RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ YAHIA FARES DE MÉDÉA
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Recherche Opérationnelle

par

BRAHIMI Hakima

HAMDI Imene

GÉNÉRALISATIONS DES NOMBRES HYBRIDES

Le jury composé de

M^{me} GUETTAI Ghania	MCB	U.Y.F.M.	**Présidente**
M^{me} AIT-AMRANE N. Rosa	MCB	U.Y.F.M.	**Encadreur**
M^{me} BOULARIAH Fatiha	MAA	U.Y.F.M.	**Examinatrice**

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2021-2022

Remerciements

Avant tout nous remercions le tout puisant ALLAH *de nous avoir donner la force et le courage de nous avoir guidé en bonne santé afin d'étude. Nous tenson exprimer notre profonde gratitude et nos sincères remerciements à notre promoteur* M^{me} *Ait-Amrane Nacima Rosa, pour ses précieux conseils, ses encouragements et sa disponibilité tout au long de notre travail. Nous remercions tout particulièrement* M^{me}*BOULARIAH Fatiha, qui a éxaminé ce travail. Nos vifs remerciements vont également à* M^{me} *GUETTAI Ghania qui nous a fait l'honneur et le plaisir d'accepter de présider le jury. Nous tenons à remercier vivement tous ceux qui ont aidé, et tout le corps professoral de mathématiques et informatique.*

♡

Dédicace

.... Je dédie ce travail :

Á mes très chers parents : Ma Mère "Yamina" et Mon Père "Amar" qui m'ont soutenu durant les moments les plus pénibles de ce long chemin, qui ont sacrifié toute leur vie afin de me voir devenir ce que je suis, Maman je t'adore, Papa je t'adore.

Á Mes chers oncle et tante qui m'ont toujours encoragé

Je dédie ce travail à mes très chers frères "Sid-ali, Mohammed Redah, Chemss eddine"

Á Mes ptits cousins "Sifou, Farah, Anass, Moncif"

Á mon binôme "Imene", mon amie et ma sœur , que dieu te préserve.

Á tout mes chères amies "Bouchra, Imen, Nesrine....."

Ainsi que toute la promotion R.O. 2022

Á tous ceux qui, même un mot, m'ont donné la force de continuer. . .

★ ★ ★ **Hakima** ★ ★ ★

Dédicace

.... je dédie ce mémoire :

Á mes chères parents ma Mère et mon Père, qui n'ont jamais cessé de me soutenir et de m'encourager durant mes années d'études.

Á toute ma famille.

Je dédie ce travail à ma meilleure amie Hakima, qui a été mon soutien tout au long de mon parcours universitaire.
Á tous mes fidèles amies.

Á l'ensemble des étudiants de la promotion Master 2 R.O. 2022.

Sans oublier tout les professeurs que ce soit du primaire, du moyen, du secondaire ou de l'enseignement supérieur.

★ ★ ★ **Imene** ★ ★ ★

Notations générales

$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complex.
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels.
$\mathbb{H}$	ensembles des nombres hybrides.
$\mathbb{Z}$	ensembles des entiers.
$\mathbb{P}$	ensembles des nombres hyperboliques.
$\mathbb{D}$	ensembles des nombres duales.
$\mathbb{N}$	ensembles des nombres naturels.
$\mathbb{N}^*$	ensembles des nombres naturels non nuls.
$\|Z\|$	norme du nombre hybride Z.
$N(Z)$	norme du vecteur hybride Z.
$S(Z)$	partie scalaire d'un nombre hybride.
$V(Z)$	partie vectorielle d'un nombre hybride.
$F_{p,m}$	m-extension des p-nombres de Fibonacci.
$L_{p,m}$	m-extension des p-nombres de Lucas.
F_p	p-nombres de Fibonacci.
L_p	p-nombres de Lucas.
$\mathbb{H}F_{p,m}(n)$	p-nombres hybrides généralisés de Fibonacci.
$\mathbb{H}L_{p,m}(n)$	p-nombres hybrides généralisés de Lucas.
T_n	suite de Tribonacci.
K_n	suite de Tribonacci-Lucas.
$T_n(x)$	$n^{ème}$ polynôme de Tribonacci.
$K_n(x)$	$n^{ème}$ polynôme de Tribonacci-Lucas.
$\mathbb{H}T_n$	$n^{ème}$ nombre hybride de Tribonacci
$\mathbb{H}K_n$	$n^{ème}$ nombre hybride de Tribonacci-Lucas.
$\mathbb{H}T_n(x)$	hybrinomiaux de Tribonacci.
$\mathbb{H}K_n(x)$	hybrinomiaux de Tribonacci-Lucas.

Table des matières

Remerciements i

Dédicace ii

Dédicace iii

Notations générales iv

Résumé viii

Abstract ix

Introduction 1

1 Nombres hybrides 3

1.1 Les nombres hybrides . . . 3

1.1.1 Propriétés des nombres hybrides . . . 3

1.1.2 Représentations des nombres hybrides . . . 5

2 Suites récurrentes linéaires 9

2.1 Suite récurrente linéaire d'ordre p . . . 9

2.1.1 Polynôme caractéristique . . . 9

2.1.2 Formule de Binet . . . 10

2.1.3 Fonction génératrice . . . 10

2.1.4 Représentation matricielle . . . 10

2.2 m-Extension des p-nombres de Fibonacci et de Lucas . . . 11

2.2.1 Formules de Binet . . . 12

2.2.2 Fonctions génératrices . . . 13

2.2.3 Quelques propriétés des p-nombres de Fibonacci et de Lucas 13

3 p-Nombres hybrides généralisés de Fibonacci et de Lucas 15

3.1 p-Nombres hybrides généralisés de Fibonacci et de Lucas 15

3.1.1 Formules de Binet 16

3.1.2 Fonctions génératrices 18

3.1.3 Quelques propriétés des p-nombres hybrides généralisés de Fibonacci et de Lucas . . . 19

4 Polynômes de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas 23

4.1 Polynômes de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas 23

4.1.1 Formules de Binet 24

4.1.2 Fonctions génératrices 25

4.1.3 Quelques propriétés des polynômes de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas 26

5 Hybrinomiaux de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas 27

5.1 Hybrinomiaux de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas 27

5.1.1 Formules de Binet 29

5.1.2 Fonctions génératrices 30

5.1.3 Quelques propriétés des hybrinomiaux de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas 32

Table des figures

1.1 Coordonnées d'un nombre hybride 6

Liste des tableaux

1.1 Table de multiplication des nombres hybrides 4
1.2 Table de la représentation polaire 8

4.1 Les premiers polynômes de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas 24

Résumé

Les nombres hybrides sont la généralisation des nombres complexes, duaux et hyperboliques. De nombreux chercheurs ont étudié ces nombres. Dans ce mémoire, nous étudions les p-nombres hybrides généralisés de Fibonacci et de Lucas, ainsi que les hybrinômiaux de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas, en utilisant les p-nombres généralisés de Fibonacci, de Lucas, des polynômes de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas, respectivement. Nous donnons également des cas particuliers et des propriétés algébriques de ces nombres.

Mots clés : Nombres hybrides, p-nombres hybrides généralisés de Fibonacci, p-nombres hybrides généralisés de Lucas, Hybrinomiaux de Tribonacci, Hybrinomiaux de Tribonacci-Lucas.

Absract

The hybrid numbers are generalization of complex, dual and hyperbolic numbers. Many researchers have studied related to hybrid numbers. In this thesis, we stydy generalized hybrid Fibonacci and Lucas p-Numbers, in addition of the Tribonacci and Tribonacci-Lucas Hybrinomials, using the generalized Fibonacci and Lucas p-Numbers,Tribonacci and Tribonacci-Lucas polynomials, respectively.
Also we give some special caces and algebraic properties of these numbers.

Keywords : Hybrid numbers, generalized hybrid Fibonacci p-Numbers, generalized hybrid Lucas p-Numbers, Tribonacci hybrinomials, Tribonacci-Lucas hybrinomials.

Introduction Générale

En 2018, $\ddot{O}$zdemir a défini un nouveau système de numérotation non commutatif appelé nombres hybrides. Ce système de numération peut être concideré comme une généralisation des nombres complexes ($i^2 = -1$) , duaux ($\varepsilon^2 = 0$) et hyperboliques ($h^2 = 1$). Un nombre hybride est une combinaison lineaire des nombres complexes, duaux et hyperboliques.

Ces dernières années, beaucoup de chercheurs se sont intéréssé à l'étude de ces nouveaux nombres. Szynal-Liana et Wloch ont étudié les nombres hybrides de Fibonacci, et par la suite la généralisation aux nombres hybrides de Pell, Pell-Lucas et les nombres hybrides de Jacosthal et de Jacosthal-Lucas et ont obtenu plusieurs propriétés. Pour plus de details voir [20, 21, 22].
Ensuite, des nouvelles généralisations des nombres hybrides ont été introduites, appelées les Hybrinomiaux. Dans [23, 24] les auteurs ont introduit les hybrinômiaux de Pell, les hybrinomiaux de Fibonacci et de Lucas et hybrinomiaux généralisés de Fibonacci-Pell. En outre, Kizilateş a défini les hybrinomiaux de Horadam et a donné quelques cas particuliers de ces hybrinomiaux [7].

Le but de ce mémoire est de présenter quelques généralisations des nombres hybrides qui existent dans la littérature. Notre travail est réparti en cinq chapitres développés dans l'ordre suivant :

Dans le premier chapitre, nous abordons quelques définitions des nombres hybrides et leurs caractéristiques.

Dans le deuxième chapitre, nous rappelons des définitions et quelques propriétés des suites récurrences linéaires d'ordre p et nous étudions la m-extention des p-nombres de Fibonacci et de Lucas.

Dans le troisième chapitre, nous étudions les p-nombres hybrides généralisés de Fibonacci et de Lucas via les opérateurs $1, i, \varepsilon, h$ qui forment une base de l'espace des nombre hybrides $\mathbb{H}$.

Dans le quatrième chapitre, nous établissons quelques propriétés des polynômes de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude des hybrinomiaux de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas.

1

Nombres hybrides

Dans ce chapitre, nous définissons un nouveau système de nombres non commutatifs, appelé nombres hybrides et nous donnons quelques propriétés de ces nombres avec quelques classifications, de plus nous examinons les nombres hybrides selon leurs type et leurs caractère.

