électrique

On suppose une charge ponctuelle ***q*** de signe quelconque, on distingue selon le signe de cette charge deux cas pour les lignes du champ électrique. Les lignes du champ sont la continuité des vecteurs du champ électrique créé par une charge quelconque (Figure III.3) .

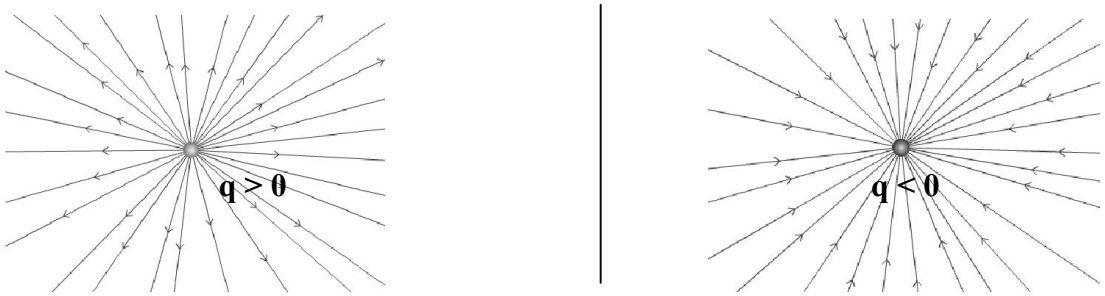


Figure III.3 : Lignes du champ électrique créé par une charge ponctuelle

III.4. Potentiel électrique

Soit une charge ponctuelle ***q*** se trouve dans l'espace (Oxyz) (Figure III.4).

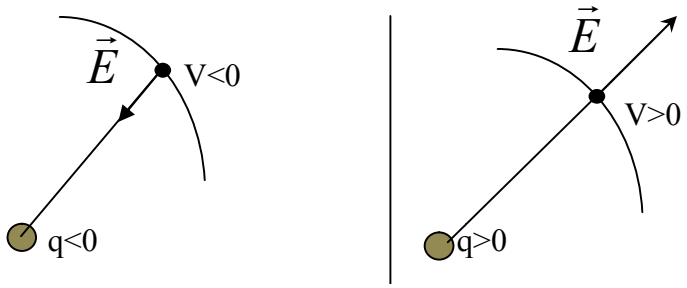


Figure III.4 : Potentiel créé par une charge ponctuelle

À tout point de l'espace, on mesure un potentiel électrique définit comme l'énergie potentielle par la relation :

$$dV = -\vec{E}.\overrightarrow{dl} \Rightarrow V = k\frac{q}{r}$$

Démonstration : On sait pour les coordonnée polaires (Figure III.5) que :

$$\vec{E} = \frac{k.q}{r^2}.\overrightarrow{U}r \quad \text{et} \quad \overrightarrow{dl} = dr.\overrightarrow{U}r$$

Donc $\int_{V_A}^{V_B} dV = -\int \vec{E}.\overrightarrow{dl} \quad \Leftrightarrow \quad V_B - V_A = -\int_0^r \frac{k.q}{r^2}.dr$

$$\Leftrightarrow \quad V_{BA} = \frac{k.q}{r} + C$$

pour la constante C: si $r \to \infty \quad \Rightarrow \quad V = 0 \quad$ alors $C = 0$

donc : $\boxed{V = \frac{k.q}{r}}$

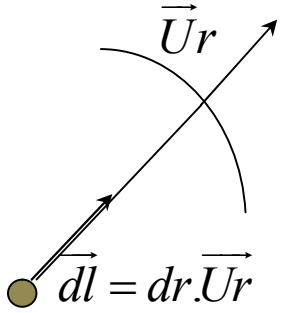


Figure III.5 : Coordonnées polaires

III.5. Principe de superposition (cas de deux charges ponctuelles)

On suppose deux charges ponctuelles positives q_1 et q_2 agissant sur la charge q(Figure III.6).

a/ Force électrique

$$\vec{F}_T = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = k\frac{qq_1}{r_1^2}\overrightarrow{U}_{F_1} + k\frac{qq_2}{r_2^2}\overrightarrow{U}_{F_2}$$

$$= q\left(k\frac{q_1}{r_1^2}\overrightarrow{U}_{F_1} + k\frac{q_2}{r_2^2}\overrightarrow{U}_{F_2}\right)$$

$$= q\left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2\right) = \boxed{q\vec{E}_T}$$

b/ Champ électrique

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$= k\frac{q_1}{r_1^2}\overrightarrow{U}_{E_1} + k\frac{q_2}{r_2^2}\overrightarrow{U}_{E_2}$$

$$\vec{E}_T = k\left(\frac{q_1}{r_1^2}\overrightarrow{U}_{E_1} + \frac{q_2}{r_2^2}\overrightarrow{U}_{E_2}\right)$$

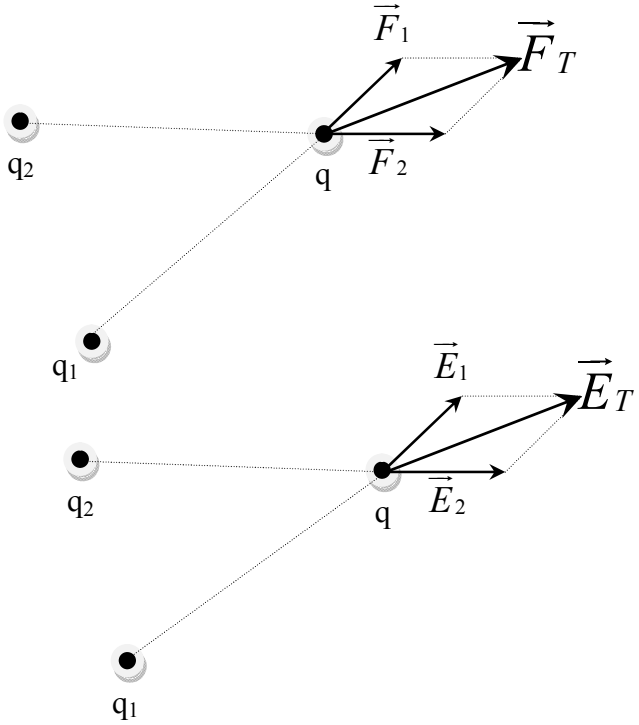


Figure III.6 : Principe de superposition

c/ potentiel électrique

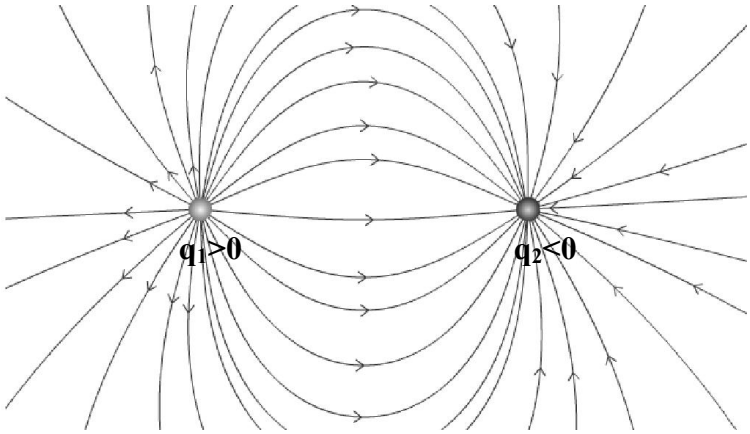
$$V_T = V_1 + V_2 = k\frac{q_1}{r_1} + k\frac{q_2}{r_2} = k\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right)$$

Cas particulier : dipôle électrique (q_1=-q_2=q), le potentiel est : $V_T = kq\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$

III.6. Lignes du champ et surfaces équipotentielles

On suppose deux charges ponctuelles q_1 et q_2 distant de r. On essaye de déterminer le champ et le potentiel électrique dans tout point de l'espace pour les deux cas suivants (Figure III.7) :

Si $q_1 = -q_2$



Si $q_1 = q_2$

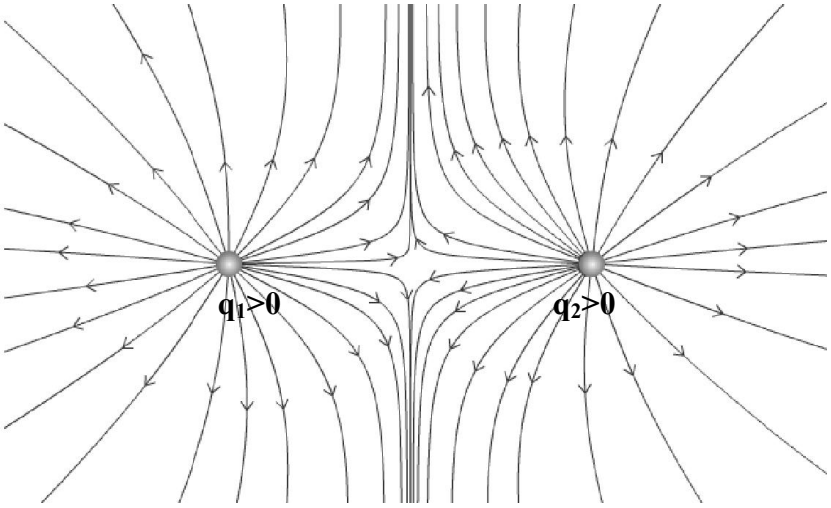


Figure III.7 : Lignes du champ électrique pour deux charges ponctuelles

III.7. Travail

Le travail pour déplacer une charge quelconque ***q*** d'une position ***M*** à une position ***R*** (supposée la référence) où elle ne subit aucune force (***V_R=0***) est donc :

$$dW = -dEp$$

Mais à condition qu'il faut que le déplacement soit sans variation en énergie cinétique ($\Delta E_c = 0$ donc $\Delta E_T = -\Delta E_P$).

Alors :

$$dW = \int_V^{V_R=0} -\Delta Ep = -\int_V^{V_R=0} -\vec{F}.\vec{dl} = \int_V^0 \vec{F}.\vec{dl}$$

On sait que $\vec{F}.\vec{dl} = q\vec{E}.\vec{dl}$ et $dV = -\vec{E}.\vec{dl}$ donc :

$$dW = q\int_V^0 (-dV) = q\left(-V\big|_V^0\right) = qV$$

III.8 Energie potentielle d'une charge ponctuelle :

On suppose une particule ***M*** chargée ***q*** se trouve dans un potentiel ***V*** créé par une charge ***Q***. l'énergie potentielle de M est donnée par :

$$Ep = -\int \vec{F}.\vec{dl} \;\Rightarrow\; Ep = qV$$

Démonstration :

On sait que : $\vec{F} = k\,\frac{q.Q}{r^2}.\vec{U}r$ et $\vec{dl} = dr.\vec{U}r + r.d\theta.\vec{U}_\theta$

$$Ep = -\int \vec{F}.\vec{dl} = -\int \left(k\,\frac{q.Q}{r^2}.\vec{U}r\right).\left(dr.\vec{U}r + r.d\theta.\vec{U}_\theta\right)$$

$$= -\int k\,\frac{q.Q}{r^2}dr = kqQ\int \frac{-dr}{r^2} = k\,\frac{qQ}{r} = q\left(k\,\frac{Q}{r}\right) = \boxed{qV}$$

III.9. Généralisation : calcul du champ et de potentiel électrique

III.9.1 Cas de *n* charges ponctuelles

Champ électrique : $\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k.q_i}{r_i^2}.\vec{U}i$

Potentiel électrique : $V = \sum_{i=1}^{n} \frac{k.q_i}{r_i}$

III.9.2 Cas d'une distribution homogène de charges (Figure III.8)

a. Distribution linéique (linéaire) λ

On sait que $\lambda = \frac{dq}{dl}$ donc $dq = \lambda.dl$

$$\vec{E} = k\int \frac{\lambda dl}{r^2}.\vec{U} \qquad V = k\int \frac{\lambda dl}{r}$$

b. Distribution surfacique σ

On sait que $\sigma = \frac{dq}{dS}$ donc $dq = \sigma.dS$

$$\vec{E} = k\iint \frac{\sigma dS}{r^2}.\vec{U} \qquad V = k\iint \frac{\sigma dS}{r}$$

c. Distribution volumique ρ

On sait que $\rho = \frac{dq}{d\mathrm{v}}$ donc $dq = \rho.d\mathrm{v}$

$$\vec{E} = k\iiint \frac{\rho d\mathrm{v}}{r^2}.\vec{U} \qquad V = k\iiint \frac{\rho d\mathrm{v}}{r}$$

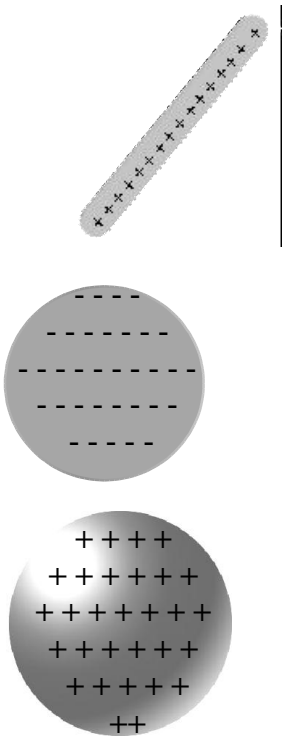


Figure III.8 : Distribution continue des charges

Rappel : en coordonnées sphérique : $\vec{dl} = \vec{dr}$ $dS = r.dr.d\theta$ $dv = r^2.\sin\theta.dr.d\theta.d\phi$

III.10. Passage du champ au potentiel électrique et l'inverse

Pour chaque charge ***q*** dans l'espace, on peut associer deux fonctions, une vectorielle $\vec{E}$ et l'autre scalaire ***V***, telles que le lien entre les deux est donné par :

$$V = -\int \vec{E}.\vec{dl} \Leftrightarrow dV = -\vec{E}.\vec{dl}$$

On sait que $dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$ en coordonnées cartésienne.

D'un autre coté $dV = -E_x dx - E_y dy - E_z dz$

Donc : $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$ $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$ $\Rightarrow$ $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\ V$

Exemple 01 : Cas d'une charge ponctuelle

$$\vec{E} = k\frac{q}{r^2}\vec{U}_E \qquad \Rightarrow \qquad V = ?$$

On utilise les coordonnée polaire (***r*** et ***θ***), alors : $V = -\int \vec{E}.\vec{dl} = \int -\frac{kq}{r^2} dr = \frac{kq}{r}$

Exemple 02 : Calculer à partir du champ électrique le potentiel électrique créé à un point ***M*** (figure) par un disque chargé positivement avec ***σ>0*** et de rayon ***R*** (Figure III.9).

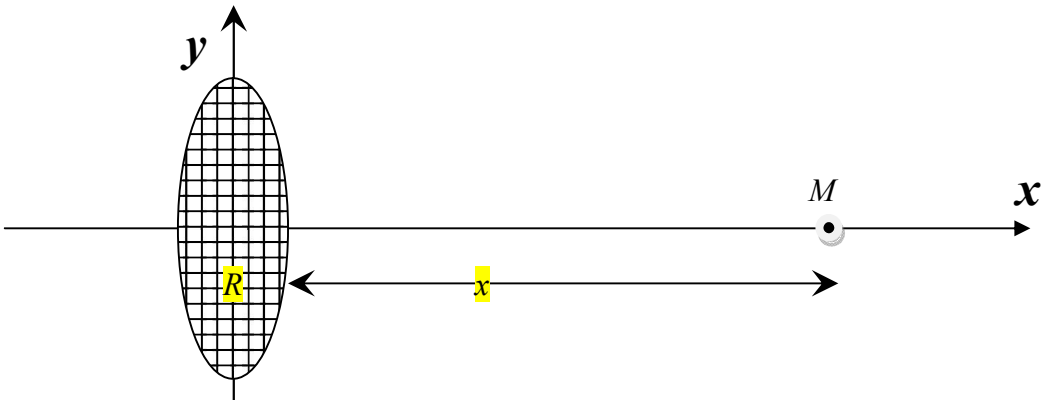


Figure III.9 : Disque chargé positivement (***σ>0***)

Solution :

Le vecteur du champ électrique est donné par (Figure III.10):

$$d\vec{E} = \int k \frac{dq}{r^2} \vec{U}_E$$

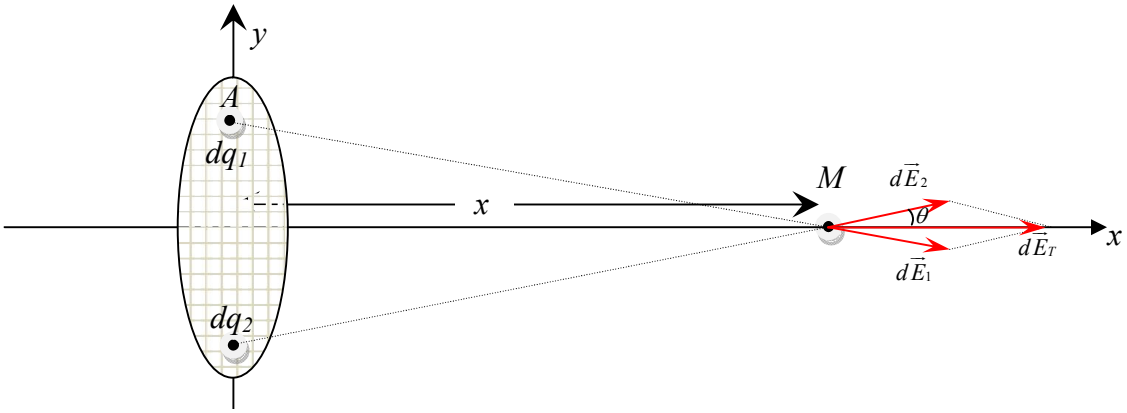


Figure III.10 : Représentation du champ électrique créé par un disque chargé

Alors que le module de ce vecteur est donnée par :

$$dE = \int k \frac{dq}{r^2} = \iint k \frac{\sigma ds}{r^2}$$

Tel que ***ds*** est l'élément de surface qui appartient au disque de rayon ***R***. On utilise les coordonnées polaires pour la détermination de ***ds*** puisque la formule de ***E*** dépend de ***r***.

Donc :

$$ds = r.dr.d\theta$$

On prend des anneaux de disque comme :

$$ds = y.dy.\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi y dy$$

Pour chaque point sur l'anneau élémentaire, le champ électrique est porté sur $\overrightarrow{AM}$, mais le champ total est porté sur l'axe des ***x***, puisque sur l'axe des ***y*** le champ total est nul $\left(dE_y - dE_y\right)\vec{j} = \vec{0}$. Alors que la composante qui reste est dE_x. Donc :

$$d\vec{E} = \int \left(dE_x\right)\vec{i} = \left(\int dE\cos\theta\right)\vec{i} \text{ avec, } \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

On remplace tous les éléments de l'intégrale en fonction de ***x*** et ***y***, on trouve :

$$\vec{E} = \left(\int \frac{k\sigma\left(2\pi y dy\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{x}{x^2+y^2}\right)\vec{i} = \left(k\sigma 2\pi x\int \frac{ydy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\right)\vec{i}$$

On sait que :

$$\int \frac{ydy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + C$$

Donc : $\vec{E} = \left(k\sigma 2\pi x\left[\frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]_0^R\right)\vec{i} = \left(k\sigma 2\pi x\left[\frac{-1}{\sqrt{x^2+R^2}} - \frac{-1}{\sqrt{x^2}}\right]\right)\vec{i}$

$$\vec{E} = \left(k\sigma 2\pi \boxed{x}\left[\frac{1}{\boxed{x}} - \boxed{x}\frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}}\right]\right)\vec{i} = \boxed{2\pi k\sigma\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)\vec{i}}$$

- <u>Maintenant, on calcule le potentiel ***V***.</u>

$$V = \int \frac{kdq}{r} = \int \frac{k\sigma 2\pi y dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2\pi k\sigma\int_0^R \frac{ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

On sait que :

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

Donc :

$$V = 2\pi k\sigma\left[\sqrt{x^2+y^2}\right]_0^R = \boxed{2\pi k\sigma\left(\sqrt{x^2+R^2} - x\right)}$$

- Maintenant, on essaye de calculer le potentiel ***V*** à partir de $\vec{E}$.

On sait que :

$$V = \int dV = -\int \vec{E}.\vec{dl}$$

avec $\begin{cases} \vec{E} = 2\pi k\sigma\left(1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)\vec{i} \\ \vec{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \end{cases}$

Donc,

$$V = -\int 2\pi k\sigma\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)dx$$

$$= -2\pi k\sigma\left(\int dx - \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)$$

$$= -2\pi k\sigma\left(x - \sqrt{x^2+R^2}\right)$$

$$= \boxed{2\pi k\sigma\left(\sqrt{x^2+R^2} - x\right)}$$

On remarque que c'est le même résultat obtenu sans passer par le champ électrique.

Exemple 02 :

Calculer à partir du champ électrique le potentiel électrique créé à un point ***M*** (Figure III.11) par un fil chargé positivement ***λ>0*** et de longueur ***l***.