1.1 Les nombres hybrides

Dans cette section nous donnons quelques définitions, ainsi que quelques propriétés des nombres hybrides.

Dans [13], Özdemir a défini l'ensemble des nombres hybrides noté $\mathbb{H}$ qui contient des nombres complexes ($i^2 = -1$), duaux ($\varepsilon^2 = 0$) et hyperboliques ($h^2 = 1$). L'auteur a donné quelques théorèmes, propriétés et forme matricielle liés aux nombres hybrides. L'ensemble des nombres hybrides est défini comme suit :

$$\mathbb{H} = \{a + bi + c\varepsilon + dh : a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = -1, \varepsilon^2 = 0, h^2 = 1, ih = -hi = \varepsilon + i\}$$

Cet ensemble de nombres peut être concidéré comme un ensemble de quadruplet. Avec les unités réelles, complexes, duales et hyperboliques définies comme suit :

$$1 \leftrightarrow (1, 0, 0, 0), i \leftrightarrow (0, 1, 0, 0), \varepsilon \leftrightarrow (0, 0, 1, 0), h \leftrightarrow (0, 0, 0, 1)$$

Nous appellerons ces unités des unités hybrides.

Proposition 1.1.1 *Pour le nombre hybride $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$, le nombre réel a est appelé la partie scalaire et notée par $S(Z)$. La partie $bi + c\varepsilon + dh$ est aussi appelée partie vectorielle et notée par $V(Z)$.*

1.1.1 Propriétés des nombres hybrides

Opérations sur les nombres hybrides

Soient $Z_1 = a_1 + b_1 i + c_1 \varepsilon + d_1 h$ et $Z_2 = a_2 + b_2 i + c_2 \varepsilon + d_2 h$ deux nombres hybrides, on a :

1. $Z_1 = Z_2$, si et seulement si , $a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2$ (égalité).

2. $Z_1 + Z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)\varepsilon + (d_1 + d_2)h$ (addition).
3. $Z_1 - Z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i + (c_1 - c_2)\varepsilon + (d_1 - d_2)h$ (soustraction).
4. $sZ_1 = sa_1 + sb_1i + sc_1\varepsilon + sd_1h$ (multiplication par le scalaire $s \in \mathbb{R}$).

Le produit hybride s'obtient en répartissant les termes à droite, en préservant l'ordre de multiplication des unités puis en écrivant les valeurs des suivantes en remplaçant chaque produit d'unités par les égalités $i^2 = -1, \varepsilon^2 = 0, h^2 = 1, ih = -hi = \varepsilon + i$. A partir de ces égalités, nous pouvons obtenir le produit de deux unités hybrides quelconques. La table de multiplication de la base des nombres hybrides est la suivante :

$\curvearrowright$	1	i	ε	h
1	1	i	ε	h
i	i	-1	1 -h	ε+i
ε	ε	h+1	0	-ε
h	h	-ε-i	ε	1

TABLE 1.1: Table de multiplication des nombres hybrides

En conséquence, nous utiliserons cette table pour la multiplication de deux nombres hybrides. Ce tableau nous montre que l'opération de multiplication dans les nombres hybrides n'est pas commutatif. Mais il a la propriété d'associativité. Il n'est pas facile de se souvenir de ce tableau. De plus, non la commutativité rend la multiplication difficile. Nous allons rendre cette multiplication beaucoup plus facile à l'aide d'un isomorphisme, que nous identifierons plus tard en page 6 entre nombres hybrides et les matrices 2×2.

Norme et classification des nombres hybrides

Définition 1.1.1 *Le conjugué d'un nombre hybride $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$, noté $\bar{Z}$, est défini comme suit :*

$$\bar{Z} = S(Z) - V(Z) = a - bi - c\varepsilon - dh.$$

Propriétés

1. $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$ (Le conjugué de la somme des nombres hybrides).
2. $Z\overline{Z} = \overline{Z}Z = a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2$ (le produit hybride).
3. $Z_1Z_2 = \dfrac{Z_1\overline{Z_2} - Z_2\overline{Z_1}}{2} = a_1a_2 - b_1b_2 + d_1d_2 + b_1c_2 + c_1b_2 + (a_1b_2 + b_1a_2 + b_1d_2 - d_1b_2)i + (a_1c_2 + c_1a_2 + b_1d_2 - d_1b_2 + d_1c_2 - c_1d_2)\varepsilon + (a_1d_2 + d_1a_2 + c_1b_2 - b_1c_2)h.$ (produit vectoriel) pour plus de détailes voir [25].

Définition 1.1.2 *Pour le nombre hybride $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$, le vecteur*

$$V_Z = (a, (b - c), c, d)$$

est appelée la représentation vectorielle de Z. La deuxième composante de ce vecteur seront mieux compris dans les parties suivantes. Aussi, on peut écrire comme suit :

$$C(Z) = a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2 = \langle -V_Z, V_Z \rangle_{\mathbb{E}_2^4}$$

avec la signature (-, -, +, +) en $\mathbb{E}_2^4$. On dit qu'un nombre hybride Z est spacelike, timelike ou lightlike si $C(Z) < 0$, $C(Z) > 0$ ou $C(Z) = 0$ respectivement. On les appelle les caractères du nombre hybride Z. Le nombre réel $\sqrt{|C(Z)|}$ sera appelée la norme du nombre hybride Z et sera notée par $\|Z\|$.

Remarque 1.1.1 *Soit $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ un nombre hybride. Selon la définition de la norme d'un nombre hybride on a*

$$\|Z\| = \sqrt{|Z\overline{Z}|} = \sqrt{|C(Z)|} = \sqrt{|a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2|}$$

Cette définition de la norme est une norme généralisée qui regroupe les définitions des normes dans les nombres complexes, duaux et hyperboliques. En effet,

1. *Si Z est un nombre complexe, alors $\|Z\| = \sqrt{|Z\overline{Z}|} = \sqrt{a^2 + b^2}$, telle que $c = d = 0$.*
2. *Si Z est hyperbolique alors $\|Z\| = \sqrt{|Z\overline{Z}|} = \sqrt{|a^2 - d^2|}$, telle que $b = c = 0$.*
3. *Si Z est dual alors $\|Z\| = \sqrt{a^2} = |a|$, telle que $b = d = 0$.*
4. *l'inverse du nombre hybride $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ et $\|Z\| \neq 0$. est défini par : $Z^{-1} = \dfrac{\overline{Z}}{C(Z)}$.*

Définition 1.1.3 *Pour le nombre hybride $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$, le vecteur $\xi_Z = ((b-c), c, d)$ est appelé le vecteur hybride du nombre de Z et ce vecteur sera aussi pris comme vecteur de Minkowski 3-espace $\mathbb{E}_1^3$. Il peut être écrit comme suit :*

$$C_\xi(Z) = -(b-c)^2 + c^2 + d^2 = \langle -\xi_Z, \xi_Z \rangle_{\mathbb{E}_1^3}$$

Ainsi, on dit qu'un nombre hybride Z est elliptique, hyperbolique ou parabolique, si $C_\xi(Z) < 0$, $C_\xi(Z) > 0$ ou $C_\xi(Z) = 0$ respectivement. On les appelle les types du nombre hybride Z. Le nombre réel $\sqrt{|C_\xi(Z)|}$ sera appelée la norme du vecteur hybride de Z et sera noté $N(Z)$.

1.1.2 Représentations des nombres hybrides

Dans cette section, nous exprimerons la représentation dans le plan, les représentations matricielles et polaires des nombres hybrides selon leurs caractères et leurs types. Ces représentations sont importantes notamment pour prouver la formule de Binet et pour trouver les racines des nombres hybrides.

Représentation des nombres hybrides dans le plan

Tout nombre hybride peut être représente dans le plan $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

Théorème 1.1.1 *Tout nombre hybride peut être affiché dans un système de coordonnées à deux dimensions comme le système de coordonnées cartésien.*

Preuve: voir [13] ■

Définition 1.1.4 *les coordonnées hybrides d'un nombre hybride, on écrit comme ceci :*

$$Z = a + bi + c\varepsilon + dh = x + yV,$$

sont désignés par :

$$Z = (x; y) = (a; N(Z)) = (a; \sqrt{|-(b-c)^2 + c^2 + d^2|}),$$

On représente le nombre hybride dans le plan suivant :

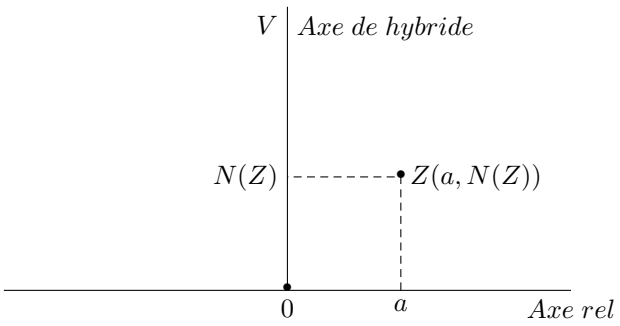


FIGURE 1.1: Coordonnées d'un nombre hybride

tel que : l'axe des X représente le nombre réel a, et l'axe des Y représente la norme du vecteur hybride $N(Z)$.

Exemple 1.1.1 *Les coordonnées du nombre hybride $Z = 1 + 3i + 1\varepsilon + 1h$ sont $Z = (a; N(Z))$ tel que : $a = 1, \quad N(Z) = \sqrt{2}$, où l'axe hybride est formé par le vecteur hybride unitaire*

$$V = \frac{3i + 1\varepsilon + 1h}{\sqrt{2}}.$$

Représentation matricielle des nombres hybrides

En revanche, les nombres hybrides peuvent également être défini en considérant la représentation matricielle. on peut classer les nombres hybrides, en ce qui concerne le déterminant de la matrice (2×2) correspondante. Une représentation matricielle d'un nombre hybride est particulièrement importante pour faciliter la multiplication des nombres hybrides, en définissant la symétrie entre les matrices et les nombres mixtes, nous pouvons facilement multiplier les nombres hybrides et prouver plusieurs de ses caractéristiques.