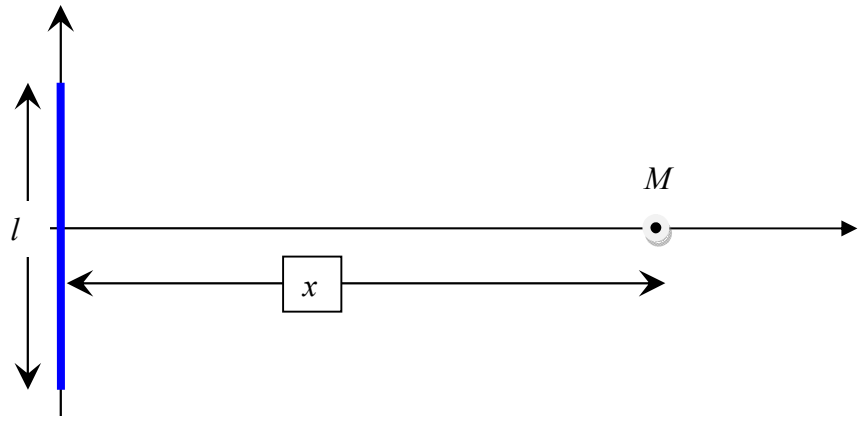


Figure III.11 : Fil chargé positivement (***λ>0***)

Solution :

Le vecteur du champ électrique est donné par (Figure III.12):

$$d\vec{E} = \int k\frac{dq}{r^2}\vec{U}_E$$

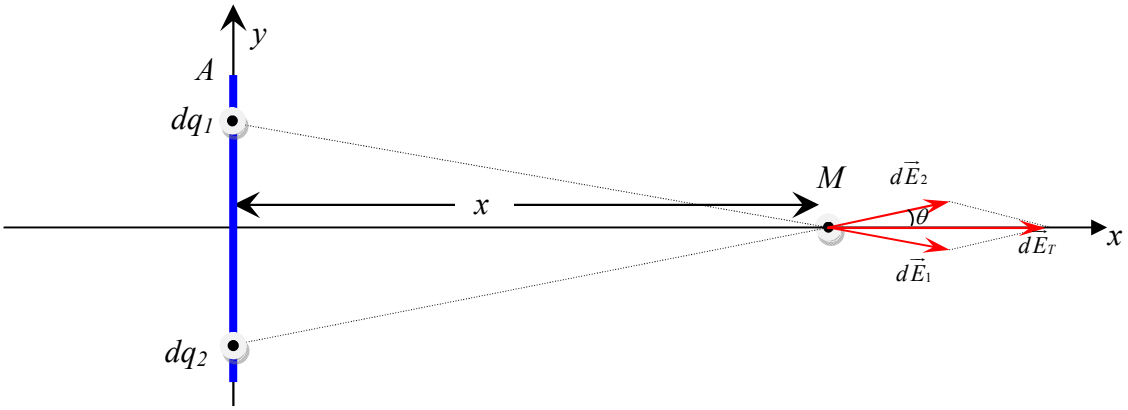


Figure III.12 : Représentation du champ électrique créé par un fil chargé

Alors que le module de ce vecteur est donnée par :

$$dE = \int k\frac{dq}{r^2} = \iint k\frac{\lambda dl}{r^2}$$

Tel que ***dl*** est l'élément de longueur qui appartient au fil de longueur ***l***. on utilise les coordonnées cartésiennes pour la détermination de ***dl*** puisque la formule de ***E*** dépend de ***x*** et ***y***. Donc : $dl = dy$

Pour chaque point sur le fil, le champ électrique est porté sur $\overrightarrow{AM}$, mais le champ total est porté sur l'axe des ***x***, puisque sur l'axe des ***y*** le champ est nul $\left(dE_y - dE_y\right)\vec{j} = \vec{0}$. Alors que la composante qui reste est dE_x . Donc :

$$d\vec{E} = \int \left(dE_x\right)\vec{i} = \left(\int dE\cos\theta\right)\vec{i} \quad \text{avec} \quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

On remplace tous les éléments de l'intégrale en fonction de ***x*** et ***y*** , on trouve :

$$\vec{E} = \left(\int \frac{k\lambda\left(dy\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{x}{x^2+y^2}\right)\vec{i} = \left(k\lambda x\int \frac{dy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\right)\vec{i}$$

On fait le changement de variables suivant :

$$u = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad dy = xdu$$

$$\text{si } y = \pm\frac{l}{2} \;\Rightarrow\; \text{u}= \pm\frac{l}{2x}$$

$$\int_{-l/2}^{l/2} \frac{dy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{x^2}\int_{-l/2x}^{l/2x} \frac{du}{\left(1+u^2\right)^{3/2}}$$

On sait que :

$$\int \frac{du}{\left(1+u^2\right)^{3/2}} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$\vec{E} = \left(\frac{k\lambda}{x}\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \right]_{-l/2x}^{l/2x} \right)\vec{i} = \left(\frac{k\lambda}{x}\left(\frac{\frac{l}{2x}}{\sqrt{1+\left(\frac{l}{2x}\right)^2}} - \frac{-\frac{l}{2x}}{\sqrt{1+\left(\frac{l}{2x}\right)^2}} \right) \right)\vec{i}$$

$$= \boxed{\frac{k\lambda l}{x\sqrt{\left(x^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)}}\vec{i}}$$

- Maintenant, on calcule le potentiel ***V***.

$$V = \int \frac{kdq}{r} = \int \frac{k\lambda dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = k\lambda \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

On fait le changement de variable suivant: $u = y/x$, donc, $dy = x.du$

$$V = k\lambda \int_{-l/2x}^{l/2x} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$$

On sait que $\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du = \ln\left|u+\sqrt{u^2+1}\right|$

Donc, $V = k\lambda \int_{-l/2x}^{l/2x} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = k\lambda \left(\ln \left| u + \sqrt{u^2+1} \right| \right)_{-l/2x}^{l/2x}$

Alors, $V = k\lambda \ln \left(\frac{\left| \frac{l}{2x} + \sqrt{\left(\frac{l}{2x}\right)^2 + 1} \right|}{\left| \sqrt{\left(\frac{l}{2x}\right)^2 + 1} - \frac{l}{2x} \right|} \right)$

- Devoir : Maintenant, on essaye de calculer le potentiel ***V*** à partir de $\vec{E}$.

III.11. Energie interne de deux charges ponctuelle:

On appelle l'énergie interne du système de deux charges ponctuelles q_1 et q_2 l'énergie donnée par : $U = k.\frac{q_1 q_2}{d}$ Tel que d est la distance entre les deux charges

Généralisation :

On généralise l'expression de l'énergie interne pour ***n*** charges ponctuelles q_1, q_2, q_3,…….q_n.

$U = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + k\frac{q_2 q_3}{r_{23}} + k\frac{q_3 q_4}{r_{34}} + ...k\frac{q_n q_m}{r_{nm}}$ Donc : $U = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j k.\frac{q_i q_j}{r_{12}}$

La présence du ½ est pour prendre une seule fois l'interaction entre q_1 et q_2

III.12. Application : Dipôle électrique :

III.12.1 Définition :

Le dipôle électrique est constitué par l'arrangement de deux charges égales en valeurs numérique et de signes contraires ***q+*** et ***q-*** séparées par une petite distance ***a*** (distance atomique en Å) (Figure III.12). Donc le moment électrique dipolaire est défini par :

$$\vec{P} = q.\vec{a}$$

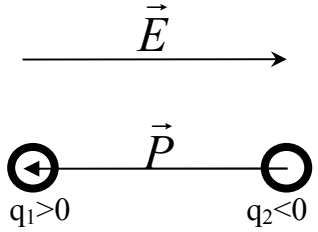


Figure III.12 : Représentation du champ électrique créé par un fil chargé

III.12.2. Applications (Figure III.13):

Exemples :

Molécule	P(C.cm).10^{-30}
HCl	3.43
H_2O	6.20
C_2H_5OH	3.60
CO_2	0.0

Tableau III.2 : Quelques valeurs du moment dipolaire

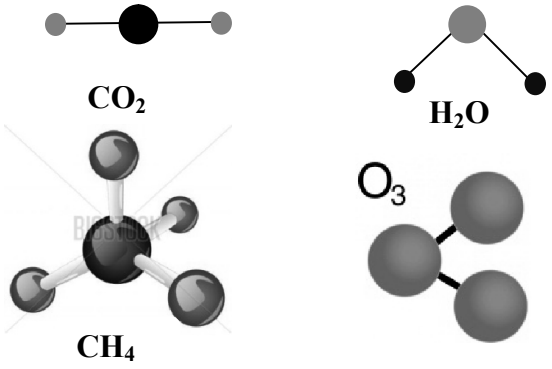


Figure III.13 : Quelques molécules

Devoir : Donner l'objectif principal pour l'étude des dipoles électriques.

Réponse : la cohérence de la matière

III.12.3 Potentiel et champ créés par un dipôle électrique à grande distance :

a/ potentiel électrique créé par un dipôle électrique à un point ***M*** (Figure III.14) :

$$V_T = \frac{kq}{r_1} - \frac{kq}{r_2} = kq\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = kq\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right)$$

Si la distance ***a*** est très faible devant r_1 et r_2, on peut faire l'approximation suivante :

$r_2 - r_1 = a\cos\theta$ et $r_1 . r_2 = r^2$

Donc le potentiel devient :

$$V_T = \frac{kqa\cos\theta}{r^2} = \frac{kp\cos\theta}{r^2}.$$

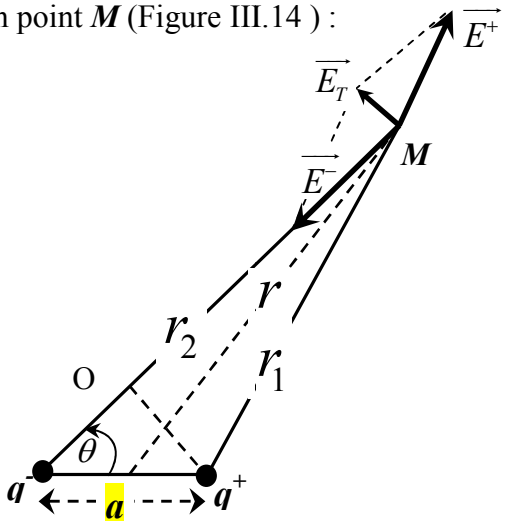


Figure III.14 : Champ électrique créé par un dipôle électrique

b/ Détermination du champ $\vec{E}$:

On sait que : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\ V$.

Et que : $dV = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial \theta}d\theta$ .....(1)

Et : $dV = -\vec{E}.\vec{dl} = -\left(E_r\right)dr - \left(r.E_\theta\right)d\theta$ .....(2)

Donc d'après (1) et (2), on trouve :

$$\begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \end{cases}$$

Alors pour le dipôle électrique, on trouve

$$\begin{cases} E_r = \dfrac{2kp\cos\theta}{r^3} \\ E_\theta = \dfrac{kp\sin\theta}{r^3} \end{cases} \qquad \text{Donc :} \qquad \vec{E} = \frac{kp}{r^3}\left(2\cos\theta\vec{e_r} + \sin\theta\vec{e_\theta}\right)$$

Cas particuliers (Figure III.15) **:**

Si $\boxed{\theta = \dfrac{\pi}{2}} \Rightarrow \vec{E} = \dfrac{kp}{r^3}\vec{e_\theta}$ et Si $\boxed{\theta = 0} \Rightarrow \vec{E} = \dfrac{2kp}{r^3}\vec{e_r}$

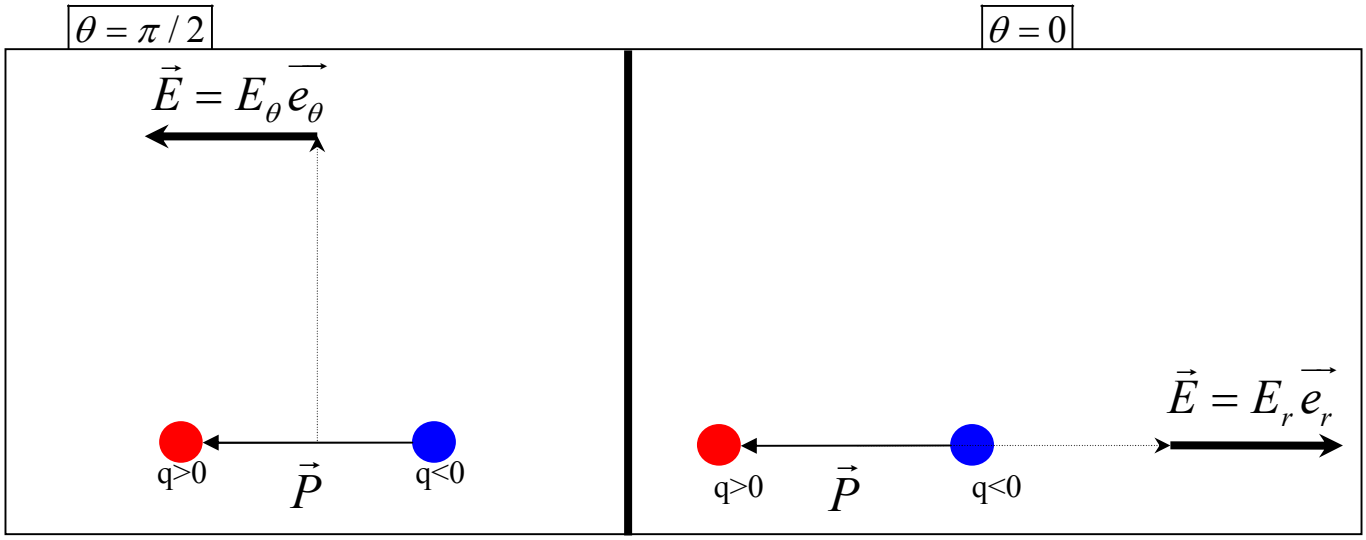


Figure III.15 : Champ électrique créé par un dipôle électrique

Devoir : Donner le principe de fonctionnement d'une micro-onde.

Réponse : l'application d'un champ électrique sur la molécule d'eau change momentanément sa direction qui résulte un dégagement de l'énergie thermique. Ensuite et en absence de ce champ électrique la molécule retourne à son état initial. Donc, la molécule change de direction à chaque fois qu'on applique un champ électrique et qui nous donne une énergie thermique qui va chauffer la matière qui contient de l'eau.

III.12.4 Dipôle électrique placé dans un champ électrique constant:

Dans un champ extérieur, le dipôle est soumis aux forces créées par le champ sur ***q+*** et ***q-***. ces forces appliquent un couple de moment $\vec{L}$ tel que : $\vec{L} = \vec{P} \wedge \vec{E}$, donc on a deux cas (Figure III.16):

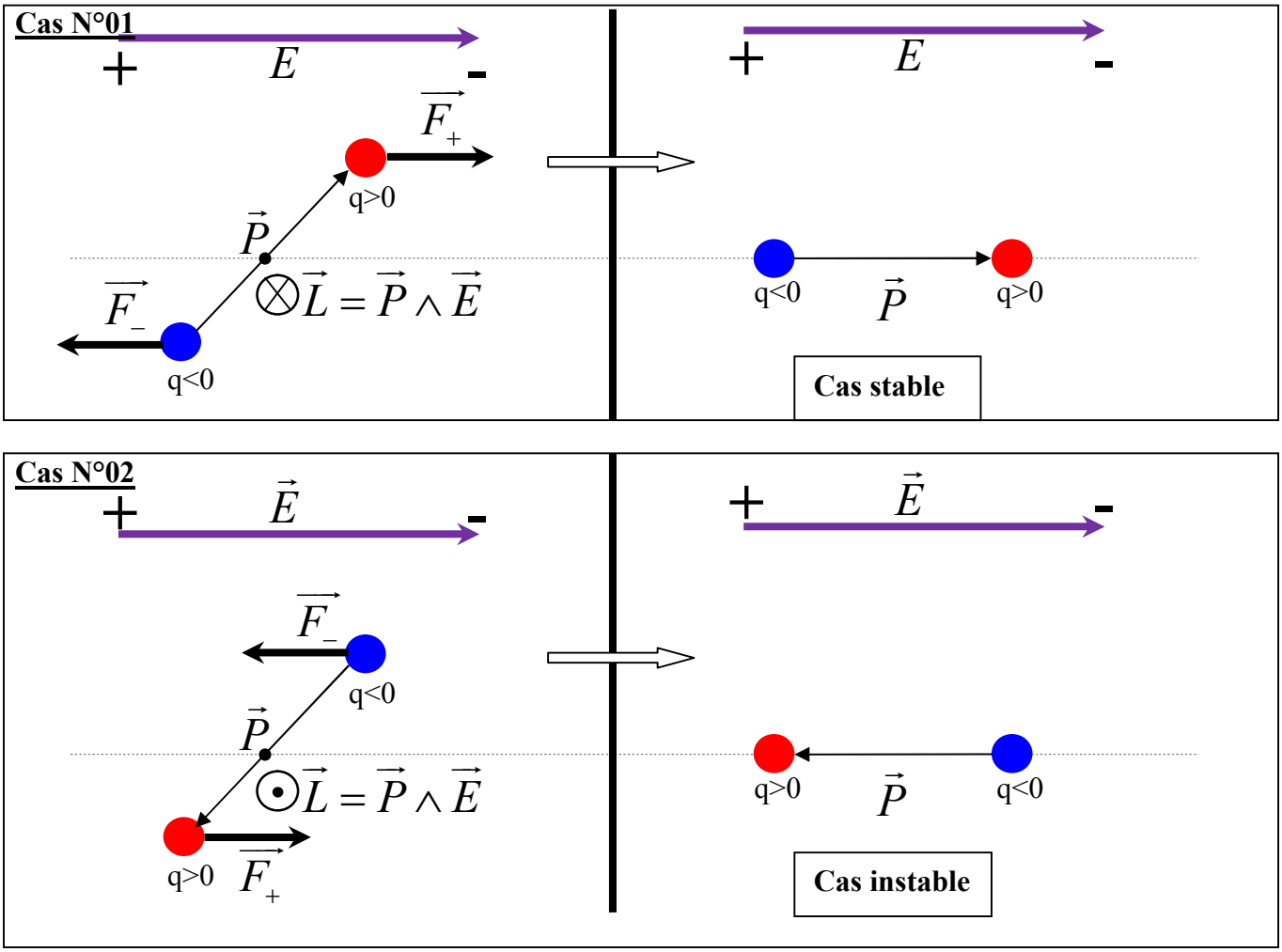


Figure III.16 : Dipôle électrique placé dans un champ électrique constant

III.12.5. Energie potentielle d'un dipôle électrique:

On suppose un dipôle (***q+***, ***q-***) qui se trouve dans le champ extérieur $\vec{E}$, l'énergie potentielle du dipôle est (Figure III.17) :

$Ep = qV + (-q)V'$ donc $Ep = q(V - V')$, on sait aussi que :

$V - V' = dV \rceil = -\vec{E}.\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{MM'} = \frac{\vec{P}}{q}$

Donc : $Ep = q.dV = q.\Delta V = \not{q}(-\vec{E}.\frac{\vec{P}}{\not{q}}) = -\vec{E}.\vec{P}$

Puisque le produit scalaire est commutatif donc :

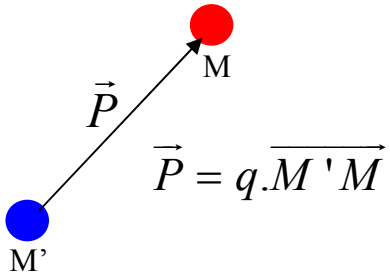


Figure III.17 : Moment dipolaire

$$Ep = -\vec{E}.\vec{P} = -\vec{P}.\vec{E}$$

III.13. Flux du champ électrique (Théorème de GAUSS) :

III.13.1 Notion de l'angle solide:

La notion de l'angle solide est l'extension naturelle dans l'espace de l'angle défini dans un plan (Figure III.18)

Angle	Angle solide
Sous forme d'arc	Sous forme de cône
2D	3D

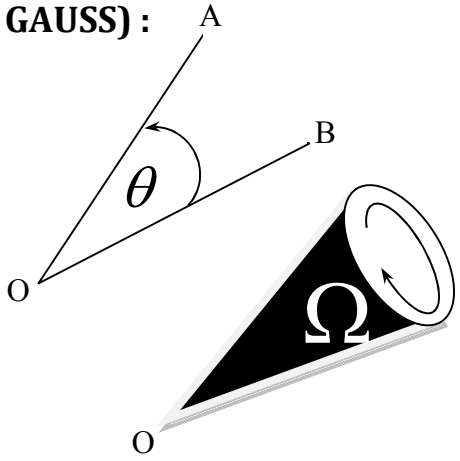


Figure III.18 : Angle solide

III.13.2 Définition :

L'angle solide élémentaire ***dΩ*** limité par un cône coupant un élément de surface ***ds*** situé à une distance ***r*** de son sommet ***O*** vaut :

$$d\Omega = \frac{ds}{r^2}$$

Cet angle solide est toujours positif est indépendante de la distance r (comme α). Son unité est le **stéradian (sr).**

III.13.3 Application :

En coordonnées sphériques, la surface élémentaire à r constant vaut :

$$ds = r^2.\sin\theta.d\theta.d\varphi$$

Donc l'angle solide s'écrit sous la forme : $d\Omega = \frac{ds}{r^2} = \sin\theta.d\theta.d\varphi$

On a $\Omega = \int d\Omega = \int_0^{\theta} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = (-\cos\theta)\Big|_0^{\theta}.2\pi = (1-\cos\theta).2\pi$

III.13.4 Théorème de GAUSS (Karl F. GAUSS 1777-1855):

Le flux du champ électrique ***ϕ*** à travers une surface fermée, orientée quelconque est égale dans le vide à ***1/ε₀*** multipliée par la charge électrique ***Q*** contenue à l'intérieur de cette surface ***S***.

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Démonstration:

$$d\Phi = \vec{E}.\vec{ds} = \left(\frac{kq}{r^2}\vec{u}\right).\left(ds.\vec{n}\right) = \frac{kq\,ds}{r^2}\left(\vec{u}.\vec{n}\right)$$

Donc : $d\Phi = \dfrac{kq\,ds}{r^2} = \dfrac{q\,ds}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

Si on prend le cas d'une sphère, on trouve :

$d\Phi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{ds}{r^2}\right)$ sachant que : $d\Omega = \dfrac{ds}{r^2}$. donc on calcule dΩ.

$$d\Omega = \frac{ds}{r^2} = \frac{r^2.\cos\theta.d\theta.d\phi}{r^2} = \cos\theta.d\theta.d\phi$$

Donc, $\int d\Omega = \int_0^{\pi}\cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \;\Rightarrow\; \Omega = 2\times 2\pi = 4\pi$

alors, on remplace le $d\Omega$ dans $d\phi$, on trouve: $\Phi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}(4\pi) = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$

On généralise le résultat obtenu pour ***n*** charges q_i, on trouve :

$$\Phi = \oiint \vec{E}.\vec{ds} = \frac{\sum_i q}{\varepsilon_0}$$

Exemple 01 : Plan infini chargé positivement :

On applique le théorème de Gauss, sur le plan infini chargé positivement σ>0 (Figure III.19).

$$\Phi = \oiint \vec{E}.\vec{ds} = \frac{\sum_i q}{\varepsilon_0}$$

La surface de Gauss est choisie dans ce cas-là sous forme de cylindre.

On sait que le cylindre est composé de deux bases $\vec{ds}_1$ et $\vec{ds}_2$ et les parois $\vec{ds}_3$, donc :

$$\Phi = \oiint_s \vec{E}.\vec{ds} = \oiint_s \vec{E_1}.\vec{ds_1} + \oiint_s \vec{E_2}.\vec{ds_2} + \cancel{\oiint_s \vec{E_3}.\vec{ds_3}}$$

$$= E_1S_1 + E_2S_2 \;,\; \left(E_3S_3\cos\left(\vec{E_3}.\vec{ds_3}\right) = 0 \text{ puisque } \vec{E_3} \perp \vec{ds_3}\right)$$

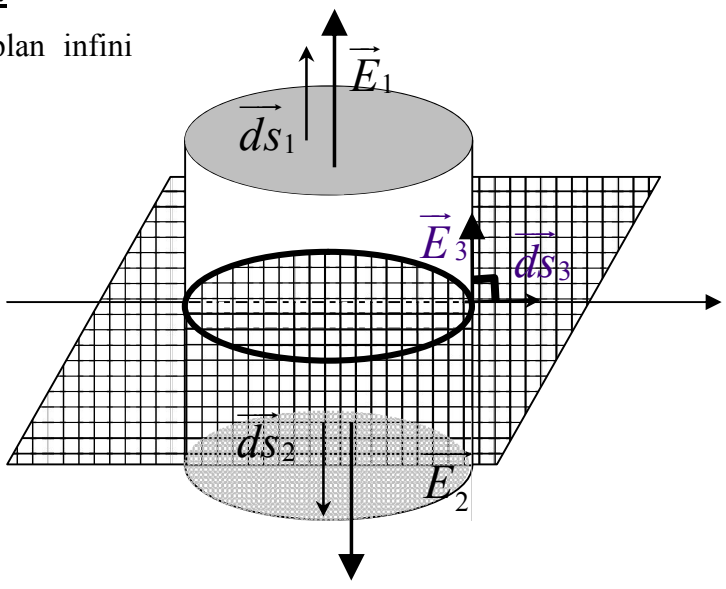


Figure III.19 : Plan infini chargé positivement

Puisque $E_1=E_2=E$ et $S_1=S_2=S$, donc :

$$\Phi = 2E.S$$

Alors :

$$\Phi = 2E.(S) = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{q}{2S\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \; E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \boxed{2\pi k \sigma} \;\; \text{puisque } k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

Remarque : On remarque que ce résultat est déjà obtenu lors du calcul du champ électrique créé par un disque de rayon ***R*** lorsque le rayon de ce disque tend vers l'infini.

Exemple 02 : cas d'une sphère chargé positivement :

On suppose une sphère chargée positivement (***Q>0***) dont le rayon est ***a*** (Figure III.20). On applique le théorème de Gauss pour trouver le flux et le champ électrique créé dans les trois régions I, II et III.

On commence par choisir la surface qui va nous simplifier les calculs. Puisque la charge est distribuée sur une sphère, on va choisir une surface de Gauss sphérique de rayon variable r selon les trois régions.

Donc, on a trois régions.

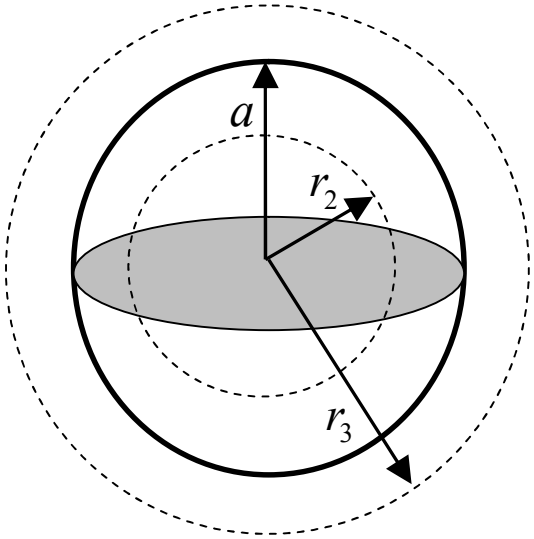


Figure III.20 : Sphère chargé positivement

Si $r = r_3 > a$:

$$\Phi = \oiint \vec{E}.\vec{ds} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Leftrightarrow \quad E \oiint ds = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Puisque la surface de Gauss est de forme sphérique donc, $S = \oiint ds = 4\pi r^2$ alors :

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi r^2} = k\frac{Q}{r^2}} \;\; \text{et} \;\; \Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Si $0 < r = r_2 < a$:

On a deux cas selon la distribution des charges.

a/ Sphère chargée et pleine en volume (ρ>0).

Donc, $\sum Q_i = \int dq = \int \rho dV = \rho \int dV = \rho V = \rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$, Alors :

$$\Phi = \oiint \vec{E}.\vec{ds} = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\left(\cancel{4}\cancel{\pi}\cancel{r^2}\right) = \frac{\cancel{4}}{3}\cancel{\pi} r^{\cancel{3}1} \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{r\rho}{3\varepsilon_0}} \text{ et } \boxed{\Phi = \frac{4\rho\pi r^3}{3\varepsilon_0}}$$

b/ Si la charge est placée en surface :

$$\Phi = \oiint \vec{E}.\vec{ds} = \frac{0}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \boxed{E = 0} \text{ et } \boxed{\Phi = 0}$$

Exercices et Problèmes

Exercice 01 :

Soit une charge ponctuelle +***q*** dans l'espace ***(Oxyz)*** de cordonnées ***(0,0,0)***.

1- Donner l'expression de son potentiel à une distance ***r***. en déduire la valeur du champ électrique produit par cette charge.
2- Représenter l'évolution du potentiel et du champ électriques en fonction de ***r***.

Exercice 02 :

1- Rappelez, séparément, les lignes de champ d'une charge positive q+ et d'une charge négative -q.
2- Rappelez les lignes de champ de deux charges ponctuelles :
   - De signes contraires.
   - De même signes.

Exercice 03 :

Sur les quatre coins d'un carré de coté ***a = 3 cm***, on fixe quatre charges selon la figure ci-contre.

- Déterminer le vecteur champ électrique $\overrightarrow{E_0}$ et le potentiel V_0 , au point ***O*** du centre du carré de coté a (Figure III.21).

On donne : q = 10^{-11}C.

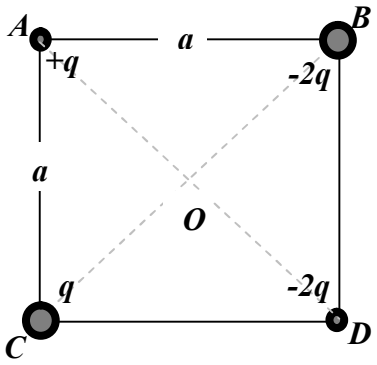


Figure III.21 : Carré d'arrête a

Exercice 04 :

Déterminer le vecteur champ électrique $\overrightarrow{E_P}$ et le potentiel V_P , au point ***P*** (Figure III.22).

On donne : ***q = -2.10^{-11}C*** et ***a =6cm***.

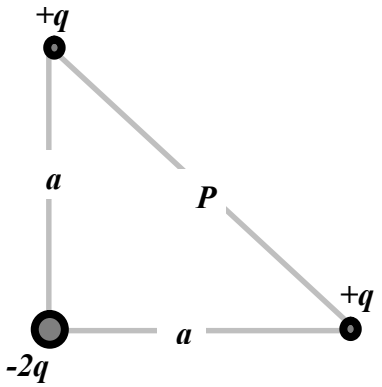


Figure III.22 : Carré d'arrête a

Exercice 05 :

Le potentiel électrique dans une région de l'espace est :

$V = 3x^2y - 4xz^2 - 5y^2$

Calculer les composantes du champ électrique. En déduire sa valeur au point (1,2,-1)

Exercice 06 :

En deux points ***A*** et ***B*** distants de ***d***, on place deux charges Q_A et Q_B.

1- Donner les caractéristiques du vecteur force électrostatique exercé, dans le vide, par la charge Q_A sur la charge Q_B. On envisagera tous les cas possibles.

2- Soit M un point de l'espace en lequel le champ électrique résultant crée par les deux charges est nul. Déterminer la position de ce point si Q_A=-12nC et Q_B=3nC.

Exercice 07 :

Une charge positive ponctuelle ***q*** de masse ***m*** est libérée du repos dans un champ électrique uniforme ***E*** dirigé le long de l'axe des abscisses, suivant les indications de la Figure III.23 .

- Décrivez son mouvement.
- Tracer en fonction du temps les courbes de la position, de la vitesse et de l'accélération

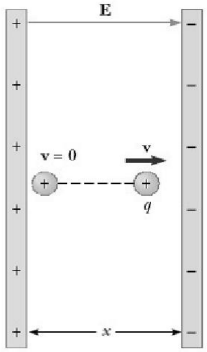


Figure III.23 : Charge électrique dans un champ extérieur

Exercice 08 :

Soient deux charges ponctuelles +***q*** et -***q*** distantes de ***2a.*** Elles constituent électriquement un dipôle électrique (Figure III.24).

1- Montrer que l'expression du champ électrique à un point sur l'axe ***Oy*** d'ordonnée ***y>>a*** est donnée par :

$$E = 2k\frac{qa}{y^3}$$

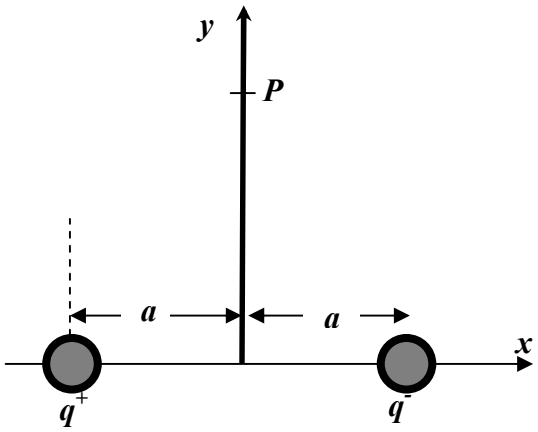


Figure III.24 : Champ électrique créé par deux charges ponctuelles

Exercice 09 :

Une circonférence ***C*** de rayon ***R***, de centre ***O*** et d'axe ***Ox*** porte une distribution linéique de charge (λ).

1. Déterminer le champ électrique $\vec{E}$ en tout point de l'axe ***Oz***.
2. A quels points ***z*** sur ***Oz*** le champ électrique devient nul et devient maximal.

Exercice 10 :

Déterminer le champ électrique dans les cas suivants :

1. A la distance ***r*** d'une charge ponctuelle ***q***.

2. A la distance ***r*** du centre d'une sphère isolante de rayon ***a<r***, uniformément chargée positivement en volume ($\rho>0$).
3. A l'intérieur de la sphère précédente.
4. A la distance ***r*** d'un fil uniformément chargé négativement ($\lambda<0$).
5. A la distance ***r*** d'un plan isolant uniformément chargé de densité surfacique ($\sigma<0$)

Exercice 11 :

Une sphère conductrice ***A*** de rayon ***a*** possède une charge totale ***2Q***. Une coquille sphérique conductrice ***B*** de rayon intérieur ***b*** et de rayon extérieur ***c*** est concentrique à la sphère ***A***. La charge totale de la coquille est ***–Q***. En appliquant le théorème de Gauss, trouver le champ électrique dans les endroits suivants :

1. A l'intérieur de la sphère ***A***
2. Entre la sphère ***A*** et la coquille ***B***.
3. Dans la coquille ***B***.
4. A l'extérieur de la coquille ***B***.

Exercice 12 :

Un générateur de ***10V*** est connecté à deux plaques parallèles distantes de ***a***. Les dimensions des plaques sont beaucoup plus grandes que la distance entre ces plaques, on suppose donc que le champ électrique est uniforme entre les plaques (Figure III.25) .

1- Calculer la valeur du champ électrique entre les plaques.
2- Représenter les lignes du champ électrique et les surfaces équipotentielles en précisant la valeur du potentiel sur ces surfaces.
3- Quelle est la variation d'énergie potentielle d'un électron lorsqu'il est déplacé de la plaque de gauche à celle de la droite. En déduire l'énergie gagnée ou perdue lors du processus.

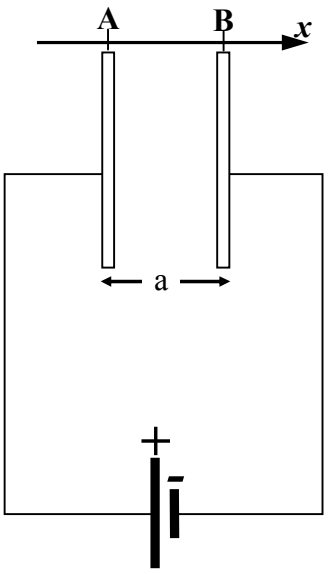


Figure III.25 : Champ électrique créé par deux armatures

Chapitre IV

Conducteur à l'état d'équilibre

IV.1. Conducteur à l'état d'équilibre:

IV.1.1 Définition :

Un conducteur est un corps à l'intérieur duquel les charges libres (e-) peuvent se déplacer librement dans la matière. Donc, un conducteur est dit en équilibre électrostatique si toutes les charges sont immobiles.

IV.1.2. Propriétés d'un conducteur en équilibre électrostatique:

Un conducteur est dite en équilibre électrostatique lorsqu'il satisfaire les conditions suivantes (Tableau IV.1) :

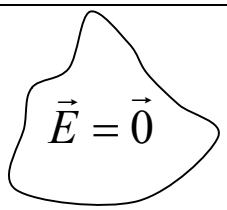
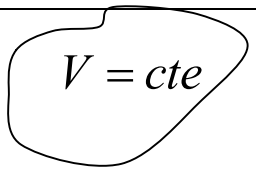
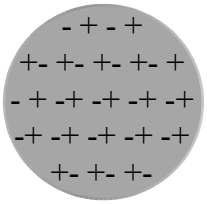
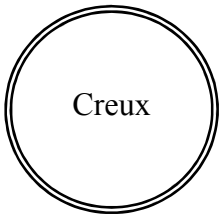
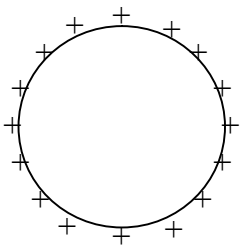
1. Le champ électrique est nul à l'intérieur d'un conducteur en équilibre.	
2. Le conducteur en équilibre forme un volume équipotentiel.	
3. La charge totale à l'intérieur est nulle soit $q=0$ ou $Q=Q_+ + Q_- + Q_+ + Q_- + Q_+ + Q_- = 0$.	
	
4. La charge est localisée à l'extérieur du conducteur.	

Tableau IV.1 : Propriétés d'un conducteur en équilibre électrostatique

IV.2. Champ électrique à l'extérieur, au voisinage et à l'intérieur d'un conducteur:

Considérons un conducteur de forme arbitraire à l'état d'équilibre. A l'aide du théorème de Gauss, on détermine le champ électrique dans les trois zones I, II et III (Figure IV.1).

On rappelle que :

$$\Phi = \oiint \vec{E}.\vec{ds} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}.$$

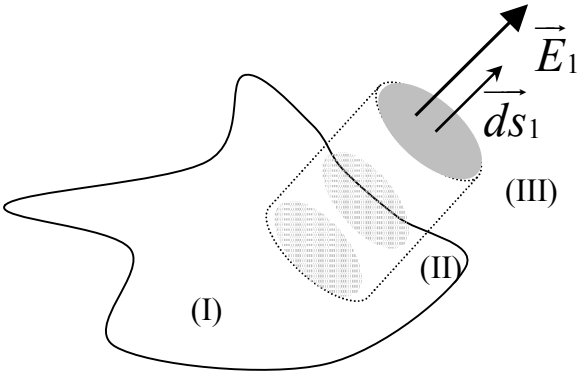


Figure IV.1 : Champ électrique créé par un conducteur qlq

Région I : $E \oiint ds = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{\sigma} \iint dS}{\varepsilon_0} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{E = 0}$$

(la charge à l'intérieur du conducteur est nulle)

Région II : $E.\cancel{ds} + (-E).(-\cancel{ds}) = \frac{\sigma \cancel{ds}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$

Région III : $E.ds = \frac{\sigma ds}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$

Donc on récolte les résultats des trois régions sur le graphe de la figure IV.2 :

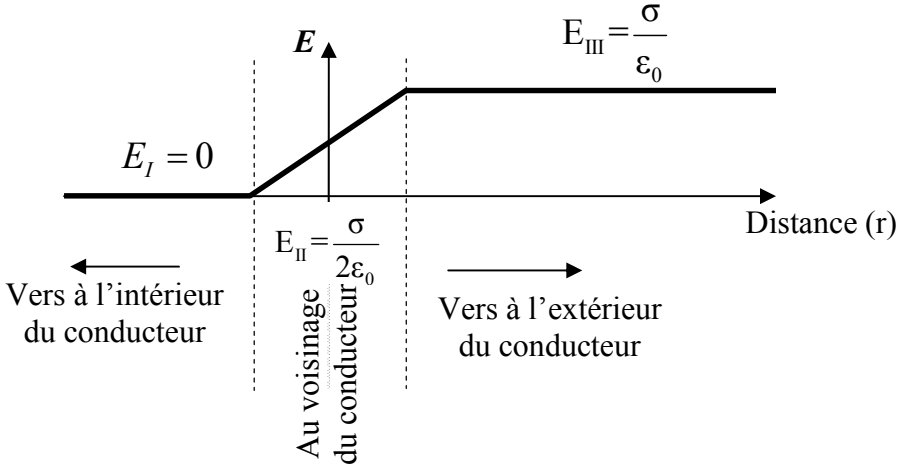


Figure IV.2 : Courbe du champ électrique en fonction de la distance

IV.3. Pression électrostatique :

Expérience :

On charge une bulle de savon, elle se dilate quel que soit le signe de la charge. Puisque le conducteur à l'état d'équilibre dispose de charges à la surface, alors il y a des forces

répulsives entres ces dernières. La force exercée par l'unité de surface ou la pression électrostatique peut se calculer par le produit du champ électrostatique multiplié par la charge et l'inverse de la surface (Figure IV.3).

$P = \frac{F}{S}$, on sait aussi que $E = \frac{F}{q}$ donc

$$P = \frac{E.q}{S} = \boxed{E.\sigma}$$

On prend le champ électrique au voisinage de la surface $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ donc : $\boxed{P = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}}$

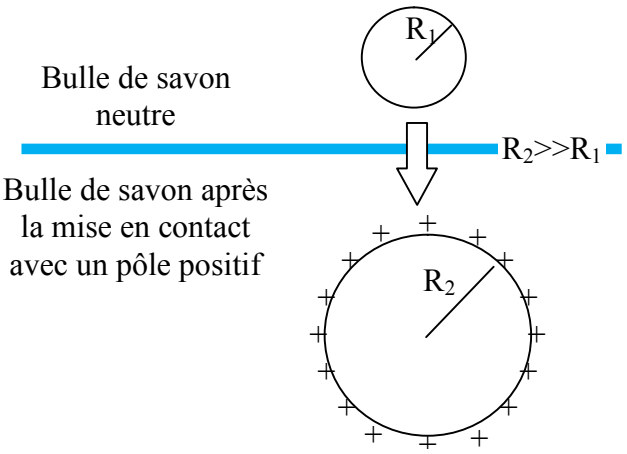


Figure IV.3 : Pression électrostatique

IV.4. Capacité propre d'un conducteur isolé dans l'espace:

On prend un conducteur avec une charge en surface ***q*** qui nous donne un champ électrique $\vec{E}$ et un potentiel ***V*** (Figure IV.4).

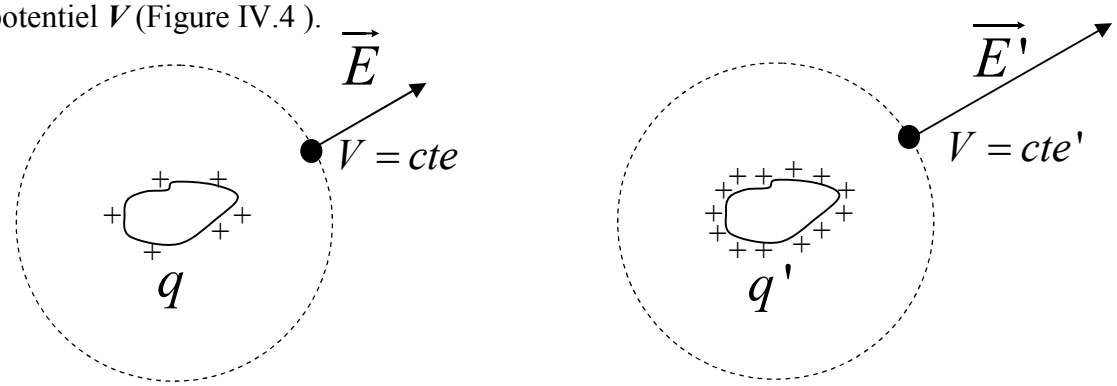


Figure IV.4 : Courbe du champ électrique en fonction de la distance

Si on charge ce conducteur avec une autre charge q' telle que $q' = \alpha.q$ donc : $\vec{E}' = \alpha.\vec{E}$ et $V' = \alpha.V$ donc il y a une proportionnalité entre V et q telle que :

$$\boldsymbol{Q = (cte)\ V}$$

On peut mettre donc cette constante ***C*** : $\underline{\boldsymbol{Q = C\ V}}$

C : est la capacité propre du conducteur isolé, donc : $\boxed{C = \frac{Q}{V}}$

L'unité de la capacité est donnée par le FARAD où 1F = 1C/1V. Nous remarquons que cette quantité est très grande, donc on utilise le micro, nano ou le pico-Farad.

On donne : $\begin{cases} 1\mu F = 10^{-6} F \\ 1nF = 10^{-9} F \\ 1pF = 10^{-12} F \end{cases}$

Application : Capacité d'un conducteur sphérique

On suppose un conducteur sphérique de rayon R, le potentiel créé par ce conducteur à distance ***x*** est donné par (Figure IV.5):

$$r = r \quad \Rightarrow \quad V = k\frac{Q}{r}$$

$$r = R \quad \Rightarrow \quad V = k\frac{Q}{R}$$

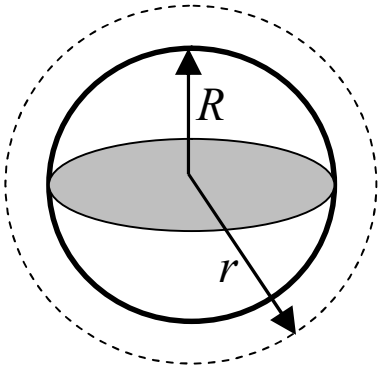


Figure IV.5 : Capacité d'un conducteur sphérique

Donc, on peut calculer la capacité de ce conducteur comme suit : $C = \frac{Q}{V} = \frac{\cancel{Q}R}{k\cancel{Q}} = \frac{R}{k} = \boxed{4\pi\varepsilon_0 R}$

On remarque dans le cas d'un conducteur sphérique, que sa capacité propre ne dépend que du rayon de la sphère ***R*** et le constant diélectrique du matériau ε_0.

IV.5. Energie interne d'un conducteur chargé et isolé dans l'espace :

Soit ***C*** la capacité propre du conducteur, ***Q*** sa charge et ***V*** son potentiel à l'état d'équilibre. On sait que l'énergie interne est la somme des énergies potentielles, donc : $dU = dEp_1 - dEp_2$

Démonstration :

$U = \int Ep = \int_{(0)}^{(1)} \left(V.dq - V(0)dq\right)$, Tel que ***V(0)*** est le potentiel où (***V=0***)

Donc, $U = \int V.dq$, On sait que : $V = \frac{q}{C}$

Alors : $U = \int \frac{q}{C}.dq = \frac{1}{2C}q^2$

Aussi, on peut écrire l'énergie interne comme suit : $\boxed{U = \frac{1}{2C}q^2 = \frac{1}{2}qV = \frac{1}{2}CV^2}$

IV.6. Phénomènes d'influence entre conducteurs chargé :

III.6.1 Influence d'un conducteur neutre isolé

Un conducteur neutre contient des charges positives et négatives ($q_-+q_+=0$). Lorsqu'on applique un champ extérieur $\vec{E}_{ext}$ (Figure IV.6). On remarque un déplacement des charges négatives vers le sens inverse de $\vec{E}_{ext}$ et les charges positives dans le sens inverse de $\vec{E}_{ext}$. Lorsque toutes les charges déplacent dans leurs sens, donc il y a création d'un autre champ $\vec{\varepsilon}$ à l'intérieur du conducteur pour avoir l'équilibre du conducteur.