Théorème 1.1.2 *L'anneau des nombres hybrides $\mathbb{H}$ est isomorphe à l'anneau des nombres réels 2×2 matrices $\mathbb{M}_{2\times 2}$.*

Preuve: Définissons l'application $\varphi : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{M}_{2\times 2}$ où

$$\varphi(a + bi + c\varepsilon + dh) = \begin{bmatrix} a + c & b - c + d \\ c - b + d & a - c \end{bmatrix}$$

pour $Z = a + bi + c\varepsilon + dh \in \mathbb{H}$. Nous allons montrer que cette application est un isomorphisme en anneau. En tenant compte de la table des opérations d'addition et de multiplication définie pour les nombres hybrides précédents, on voit facilement que les égalités

$$\varphi(Z_1 Z_2) = \varphi(Z_1)\varphi(Z_2)$$

$$\varphi(Z_1 + Z_2) = \varphi(Z_1) + \varphi(Z_2)$$

sont satisfait. Voyons maintenant que φ est bijectif. Si

$$\varphi(Z_1) = \varphi(Z_2)$$

pour $Z_1 = a_1 + b_1 i + c_1\varepsilon + d_1 h$ et $Z2 = a_2 + b_2 i + c_2\varepsilon + d_2 h$, alors l'égalité des deux matrices aboutit à ce que $c_1 = c_2, a_1 = a_2, b_1 = b_2, d_1 = d_2$. Ce est $Z_1 = Z_2$ et φ est injective. D'autre part, pour toute matrice réelle 2 par 2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

il y a un nombre hybride

$$Z = \left(\frac{a+d}{2}\right) + \left(\frac{a+b-c-d}{2}\right) i + \left(\frac{a-d}{2}\right) \varepsilon + \left(\frac{b+c}{2}\right) h$$

où $\varphi(Z) = A$. Ainsi, φ est un isomorphisme en anneau. ■

Définition 1.1.5 *La matrice $\varphi(Z) \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ est appelée matrice hybride correspondant au nombre hybride Z. D'après l'isomorphisme ci-dessus, on a les représentations matricielles*

$$\varphi(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \varphi(i) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varphi(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \varphi(h) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ces quatre matrices forment une base pour l'espace vectoriel des matrices 2×2. Alors, chaque matrice 2×2 peut être écrit comme un composé de nombres unitaires, complexes, duaux et hyperboliques. Notez que nous utiliserons la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

au lieu de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ pour l'unité duale ε, contrairement à la littérature. A l'aide de ces quatre matrices, la multiplication des nombres hybrides décrits ci-dessus, peuvent également être facilement manipulés. Par exemple,

en utilisant l'égalités

$$\begin{aligned}\varphi(ih) = \varphi(i)\varphi(h) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \varphi(\varepsilon) + \varphi(i) \\ &= \varphi(\varepsilon + i)\end{aligned}$$

on a $ih = \varepsilon + i$. *Ainsi, nous pouvons facilement faire des opérations et des calculs dans les nombres hybrides utilisant les matrices correspondantes*

$$1 \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Représentation polaire des nombres hybrides

La représentation polaire d'un nombre hybride dépend du type du vecteur hybride et du caractère . Compte tenu de ces conditions, nous avons résumé la représentation polaire des nombres hybrides dans le tableau suivant avec les données de [13] :

Caractère du nombre hybride	Forme polaire	Conditions
elliptique	$Z = \cos\theta + V\sin\theta$	$V = \frac{bi+c\varepsilon+dh}{N(Z)}$, $\cos\theta = \frac{a}{\|Z\|}$, $\sin\theta = \frac{N(Z)}{\|Z\|}$, $V^2 = -1$.
hyperbolique de type spacelike	$Z = \sinh\theta + V\cosh\theta$	$V = \frac{bi+c\varepsilon+dh}{N(Z)}$, $\cos\theta = \frac{N(Z)}{\|Z\|}$, $\sin\theta = \frac{a}{\|Z\|}$, $V^2 = 1$.
parabolique	$Z = \epsilon + V$	$V = \frac{bi+c\varepsilon+dh}{N(Z)}$, $\epsilon = sgn(S(Z))$, $V^2 = 0$.
hyperbolique de type lightlike	$Z = a(1+V)$	$V = \frac{bi+c\varepsilon+dh}{N(Z)}$, $V^2 = 1$.
hyperbolique de type timelike	$Z = \pm(\cos\theta + V\sin\theta)$	$V = \frac{bi+c\varepsilon+dh}{N(Z)}$, $\cos\theta = \frac{a}{\|Z\|}$, $\sin\theta = \frac{N(Z)}{\|Z\|}$, $V^2 = 1$.

TABLE 1.2: Table de la représentation polaire

2

Suites récurrentes linéaires

Dans ce chapitre, on étudie quelques propriétés des suites récurrentes linéaires d'ordre p, à coefficients constants, nous donnons la forme explicite de deux manières différentes, la première par la formule de Binet et la deuxième par la fonction génératrice. Ensuite, on étudie la m-extention des p-nombres de Fibonacci et de Lucas donnant quelques propriétés de ses suites.

2.1 Suite récurrente linéaire d'ordre p

Définition 2.1.1 *On appelle suite récurrente linéaire d'ordre p, toute suite à valeurs dans un corps commutatif $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), définie pour tout $n \geq p$ par une relation de récurrence linéaire de la forme :*

$$u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + a_2 u_{n+2} + ... + a_{p-1} u_{n+p-1}, \quad n \geq p, \tag{2.1}$$

où $a_0, a_1, ..., a_{p-1}$ sont p scalaires fixés dans $\mathbb{K}$.

2.1.1 Polynôme caractéristique

L'étude des suites récurrentes linéaires d'ordre supérieur se ramène à un problème d'algèbre linéaire, l'expression du terme général d'une telle suite est possible pour peu qu'on soit capable de factoriser un polynôme qui lui est associé, appelé polynôme caractéristique. Le polynôme caractéristique associé à une suite vérifiant la relation de récurrence ci-dessus est :

$$P(X) = X^p - \sum_{i=0}^{p-1} a_i X^i = X^p - a_{p-1}X^{p-1} - a_{p-2}X^{p-2} - ... - a_1 X - a_0. \tag{2.2}$$

Ce polynôme admet p racines dans $\mathbb{C}$.

On écrite l'équation caractéristique de (2.1) comme suite :

$$X^p - a_{p-1}X^{p-1} - a_{p-2}X^{p-2} - ... - a_1 X - a_0.$$

De ce polynôme caractéristique on dérive l'équation caractéristique.

2.1.2 Formule de Binet

La formule de Binet est une formule explicite qui s'écrit en fonction des racines de l'équation caractéristique associée à la relation de récurrence.

Définition 2.1.2 *Si le polynôme caractéristique d'une suite récurrente linéaire vérifiant (2.1) admet p racines distinctes $\lambda_1, ..., \lambda_p$, alors : les suites qui vérifient la relation de récurrence (2.1) sont les suites définies par :*

$$u_n = c_1\lambda_1^p + ... + c_p\lambda_p^n. \tag{2.3}$$

La formule (2.3) est appelée la formule de Binet de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ et les coefficients $c_1, ..., c_n$ sont déterminés par les p premières valeurs $u_0, ..., u_{p-1}$ de la suite, tels que :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 + ... + c_P = u_0 \\ c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + ... + c_P\lambda_P = u_1 \\ \vdots \\ c_1\lambda_1^{p-1} + c_2\lambda_2^{p-1} + ... + c_p\lambda_p^{p-1} = u_{p-1}. \end{cases} \tag{2.4}$$

2.1.3 Fonction génératrice

Définition 2.1.3 *La fonction génératrice ordinaire d'une suite récurrente linéaire homogène $(u_n)_{n\geq 0}$ de la forme :*

$$u_{n+p} = a_0u_n + a_1u_{n+1} + a_2u_{n+2} + ... + a_{p-1}u_{n+p-1}, \quad n \geq p.$$

par la définition on a :

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

donc

$$G(x) = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n x^{p+n} - a_0u_0}{x^p - \sum\limits_{i=0}^{p-1} a_i x^i}.$$

2.1.4 Représentation matricielle

On peut associer à chaque suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par la relation (2.1) la représentation matricielle suivante :

$$U_{n+1} = AU_n, \quad n \geq 0, \tag{2.5}$$

où $U_n \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ *et* $A \in \mathcal{M}_{p\times p}(\mathbb{K})$, sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ldots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \ldots & \ldots & a_{p-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}.$$

La matrice A est appelée matrice compagnon du polynôme caractéristique $P(X)$ de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$, ou bien, matrice compagnon de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$, et le polynôme $P(X)$ est le polynôme caractéristique de la matrice A.

On obtient le terme général de l'écriture matricielle par récurrence

$$U_n = A^n U_0, \quad n \in \mathbb{N}^*, \tag{2.6}$$

où

$$U_0 = \begin{pmatrix} u_n \\ u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{p-1} \end{pmatrix}.$$

Le calcule de la puissance $n^{ème}$ de la matrice A n'est pas facile en générale. Si la matrice A est diagonalisable, i.e :
s'il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

alors

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

2.2 m-Extension des p-nombres de Fibonacci et de Lucas

Maintenant, nous allons donner des définitions et quelques propriétés de la m-extension des p-nombres de Fibonacci et de Lucas. Pour un entier donné $p \geq 0$, $n > p$ et un nombre réel positif $m > 0$, la m-extension des p-nombres de Fibonacci est définie par la relation de récurrence suivante :

$$F_{p,m}(n) = mF_{p,m}(n-1) + F_{p,m}(n-p-1), \qquad n > p \tag{2.7}$$

avec les conditions initiales $F_{p,m}(0) = 0, F_{p,m}(n) = m^{n-1}$ pour $n = 1, 2, ..., p+1$.
De même, la m-extension des p-nombres de Lucas est définie par la relation de récurrence suivante :

$$L_{p,m}(n) = mL_{p,m}(n-1) + L_{p,m}(n-p-1), \qquad n > p \tag{2.8}$$

avec les conditions initiales $L_{p,m}(0) = p+1, L_{p,m}(n) = m^n$ pour $n = 1, 2, ..., p$.
Pour différentes valeurs de m et p, les relations récursives génèrent différentes suites numériques. Certains cas des p-nombres de Fibonacci et de Lucas sont les suivants :

1. pour m = p = 1, $F_{p,m}(n)$ et $L_{p,m}(n)$ se réduisent aux nombres classiques de Fibonacci et de Lucas.
2. pour m = 2 and p = 1, $F_{p,m}(n)$ et $L_{p,m}(n)$ se réduisent aux nombres de Pell et Pell-Lucas.
3. pour m = k and p = 1, $F_{p,m}(n)$ et $L_{p,m}(n)$ se réduisent aux nombres k- Fibonacci et k-Lucas.
4. pour m = 1, $F_{p,m}(n)$ et $L_{p,m}(n)$ se réduisent aux p-nombres de Fibonacci et Lucas classiques.
5. pour m = 2 , $F_{p,m}(n)$ et $L_{p,m}(n)$ se réduisent aux p- nombres de Pell et Pell-Lucas classiques.