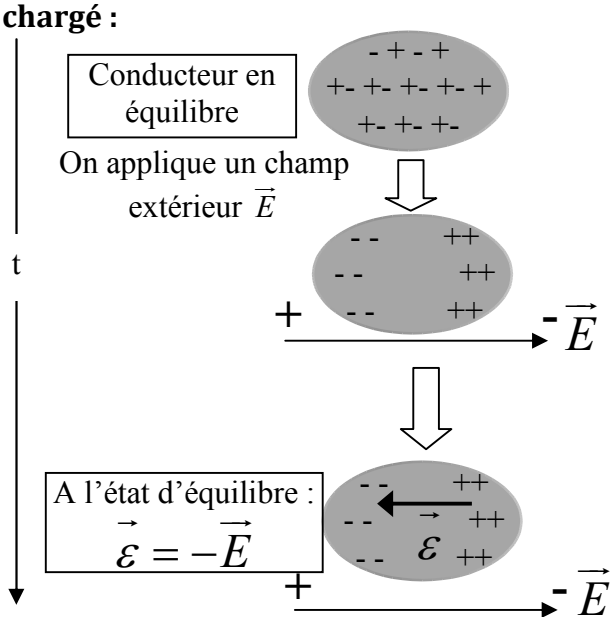


Figure IV.6 : Influence Champ extérieur-conducteur

IV.6.2 Influence d'une charge sur un conducteur en équilibre

Puisque une charge ponctuelle créé un champ $\vec{E}$ et un potentiel V à tout point de l'espace. Si on place un conducteur à une distance r de la charge, on remarque lorsqu'on rapproche $q>0$ en face du conducteur que le champ créé par la charge q va atterrir les charge négatives (Figure IV.7).

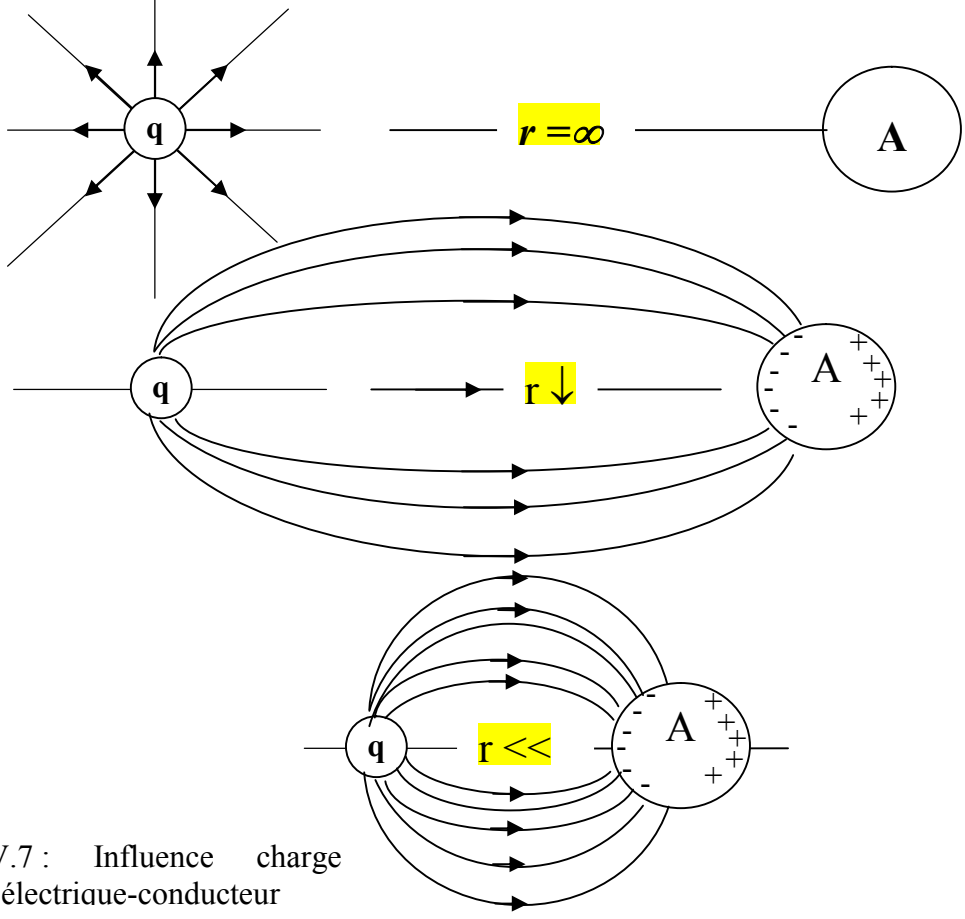


Figure IV.7 : Influence charge électrique-conducteur

IV.6.3. Conducteur relié à un potentiel constant dans un champ créé par ***q***

On fait la même expérience précédente, en reliant le conducteur A à la terre (Figure IV.8). On remarque :

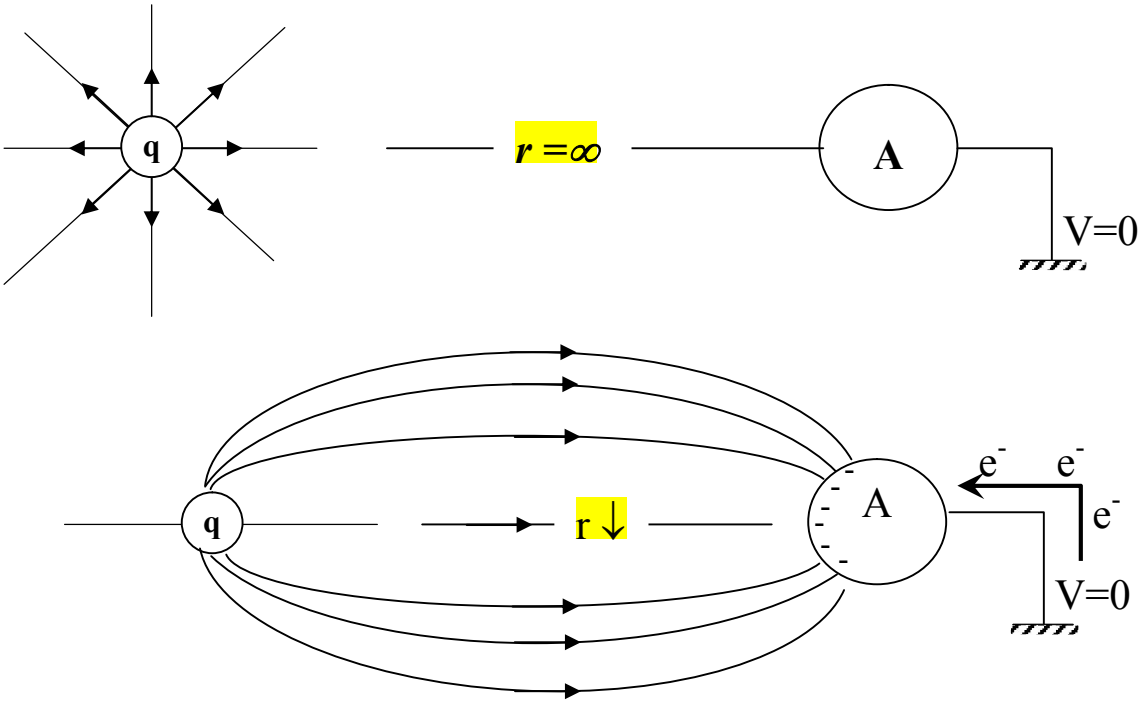
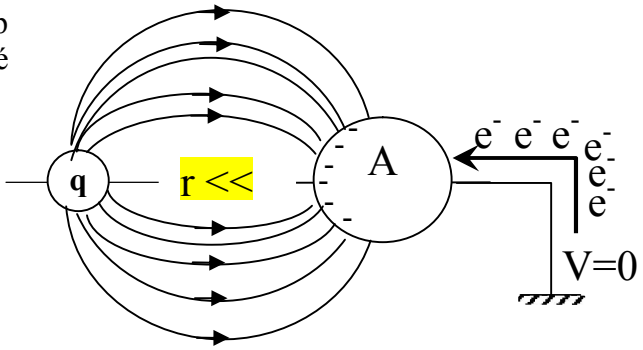


Figure IV.8 : Influence Champ extérieur-conducteur relié à un potentiel nul



IV.6.4 Influence d'un conducteur chargé sur un autre isolé (Figure IV.9)

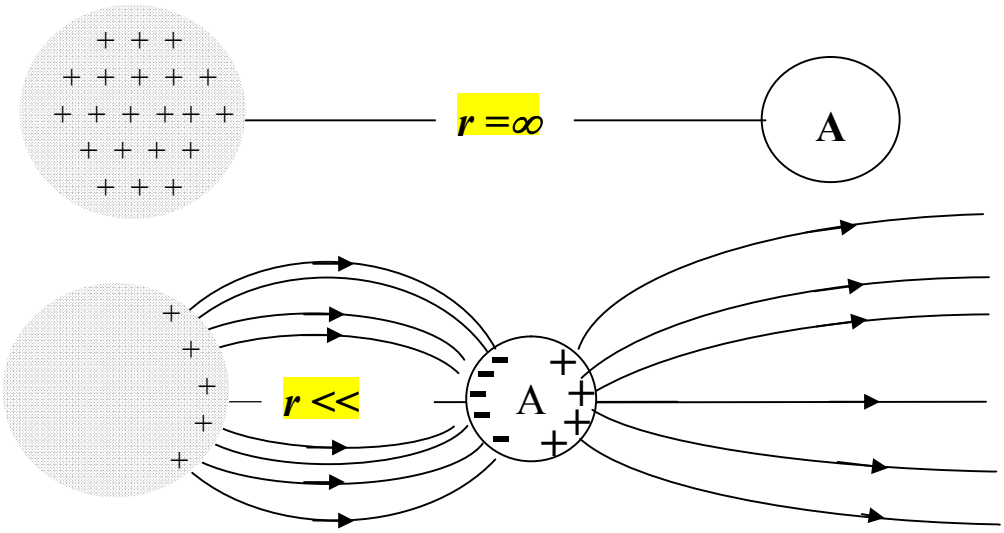


Figure IV.9 : Influence conducteur chargé-conducteur neutre

IV.6.5 Cas d'un conducteur entouré par un autre :

Puisqu'il y a une interaction mutuelle entre ***A*** et ***B*** alors la distribution des charges sera comme suit (Figure IV.10) :

$$q_{B\,\text{int}} = 0 \quad \text{et} \quad q_{B\,ext} = -Q$$
$$q_{A\,\text{int}} = -\,q_{B\,ext} = Q$$
$$q_{A\,ext} = -\,q_{A\,\text{int}} = -Q$$

Exemple : Expliquer le rôle de la cage métallique « Cage de Faraday » placée sur les appareils de l'électroménager

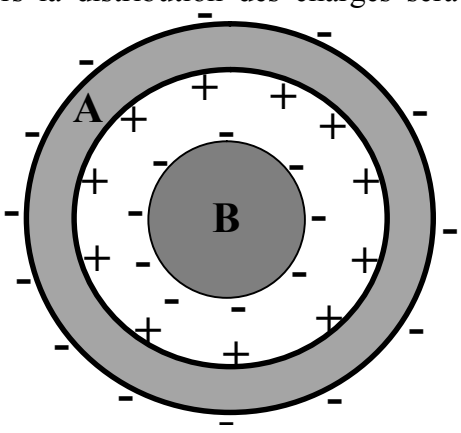


Figure IV.10 : Influence conducteur entouré par un autre

IV.6.6 Cas d'un conducteur creux (Effet d'écran)

Lorsque on prend un conducteur creux chargé ou non dans un champ électrique, on remarque que sauf les charges qui sont à l'extérieur réagissent avec ce champ et créant un autre champ équivalent, donc le champ à l'extérieur reste nul. Ceci signifie que le creux (cavité) est à l'abri de toute influence extérieure (Figure IV.11). Ce principe physique qui explique le phénomène d'écran peut nous aider à protéger les appareils électroniques de toute influence extérieure.

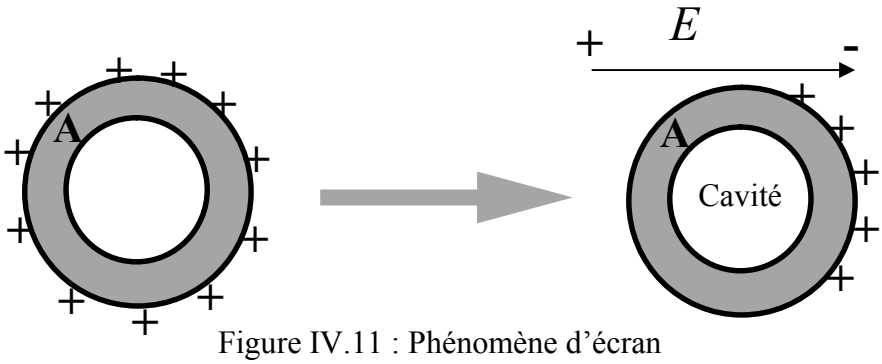


Figure IV.11 : Phénomène d'écran

IV.7. Condensateur :

IV.7.1 Définition :

On réalise un condensateur de capacité ***C*** en rapprochant deux conducteurs ***A*** et ***B*** tels que ***B*** est relié à une différence de potentiel ddp(***V>0***) et ***A*** est relié à la terre (Figure IV.12).

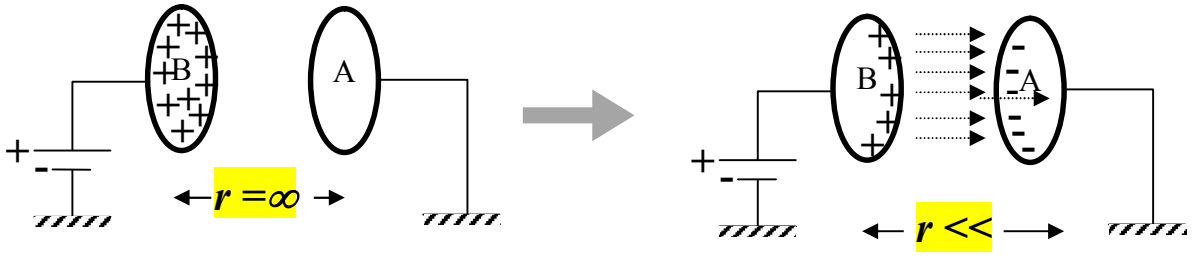


Figure IV.12 : réalisation d'un Condensateur

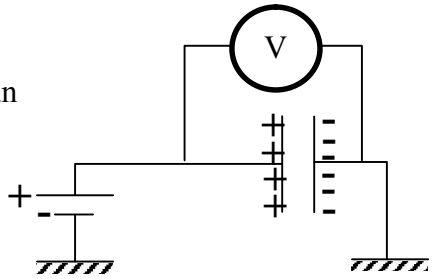
Pour arriver à l'équilibre entre ***A*** et ***B*** les charges négatives de ***A*** provoquent un excès de charges positives en ***B*** qui sont dus au générateur. Donc :

$$V_B - V_A = \alpha Q$$

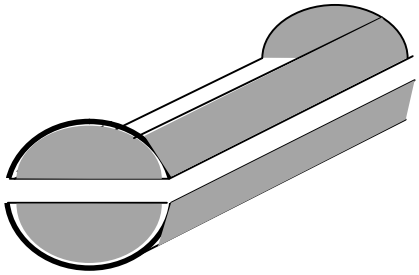
Alors $Q = C.V$ et $\alpha = 1/C$

Avec C est la capacité d'un condensateur composé de deux armatures ***A*** et ***B*** (Figure IV.13).

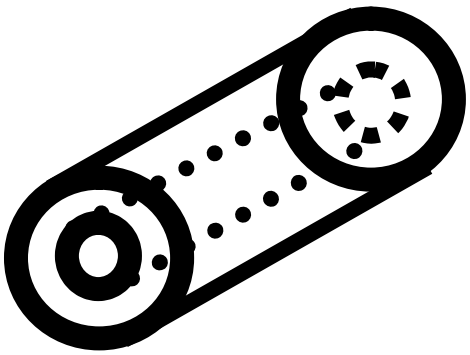
Figure IV.13 : Condensateur dans un circuit électrique



IV.7.2 Type de condensateur (Figure IV.14):



Armatures rapprochés (sandwich)



Influence mutuelle

Figure IV.14 : Types de condensateurs

IV.7.3 Calcul de la capacité d'un condensateur :

On prend le condensateur représenté en figure IV.15.

On veut calculer la capacité d'un condensateur par $C = Q/V$, donc on utilise :

1. Le théorème de Gauss : $\Phi = \oiint \vec{E}.\vec{ds} = \sum_i q \Big/ \varepsilon_0$
2. La relation entre le champ $\vec{E}$ et le potentiel électrique V.

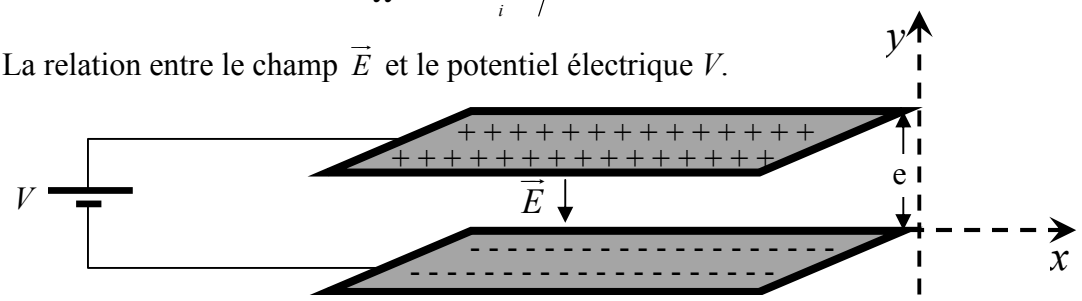


Figure IV.15 : Détermination de la capacité d'un condensateur

En appliquant le théorème de Gauss sur les deux plans supposés infinis chargés positivement et négativement, on trouve le champ entre les deux plans comme suit :

$\vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{j}$, donc, le module du champ vaut : $\left|\vec{E}\right| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

Maintenant, on utilise la relation entre le champ et le potentiel électrique :

$$\int_{V_A}^{V_B} dV = V_{AB} = -\int \vec{E}.\vec{dl} = \not{-}\int_0^e \left(\not{-}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{j}\right)\left(dx\vec{i} + dy\vec{j}\right) = \int_0^e \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}dy\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}e \quad , \text{ Alors } V_{AB} = \frac{Qe}{S\varepsilon_0}$$

On sait aussi que : $C = \frac{Q}{V}$, donc : $C = \frac{Q}{V} = \frac{\not{Q}}{\not{Q}.e}.S.\varepsilon_0 = \boxed{\frac{S.\varepsilon_0}{e}}$

Remarque :

On remarque que la capacité d'un condensateur ne dépend que de la surface des armatures (S), la distance entre les deux armatures (e) et la permittivité du matériau séparant les deux armatures (ε_0).

IV.7.4 Energie électrique d'un condensateur :

L'énergie emmagasinée dans le condensateur est donnée par :

$$Ep = \int (V_B - V_A) dq = \int (V_B - V_A)\, CdV$$

Puisque $V_A = 0$ (potentiel de référence), donc : $Ep = \int V_B\ C.dV = C\int V_B\ dV = \frac{1}{2}CV_B^2$

IV.7.5 Association des condensateurs :

a. En parallèle (Figure IV.16)

Tous les condensateurs sont soumis à la même différence de potentiel $\boldsymbol{V_B}$-$\boldsymbol{V_A}$ donc :

$$V_B - V_A = \frac{Q_1^+}{C_1} = \frac{Q_2^+}{C_2} = \frac{Q_3^+}{C_3}$$

Alors que la charge totale entre $\boldsymbol{V_A}$ et $\boldsymbol{V_B}$ est :

$$Q_1^+ + Q_2^+ + Q_3^+ = \sum_{i=1}^{3} Q_i = Q_{tot}$$

Donc : $C_{equ} = \frac{\sum_{i=1}^{3} Q_i}{V}$, puisque $\boldsymbol{V}$ est constant entre tous les condensateurs, donc :

$$C_{equ} = \frac{Q_1}{V} + \frac{Q_2}{V} + \frac{Q_3}{V} = \frac{C_1 \not{V}}{\not{V}} + \frac{C_2 \not{V}}{\not{V}} + \frac{C_3 \not{V}}{\not{V}}$$

Donc, $\boxed{C_{equ} = C_1 + C_2 + C_3}$

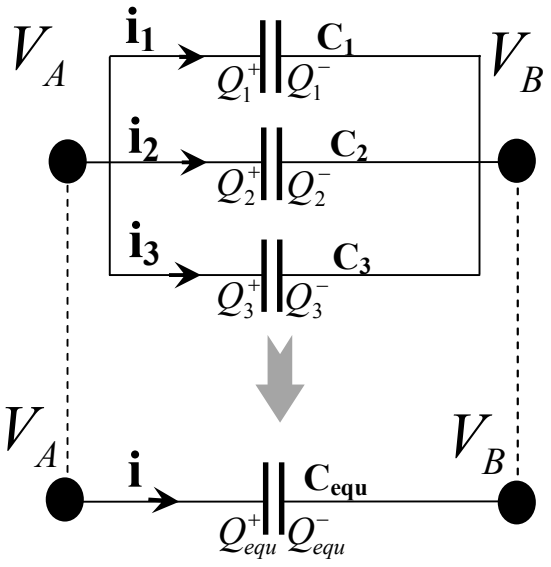


Figure IV.16 : Condensateur en parallèle

b. En série (Figure IV.17)

La même charge se distribue sur tous les condensateurs.

$$V_D - V_A = (V_D - V_C) + (V_C - V_B) + (V_B - V_A)$$
$$= \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)$$

Aussi nous avons : $V_D - V_A = \frac{Q}{C_{equ}}$

Donc : $\boxed{\frac{1}{C_{equ}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}$

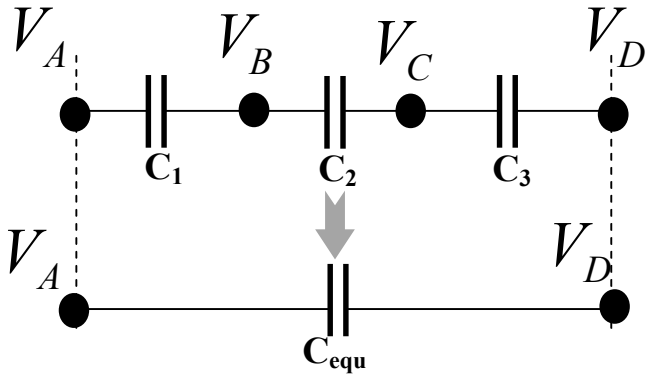


Figure IV.17 : Condensateurs en série

Exercices et problèmes

Exercice 01 :

Une sphère conductrice pleine ***A***, de rayon R_1 est portée à un potentiel électrique V_0 constant au moyen d'un générateur (Figure 18_1.)

1- En utilisant le théorème de Gauss, calculer en fonction de la charge Q_A le champ électrique E_M au point ***M*** tel que $OM=r>R_1$. Sachant que le potentiel électrique est nul à l'infini; en déduire l'expression du potentiel V_M au point ***M***.

2- Si $V_0=100V$ et $R_1=3cm$, déterminer la valeur de la charge Q_A.

3- On entoure le conducteur ***A*** par une coquille sphérique conductrice ***B*** de rayon $R_2=5cm$ et $R_3=6cm$ et reliée à la terre (Figure 18_2). Le conducteur ***B*** est initialement déchargé.

   a. Représenter qualitativement la répartition des charges électriques sur les deux conducteurs.

   b. Par une méthode de votre choix, calculer la charge électrique portée par la sphère ***A***, portée toujours au potentiel constant $V_0=100V$ (conclusion).

   c. Calculer la valeur de la capacité ainsi formé.

   d. Calculer l'énergie emmagasinée dans le condensateur de chaque figure. Que se passera-t-il si :

      - Dans la figure 18_1, on isole le générateur de ***A*** puis on la relie à la masse par un fil conducteur
      - Dans la figure 18_2, on isole le générateur de ***A*** et on relie ***A*** à ***B*** par un fil conducteur.