Pour plus d'informations sur la relation avec ces suites de nombres, veuillez vous référer à [2, 9, 12, 19].

2.2.1 Formules de Binet

Théorème 2.2.1 *Pour un entier donné $p > 0$, les formules de Binet de la m-extension des p-nombres de Fibonacci et la m-extension des p-nombres de Lucas sont données sous la forme :*

$$F_{p,m}(n) = k_1(x_1)^n + k_2(x_2)^n + \ldots + k_{p+1}(x_{p+1})^n \tag{2.9}$$

$$L_{p,m}(n) = (x_1)^n + (x_2)^n + \ldots + (x_{p+1})^n \tag{2.10}$$

respectivement, où $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$ sont les racines de l'équation caractéristique

$$x^{p+1} - x^p - 1 = 0$$

et $k_1, k_2, \ldots, k_{p+1}$ sont des coefficients constants qui dépendent des termes initiaux de la m-extension des p-nombres de Fibonacci.

Remarque 2.2.2 *Pour le cas $n = 0$, on réécrit la formule (2.10)*

$$L_{p,m}(0) = (x_1)^0 + (x_2)^0 + \ldots + (x_{p+1})^0 = 1 + 1 + \ldots + 1 = p + 1$$

- Dans la suite on pose $m = 1$

Définition 2.2.1 *Pour un entier donné $p \geq 0$, $n > p$, les p-nombres de Fibonacci sont définis par la relation de récurrence suivante :*

$$F_p(n) = F_p(n-1) + F_p(n-p-1)$$

avec les conditions initiales $F_p(0) = 0, F_p(1) = ... = F_p(p) = 1$ pour $n = 1, 2, ..., p+1$.
De même, les p-nombres de Lucas sont définis par la relation de récurrence suivante :

$$L_p(n) = L_p(n-1) + L_p(n-p-1)$$

avec les conditions initiales $L_p(0) = p+1, L_p(1) = ... = L_p(p) = 1$ pour $n = 1, 2, ..., p$.

2.2.2 Fonctions génératrices

Théorème 2.2.3 *Les fonctions génératrices des p-nombres de Fibonacci et de Lucas sont*

$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_p(n)t^n = \frac{t}{1-t-t^{p+1}} \tag{2.11}$$

et

$$H(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_p(n)t^n = \frac{1+p(1-t)}{1-t-t^{p+1}}, \tag{2.12}$$

respectivement.

2.2.3 Quelques propriétés des p-nombres de Fibonacci et de Lucas

Dans le théorème suivant nous donnons quelques relations entre les p-nombres de Fibonacci et de Lucas.

Théorème 2.2.4 *Les relations suivantes entre les p-nombres de Fibonacci et de Lucas sont introduit*

1. $L_p(n) = F_p(n+1) + pF_p(n-p)$.
2. $\sum_{n=0}^{k} F_p(n)L_p(k-n) = (k+p)F_p(k)$.

Preuve: 1. En utilisant les fonctions génératrices des p-nombres de Lucas,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} L_p(n)t^n &= \frac{1+p(1-t)}{1-t-t^{p+1}} = (p+1)\frac{1}{1-t-t^{p+1}} - p\frac{t}{1-t-t^{p+1}} = (p+1)\sum_{n=0}^{\infty} F_p(n)t^n - p\sum_{n=0}^{\infty} F_p(n)t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(p+1)F_p(n)t^n - pF_p(n)t^n\right] t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(p+1)(F_p(n)t^n + F_p(n-p)) - pF_p(n)\right] t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[F_p(n+1) + pF_p(n-p)\right] t^n.\end{aligned}$$

2. Voir [29]. ■

Dans le théorème suivant nous donnons quelques formules de sommation des p-nombres de Fibonacci et de Lucas

Théorème 2.2.5 *Les p-nombres de Fibonacci et de Lucas vérifent les formules de sommation suivantes :*

$$\sum_{n=0}^{k} F_p(n) = F_p(k+p+1) - F_p(p)$$

et

$$\sum_{n=0}^{k} L_p(n) = L_p(k+p+1) - L_p(p).$$

Preuve: En utilisant les relations de récurrence des p-nombres de Fibonacci, nous avons

$$F_p(n+p) = F_p(n+p+1) - F_p(n).$$

Ensuite nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{k} F_p(n+p) &= \sum_{n=0}^{k} F_p(n+p+1) - \sum_{n=0}^{k} F_p(n) \\ &= \sum_{n=0}^{k} F_p(n) + \sum_{n=0}^{k+p} F_p(n) - \sum_{n=0}^{p-1} F_p(n) \\ &= \sum_{n=0}^{k} F_p(n) + \sum_{n=0}^{p-1} [F_p(n+k+1) - F_p(n)]\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{k} F_p(n+p+1) &= F_p(k+p+1) - F_p(p) + \sum_{n=0}^{k} F_p(n) + \sum_{n=0}^{k+p} F_p(n) - \sum_{n=0}^{p-1} F_p(n) \\ &= F_p(k+p+1) - F_p(p) + \sum_{n=0}^{k} F_p(n) + \sum_{n=0}^{k} [F_p(n+k+1) - F_p(n)] .\end{aligned}$$

On obtient

$$\sum_{n=0}^{k} F_p(n) = F_p(k+p+1) - F_p(p).$$

■

Dans le théorème suivant nous citons la Formule de Honsberger généralisée des p-nombre de Fibonacci

Théorème 2.2.6 *Soit $F_p(n)$ le $n^{ème}$ p-nombre de Fibonacci généralisé ,on a*

$$F_p(k+n) = F_p(k)F_p(n+1) + \sum_{n=0}^{p} F_p(k-t)F_p(n-p+t),$$

où k, n sont des entiers positifs.

Preuve: Voir[29] ■

3

p-Nombres hybrides généralisés de Fibonacci et de Lucas

Dans ce chapitre, nous définissons les p-nombres hybrides généralisés de Fibonacci et de Lucas. Ensuite, nous donnons quelques cas particuliers de p-nombres hybrides généralisés de Fibonacci et de Lucas tels que les nombres hybrides de Fibonacci et de Lucas, les nombres hybrides de Pell et de Pell-Lucas, les nombres hybrides k-Fibonacci et k-Lucas, les p-nombres de Fibonacci et de Lucas, les p-nombres hybrides de Pell et de Pell-Lucas. Enfin, on obtient leurs fonctions génératrices, quelques formules de sommation et certaines propriétés.

3.1 p-Nombres hybrides généralisés de Fibonacci et de Lucas

Définition 3.1.1 *Pour $p > 0$ et $n \geq p$, les $n^{èmes}$ p-nombres hybrides généralisés de Fibonacci et de Lucas sont définis par*

$$\mathbb{H}F_{p,m}(n) = F_{p,m}(n) + F_{p,m}(n+1)i + F_{p,m}(n+2)\varepsilon + F_{p,m}(n+3)h \tag{3.1}$$

et

$$\mathbb{H}L_{p,m}(n) = L_{p,m}(n) + L_{p,m}(n+1)i + L_{p,m}(n+2)\varepsilon + L_{p,m}(n+3)h, \tag{3.2}$$

respectivement.
Certains cas particuliers de p-nombres hybrides généralisés de Fibonacci et de Lucas sont les suivants

1. *Pour $m = 1$, les p-nombres hybrides généralisés de Fibonacci et de Lucas $\mathbb{H}F_{p,m}(n)$ et $\mathbb{H}L_{p,m}(n)$, respectivement deviennent les $\mathbb{H}F_p(n)$ p-nombres hybrides de Fibonacci et $\mathbb{H}L_p(n)$ p-nombres hybrides de Lucas.*
2. *Pour $m = 2$, les p-nombres hybrides généralisés de Fibonacci et de Lucas $\mathbb{H}F_{p,m}(n)$ et $\mathbb{H}L_{p,m}(n)$, respectivement deviennent les p-nombres hybrides de Pell $\mathbb{H}P_p(n)$ et les p-nombres hybrides de Pell-Lucas $\mathbb{H}Q_p(n)$.*
3. *Pour $m = p = 1$, les p-nombres hybrides généralisés de Fibonacci et de Lucas $\mathbb{H}F_{p,m}(n)$ et $\mathbb{H}L_{p,m}(n)$, respectivement deviennent les nombres hybride de Fibonacci $\mathbb{H}F_n$ et les nombres hybride de Lucas $\mathbb{H}L_n$.*
4. *Pour $m = 2$ et $p = 1$, les p-nombres hybrides généralisés de Fibonacci et de Lucas $\mathbb{H}F_{p,m}(n)$ et $\mathbb{H}L_{p,m}(n)$, respectivement deviennent les nombres hybrides de Pell $\mathbb{H}P_n$ et les nombres hybrides de Pell-Lucas $\mathbb{H}Q_n$.*

5. *Pour $p = 1$ et k au lieu de m, les p-nombres hybrides généralisés de Fibonacci et de Lucas $\mathbb{H}F_{p,m}(n)$ et $\mathbb{H}L_{p,m}(n)$, respectivement deviennent les nombres hybrides k-Fibonacci et les nombres hybrides k-Lucas.*

A partir des relations de récurrence (2.6) et (3.1), on obtient que pour $n > p$,

$$\begin{aligned}\mathbb{H}F_{p,m}(n) &= F_{p,m}(n) + F_{p,m}(n+1)i + F_{p,m}(n+2)\varepsilon + F_{p,m}(n+3)h \\ &= (mF_{p,m}(n-1) + F_{p,m}(n-p-1)) \\ &+ (mF_{p,m}(n) + F_{p,m}(n-p))i \\ &+ (mF_{p,m}(n+1) + F_{p,m}(n-p+1))\varepsilon \\ &+ (mF_{p,m}(n+2) + F_{p,m}(n-p+2))h \\ &= m\mathbb{H}F_{p,m}(n-1) + \mathbb{H}F_{p,m}(n-p-1).\end{aligned}$$

Ainsi, pour $n > p$, la relation de récurrence des p-nombres hybrides généralisés de Fibonacci est donnée par :

$$\mathbb{H}F_{p,m}(n) = m\mathbb{H}F_{p,m}(n-1) + \mathbb{H}F_{p,m}(n-p-1). \tag{3.3}$$

De même, nous pouvons obtenir la relation de récurrence des p-nombres hybrides généralisés de Lucas comme étant :

$$\mathbb{H}L_{p,m}(n) = m\mathbb{H}L_{p,m}(n-1) + \mathbb{H}L_{p,m}(n-p-1). \tag{3.4}$$

En prenant $m = 1$ dans (3.3) et (3.4), nous déduisons les relations de récurrence des p-nombres hybrides de Fibonacci et Lucas ; pour $n > p$

$$\mathbb{H}F_p(n) = \mathbb{H}F_p(n-1) + \mathbb{H}F_p(n-p-1)$$

et

$$\mathbb{H}L_p(n) = \mathbb{H}L_p(n-1) + \mathbb{H}L_p(n-p-1),$$

respectivement.

3.1.1 Formules de Binet

Théorème 3.1.1 *Pour un entier donné $p > 0$, et $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$ les racines de l'équation caractéristique $x^{p+1} - x^p - 1 = 0$. Alors les formules de Binet des p-Nombres hybrides généralisés de Fibonacci et de Lucas sont données par :*

$$\mathbb{H}F_{p,m}(n) = k_1\hat{x}_1(x_1)^n + k_2\hat{x}_2(x_2)^n + \ldots + k_{p+1}\hat{x}_{p+1}(x_{p+1})^n \tag{3.5}$$

et

$$\mathbb{H}L_{p,m}(n) = \hat{x}_1(x_1)^n + \hat{x}_2(x_2)^n + \ldots + \hat{x}_{p+1}(x_{p+1})^n, \tag{3.6}$$

respectivement, avec $k_1, k_2, \ldots, k_{p+1}$ sont des coefficients constants qui dépendent des termes initiaux de la m-extension des p-nombres de Fibonacci.

et

$$\begin{aligned}
\hat{x}_1 &= 1 + ix_1 + \varepsilon x_1^2 + hx_1^3,\\
\hat{x}_2 &= 1 + ix_2 + \varepsilon x_2^2 + hx_2^3,\\
&\vdots\\
\hat{x}_{p+1} &= 1 + ix_{p+1} + \varepsilon x_{p+1}^2 + hx_{p+1}^3.
\end{aligned}$$

Preuve: En considerant la formule de Binet de la m-extension des p-nombres de Fibonacci (2.9), on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}F_{p,m}(n) &= F_{p,m}(n) + iF_{p,m}(n+1) + \varepsilon F_{p,m}(n+2) + hF_{p,m}(n+2)\\
&= k_1(x_1)^n + k_2(x_2)^n + \ldots + k_{p+1}(x_{p+1})^n\\
&+ i\left(k_1(x_1)^{n+1} + k_2(x_2)^{n+1} + \ldots + k_{p+1}(x_{p+1})^{n+1}\right)\\
&+ \varepsilon\left(k_1(x_1)^{n+2} + k_2(x_2)^{n+2} + \ldots + k_{p+1}(x_{p+1})^{n+2}\right)\\
&+ h\left(k_1(x_1)^{n+3} + k_2(x_2)^{n+3} + \ldots + k_{p+1}(x_{p+1})^{n+3}\right)\\
&= k_1(x_1)^n\left(1 + ix_1 + \varepsilon x_1^2 + hx_1^3\right) + k_2(x_2)^n\left(1 + ix_2 + \varepsilon x_2^2 + hx_2^3\right)\\
&+ \ldots + k_{p+1}(x_{p+1})^n\left(1 + ix_{p+1} + \varepsilon x_{p+1}^2 + hx_{p+1}^3\right)\\
&= k_1\hat{x}_1(x_1)^n + k_2\hat{x}_2(x_2)^n + \ldots + k_{p+1}\hat{x}_{p+1}(x_{p+1})^n.
\end{aligned}$$

En considerant la formule de Binet de la m-extension des p-nombres de Lucas (2.10), on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}L_{p,m}(n) &= L_{p,m}(n) + L_{p,m}(n+1)i + L_{p,m}(n+2)\varepsilon + L_{p,m}(n+3)h\\
&= (x_1)^n + (x_2)^n + \ldots + (x_{p+1})^n\\
&+ i\left((x_1)^n + (x_2)^n + \ldots + (x_{p+1})^n\right)\\
&+ \varepsilon\left((x_1)^n + (x_2)^n + \ldots + (x_{p+1})^n\right)\\
&+ h\left((x_1)^n + (x_2)^n + \ldots + (x_{p+1})^n\right)\\
&= (x_1)^n\left(1 + ix_1 + \varepsilon x_1^2 + hx_1^3\right) + (x_2)^n\left(1 + ix_2 + \varepsilon x_2^2 + hx_2^3\right)\\
&+ \ldots + (x_{p+1})^n\left(1 + ix_{p+1} + \varepsilon x_{p+1}^2 + hx_{p+1}^3\right)\\
&= \hat{x}_1(x_1)^n + \hat{x}_2(x_2)^n + \ldots + \hat{x}_{p+1}(x_{p+1})^n,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\hat{x}_1 &= 1 + ix_1 + \varepsilon x_1^2 + hx_1^3,\\
\hat{x}_2 &= 1 + ix_2 + \varepsilon x_2^2 + hx_2^3,\\
&\vdots\\
\hat{x}_{p+1} &= 1 + ix_{p+1} + \varepsilon x_{p+1}^2 + hx_{p+1}^3.
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. ■

3.1.2 Fonctions génératrices

Théorème 3.1.2 *Pour un entier donné $p \geq 1$, les fonctions génératrices des p-nombres hybrides généralisés de Fibonacci et de Lucas sont données par*

$$g(t) = \frac{\mathbb{H}F_{p,m}(0) + t + t^p(\varepsilon + mh)}{1 - mt - t^{p+1}} \tag{3.7}$$

et

$$h(t) = \frac{\left[\mathbb{H}L_{p,m}(0) - mpt + ((p+1)h)t^{p-2} + ((p+1)\varepsilon + mh)t^{p-1} + ((p+1)i + m\varepsilon + m^2h)t^p\right]}{1 - mt - t^{p+1}}, \tag{3.8}$$

respectivement.

Preuve: Nous commençons par la représentation formelle en séries de puissances de la fonction génératrice pour $(\mathbb{H}F_{p,m}(n))_{n\geq 0}$, on pose :

$$g(t) = \mathbb{H}F_{p,m}(n) + \mathbb{H}F_{p,m}(1)t + \ldots + \mathbb{H}F_{p,m}(p)t^p + \ldots \tag{3.9}$$

ainsi

$$mtg(t) = m\mathbb{H}F_{p,m}(0)t + m\mathbb{H}F_{p,m}(1)t^2 + \ldots + \mathbb{H}F_{p,m}(p)t^{p+1} + \ldots \tag{3.10}$$

et

$$t^{p+1}g(t) = \mathbb{H}F_{p,m}(0)t^{p+1} + \mathbb{H}F_{p,m}(1)t^{p+2} + \ldots + \mathbb{H}F_{p,m}(p)t^{2p+1} + \ldots. \tag{3.11}$$

D'après les équation (3.9), (3.10) et (3.11), on trouve que

$$\begin{aligned}(1 - mt - t^{p+1})g(t) = {} & \mathbb{H}F_{p,m}(0) + (\mathbb{H}F_{p,m}(1) - m\mathbb{H}F_{p,m}(0))t \\ & + (\mathbb{H}F_{p,m}(2) - \mathbb{H}F_{p,m}(1))t^2 \\ & + (\mathbb{H}F_{p,m}(3) - \mathbb{H}F_{p,m}(2))t^2 \\ & + \ldots + (\mathbb{H}F_{p,m}(p) - m\mathbb{H}F_{p,m}(p-1))t^p \\ & + (\mathbb{H}F_{p,m}(p+1) - m\mathbb{H}F_{p,m}(p) - \mathbb{H}F_{p,m}(0))t^{p+1} + \ldots.\end{aligned}$$

En utilisant (3.3), on a

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{p,m}(n)t^n = \frac{\mathbb{H}F_{p,m}(0) + t + t^{p-1}h + t^p(\varepsilon + mh)}{1 - mt - t^{p+1}}.$$

De même, pour $p > 1$, nous pouvons obtenir la fonction génératrice des p-nombres hybrides généralisés de Lucas comme suit :

$$h(t) = \frac{\left[\mathbb{H}L_{p,m}(0) - mpt + ((p+1)h)t^{p-2} + ((p+1)\varepsilon + mh)t^{p-1} + ((p+1)i + m\varepsilon + m^2h)t^p\right]}{1 - mt - t^{p+1}}.$$

■

En prenant $m = p = 1$ dans (3.7), nous donnons la fonction génératrice des nombres hybrides de Fibonacci dans le corollaire suivant.

Corollaire 3.1.1 *La fonction génératrice des nombres hybrides de Fibonacci est*

$$g(t) = \frac{(i + \varepsilon + 2h) + (1 + \varepsilon + h)t}{1 - t - t^2}.$$

3.1.3 Quelques propriétés des p-nombres hybrides généralisés de Fibonacci et de Lucas

Dans cette section, nous donnons la Formule de Honsberger généralisée, quelques formules de sommation et une relation entre les p-nombres hybrides généralisés de Fibonacci et Lucas. De plus, nous dérivons la représentation matricielle des p-nombres hybrides généralisés de Fibonacci et la Formule de Cassini généralisée.

Théorème 3.1.3 *(Formule de Honsberger généralisée) Soient $F_{p,m}(n)$ et $\mathbb{H}F_{p,m}(n)$ les $n^{èmes}$ p-nombres généralisés de Fibonacci et les p-nombres hybrides généralisés de Fibonacci, respectivement on a*

$$\mathbb{H}F_{p,m}(k+n) = F_{p,m}(k)\mathbb{H}F_{p,m}(n+1) + \sum_{t=0}^{p} F_{p,m}(k-t)\mathbb{H}F_{p,m}(n-p+t),$$

où k, n sont des entiers positifs.