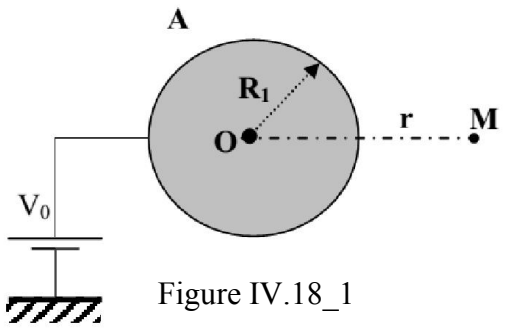


Figure IV.18_1

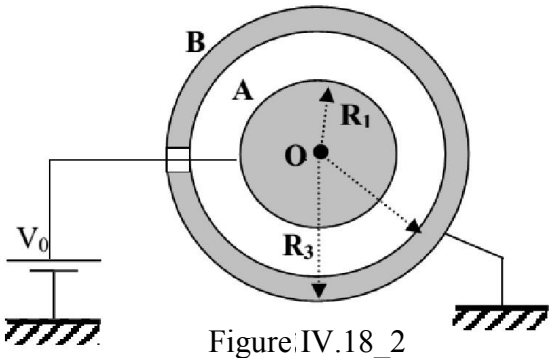


Figure IV.18_2

Figure IV.18 : Conducteurs en forme sandwich

Exercice 02 :

Deux sphères conductrices chargées q_1 et q_2 et de rayon r_1 et r_2 tel que $r_2<r_1$ sont reliées par un fil conducteur mince. Elles sont suffisamment éloignées pour que l'influence mutuelle soit nulle.

- Déterminer la relation qui donne q_1 en fonction de q_2, r_1 et r_2.
- Quelle est la sphère qui possède le champ électrique le plus important au niveau de la surface.

Exercice 03 :

Un conducteur sphérique creux A, initialement neutre, de rayon intérieur $R_2= 2R$ et rayon extérieur $R_3=4R$ entoure un deuxième conducteur sphérique B, de rayon $R_1= R$, porté à un potentiel Vo par l'intermédiaire d'un générateur. (Figure IV.19). Le conducteur B porte une charge Q_o.

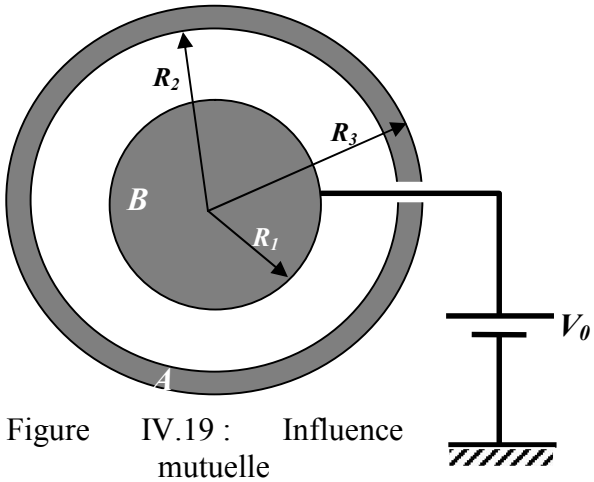


Figure IV.19 : Influence mutuelle

1- Quelles sont les charges portées par les surfaces intérieure et extérieure du conducteur A. Justifier.

2- En appliquant le théorème de Gauss, déterminer l'expression du champ électrique E dans les quatre régions suivantes :

$$r<R,\quad R<r<2R\ ,\quad 2R<r<4R,\quad r>4R.$$

3- En considérant que V_A est le potentiel du conducteur A et sachant que le potentiel électrique est nul à l'infini, déterminer l'expression du potentiel électrique dans les quatre régions.

4- En déduire la charge Q_o en fonction de R , V_o et ε_o.

Exercice 04 :

Un condensateur cylindrique à air est formé de deux armatures coaxiales, de rayons R_1 et R_2 ($R_1<R_2$), dont la longueur des génératrices en regard est h.

a- Déterminer le vecteur champ électrique en un point M situé à la distance r de l'axe tel que ($R_1<r<R_2$).

b- En déduire l'expression de la capacité de ce condensateur. On donne $R_1=10cm$; $R_2=20cm$; $h=50cm$.

c- Que devienne cette capacité si $R_2-R_1=e<< R_1$.

d- Pour éviter une étincelle destructive, l'intensité du champ électrique entre les armatures ne doit pas dépasser la valeur E_0. Quelle est la d.d.p maximale que l'on peut appliquer entre les armatures ? on donne : $E_0=3MV/m$.

La d.d.p étant insuffisante, on peut remplacer l'armature intérieure de rayon R_1 par une armature de rayon R_0 sans changer les autres caractéristiques géométriques de ce condensateur.

e- Quel rayon R_0 doit-on choisir pour que V_0 ait la valeur la plus grande possible.

Exercice 05 :

On considère deux condensateurs de capacités C_0 et $2C_0$, chargés et isolés l'un de l'autre. Le premier a été chargé sous une ***d.d.p*** V_0 et le second sous une autre d.d.p de $3V_0$. On donne : $C_0=50\ pF$ et $V_0 = 2.10^4\ V$(Figure IV.20).

a) Calculer l'énergie totale, Ep_i, emmagasinée dans les deux condensateurs.

b) On relie ces deux condensateurs entre eux, comme indiqué sur la figure b.

1- Calculer la charge finale portée par chaque condensateur à l'état d'équilibre final.

2- Calculer l'énergie totale finale Ep_f, emmagasinée dans ces deux condensateurs. Comparer la à Ep_i. Conclure.

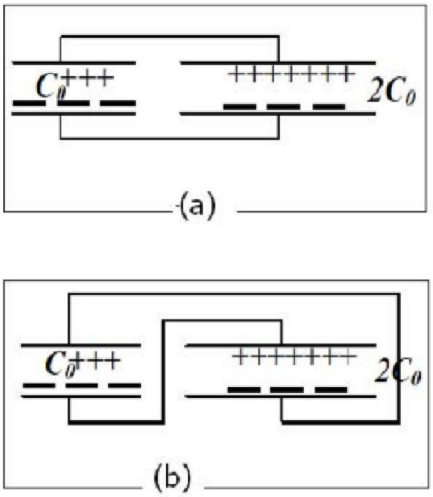


Figure IV.20. Montage de deux condensateurs

c) On relie les armatures négatives de ces condensateurs au sol. Que se passera-t-il ? expliquer.

d) A l'état d'équilibre final de la figure a, on déconnecte les fils conducteurs reliant les armatures de ces condensateurs ; puis on les reconnecte comme indiqué sur la figure b. que se passera-t-il ? calculer les nouvelles charges portées par les condensateurs.

Exercice 06 :

On considère le groupement des quatre condensateurs $C_1=3C$, $C_2=C$, $C_3=2C$ et $C_4=3C$ (Figure IV.21).

a- Calculer, en fonction de C, la capacité équivalente Ceq entre A et B. On donne $C=2\mu F$.

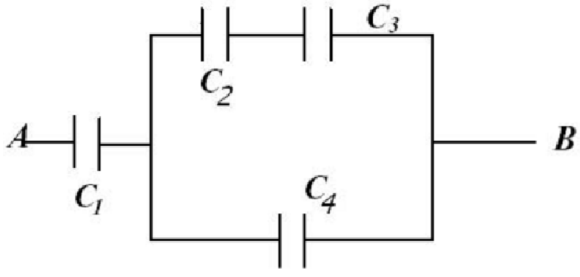


Figure IV.21 : Groupe de condensateurs

b- On maintient entre ***A*** et ***B*** une ***d.d.p*** $V_{AB}=2000V$. Calculer les charges Q_1, Q_2, Q_3 et Q_4 ainsi que les tensions V_1, V_2, V_3 et V_4 de chacun des condensateurs en fonction de C et V_{AB}.

c- On remplace la dérivation comprenant C_2 et C_3 par un condensateur de capacité C_x.

1. Pour quelle valeur de C_x, la capacité équivalente entre ***A*** et ***B*** est égale à C_x.
2. Calculer alors les charges des condensateurs de capacité C_1, C_x et C_4.

Chapitre V

Electrocinétique

V. 1. Intensité du courant électrique *i* :

Par analogie qui peut être faite d'un courant électrique et d'un courant du fluide (gaz ou liquide), la notation de l'intensité est celle du débit (Figure V.1). Donc c'est la quantité de l'électricité qui passe par unité du temps selon la relation :

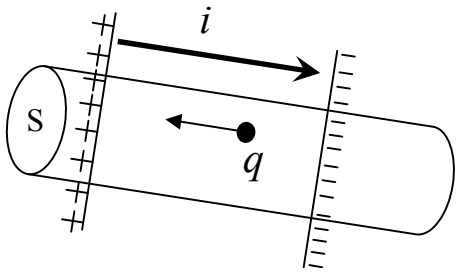


Figure V.1 : Intensité du courant électrique

$$i = \frac{dq}{dt}$$ avec ***i*** en Ampère (***A***)

V. 2. Densité du courant électrique $\vec{J}$:

La densité du courant électrique est définie comme le rapport entre l'intensité du courant électrique élémentaire et la surface élémentaire (Figure V.2).

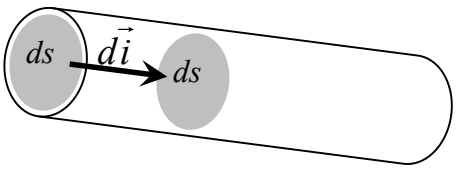


Figure V.2 : Densité du courant électrique

$$\vec{J} = \frac{d\vec{i}}{ds}$$

Remarque :

On prend toujours en considération que l'intensité du courant est orientée dans le sens inverse des charges négatives (les électrons). Donc :

$$\int di = \iint \vec{J}.\vec{ds} \qquad \text{donc} \qquad i = \oiint \vec{J}.\vec{ds}$$

V. 3. Loi d'Ohm (loi microscopique)

Dans la plupart des conducteurs, on observe une proportionnalité entre la densité de courant et le champ électrique local tel que (Figure V.3) :

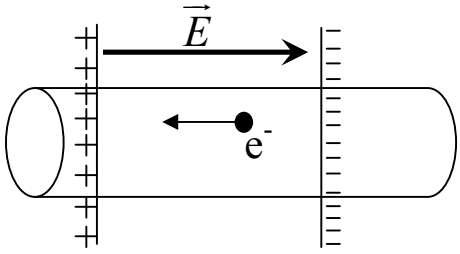


Figure V.3 : Loi d'Ohm (microscopique)

$$\vec{J} = \sigma.\vec{E}$$

Où σ est la conductivité du conducteur.

Dans un cas particulier d'un conducteur parfait :

$$\sigma = n.e.\mu$$

Où ***n***, ***e*** et μ sont la concentration, la charge et la mobilité des porteurs de charges.

V. 4. Résistance d'un conducteur :

On considère un segment du conducteur parcouru par un courant électrique ***i*** (Figure V.4). donc, on trouve une dégradation (chute de potentiel) de V_B à V_A selon le schéma tel que :

$$U = V_A - V_B = \int_B^A \vec{E}.\vec{dl}$$

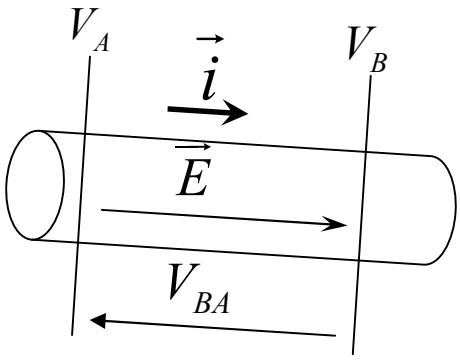


Figure V.4 : Résistance d'un conducteur

Donc, on définit la résistance de ce segment du conducteur par :

$$R = \frac{U}{I} \quad \text{; donc, } \quad R = \frac{\int_A^B \vec{E}.\vec{dl}}{\iint \vec{J}.\vec{ds}} = \frac{\int_A^B \vec{E}.\vec{dl}}{\iint \sigma.\vec{E}.\vec{ds}}$$

Dans un conducteur simple de longueur ***L*** et de section ***S***, le champ électrostatique local reste uniforme et donc :

$$R = \frac{\cancel{E}.L}{\sigma.\cancel{E}.S} = \frac{L}{\sigma.S} = \frac{\rho.L}{S}$$

Telle que ρ est la résistivité du conducteur dont l'unité est (Ω.m)

V. 5. Association de résistance :

V.5.1 Résistances en série (Figure V.5) :

$$V_A - V_B = \mathrm{R}_{\mathrm{equ}}\ i \Rightarrow (V_A - V_D) - (V_D - V_C) - (V_C - V_B) = \mathrm{R}_{\mathrm{equ}}\ i$$

$$R_1 i + R_2 i + R_3 i = (R_1 + R_2 + R_3) i = R_{equ}\ i$$

donc $\boxed{R_{equ} = R_1 + R_2 + R_3}$

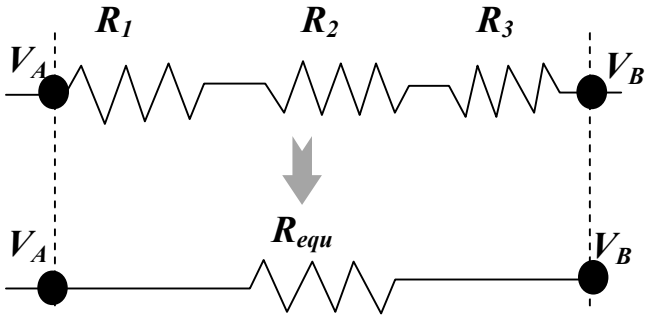


Figure V.5 : Résistances en série

V.5.2 Résistances en parallèle (Figure V.6) :

$$V_A - V_B = R_1 i_1 = R_2 i_2 = R_3 i_3$$

On sait que :

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = \frac{(V_A - V_B)}{R_{equ}} = \frac{V}{R_{equ}}$$

$$i = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3} = \frac{V}{R_{equ}}$$

donc : $\boxed{\frac{1}{R_{equ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$

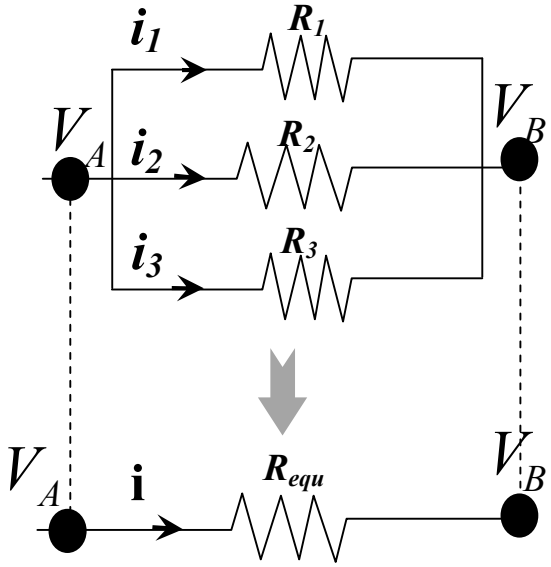


Figure V.6 : Résistances en parallèle

V. 6. Influence de la température sur la résistivité :

On sait que $\rho = \frac{1}{\sigma} = R \cdot \frac{L}{S}$ dans les conditions normales mais lorsque ces conditions changent les grandeurs électriques changent aussi. A cet effet, la résistance varie lorsque la température augmente ou diminue. En générale, la résistance ou la résistivité des métaux augmente lorsque la température de l'environnement augmente (Figure V.7).

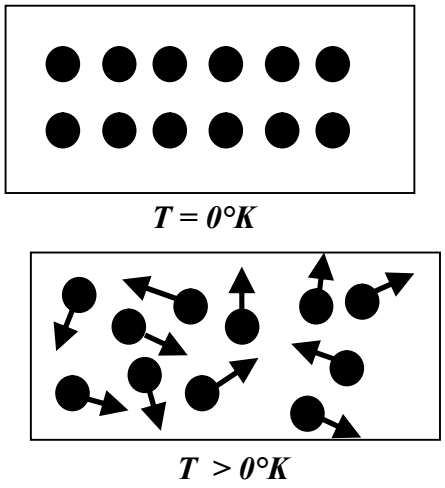


Figure V.7 : Résistances en fonction de la température

En effet, sous l'effet thermique (**chaleur**) les atomes commence un mouvement vibratoire ce qui tend à freiner le mouvement des électrons qui passent, cela dit une diminution de la conductivité. Donc, la résistance d'un métal en fonction de la température suit le modèle suivant:

$$R = R_0 \ (1 + \alpha (T - T_0))$$

Où ***R*** : Résistance à ***T(°C)*** , ***R₀*** : Résistance à la température de référence, α : Coefficient thermique du matériau.

On donne dans le tableau suivant quelques exemples sur la résistivité et le coefficient thermique des matériaux

Matériau	α (°C^{-1}). 10^{-3}	ρ (Ω.m).10^{-8}
Al	4.9	2.80
Ar	6.10	1.60
Cu	6.80	1.70
Fe	6.51	9.70
Hg	0.90	98.00
Pl	3.90	10.60
Tu	4.50	5.60

Tableau V.1 : Quelques valeurs de la résistivité et le coefficient thermique des matériaux

V.7. Eléments d'un circuit électrique :

V.7.1. Définition :

Un circuit électrique est constitué d'un ensemble de dispositifs appelés dipôles actifs ou passifs dans un circuit fermé (Figure V.8).

Exemple :

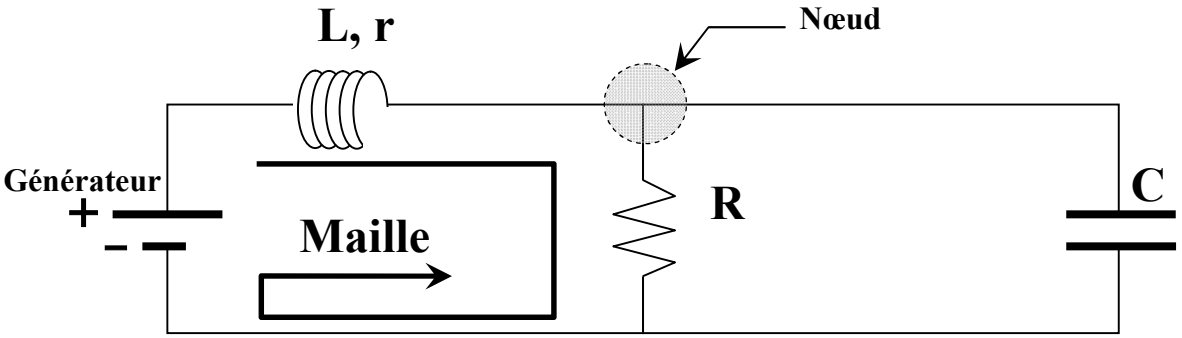


Figure V.8 : Circuit électrique

V.7.2. Générateurs :

Un générateur électrique est un dispositif placé dans un circuit électrique et qui est capable de maintenir un champ électrique. Ce dernier, assure la circulation du courant électrique et le transport de l'énergie à travers le circuit. Notons que cette énergie n'est pas créée par le générateur, ce dernier ne fait que transformer une forme d'énergie, mécanique, chimique, lumineuse etc.. en une énergie électrique

On distingue deux types de générateurs :

Un générateur de tension est un dispositif capable de maintenir une différence de potentiel constante à ses bornes, quelque soit le circuit extérieur.

Un générateur de courant est un appareil qui délivre un courant pratiquement constant, quelque soit le circuit extérieur.

On s'intéresse dans ce que se suit que des générateurs de tension.

a/ Source de tension idéale :

On appelle source de tension un dispositif idéal dont le symbole est représenté sur la figure V.9 et qui impose la ***d.d.p*** constante $e = V_A - V_B = V_{BA}$ aux bornes du circuit auquel il est relié.

Cette ***d.d.p*** ou ***e*** est indépendante du courant ***i*** débité par la source et porte le nom de « force électromotrice de la source » et en abrégé ***f.é.m***.

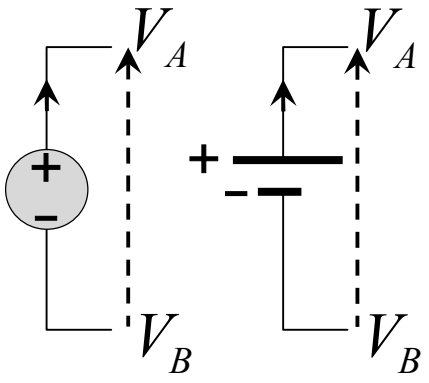


Figure V.9 : Générateur de tension idéal

b/ Source de tension réel :

Un générateur de tension réel est modélisé par la mise en série d'un générateur de tension idéal et d'une résistance ***r*** appelée résistance interne du générateur (Figure V.10).

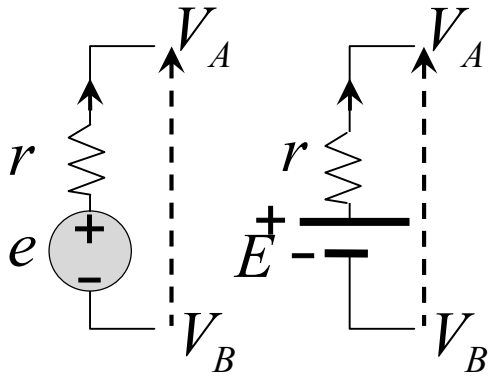


Figure V.10 : Générateur de tension réel

c/ Association des générateurs

- **Association en série (Figure V.11)**

$$E_{equ} = E_1 + E_2 + E_3$$

et

$$r_{equ} = r_1 + r_2 + r_3$$

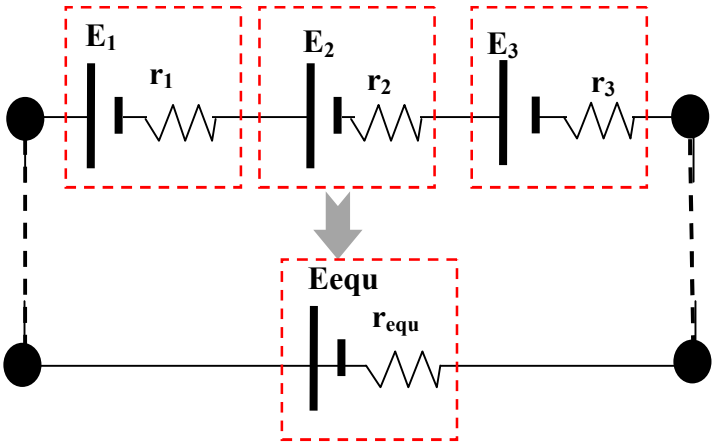


Figure V.11 : Générateur de tension réel En série

- **Association en parallèle (Figure V.12)**

$$i_{equ} = i_1 + i_2 + i_3$$

et

$$\frac{1}{r_{equ}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$$

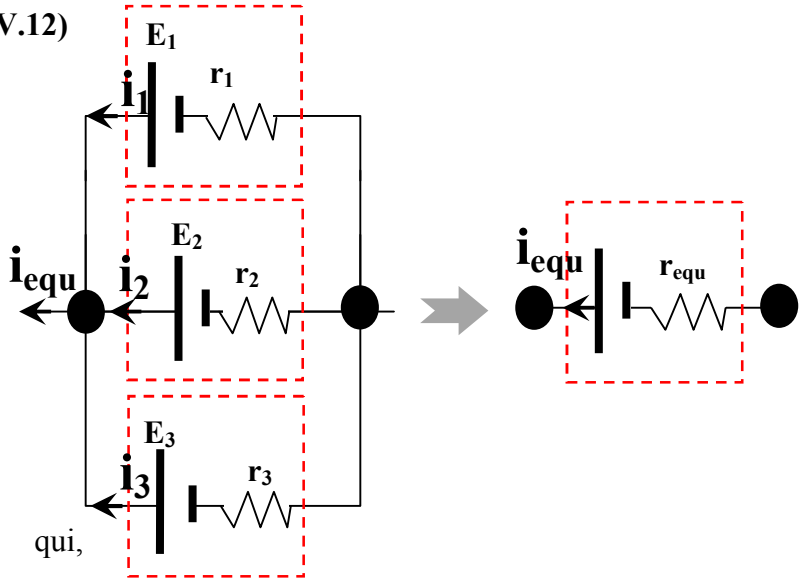


Figure V.12 : Générateur de tension réel en parallèle

V.7.3. Récepteurs :

Les récepteurs sont des dispositifs qui, parcoururent par un courant électrique, transforment l'énergie électrique sous une autre forme d'énergie.

- Les récepteurs actifs (Figure V.13) fournissent de l'énergie mécanique, chimique, lumineuse etc....

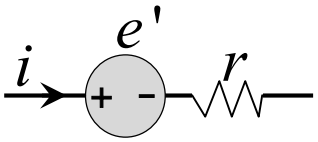


Figure V.13 : Récepteurs actifs

- Par contre, les récepteurs passifs (Figure V.14), comme les résistances, dissipent l'énergie absorbée sous forme de chaleur.

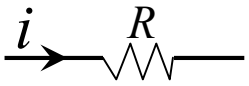


Figure V.14 : Récepteurs passifs

Un récepteur exerce sur les charges électriques qui le traversent, une force résistante. Celle-ci est due à une force contre électromotrice ***(f.c.é.m).***

<u>Rendement d'un récepteur.</u>

Comme pour les générateurs, on définit le rendement **η** d'un récepteur comme étant le rapport entre la puissance utilisable qu'il délivre (***e' i***) et la puissance qu'il consomme ***(V*** $_A$ ***-V*** $_B$***) i*** . Il s'écrit :

$$\eta = \frac{e' \not{i}}{(V_A - V_B)\not{i}} = \frac{e'}{(V_A - V_B)}$$

V.7.4. Puissance électrique :

La puissance électrique entre les bornes d'un dipôle électrique (Figure V.15) est défini par : $P = i\,(V_B - V_A) = i\,V_{AB}$

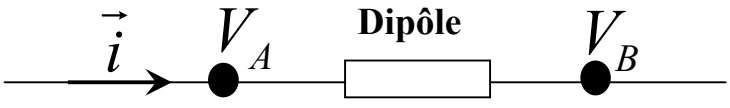


Figure V.15 : Puissance d'un dipôle résistif

<u>Cas particulier</u> : Effet Joule (James Prescott Joule ,1818 – 1889)

Si on prend le cas d'un dipôle passif simple (résistance R) entre V_B et V_A , on aura :

$$P = i\,(V_B - V_A) = i\,(R\,i) = R.i^2$$

Remarque :

Cette puissance électrique se traduite par une énergie thermique sous forme de chaleur

V. 8. Lois de KIRCHHOFF (Gustav Robert Kirchhoff, 1824-1887) :

V. 8. 1. Loi des Nœuds (Conservation du courant):

La somme des courants ***i*** entrant dans un nœud est égale à la somme des courants sortants de la figure V.16. Donc :

$$\sum i_{entrant} = \sum i_{sortant} \quad \text{ou bien} \quad \sum_j i_j = 0$$

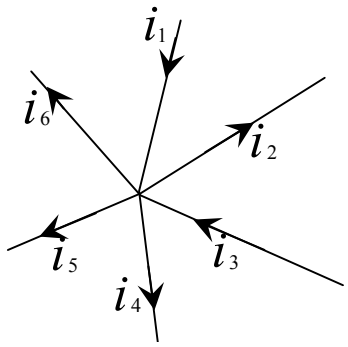


Figure V.16 : Loi des Nœud

<u>Exemple: Nœud A (Figure V.17)</u>

$$i = i_1 + i_2$$

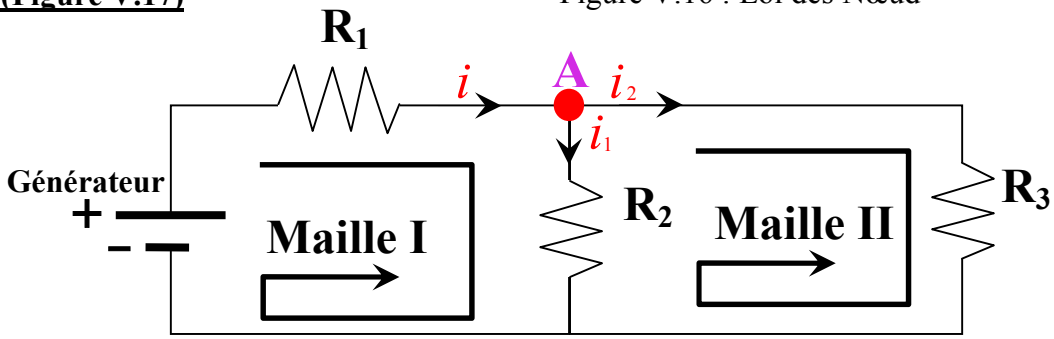


Figure V.17 : Exemple d'un nœud A

V. 8. 2. Loi des Mailles (conservation de tension):

La somme des tensions de différentes branches dans une maille est nulle, donc :

$$\sum_j V_j = 0$$

Avec les conventions de signes suivantes :

- On choisit tout d'abord un sens de parcours positif pour la maille.
- Les termes Ri sont positifs si le sens de parcours choisi coïncide avec le sens de courant. Ils sont négatifs dans le cas contraire.

- e_i est affecté du signe du pôle par lequel on sort du générateur (ou récepteur) correspondant.

Exemple 1 (Figure V.18):

$$-V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 0$$

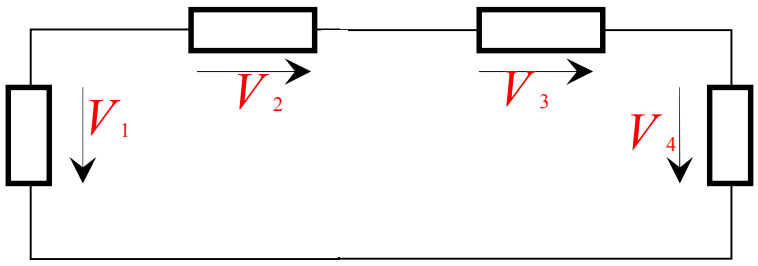


Figure V.18 : Exemple d'une maille de circuit

Exemple 2 :

Entre deux points ***A*** et ***B***, on branche en parallèle (Figure V.19) :

- un générateur de force électromotrice (***f.e.m***) ***E1*** et de résistance R_1.
- un générateur de force électromotrice (***f.e.m***) ***E2*** et de résistance R_2.
- un récepteur de force contre électromotrice (***f.c.e.m***) e et de résistance interne R.

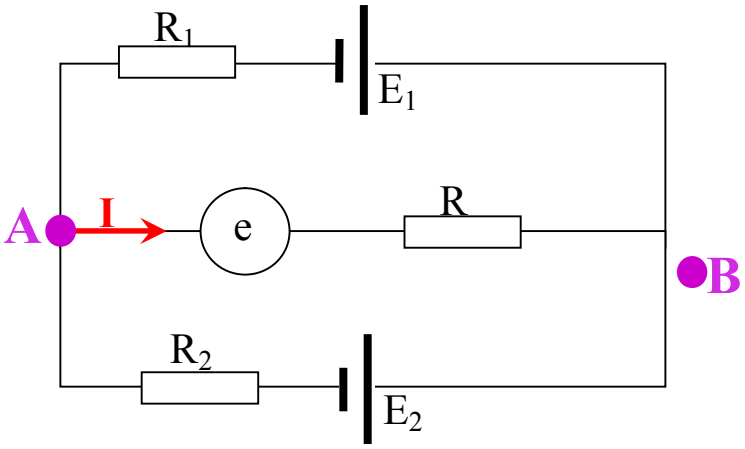


Figure V.19 : Exemple 2

On prendra : E_1=100V, E= 50 V, R_1=1000Ω, R_2=2000Ω, R=100Ω.

Calculer I1, I2 et I(courants qui traversent les branches du circuit contenant les appareils (E_1, R_1), (E_2, R_2), (e, R) respectivement, et montrer que le sens de ***I*** est de ***B*** vers ***A*** quelles que soient les valeurs de E_1, E_2, R_1, R_2 et R.

Solution

1. Loi de nœud ***A*** (Figure V.20)

$$I = I_1 + I_2$$

2. Loi des mailles I et II

Maille I $-RI - R_1 I_1 + (0) I_2 = E_1 + e$

Maille II :

$$RI + (0) I_1 + R_2 I_2 = -E_2 - e$$

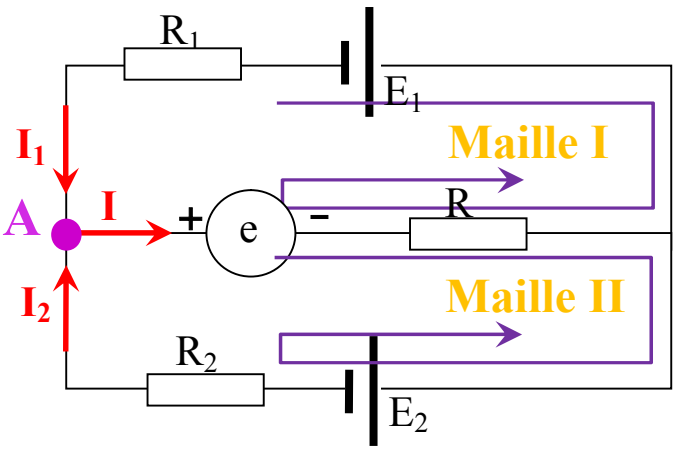


Figure V.20 : Solution de l'exemple 2

Donc on obtient trois équations pour trois variables, comme suit

$$\begin{cases} I - I_1 - I_2 = 0 \\ -RI - R_1 I_1 + (0) I_2 = E_1 + e \\ RI + (0) I_1 + R_2 I_2 = -E_2 - e \end{cases}$$

$$\Rightarrow D\,\text{et} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -R & -R_1 & 0 \\ R & 0 & R_2 \end{vmatrix} = -R_1 R_2 - R R_2 - R R_1$$

$$I = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ E_1 + e & -R_1 & 0 \\ -E_2 - e & 0 & R_2 \end{vmatrix}}{-R_1 R_2 - R R_2 - R R_1} = -\frac{(E_1 + e) R_2 + R_1 (E_2 + e)}{R_1 R_2 + R R_2 + R R_1}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -R & E_1 + e & 0 \\ R & -E_2 - e & R_2 \end{vmatrix}}{-R_1 R_2 - R R_2 - R R_1} = \frac{R (E_2 + e) - (R + R_2)(E_1 + e)}{R_1 R_2 + R R_2 + R R_1}$$

$$= \frac{R (E_2 - E_1) - R_2 (e + E_1)}{R_1 R_2 + R R_2 + R R_1}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -R & -R_1 & E_1 + e \\ R & 0 & -E_2 - e \end{vmatrix}}{-R_1 R_2 - R R_2 - R R_1} = \frac{R (E_1 + e) - (R_1 + R)(E_2 + e)}{R_1 R_2 + R R_2 + R R_1}$$

$$= \frac{R (E_1 - E_2) - R_1 (E_2 + e)}{R_1 R_2 + R R_2 + R R_1}$$

Exercice d'application 03 :

La figure V.21 représente un circuit électrique telles que les résistances R_1, R_2 et R_3 sont branchées comme indiquée la figure.

- Déterminer à l'aide des lois de Kirchhoff les courants électriques i, i_1 et i_2 et les tensions aux bornes de chaque dipôle.

A.N : $R_1 = 9\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$, $R_3 = 8\ \Omega$ et $E = 120V$

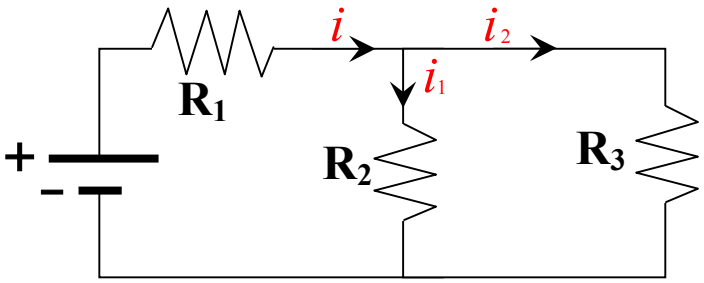


Figure V.21 : Circuit de l'exemple 3

Solution :

On utilise les lois de Kirchhoff (Figure V.22).

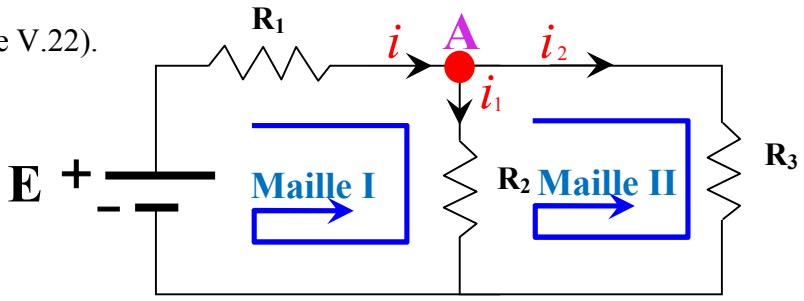


Figure V.22 : Solution de l'exemple 3

3. Loi de nœud **A**

$$i = i_1 + i_2$$

4. Loi des mailles I et II

Maille I :

$$-E + R_1 i + R_2 i_1 = 0$$

Maille II :

$$R_3 i_2 - R_2 i_1 = 0$$

Donc on obtient trois équations pour trois variables, comme suit

$$\begin{cases} i - i_1 - i_2 = 0 \\ R_1 i + R_2 i_1 + (0) i_2 = E \\ (0) i - R_2 i_1 + R_3 i_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \det = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{vmatrix} = R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2 = 140$$

Donc,

$$i = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ E & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 \end{vmatrix}}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2} = \frac{(R_3 + R_2)}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2} E = 10.29 \text{ A}$$

$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ R_1 & E & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{vmatrix}}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2} = \frac{R_3}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2} E = \frac{48}{7} = 6.86 \text{ A}$$

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ R_1 & R_2 & E \\ 0 & -R_2 & 0 \end{vmatrix}}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2} = \frac{R_2}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2} E = \frac{24}{7} = 3.43 \text{ A}$$

2/ La tension aux bornes de R_1, R_2 et R_3

La tension aux bornes de R_1 est $V_{R_1} = R_1 i = 9 \,.\, 10,29 = 92,61\ V$

R_2 est $V_{R_2} = R_2 i_1 = 4 \,.\, 6,86 = 27,44\ V$

R_3 est $V_{R_3} = R_3 i_2 = 8 \,.\, 3,43 = 27,44\ V$

Exercice d'application 04 : charge et décharge d'un condensateur

- Donner la différence de potentiel entre les bornes d'un condensateur en cas de charge et de décharge (Figure V.23).

A/ Charge d'un condensateur

On utilise la loi de maille (Kirchhoff) :

$$\sum_j V_j = 0 \Rightarrow E - V_R - V_C = 0$$

Donc, $E - V_R - V_C = 0$

$$E - R\frac{dq_c}{dt} - \frac{q_c}{C} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{E}{R} - \frac{q_c}{RC} = \frac{dq_c}{dt}$$

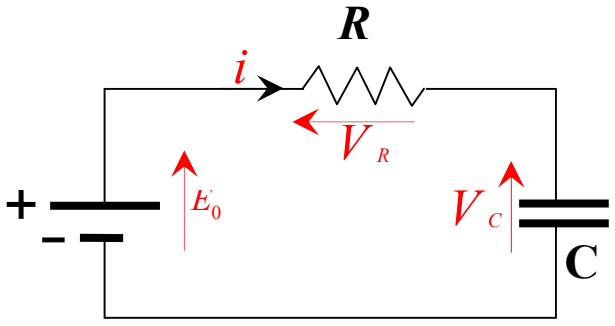


Figure V.23 : Circuit de charge d'un condensateur

$$\Rightarrow -\frac{dt}{RC} = \frac{dq_c}{q_c - CE}$$

$$\Rightarrow \int_0^{q_C} \frac{dq_C}{q_C - CE} = -\int_0^{t} \frac{dt}{RC}$$

$$\Rightarrow \ln\left(q_C - CE\right) \Big|_0^{q_C} = -\frac{t}{RC} \Big|_0^{t}$$

$$\Rightarrow \ln\left(q_C - CE\right) - \ln\left(-CE\right) = -\frac{t}{RC}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{q_C - CE}{-CE}\right) = -\frac{t}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$

$$\Rightarrow q_C = CE\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Donc la différence de potentiel entre les bornes du condensateur V_C est donnée par :

$$V_C = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

On trace la courbe V_C en fonction de t (Figure V.24).

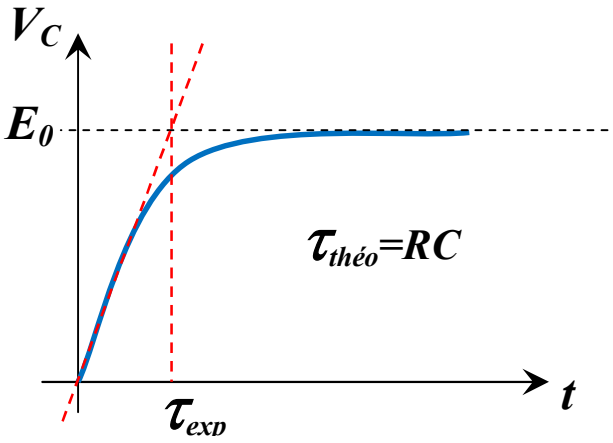


Figure V.24 : Courbe de charge *Vc* en fonction du temps

B/ Décharge d'un condensateur

On utilise la loi de maille (Kirchhoff) (Figure V.25) :

$$\sum_j V_j = 0 \Rightarrow V_R + V_C = 0$$

Donc :

$$R\frac{dq_c}{dt} + \frac{q_c}{C} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{q_c}{RC} = \frac{dq_c}{dt}$$

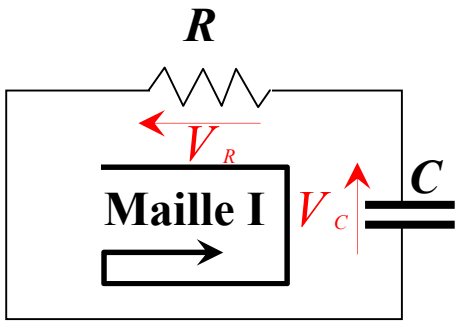


Figure V.25 : Circuit de décharge d'un condensateur

$$\Rightarrow \frac{dq_c}{q_c} = -\frac{dt}{RC}$$

$$\Rightarrow \int_0^{q_C} \frac{dq_C}{q_C} = -\int_0^{t} \frac{dt}{RC}$$

$$\Rightarrow \ln(q_C) \Big|_{q_0}^{q_C} = -\frac{t}{RC} \Big|_0^{t}$$

$$\Rightarrow \ln(q_C) - \ln(q_0) = -\frac{t}{RC}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{q_C}{q_0}\right) = -\frac{t}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$

$$\Rightarrow q_C = q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Donc la différence de potentiel entre les bornes du condensateur V_C est donnée par :

$$V_C = E_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

On trace la courbe V_C en fonction de t. (Figure V.26)

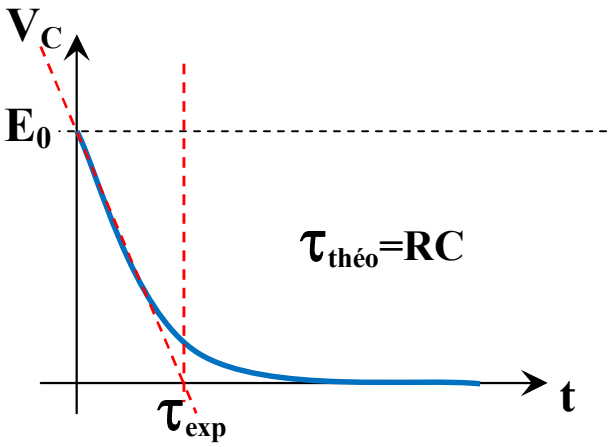


Figure V.26 : Courbe de décharge *Vc* en fonction du temps

Exercices et Problèmes

Exercice 01 :

Un fil possède une concentration de 10^{28} électrons de conduction par mètre cube. L'intensité du courant électrique dans le fil est de ***10 mA*** et la section du fil est de $0.50\ mm^2$.

- Quelle est la densité du courant électrique
- Quelle est la vitesse moyenne des électrons qui contribuent à la conduction.

Exercice 02 :

Un fil de cuivre est traversé par un courant de 50A. La température du cuivre est de 35°C. Le diamètre du fil de cuivre est de 1,63 mm. Sachant que pour plusieurs matériaux, la résistivité varie linéairement en fonction de la température comme suit :

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \alpha(T - T_0)\right]$$

Où ρ est la résistivité à la température T en Ohms-mètres, ρ_0 est la résistivité à la température T_0, α est le coefficient thermique de résistivité en °C, T est la température en °C et T_0 est la température de référence en °C.

On donne pour le cuivre : à $T_0 = 20°C$ on a : $\rho_0 = 1{,}70.10^{-8}\ \Omega.m$ et $\alpha = 3{,}90.10^{-3}\ °C^{-1}$.

a) Quelle est la densité de courant dans le fil.

b) Quelle est la résistivité du fil.

c) Quelle est la conductivité du fil.

d) Quel est le champ électrique dans le fil.

Exercice 03 :

Une tension de 10 V est appliquée aux bornes d'un groupe de deux résistances en série. Les valeurs de résistance sont de 100 Ωet 400Ω.

1. Quelle est la résistance équivalente du groupe de résistances en série ?
2. Quel est le courant traversant le groupe de résistances en série ?
3. Quelle est la tension aux bornes de la résistance de 100Ω ?
4. Quelle est la tension aux bornes de la résistance de 400 Ω ?

Une tension 60 V est appliquée aux bornes d'un groupe de deux résistances en parallèle. Les valeurs de résistances sont de 80Ω et de 240Ω.

1. Quel est le courant traversant la résistance de 80Ω ?
2. Quel est le courant traversant la résistance de 240Ω ?
3. Quelle est la résistance équivalente du groupe de résistances en parallèle ?

4. Quel est le courant traversant le groupe de résistances en parallèle ?

Exercice 04 :

Une pile, ayant une (**f.é.m**). de 22 V et une résistance interne de 0,5Ω, est en série avec une résistance de 5Ω.