Preuve: D'après (3.1), on donne

$$\mathbb{H}F_{p,m}(k+n) = F_{p,m}(k+n) + F_{p,m}(k+n+1)i + F_{p,m}(k+n+2)\varepsilon + F_{p,m}(k+n+3)h,$$

on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}F_{p,m}(k+n) = &\left(F_{p,m}(k)F_{p,m}(n+1) + \sum_{t=0}^{p} F_{p,m}(k-t)F_{p,m}(n-p+t)\right) \\
&+ i\left(F_{p,m}(k)F_{p,m}(n+2) + \sum_{t=0}^{p} F_{p,m}(k-t)F_{p,m}(n-p+t+1)\right) \\
&+ \varepsilon\left(F_{p,m}(k)F_{p,m}(n+3) + \sum_{t=0}^{p} F_{p,m}(k-t)F_{p,m}(n-p+t+2)\right) \\
&+ h\left(F_{p,m}(k)F_{p,m}(n+4) + \sum_{t=0}^{p} F_{p,m}(k-t)F_{p,m}(n-p+t+3)\right).
\end{aligned}$$

Ensuite, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}F_{p,m}(k+n) &= F_{p,m}(k)\left(F_{p,m}(n+1) + iF_{p,m}(n+2) + \varepsilon F_{p,m}(n+3) + hF_{p,m}(n+4)\right) \\
&\quad + \sum_{t=0}^{p} F_{p,m}(k-t)\left(F_{p,m}(n-p+t) + iF_{p,m}(n-p+t+1) + \varepsilon F_{p,m}(n-p+t+2) + hF_{p,m}(n-p+t+3)\right) \\
&= F_{p,m}(k)\mathbb{H}F_{p,m}(n+1) + \sum_{t=0}^{p} F_{p,m}(k-t)\mathbb{H}F_{p,m}(n-p+t).
\end{aligned}$$

■

Dans le théorème suivant nous donnons quelques formules de sommation des p-nombres hybrides généralisés de Fibonacci et de Lucas.

Théorème 3.1.4 *Pour $m \geq 0$, les formules de sommation des p-nombres hybrides généralisés de Fibonacci et de Lucas sont :*

$$\sum_{n=0}^{k} \mathbb{H}F_{p,m}(n) = \frac{1}{m}\left(\mathbb{H}F_{p,m}(k+p+1) - \mathbb{H}F_{p,m}(p) + (1-m)\sum_{n=0}^{p-1}[\mathbb{H}F_{p,m}(k+p+1) - \mathbb{H}F_{p,m}(n)]\right)$$

et

$$\sum_{n=0}^{k}\mathbb{H}L_{p,m}(n)=\frac{1}{m}\left(\mathbb{H}L_{p,m}(k+p+1)-\mathbb{H}L_{p,m}(p)+(1-m)\sum_{n=0}^{p-1}[\mathbb{H}L_{p,m}(k+p+1)-\mathbb{H}L_{p,m}(n)]\right),$$

respctivement.

Preuve: En utilisant la relation de récurrence des p-nombres hybrides généralisées de Fibonacci, nous avons

$$m\mathbb{H}F_{p,m}(n+p)=\mathbb{H}F_{p,m}(n+p+1)-\mathbb{H}F_{p,m}(n).$$

Ensuite, on obtient

$$m\sum_{n=0}^{k}\mathbb{H}F_{p,m}(n+p)=\sum_{n=0}^{k}\mathbb{H}F_{p,m}(n+p+1)-\sum_{n=0}^{k}\mathbb{H}F_{p,m}(n). \tag{3.12}$$

Maintenant, nous considérons le côté gauche de (3.12)

$$\begin{aligned}m\sum_{n=0}^{k}\mathbb{H}F_{p,m}(n+p)&=m\sum_{n=0}^{k}\mathbb{H}F_{p,m}(n)+m\sum_{n=k+1}^{k+p}\mathbb{H}F_{p,m}(n)-m\sum_{n=0}^{p-1}\mathbb{H}F_{p,m}(n)\\&=m\sum_{n=0}^{k}\mathbb{H}F_{p,m}(n)+m\sum_{n=0}^{k}(\mathbb{H}F_{p,m}(n+k+1)-\mathbb{H}F_{p,m}(n)).\end{aligned}$$

Aussi, le côté droit de (3.12) est

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{k}\mathbb{H}F_{p,m}(n+p+1)-\sum_{n=0}^{k}\mathbb{H}F_{p,m}(n)&=\mathbb{H}F_{p,m}(k+p+1)-\mathbb{H}F_{p,m}(n)\\&\quad+\sum_{n=0}^{k}(\mathbb{H}F_{p,m}(n+k+1)-\mathbb{H}F_{p,m}(n)).\end{aligned}$$

Depuis l'égalité des deux côtés gauche et droit de (3.12), on a

$$\sum_{n=0}^{k}\mathbb{H}F_{p,m}(n)=\frac{1}{m}\left(\mathbb{H}F_{p,m}(k+p+1)-\mathbb{H}F_{p,m}(p)+(1-m)\sum_{n=0}^{p-1}[\mathbb{H}F_{p,m}(n+k+1)-\mathbb{H}F_{p,m}(n)]\right).$$

De même, nous pouvons avoir une formule de sommation pour les p-nombres hybrides généralisés de Lucas.

■

On peut donner quelques cas particuliers de ce théorème comme corollaire.

Corollaire 3.1.2 *Soit $\mathbb{H}F_p(n)$ et $\mathbb{H}F_p(n)$ les $n^{èmes}$ p-nombres hybrides de Fibonacci et de Lucas, respectivement. On a*

$$\sum_{n=0}^{k}\mathbb{H}F_p(n)=\mathbb{H}F_p(k+p+1)-\mathbb{H}F_p(p)$$

et

$$\sum_{n=0}^{k}\mathbb{H}L_p(n)=\mathbb{H}L_p(k+p+1)-\mathbb{H}L_p(p).$$

Dans le théorème suivant nous donnons une relation entre les p-nombres hybrides généralisés de Fibonacci et Lucas.

Théorème 3.1.5 *Soit $\mathbb{H}F_{p,m}(n)$ et $\mathbb{H}L_{p,m}(n)$ les $n^{èmes}$ p-nombres hybrides généralisés de Fibonacci et de Lucas, respectivement. On a*

$$\mathbb{H}L_{p,m}(n) = \mathbb{H}F_{p,m}(n+1) + p\mathbb{H}F_{p,m}(n-p).$$

Preuve: D'après (3.2), on a

$$\mathbb{H}L_{p,m}(n) = L_{p,m}(n) + iL_{p,m}(n+1) + \varepsilon L_{p,m}(n+2) + hL_{p,m}(n+3).$$

En utilisant

$$L_{p,m}(n) = F_{p,m}(n+1) + pF_{p,m}(n-p),$$

on obtient

$$\mathbb{H}L_{p,m}(n) = \mathbb{H}F_{p,m}(n+1) + p\mathbb{H}F_{p,m}(n-p).$$

■

Corollaire 3.1.3 *Soit $\mathbb{H}F_{p,m}(n)$ et $\mathbb{H}L_{p,m}(n)$ les $n^{èmes}$ p-nombres hybrides généralisés de Fibonacci et de Lucas, respectivement. On a*

$$\mathbb{H}L_{p,m}(n) + m\mathbb{H}F_{p,m}(n) = (p+1)\mathbb{H}F_{p,m}(n+1).$$

La représentation matricielle des p-polynômes bivariés de Fibonacci est introduite dans [9]. Pour $p = 0, 1, 2, 3, ...$, la représentation matricielle des p-nombres généralisés de Fibonacci est la matrice d'ordre $(p+1)$ suivante

$$Q_p = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la matrice Q_p, nous dérivons la représentation matricielle des p-nombres hybrides généralisés de Fibonacci comme

$$F = \begin{pmatrix} \mathbb{H}F_{p,m}(p+1) & \mathbb{H}F_{p,m}(p) & \dots & \mathbb{H}F_{p,m}(1) \\ \mathbb{H}F_{p,m}(p) & \mathbb{H}F_{p,m}(p-1) & \dots & \mathbb{H}F_{p,m}(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{H}F_{p,m}(2) & \mathbb{H}F_{p,m}(1) & \dots & \mathbb{H}F_{p,m}(2-p) \\ \mathbb{H}F_{p,m}(1) & \mathbb{H}F_{p,m}(0) & \dots & \mathbb{H}F_{p,m}(1-p) \end{pmatrix} Q_p^n,$$

où la matrice F est

$$F = \begin{pmatrix} \mathbb{H}F_{p,m}(n+p+1) & \mathbb{H}F_{p,m}(n+p) & \dots & \mathbb{H}F_{p,m}(n+1) \\ \mathbb{H}F_{p,m}(n+p) & \mathbb{H}F_{p,m}(n+p-1) & \dots & \mathbb{H}F_{p,m}(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{H}F_{p,m}(n+2) & \mathbb{H}F_{p,m}(n+1) & \dots & \mathbb{H}F_{p,m}(n+2-p) \\ \mathbb{H}F_{p,m}(n+1) & \mathbb{H}F_{p,m}(n) & \dots & \mathbb{H}F_{p,m}(n+1-p) \end{pmatrix}.$$

En utilisant cette représentation matricielle on peut dérivé le théorème suivant :

Théorème 3.1.6 *(Formule de Cassini généralisée) Soit $\mathbb{H}F_{p,m}(n)$ le $n^{ème}$ p-nombre hybride généralisé de Fibonacci, alors*

$$|F| = (-1)^{pn} \begin{vmatrix} \mathbb{H}F_{p,m}(p+1) & \mathbb{H}F_{p,m}(p) & \dots & \mathbb{H}F_{p,m}(1) \\ \mathbb{H}F_{p,m}(p) & \mathbb{H}F_{p,m}(p-1) & \dots & \mathbb{H}F_{p,m}(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{H}F_{p,m}(2) & \mathbb{H}F_{p,m}(1) & \dots & \mathbb{H}F_{p,m}(2-p) \\ \mathbb{H}F_{p,m}(1) & \mathbb{H}F_{p,m}(0) & \dots & \mathbb{H}F_{p,m}(1-p) \end{vmatrix}.$$

Il est essentiel de noter que, du fait que l'opération de multiplication des nombres hybrides est non commutative, si l'on développe le déterminant selon différentes lignes ou colonnes, les résultats peuvent être différents. Par conséquent, la Le déterminant est développé à l'aide de la première ligne lors de la recherche des résultats dans [8].

Preuve: voir [8] ■

4

Polynômes de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas

Dans ce chapitre, nous définissons les polynômes de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas et donnons les relations de récurrence de ces polynômes. Ensuite, nous présentons les formules de Binet pour les polynômes de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas. Nous introduisons les fonctions génératrices de ces polynômes. De plus, nous obtenons Quelques Propriétés des polynômes de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas.

4.1 Polynômes de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas

Les suites de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas, qui sont les généralisations bien connues des suites de Fibonacci, sont des suites de récurrence du troisième ordre. En 1963, Feinberg à l'origine ont étudié la suite de Tribonacci [3]. Les suites de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas présentent de nombreuses propriétés et applications dans de nombreux domaines scientifiques. Plusieurs auteurs ont présenté les formules de Binet, fonctions génératrices, fonctions génératrices exponentielles, formules de sommation et représentation matricielle des ces suites (pour plus d'information voir : [1, 15, 16, 17, 18, 26]). Dans [6], les polynômes de Tribonacci ont été introduits en 1973 par Hoggatt et Bicknell et nombreux auteurs ont étudié les polynômes généralisés de Fibonacci et de Tribonacci et leurs propriétés (pour les intéréssés veuillez vous référer à [4, 5, 11, 14]).

Définition 4.1.1 *Pour $n \geq 3$, la suite de Tribonacci $(T_n)_{n\geq 0}$ est défini par*

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3},$$

avec les conditions initiales $T_0 = 0, T_1 = 1, T_2 = 1$.
Et la suite Tribonacci-Lucas $(K_n)_{n\geq 0}$ est défini par

$$K_n = K_{n-1} + K_{n-2} + K_{n-3},$$

avec conditions initiales $K_0 = 3, K_1 = 1, K_2 = 3$.

4.1.1 Formules de Binet

Pour tout entier $n \geq 3$, la relation de récurrence des polynômes de Tribonacci est la suivante

$$T_n(x) = x^2 T_{n-1}(x) + xT_{n-2}(x) + T_{n-3}(x), \tag{4.1}$$

où $T_0(x) = 0, T_1(x) = 1, T_2(x) = x^2$ sont des valeures initiales.
La relation de récurrence des polynômes de Tribonacci-Lucas est définie par

$$K_n(x) = x^2 K_{n-1}(x) + xK_{n-2}(x) + K_{n-3}(x), \tag{4.2}$$

où $K_0(x) = 3, K_1(x) = x^2, K_2(x) = x^4 + 2x$ sont des valeures initiales.
Dans le tableau (4.1) nous citons quelques premiers polynômes de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas.

n	$T_n(x)$	$K_n(x)$
0	0	3
1	1	x^2
2	x^2	$x^4 + 2x$
3	$x^4 + x$	$x^6 + 3x^3 + 3$
4	$x^6 + 2x^3 + 1$	$x^8 + 4x^5 + 6x^2$
5	$x^8 + 3x^5 + 3x^2$	$x^{10} + 5x^7 + 10x^4 + 5x$
6	$x^{10} + 4x^7 + 6x^4 + 2x$	$x^{12} + 6x^9 + 15x^6 + 14x^3 + 3$
7	$x^{12} + 5x^9 + 10x^6 + 7x^3 + 1$	$x^{14} + 7x^{11} + 21x^8 + 28x^5 + 14x^2$
8	$x^{14} + 6x^{11} + 15x^8 + 16x^5 + 6x^2$	$x^{16} + 8x^{13} + 28x^{10} + 48x^7 + 38x^4 + 8x$

TABLE 4.1: Les premiers polynômes de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas

En utilisant des techniques standard pour résoudre les relations de récurrence, les racines de l'équation caractéristique $\lambda^3 - x^2\lambda^2 - x\lambda - 1 = 0$, des équations (4.1) et (4.2) sont $\alpha_1(x), \alpha_2(x)$ et $\alpha_3(x)$tels que

$$\alpha_1(x) = \frac{x^2}{3} + \sqrt[3]{\frac{x^6}{27} + \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{x^6}{37} + \frac{7x^3}{54} + \frac{1}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{x^6}{27} + \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{x^6}{37} + \frac{7x^3}{54} + \frac{1}{4}}}$$

$$\alpha_2(x) = \frac{x^2}{3} + w\sqrt[3]{\frac{x^6}{27} + \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{x^6}{37} + \frac{7x^3}{54} + \frac{1}{4}}} + w^2\sqrt[3]{\frac{x^6}{27} + \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{x^6}{37} + \frac{7x^3}{54} + \frac{1}{4}}}$$

$$\alpha_3(x) = \frac{x^2}{3} + w^2\sqrt[3]{\frac{x^6}{27} + \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{x^6}{37} + \frac{7x^3}{54} + \frac{1}{4}}} + w\sqrt[3]{\frac{x^6}{27} + \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{x^6}{37} + \frac{7x^3}{54} + \frac{1}{4}}}$$

avec $w = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \exp(\frac{2\pi i}{3})$.

Théorème 4.1.1 *les formules de Binet pour les polynômes de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas sont données par*

$$T_n(x) = \frac{\alpha_1^{n+1}(x)}{(\alpha_1(x) - \alpha_2(x))(\alpha_1(x) - \alpha_3(x))} + \frac{\alpha_2^{n+1}(x)}{(\alpha_2(x) - \alpha_1(x))(\alpha_2(x) - \alpha_3(x))} + \frac{\alpha_3^{n+1}(x)}{(\alpha_3(x) - \alpha_1(x))(\alpha_3(x) - \alpha_2(x))} \tag{4.3}$$

et

$$K_n(x) = \alpha_1^n(x) + \alpha_2^n + \alpha_3^n(x), \tag{4.4}$$

respectivement.

Notez que nous avons les relations suivantes

$$\alpha_1(x) + \alpha_2(x) + \alpha_3(x) = x^2,$$

$$\alpha_1(x)\alpha_2(x)\alpha_3(x) = 1.$$

Pour $x = 1$, on peut donner le cas particulier de ce théorème comme corollaire.

Corollaire 4.1.1 *Les formules de Binet pour le $n^{ème}$ nombre de Tribonacci et le $n^{ème}$ nombre de Tribonacci-Lucas sont données par*

$$T_n = \frac{\alpha_1^{n+1}}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} + \frac{\alpha_2^{n+1}}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)} + \frac{\alpha_3^{n+1}}{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)},$$

$$K_n = \alpha_1^n + \alpha_2^n + \alpha_3^n,$$

respectivement, où α_1, α_2 et α_3 sont les racines de l'équation cubique $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$,

avec

$$\alpha_1 = \frac{1 + \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}}{3},$$
$$\alpha_2 = \frac{1 + w\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + w^2\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}}{3},$$
$$\alpha_3 = \frac{1 + w^2\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + w\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}}{3}.$$

A noter que nous avons les relations suivantes en utilisant les fonctions élémentaires symetriques on a :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1,$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = -11,$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 1.$$

4.1.2 Fonctions génératrices

Théorème 4.1.2 *Les fonctions génératrices des polynômes de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas sont données par*

$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n = \frac{t}{1 - x^2t - xt^2 - t^3}$$

et

$$R(t) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(x)t^n = \frac{3 - 2x^2t - xt^2}{1 - x^2t - xt^2 - t^3},$$

respectivement, où $T_n(x)$ est le $n^{ème}$ polynôme de Tribonacci et $K_n(x)$ est le $n^{ème}$ polynôme de Tribonacci-Lucas.

Corollaire 4.1.2 *Pour $x = 1$, nous obtenir les fonctions génératrices des nombres Tribonacci et Tribonacci-Lucas, respectivement.*

4.1.3 Quelques propriétés des polynômes de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas

Dans ce théorème suivant nous donnons une relation entre les polynômes de Tribonacci et les polynômes de Tribonacci-Lucas.

Théorème 4.1.3 *Pour $n \geq 2$, la relation suivante entre les polynômes de Tribonacci et les polynômes de Tribonacci-Lucas*

$$K_n(x) = x^2T_n(x) + 2xT_{n-1}(x) + 3T_{n-2}(x).$$

Preuve: Montrons cela par récurrence, pour $n = 2$ on peut écrire

$$\begin{aligned} K_2(x) &= x^2T_2(x) + 2xT_1(x) + 3T_0(x) \\ &= x^4 + 2x. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que cela soit vrai pour tous les entiers positifs m, c'est-à-dire

$$K_m(x) = x^2T_m(x) + 2xT_{m-1}(x) + 3T_{m-2}(x). \tag{4.5}$$

Ensuite, nous devons montrer que l'égalité ci-dessus est vraie pour $n = m + 1$, c'est-à-dire

$$K_{m+1}(x) = x^2T_{m+1}(x) + 2xT_m(x) + 3T_{m-1}(x). \tag{4.6}$$

En considérant le côté gauche de l'équation (4.6), nous pouvons développer la relation de récurrence comme

$$K_{m+1}(x) = x^2K_m(x) + xK_{m-1}(x) + K_{m-2}(x).$$

Ensuite, en utilisant l'équation (4.5), nous avons

$$\begin{aligned} K_{m+1}(x) = {} & x^2(x^2T_m(x) + 2xT_{m-1}(x) + 3T_{m-2}(x)) \\ & + 2x(x^2T_{m-1}(x) + 2xT_{m-2}(x) + 3T_{m-3}(x)) \\ & + 3(x^2T_{m-2}(x) + 2xT_{m-3}(x) + 3T_{m-4}(x)). \end{aligned}$$

Enfin, en considérant l'équation (4.1), on obtient

$$K_{m+1}(x) = x^2T_{m+1}(x) + 2xT_m(x) + 3T_{m-1}(x),$$

qui termine l'induction. ■

5

Hybrinomiaux de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas

Dans ce chapitre, nous introduisons les hybrinomiaux de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas et dérivons ces hybrinomiaux par la matrices. Nous présentons les formules de Binet, les fonctions génératrices, les formules de sommation, certaines propriétés de ces hybrinomiaux. De plus, nous obtenons la relation entre les Hybrinomiaux de Tribonacci et Tribonacci-Lucas.
Dans [28], le $n^{ème}$ Nombre hybride Tribonacci $\mathbb{H}T_n$ et le $n^{ème}$ nombre hybride Tribonacci-Lucas $\mathbb{H}K_n$ sont définis par :

$$\mathbb{H}T_n = T_n + T_{n+1}i + T_{n+2}\varepsilon + T_{n+3}h,$$

et

$$\mathbb{H}K_n = K_n + K_{n+1}i + K_{n+2}\varepsilon + K_{n+3}h,$$

où T_n est le $n^{ème}$nombre de Tribonacci et K_n est le $n^{ème}$ nombre de Tribonacci-Lucas, respectivement.