1. Quel est le courant fourni par la pile ?
2. Quelle est la tension aux bornes de la pile ?
3. Quelle est la puissance fournie par la pile ?
4. Quelle est la puissance dissipée par la pile ?

Exercice 05 :

Un générateur de force électromotrice $E = 50V$, de résistance interne $r = 1,5\Omega$ débite dans le circuit de la figure V.27).

On donne $R_1 = 0,8\ \Omega$, $R_2 = R_3 = R_4 = 21\Omega$.

Calculer :

1. l'intensité du courant circulant dans R_1.
2. l'intensité du courant circulant dans chacune des trois résistances R_2, R_3 et R_4.
3. La différence de potentiel aux bornes de R_2.
4. La différence de potentiel aux bornes du générateur.

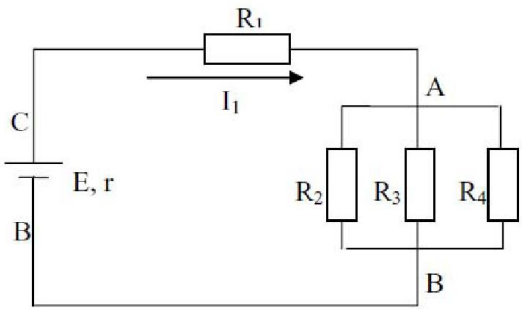


Figure V.27 : Circuit de l'exercice 05

Exercice 06 :

La quantité de charge qui circule dans un fil métallique de section de 0.75mm^2 est donnée par l'équation suivante :

$$q(t) = 60.e^{-\frac{1}{10}} \quad (\mu C)$$

Où t s'exprime en secondes.

a- Donner l'expression de l'intensité du courant dans le fil.

b- En déduire l'équation de la densité du courant dans le fil

Exercice 07 :

Une pile de ***1.5*** est branchée en parallèle avec une résistance.

- Quel le courant traversant la résistance si sa valeur est de ***75* Ω**.

Une résistance de ***63* Ω** est traversée par un courant électrique.

- Quelle est la tension aux bornes de la résistance si le courant est de ***143 m***A.

Une résistance avec une tension de ***10 V*** à ses bornes est traversée par un courant de ***12 mA***.

- Quelle est la puissance dissipée par la résistance.
- Quelle est la valeur de la résistance.

Exercice 08 :

Un circuit électrique est composé d'une pile de ***12V*** en série avec deux résistances de ***40*Ω** et ***60*Ω**.

a. Quel le courant traversant la pile et les deux résistances.
b. Quelle est la puissance fournie par la pile.
c. Quelle est la puissance dissipée par la résistance de ***40*Ω**.
d. Quelle est la puissance dissipée par la résistance de ***60*Ω**.

Exercice 09 :

Soit le circuit électrique de la figure V.28 composé de :

- Un générateur de force électromotrice F.é.m de ***E = 12V***.
- Un récepteur de force contre-électromotrice F.c.é.m de ***e = 9V***.
- Deux résistances : R_1***=1k*Ω** et R_2***=2k*Ω**.
- Quel le courant traversant le circuit électrique.
- Quelle est la puissance fournie par le générateur.
- Quelle est la puissance absorbée par le récepteur.
- Quelle est la puissance dissipée par la résistance de ***1k*Ω**
- Quelle est la puissance dissipée par la résistance de ***2k*Ω**.

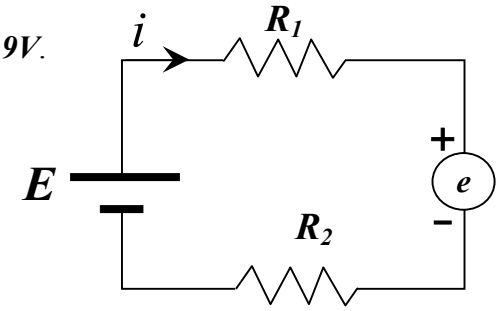


Figure V.28 : Circuit de l'exercice 09

Exercice 10 :

Un générateur de force électromotrice ***E=100V*** et de résistance ***R=500*Ω** alimente deux récepteurs de force contre électromotrice ***e=50V*** et ***e'=40V***, de résistances internes ***r=1000*Ω** et ***r'=2000*Ω**, branchés en parallèle (Figure V.29).

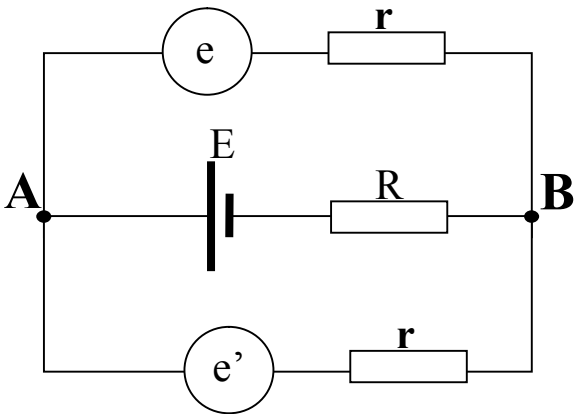


Figure V.29 : Circuit de l'exercice 10

- Calculer les courants qui traversent les récepteurs.

Exercice 11 :

Le pont de capacités, représenté sur la figure V.30, se compose de quatre condensateurs montés comme le montre cette figure. C_x est la capacité à mesurer, C_E la capacité d'un condensateur étalon, C_1 et C_2 deux capacités variables.

Ces condensateurs sont chargés par une source d'électricité qui établit entre les points A et B une différence de potentiel $V_A - V_B$.

On fait varier C_1 et C_2 jusqu'à ce que le détecteur de zéro (un électromètre) indique une différence de potentiel nulle.

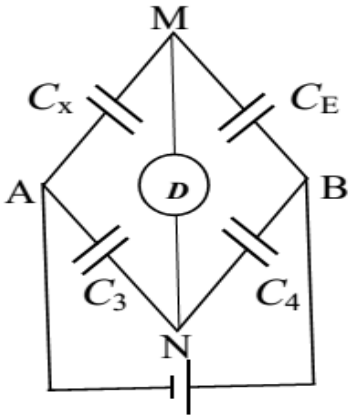


Figure V.30 : Circuit de l'exercice 11

Exprimer la capacité inconnue en fonction des trois autres capacités.

A.N : $C_1 = 4\ \mu F$ $C_2 = 2\ \mu F$ $C_E = 3\ \mu F$.

Exercice 12 :

Un condensateur de capacité $C = 40\mu F$ a une charge initiale de $Q = 50\ \mu C$. On laisse ce condensateur se décharger à travers un conducteur ohmique de résistance $R = 8\ k\Omega$.

1. Etablir l'équation donnant la loi de variation de la charge du condensateur en fonction du temps.
2. Déterminer l'intensité du courant et la charge du condensateur à l'instant $t = 10\ ms$.
3. Déterminer la puissance électrique dissipée dans le conducteur ohmique à l'instant $t = 10ms$.
4. Calculer la durée nécessaire pour que l'énergie stockée dans le condensateur atteigne 10% de sa valeur initiale.

Chapitre VI :

Magnétostatique

VI. 1. Introduction : (Historique)

On rencontre dans ce chapitre le 3ème type d'interaction « interaction magnétique » ; c'est parmi les plus anciennes interactions connues par l'être humain. Il y a de nombreux siècles que l'homme a remarqué que certain minerais tel que les magnétites ont la propriété d'attirer des petites tranches de Fer, Cobalt, manganèse…, ces corps-là sont appelés « magnétique ».

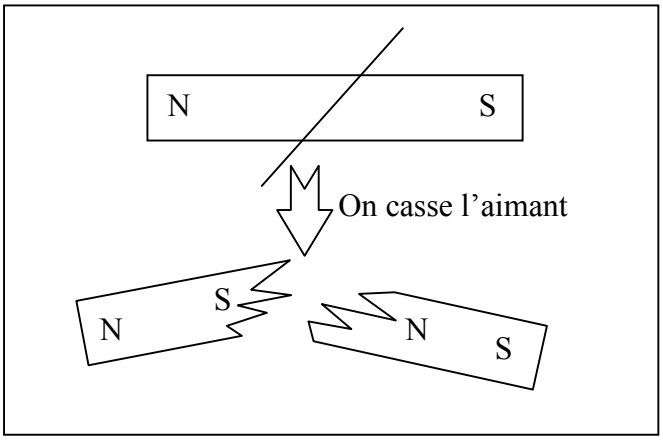


Figure VI.1 : Pôles d'un aiment

Notons que le mot magnétique vient du magnétisme et de son tour le magnétisme vient d'une ancienne cité en Asie dite « magnésie » où c'était la première fois où l'homme a remarqué ce phénomène (Figure VI.1).

Comme l'électrostatique, nous remarquons des interactions d'attraction ou de répulsion entre les aimants mais cette fois-ci selon la caractéristique pôle Nord ou Sud (Figure VI.2).

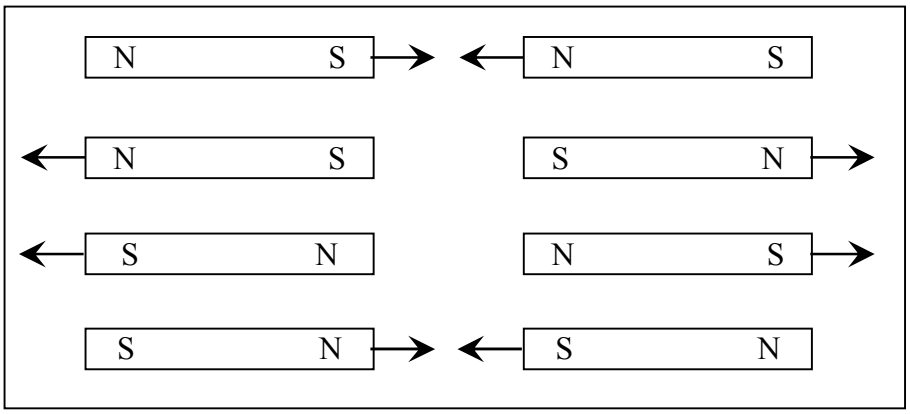


Figure VI.2 : Différents interactions magnétiques

VI. 2. Création du champ magnétique : (Expérience d'Oersted, 1820)

On fait passer un courant électrique dans un fil conducteur sous forme spirale (Figure VI.3).

On remarque avec l'approche d'une sonde magnétique qu'il y a un champ d'attraction qu'on appelle le **champ magnétique**.

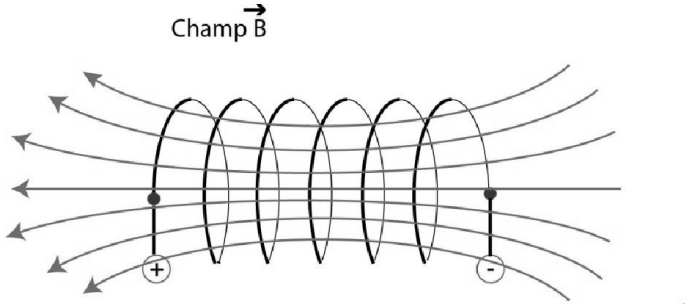


Figure VI.3 : Champ magnétique

VI. 3. Force magnétique ou force de Lorentz :

Réalisant l'expérience précédente, on mesure les forces auxquelles sont soumis les différents porteurs de charges qui ont de différentes vitesses selon la loi de Lorentz (Figure VI.4) :

$$\vec{F}_L = q(\vec{v} \wedge \vec{B})$$

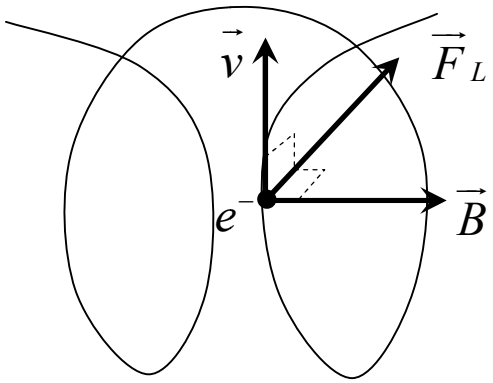


Figure VI.4 : Champ magnétique

Donc, selon le signe de la charge des particules, la force de Lorentz sera dirigée.

Aussi, nous pouvons déterminer l'unité du champ magnétique (Inductance magnétique $\vec{B}$) à partir de la relation de Lorentz.

Donc la dimension de $\vec{B}$ est : $[B] = \dfrac{[F]}{[q][v]} = \dfrac{MLT^{-2}}{IT.LT^{-1}} = MI^{-1}T^{-2}$

Et l'unité est : $(B) = kg.A^{-1}s^{-2} = \text{Tesla}$

Remarque :

Lorsque la particule est soumise à un champ électrique et magnétisme à la fois, la force résultante sera :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Application : **Effet HALL**

Expérience : On applique un courant électrique sur une plaque conductrice ou bien semiconductrice. On met le dispositif dans un champ magnétique, tel que la figure VI.5.

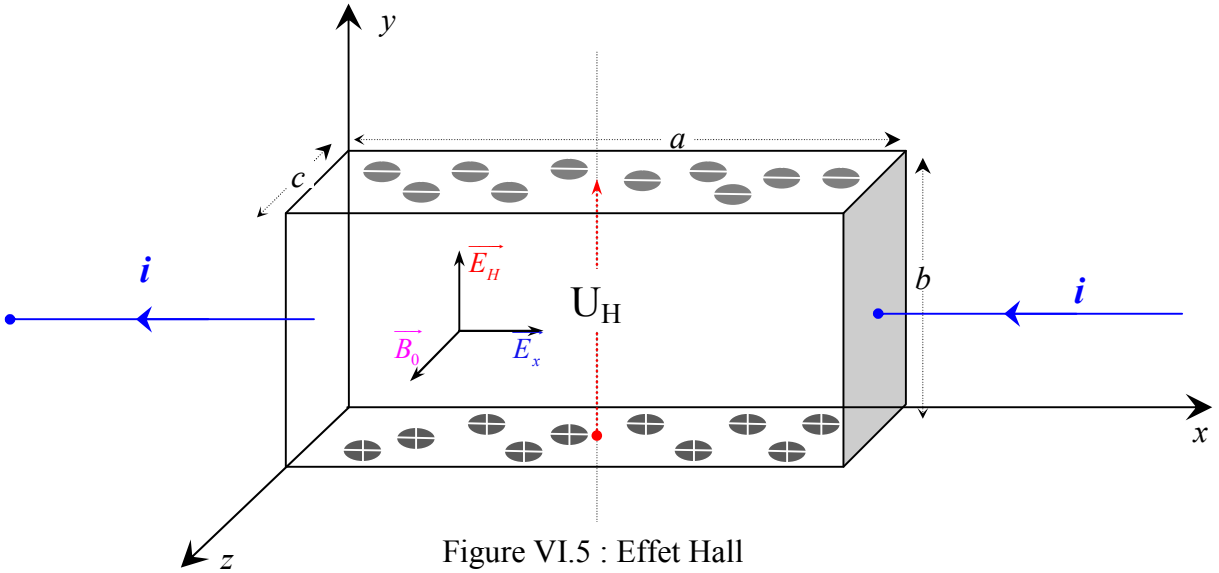


Figure VI.5 : Effet Hall

En absence du champ magnétique, le champ électrique $\vec{E}$ a le sens et la direction de ***x***. Les porteurs de charges libres se déplacent à la vitesse $\overrightarrow{v_p}$ de même direction que ***x*** (si les porteur de charge sont positives (ions positive).

$$\overrightarrow{v_p} = \mu_p . \vec{E}$$

Où μ_p est la mobilité des porteurs de charges

Les porteurs de charges libres sont aussi soumis à la force magnétique (force de Lorentz).

$$\overrightarrow{F_B} = e \left(\overrightarrow{v_p} \text{ x } \overrightarrow{B_0} \right)$$

Notons que la charge des électrons est négative ($e = -1{,}6 .10^{-19} C$).

Cette force de Lorentz est dirigée vers le bas. Les ions positives subissent cette force vont s'accumuler sur la face inférieure tandis que les charges négatives seront déplacées vers le sens inverse créant ainsi un champ électrique transversal $\overrightarrow{E_H}$ normal à $\overrightarrow{E}$.

Le champ électrique de hall $\overrightarrow{E_H}$ donne naissance à une différence de potentiel $V_{AB} = V_B - V_A$ dont la relation théorique est donnée par :

$$V_{AB} = -(V_B - V_A) = -\int_0^b E_y dy = -b.E_H = -V_H$$

V_H est appelée la tension de Hall.

Les ions négatives seront soumis à une force électrique ($\overrightarrow{F_y} = e\,\overrightarrow{E_H}$) et la migration des porteurs de charges s'arrête quand les deux forces $\left|\overrightarrow{F_y}\right|$ et $\left|\overrightarrow{F_B}\right|$ sont égales :

$$e.v_n.B_0 = e.E_H \Rightarrow \mu_n.E_x.B_0 = \frac{V_H}{b} \quad \text{..... (1)}$$

On utilise la loi macroscopique d'Ohm $\boldsymbol{U = Ri}$, le champ électrique $\boldsymbol{E_x}$ devient :

$$E = \frac{U}{a} = \frac{Ri}{a}$$

On sait aussi que la résistance électrique $\boldsymbol{R}$ d'une substance métallique est donnée par :

$$R = \frac{\rho a}{S} = \frac{a}{S.\sigma} = \frac{a}{n.\mu_n.e.b.c}$$

Où $\boldsymbol{S = b*c}$, $\sigma(\Omega^{-1}cm^{-1})$, $\rho(\Omega.cm)$ et $\boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{cm^{-3}}$) représentent respectivement la section, la conductivité, la résistivité et la concentration des porteurs de charges.

La relation (1) devient :

$$V_H = \frac{i.B_0}{e.c}.\frac{1}{n} = R_{Hn}\frac{B_0}{c}i$$

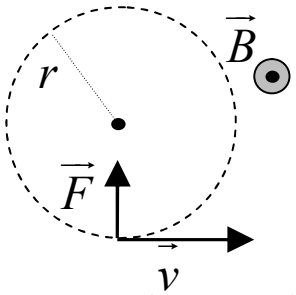
Où $R_{Hn} = \frac{1}{en}$ représente la constante de Hall pour les porteurs de charges négatives.

Ce résultat est remarquable car il permet de déterminer le nombre de porteurs de charges par unité de volume (une grandeur microscopique) à partir des mesures macroscopiques du courant qui traverse la plaque, du champ magnétique et de la tension de Hall.

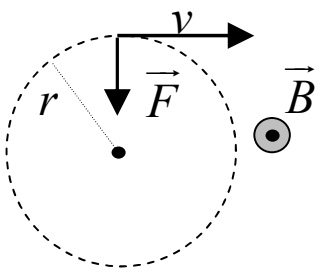
VI. 4. Mouvement d'une charge dans un champ magnétique :

Exercice : ($\boldsymbol{e^-}$ dans l'atome de l'Hydrogène)

On fait appliquer un champ magnétique sur une particule qui fait une rotation (deux cas) (Figure VI.6).



$$\overrightarrow{F_B} = -|q|\left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$



$$\overrightarrow{F_B} = +|q|\left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

Figure VI.6 : Mouvement d'une charge dans un champ magnétique

Pour la rotation, on sait que : $\sum \vec{F} = m\vec{\gamma}$

$\gamma_T = 0,\ \gamma_N = m\dfrac{v^2}{r}$ alors, $q\not{v}B = m\dfrac{v\not{\gamma}}{r} \Rightarrow v = \dfrac{qBr}{m}$

On sait aussi que : $\omega = \dfrac{v}{r}$, donc $\omega = \dfrac{q}{m}B$

Ou bien : $\vec{\omega} = -\dfrac{q}{m}\vec{B}$

VI. 5. Force magnétique agissant sur un courant électrique :

On suppose un courant électrique circule dans un fil conducteur de longueur ***l*** et d'une surface ***S***. on place le fil dans une région où règne un champ magnétique $\vec{B}$, on admet que $\vec{j}$ est la densité du courant qui est donnée par : $\vec{j} = nq\vec{v}$

On sait que l'intensité du courant électrique est donnée par : $\vec{i} = \vec{j}.s = nsq\vec{v}$.

Si on utilise la définition de la force magnétique $\vec{F} = q\left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right)$ pour ***n*** charges, donc la relation de la force devient : $\vec{F} = qn\left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right)$,

Puisque le fil à une forme cylindrique, donc :

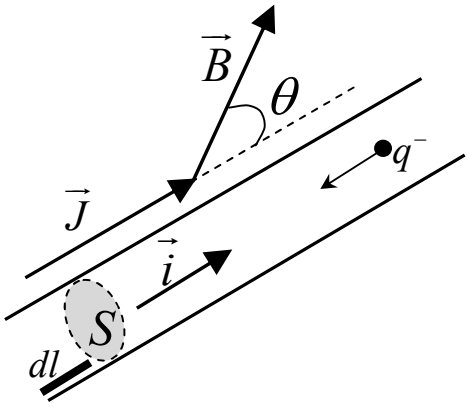


Figure VI.7 : Force magnétique agissant sur un courant électrique

$$d\vec{F} = \vec{f}\ d\tau$$

Avec $d\tau$ un élément de volume, qu'on peut l'écrire sous la forme $d\tau = da.db.dc = \left(da.db\right).dc = S.dl$).

Donc : $d\vec{F} = \left(nq\vec{v} \wedge \vec{B}\right)\left(S.dl\right) = n.q.S.dl\left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right)$

Aussi : $\rho = \dfrac{dm}{dV} \Rightarrow dm = \rho dV$ et l'orientation de $\vec{dl}$ est en parallèle avec la vitesse $\vec{v}$, alors :

$d\vec{F} = n.q.S.v\left(\vec{dl} \wedge \vec{B}\right)$ qui nous donne on module $dF = \left(n.q.S.v\right).B.dl.\sin\theta$

Donc : dF devient $\boxed{dF = i.B.dl.\sin\theta}$ (force de **Laplace**).

VI. 6. Moment dipolaire magnétique d'une charge électrique:

Considérons une charge ***q*** décrivant une orbite fermée et de forme circulaire pour simplifier le problème (Figure VI.8)

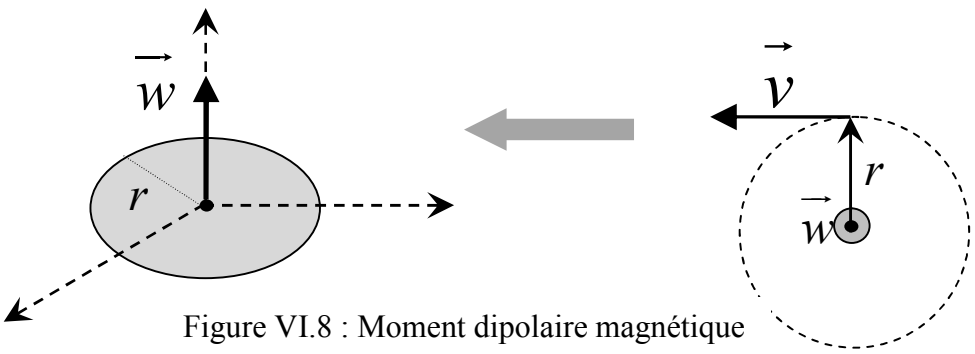


Figure VI.8 : Moment dipolaire magnétique

On sait que : $i = \frac{dq}{dt}$ pour une charge ***q*** qui fait un mouvement circulaire et donc :

$$\int_0^q dq = \int_0^T i\ dt \quad \Rightarrow \quad i = \frac{q}{T} = f\,.\,q$$

Tel que ***f*** est la fréquence.

Donc : $i = \frac{q\omega}{2\pi}$

Le moment dipolaire est défini par : $\mu = s.i$

$$= \pi r^2 \left(\frac{q\omega}{2\pi} \right) = \boxed{\frac{qr^2}{2}\omega}$$

VI. 7. Champ magnétique créé par un courant électrique :

VI.7.1. Expériences

Exemple 1 :

On place sur une plaque de limaille de fer au voisinage d'un fil qui est lui-même perpendiculaire à la plaque. Après l'alimentation du fil par un courant électrique, nous remarquons un réarrangement des limailles de fer sous forme de circulaire (Figure VI.9).

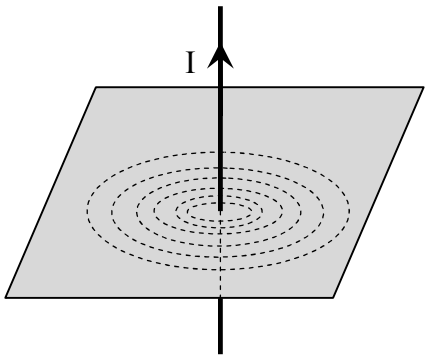


Figure VI.9 : limaille de fer en présence d'un champ magnétique

Exemple 2 :

Lorsqu'on place une boussole parallèlement à un fil dont un courant électrique se circule, nous remarquons la déviation de cette boussole vers la direction du courant (Figure VI.10).

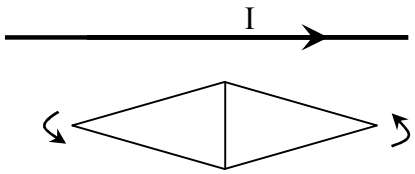


Figure VI.10 : Influence d'une boussole

VI.7.2. Loi de Biot et savart

Lorsqu'on circule un courant électrique dans un fils conducteur, l'influence de ce courant nous donne naissance à un champ magnétique dans l'espace tel que (Figure VI.11):

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i.\left(\vec{dl}\wedge\vec{u}\right)}{r^2}$$

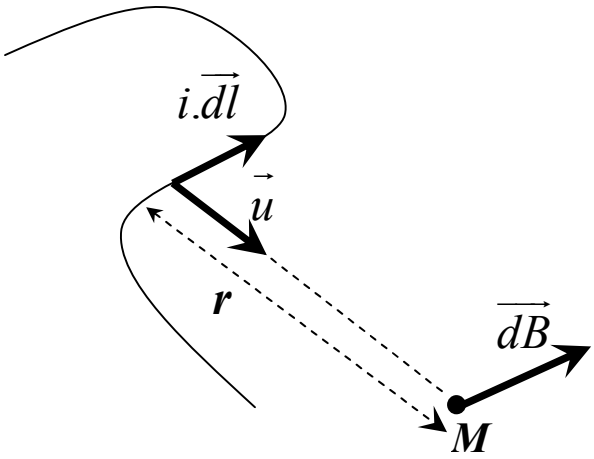


Figure VI.11 : Loi de Biot et Savart

Tel que :

μ_0 : La perméabilité du vide $\left(\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\ m.kg.C^{-2}\right)$.

$\vec{u}$: Vecteur entre le point $i.\vec{dl}$ et le point ***M*** de distance ***r*** où on mesure le champ magnétique élémentaire $\vec{dB}$.

Dans le vide, le champ magnétique $\vec{B}$ est lié à l'excitation ou l'induction magnétique $\vec{H}$ par la relation suivante : $\vec{H} = \chi\vec{B}$

VI.7.3. Applications

VI.7.3.1. Fil rectiligne indéfini :

On suppose un fil parcouru par un courant électrique I (Figure VI.12), le champ magnétique créé par ce fil à un point P est :

$$\left|\vec{B}\right| = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\vec{dx}\times\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(\theta)}{r^2}dx$$

Avec :

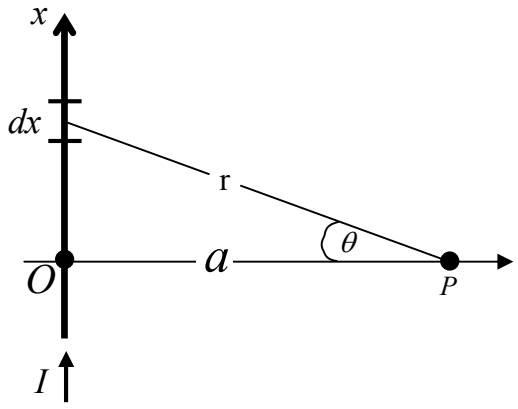


Figure VI.12 : Fil rectiligne infiniment chargé

$$dx = \frac{a}{\cos^2(\theta)} d\theta \qquad \text{et} \qquad r = \frac{a}{\cos(\theta)}$$

Donc, la relation du champ magnétique devient :

$$\left|\vec{B}\right| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\theta)}{a\left(\frac{a}{\cos(\theta)}\right)^2} \frac{a}{\cos^2(\theta)} d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\theta)}{a} d\theta$$

Alors,

$$\left|\vec{B}\right| = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

VI.7.3.2. Spire circulaire :

On suppose un fil de forme spirale parcouru par un courant électrique I (Figure VI.13). Le champ magnétique créé par ce fil en un point P est calculé en utilisant la symétrie de ce vecteur du champ magnétique. On prend deux éléments de $\vec{dl}$ aux points M et M' produisent au niveau de P des champs élémentaires $\vec{dB}$ et $\vec{dB'}$ symétriques par rapport à *Ox*. À cet effet, on calcule juste la composante *dB* selon *Ox*.

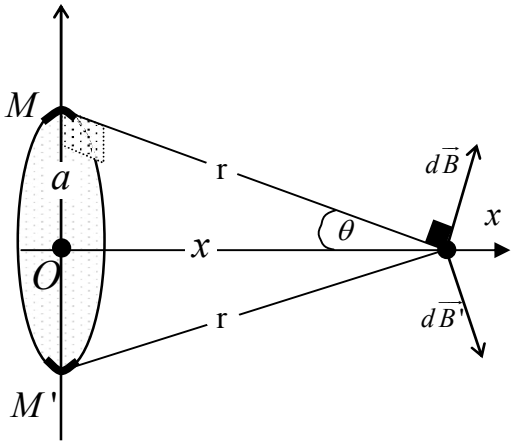


Figure VI.13 : Spire circulaire

$$dB = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{r^2}\right)\sin(\theta)$$

On remarque que : $\vec{dl} \perp \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{dl} \times \vec{r}\right| = dl.\, r$

On sait aussi que : $r = \frac{a}{\sin(\theta)}$

Donc, la relation du champ magnétique devient :

$$\int dB = \int \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{a^2}\sin^3(\theta)$$

On remarque que l'intégrale ne dépend que de ***dl*** qui varie sur un périmètre de ***2πa*** et qui donne :

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I(2\pi a)}{a^2}\sin^3(\theta) \quad \text{avec} \quad \sin^3(\theta)=\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)^3$$

Donc,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{a^2}{\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Cas particuliers : $\begin{cases} \text{Si} \quad x \to \infty \quad \Rightarrow \quad B = 0 \\ \text{Si} \quad x \to 0 \quad \Rightarrow \quad B = \dfrac{\mu_0 I}{2a} \end{cases}$

Remarque :

Le champ magnétique créé par une bobine plate ayant ***N*** spire au point *O* est :

$$B_T = NB_0 = \frac{\mu_0 NI}{2a}$$

VI.7.3.3. Solénoïde :

Un solénoïde est un ensemble de spire qui forme des enroulements hélicoïdaux. Les spires ont pour rayon ***a*** et ***N*** anneaux. Alors le calcul du champ magnétique créé par un solénoïde à un point ***P*** est basé sur la superposition des champs créés par les N spires au même point ***P.***

On a déjà calculé le champ magnétique créé par une spire circulaire et qui a donné pour formule :

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{a^2}{\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Dans un élément d'épaisseur ***dx*** selon l'axe ***Ox*** on trouve ***N.dx*** spires qui produisent un champ :

$$dB = \left(N.dx\right)B_0$$

Donc, on trouve : $dB = \dfrac{\mu_0 INa^2}{2}\dfrac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

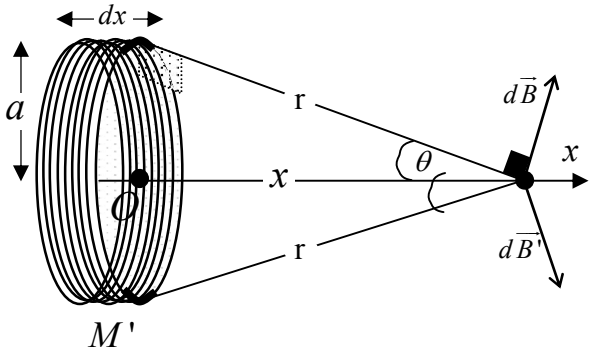


Figure VI.14 : Solénoïde

Le champ total est la somme des ***dB*** pour ***x*** varie entre les abscisses x_1 et x_2 correspondant aux deux spires extrêmes (Figure VI.14 et VI.15).

$$PC = x$$

On donne : $PC_1 = x_1$

$PC_2 = x_2$

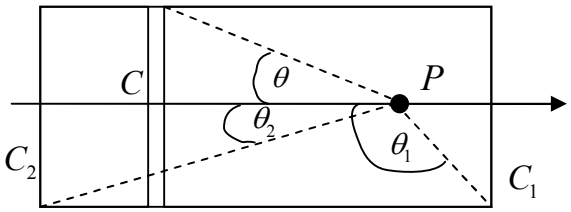


Figure VI.15 : Solénoïde 1

Donc : $B = \dfrac{\mu_0 INa^2}{2}\int_{x_1}^{x_2} \dfrac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

Alors, on calcule cette intégrale en faisant le changement de variable suivant :

$$x = \frac{a}{tg(\theta)} \quad , \quad a^2 + x^2 = \frac{a^2}{\sin^2(\theta)} \quad , \quad dx = -\frac{a}{\sin^2(\theta)}d\theta$$

Donc, on obtient :

$$B = \frac{\mu_0 IN}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} -\sin\left(\theta\right)d\theta = \frac{\mu_0 IN}{2}(\cos\left(\theta_1\right)\cos\left(\theta_2\right))$$

Dans le cas particulier où le solénoïde est infini (***x>a***) donc :

$$\begin{cases}\theta_2 = 0\\ \theta_1 = -\pi\end{cases}$$

Alors le champ magnétique devient :

$$B = \mu_0 NI$$

Remarque : pour augmenter le champ magnétique il faut avoir la plus grande densité des spires.

Exercices et problèmes

Exercice 01 :

Un faisceau d'électrons est soumis à l'influence simultanée d'un champ électrique $\vec{E}$ et d'un champ magnétique $\vec{B}$ normaux entre eux et normaux au faisceau d'électrons. La vitesse $\vec{v}$ des électrons est telle qu'ils ne sont pas déviés.

1. Représenter sur un diagramme l'orientation relative des vecteurs $\vec{v}$, $\vec{E}$ et $\vec{B}$.
2. Calculer la vitesse $\vec{v}$ du faisceau d'électrons.
3. Quel est le rayon de la trajectoire si le champ électrique est supprimé ?

A.N : $E = 3.4\ 10^5\ (V/m)$; $B = 0.02\ (T)$

Exercice 02 :

Un ruban de cuivre de largeur ***15 mm*** et d'épaisseur de ***1.25mm*** est placé perpendiculairement à un champ magnétique $\vec{B}$ de ***1.5 T***.

Le ruban est parcouru dans sa longueur par un courant d'intensité ***I=100A***.

Calculer :

1. La vitesse de déplacement des électrons.
2. Le champ électrique transversal dû à l'effet Hall.
3. La tension du Hall.

On donne : $A_{Cu} = 63.6\ \text{g.mol}^{-1}$; le cuivre libère un seul électron oar atome.

Exercice 03 :

Un long fil horizontal transporte un courant de ***78 A***. un second fil en cuivre de ***3.5 mm*** de diamètre, placé parallèlement au premier mais à ***18 cm*** sous lui, est maintenu en suspension par une force magnétique.

- Déterminer l'intensité et le sens du courant dans le fil du bas.

On donne : $\rho = 8.9\ 10^3\ (kg/m^3)$; $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}\ (S.I)$

Exercice 04 :

- Calculer le champ magnétique créé par un segment parcouru par un courant d'intensité ***I*** en un point ***M*** situé à la distance ***a*** du segment. On appellera θ_1 et θ_2 les angles entre la perpendiculaire au fil issue de ***M*** et les droites joignant ***M*** aux extrémités du segment.
- Examiner le cas du fil rectiligne infini.

- Retrouver la question précédente (champ créé par un fil rectiligne infini) en appliquant le théorème d'Ampère.

Exercice 05 :

Déterminer dans les cas suivants la direction, le sens et l'intensité de la force de Lorentz si $v=2\ 10^4$ m/s, $B = 0{,}1$ T et $|q| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C (Figure VI.16).

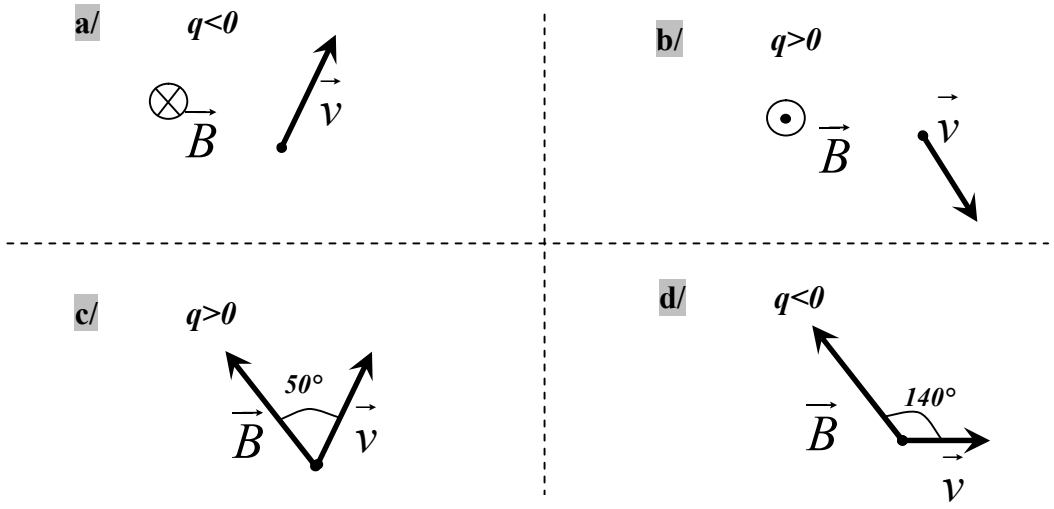


Figure VI.16 : Force de Lorentz

Exercice 06 :

On veut obtenir au centre d'un solénoïde de longueur $l = 50cm$, un champ magnétique d'intensité $2mT$, l'intensité du courant étant de $1A$. Déterminer le nombre de spires nécessaires.

Exercice 07 :

Soit un fil spiral de rayon R parcourue par un courant d'intensité I.

1. Déterminer le champ magnétique créé en un point de l'axe de la spire situé à une distance z du centre de celle-ci.
2. Tracer la courbe $B(z)$

Exercice 08 :

Deux bobines de N spires, de rayon R, parcourues par un courant d'intensité I, ont leurs centres distants de R. Le sens du courant est tel que les champs créés par les deux bobines s'ajoutent dans l'espace situé entre les deux bobines.

1) Calculer B au milieu O de l'axe joignant les deux centres.
2) Calculer B pour un point M de l'axe voisin de O repéré par $OM=x$.

3) Quelle est la variation relative de ***B*** entre ***O*** et ***M*** pour ***x/R=0.1***.

Exercice 09 :

On considère un solénoïde de longueur ***L*** comportant au total ***N*** spires jointives ayant le même rayon ***R***, régulièrement réparties.

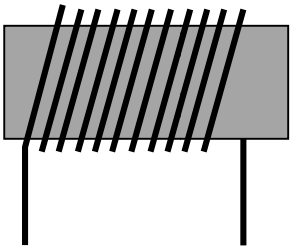
- Déterminer le champ magnétique créé en un point quelconque de l'axe du solénoïde en fonction des angles α_1 et α_2 sous lesquels on voit les faces terminales du solénoïde depuis le point considéré.
- Examiner le cas du solénoïde « infiniment long », c'est-à-dire tel que ***R<<L***.

Exercice 10 :

Un aimant droit disposé selon l'axe d'un solénoïde s'oriente selon la figure VI.17.



Figure VI.17 : Influence d'un aiment



1. Quelle est la face nord du solénoïde ?
2. Quel est le sens du courant qui circule dans le solénoïde ?
3. Représenter le champ magnétique $\overrightarrow{B_0}$ au milieu du solénoïde et dessiner quelques lignes de ce champ.

Exercice 11 :

Deux solénoïdes identiques sont disposés comme l'indique la figure VI.18. Leurs axes sont perpendiculaires et se coupent en ***O***.

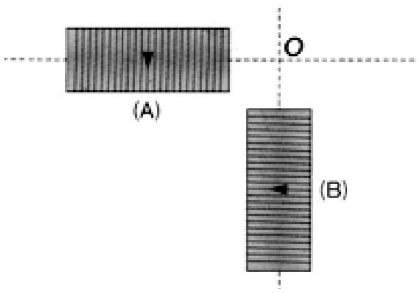


Figure VI.18 : Ensemble de solénoïde

1. Les sens de courant dans chaque solénoïde sont représentés sur le schéma. Préciser le sens des vecteurs champ magnétique $\overrightarrow{B_1}$ créé par (A) et $\overrightarrow{B_2}$ créé par (***B***) au point ***O***.
2. Quelle sera la direction et le sens de l'aiguille aimantée si en ***O*** les valeurs des champs sont $B_1 = B_2 = 2{,}3\ mT$?
3. Représenter chaque vecteur à la même échelle. Calculer la valeur de $\vec{B} = \overrightarrow{B_1} + \overrightarrow{B_2}$.

4. Que devient l'orientation de l'aiguille aimantée si on change le sens du courant dans le solénoïde (***A***) ?
5. Les sens des courants sont de nouveau ceux de la première question mais on double l'intensité du courant qui traverse (A). Représenter à nouveau $\overrightarrow{B_1}$ et $\overrightarrow{B_2}$. Calculer la nouvelle valeur de $\vec{B}$ ainsi que la nouvelle orientation de l'aiguille aimantée.

Exercice 12 :

On considère le système schématisé en figure VI19. Un fil rectiligne infini, confondu avec l'axe ***z'Oz***, est parcouru par un courant d'intensité ***I***. Un dipôle de moment magnétique $\overrightarrow{M}$ est placé au point ***A*** de l'axe ***y'Oy*** à la distance ***OA= a*** de O.

- Déterminer l'action exercée par le dipôle sur le fil infini.

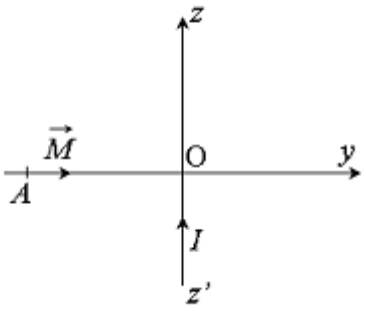


Figure VI.19 : Dipôle magnétique -fil conducteur

Annexe A : Constantes Physiques

Charge élémentaire de l'électron	$e = -1,6 \ . \ 10^{-19}$ C
Vitesse de la lumière	$c = 3 \ . \ 10^{8}$ m/s
Permittivité électrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,84 \ . \ 10^{-12}$ F/m
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 4\pi \ . \ 10^{-7}$ H/m
Masse de l'électron	$m_e = 9,1 \ . \ 10^{-31}$ kg
Constante de Boltzmann	$k = 1,38 \ . \ 10^{-23}$ J/K
Constante de Planck	$k = 6,63 \ . \ 10^{-34}$ J.s
Constante électrique	$K = 9 \ . \ 10^{9}$ SI

Annexe B : Fonctions primitives usuelles :

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad , \text{x} \neq \text{-1}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$\int x e^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right) e^{ax}$$

$$\int x^2 e^x dx = \left(x^2 - 2x + 2\right) e^{ax}$$

$$\int u dv = uv - \int v du \quad \text{(integration par partie)}$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b|$$

$$\int \frac{1}{(x+a)^2} dx = -\frac{1}{x+a}$$

$$\int (x+a)^n \, dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1} \quad , \text{n} \neq -1$$

$$\int x(x+a)^n \, dx = \frac{(x+a)^{n+1}\left((n+1)x-a\right)}{(n+1)(n+2)} \quad , \text{n} \neq -1$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \sqrt{x^2 \pm a^2}$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\int \frac{x}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2} \ln\left(x^2+a^2\right)$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+a^2} dx = x - a \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\int \frac{x^3}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} a^2 \ln\left|x^2+a^2\right|$$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$$

$$\int \frac{1}{(x+a)^2} dx = \frac{a}{a+x} \ln|x+a|$$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \tan^{-1} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$$

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{b-a} \ln\left(\frac{x+a}{x+b}\right) \quad , \text{a} \neq \text{b}$$

$$\int \sqrt{x-a} \, dx = \frac{2}{3}(x-a)^{3/2}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x \pm a}} dx = 2\sqrt{x \pm a}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x}} dx = -2\sqrt{a-x}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$$

Annexe C : Dérivée des fonctions usuelles

Fonction	Dérivée
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n.x^{n-1}$
$f(x) = U^n$	$f'(x) = n.U^{n-1}.U'$
$f(x) = e^x$	$f(x) = e^x$
$f(x) = e^u$	$f(x) = u'e^u$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \sin u$	$f'(x) = u'.\cos u$
$f(x) = \cos u$	$f'(x) = -u'.\sin u$
$f(x) = (\sin u)^n$	$f'(x) = n.u'.(\sin)^{n-1}\cos u$
$f(x) = (\cos u)^n$	$f'(x) = -n.u'.(\cos)^{n-1}\sin u$

Annexe D : Formules trigonométriques

- $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$
- $\sin(\alpha) = -\sin(-\alpha)$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\alpha)$
- $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$
- $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$
- $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$
- $\tan(2\alpha) = \dfrac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$

Références

[1]. Electricité et ondes, cours, exercices et travaux pratiques, J. L. Caubarrere, J. Fourny, H. Ladjouze, OPU, 8ème Edition 2006.

[2]. Introduction au magnétisme. Abdelhamid Layadi. OPU. 2004.

[3]. Berkeley, Cours de physique (tome 2), électricité et magnétisme, Dunod. Edition 1996.

[4]. Electricité, rappels de cours et exercices corrigés, S. Khene, Publications de l'université Badji Mokhtar Annaba. Edition 2004.

[5]. Problème de l'électricité, Y. Boudouane, Y. Ghrib, Y. Semara. OPU 1993.

[6]. Fundamentals of Physics Extended, 10th Edition, D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, 10th Edition 201