5.1 Hybrinomiaux de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas

Dans cette section, nous définissons les hybrinomiaux de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas et donnons les relations de récurrence de ces hybrinomiaux. Ensuite, nous présentons les formules de Binet pour le $n^{ème}$ hybrinomial de Tribonacci et le $n^{ème}$ hybrinomial de Tribonacci-Lucas. Nous introduisons les fonctions génératrices de ces hybrinomiaux. De plus, nous obtenons les formules de sommation, certaines propriétés, la représentation matricielle et la relation entre les hybrinomiaux de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas.

Définition 5.1.1 *Le $n^{ème}$ hybrinomial de Tribonacci $\mathbb{H}T_n(x)$ et le $n^{ème}$ hybrinomial de Tribonacci-Lucas, $\mathbb{H}K_n(x)$ sont définis par :*

$$\mathbb{H}T_n(x) = T_n(x) + iT_{n+1}(x) + \varepsilon T_{n+2}(x) + hT_{n+3}(x) \tag{5.1}$$

et

$$\mathbb{H}K_n(x) = K_n(x) + iK_{n+1}(x) + \varepsilon K_{n+2}(x) + hK_{n+3}(x), \tag{5.2}$$

respectivement, où $T_n(x)$ est le $n^{ème}$ polynôme de Tribonacci, $K_n(x)$ est le $n^{ème}$ polynôme de Tribonacci-Lucas . Présentez maintenant la relation récurrence de la suite hybrinomial de Tribonacci, $(\mathbb{H}T_n(x))_{n\geq 0}$ et suite hybrinomial de Tribonacci-Lucas $(\mathbb{H}K_n(x))_{n\geq 0}$.

Théorème 5.1.1 *Pour $n \geq 3$, on a les relations de récurrence suivantes*

$$\mathbb{H}T_n(x) = x^2\mathbb{H}T_{n-1}(x) + x\mathbb{H}T_{n-2}(x) + \mathbb{H}T_{n-3}(x), \tag{5.3}$$

et

$$\mathbb{H}K_n(x) = x^2\mathbb{H}K_{n-1}(x) + x\mathbb{H}K_{n-2}(x) + \mathbb{H}K_{n-3}(x), \tag{5.4}$$

avec

$$\mathbb{H}T_0(x) = i + \varepsilon x^2 + h(x^4 + x),$$

$$\mathbb{H}T_1(x) = 1 + ix^2 + \varepsilon(x^4 + x) + h(x^6 + 2x^3 + 1),$$

$$\mathbb{H}T_2(x) = x^2 + i(x^4 + x) + \varepsilon(x^6 + 2x^3 + 1) + h(x^8 + 3x^5 + 3x^2)$$

et

$$\mathbb{H}K_0(x) = 3 + ix^2 + \varepsilon(x^4 + x) + h(x^6 + 3x^3 + 3),$$

$$\mathbb{H}K_1(x) = x^2 + i(x^4 + 2x) + \varepsilon(x^6 + 3x^3 + 3) + h(x^8 + 4x^5 + 6x^2),$$

$$\mathbb{H}K_2(x) = x^4 + 2x + i(x^6 + 3x^3 + 3) + \varepsilon(x^8 + 4x^5 + 6x^2) + h(x^{10} + 5x^7 + 10x^4 + 5x),$$

respectivement.

Preuve:

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}T_n(x) &= T_n(x) + iT_{n+1}(x) + \varepsilon T_{n+2}(x) + hT_{n+3}(x) \\
&= x^2T_{n-1}(x) + xT_{n-2}(x) + T_{n-3}(x) + i(x^2T_n(x) + xT_{n-1}(x) + T_{n-2}(x)) \\
&+ \varepsilon(x^2T_{n+1}(x) + xT_n(x) + T_{n-1}(x)) + h(x^2T_{n+2}(x) + xT_{n+1}(x) + T_n(x)) \\
&= x^2(T_{n-1}(x) + iT_n(x) + \varepsilon T_{n+1}(x) + hT_{n+2}(x)) \\
&+ x(T_{n-2}(x) + iT_{n-1}(x) + \varepsilon T_n(x) + hT_{n+1}(x)) + T_{n-1}(x) + iT_{n-2}(x) + \varepsilon T_{n-1}(x) + hT_n(x) \\
&= x^2\mathbb{H}T_{n-1}(x) + x\mathbb{H}T_{n-2}(x) + \mathbb{H}T_{n-3}(x).
\end{aligned}$$

De même, on peut obtenir $\mathbb{H}K_n(x) = x^2\mathbb{H}K_{n-1}(x) + x\mathbb{H}K_{n-2}(x) + \mathbb{H}K_{n-3}(x)$ à l'aide des équations (4.2) et (5.2). ■

Pour $x = 1$, on peut donner le cas particulier de ce théorème comme corollaire.

Corollaire 5.1.1 *Soit $\mathbb{H}T_n$ le $n^{ème}$ nombre hybride de Tribonacci et $\mathbb{H}K_n$ le $n^{ème}$ nombre hybride Tribonacci-Lucas. On donne alors les relations de récurrence suivantes*

$$\mathbb{H}T_n = \mathbb{H}T_{n-1} + \mathbb{H}T_{n-2} + \mathbb{H}T_{n-3}$$

et

$$\mathbb{H}K_n = \mathbb{H}K_{n-1} + \mathbb{H}K_{n-2} + \mathbb{H}K_{n-3}.$$

5.1.1 Formules de Binet

Les hybrinomiaux de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas peuvent être obtenus en utilisant la Définition (5.1.1) et le Théorème (5.1.1). Maintenant, nous produisons les Formules de Binet pour les hybrinomiaux de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas.

Théorème 5.1.2 *Soit $n \geq 0$ un entier et $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ et $\alpha_3(x)$ les racines de l'équation caractéristique $\lambda^3 - x^2\lambda^2 - x\lambda - 1 = 0$. Alors les formules de Binet pour les hybrinomiaux de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas sont données par :*

$$\mathbb{H}T_n(x) = \frac{\hat{\alpha_1}(x)\alpha_1^{n+1}(x)}{(\alpha_1(x)-\alpha_2(x))(\alpha_1(x)-\alpha_3(x))} + \frac{\hat{\alpha_2}(x)\alpha_2^{n+1}(x)}{(\alpha_2(x)-\alpha_1(x))(\alpha_2(x)-\alpha_3(x))} + \frac{\hat{\alpha_3}(x)\alpha_3^{n+1}(x)}{(\alpha_3(x)-\alpha_1(x))(\alpha_3(x)-\alpha_2(x))} \tag{5.5}$$

et

$$\mathbb{H}K_n(x) = \hat{\alpha_1}(x)\alpha_1^n(x) + \hat{\alpha_2}(x)\alpha_2^n(x) + \hat{\alpha_3}(x)\alpha_3^n(x), \tag{5.6}$$

respectivement, où

$$\hat{\alpha_1}(x) = 1+i\alpha_1(x)+\varepsilon\alpha_1^2(x)+h\alpha_1^3(x), \hat{\alpha_2}(x) = 1+i\alpha_2(x)+\varepsilon\alpha_2^2(x)+h\alpha_2^3(x), \hat{\alpha_3}(x) = 1+i\alpha_3(x)+\varepsilon\alpha_3^2(x)+h\alpha_3^3(x).$$

En outre

$$\alpha_1(x) = \frac{x^2}{3} + \sqrt[3]{\frac{x^6}{27}+\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{x^6}{37}+\frac{7x^3}{54}+\frac{1}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{x^6}{27}+\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{x^6}{37}+\frac{7x^3}{54}+\frac{1}{4}}},$$

$$\alpha_2(x) = \frac{x^2}{3} + w\sqrt[3]{\frac{x^6}{27}+\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{x^6}{37}+\frac{7x^3}{54}+\frac{1}{4}}} + w^2\sqrt[3]{\frac{x^6}{27}+\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{x^6}{37}+\frac{7x^3}{54}+\frac{1}{4}}},$$

$$\alpha_3(x) = \frac{x^2}{3} + w^2\sqrt[3]{\frac{x^6}{27}+\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{x^6}{37}+\frac{7x^3}{54}+\frac{1}{4}}} + w\sqrt[3]{\frac{x^6}{27}+\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{x^6}{37}+\frac{7x^3}{54}+\frac{1}{4}}},$$

avec $w = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

Preuve: En considérant la formule de Binet pour le $n^{ème}$ polynôme de Tribonacci et l'équation (4.1), on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{H}T_n(x) = T_n(x) + iT_{n+1}(x) + \varepsilon T_{n+2}(x) + hT_{n+3}(x)\\
&= \frac{\alpha_1^{n+1}(x)}{(\alpha_1(x)-\alpha_2(x))(\alpha_1(x)-\alpha_3(x))} + \frac{\alpha_2^{n+1}(x)}{(\alpha_2(x)-\alpha_1(x))(\alpha_2(x)-\alpha_3(x))} + \frac{\alpha_3^{n+1}(x)}{(\alpha_3(x)-\alpha_1(x))(\alpha_3(x)-\alpha_2(x))}\\
&+ i\left(\frac{\alpha_1^{n+2}(x)}{(\alpha_1(x)-\alpha_2(x))(\alpha_1(x)-\alpha_3(x))} + \frac{\alpha_2^{n+2}(x)}{(\alpha_2(x)-\alpha_1(x))(\alpha_2(x)-\alpha_3(x))} + \frac{\alpha_3^{n+2}(x)}{(\alpha_3(x)-\alpha_1(x))(\alpha_3(x)-\alpha_2(x))}\right)\\
&+ \varepsilon\left(\frac{\alpha_1^{n+3}(x)}{(\alpha_1(x)-\alpha_2(x))(\alpha_1(x)-\alpha_3(x))} + \frac{\alpha_2^{n+3}(x)}{(\alpha_2(x)-\alpha_1(x))(\alpha_2(x)-\alpha_3(x))} + \frac{\alpha_3^{n+3}(x)}{(\alpha_3(x)-\alpha_1(x))(\alpha_3(x)-\alpha_2(x)}\right)\\
&+ h\left(\frac{\alpha_1^{n+4}(x)}{(\alpha_1(x)-\alpha_2(x))(\alpha_1(x)-\alpha_3(x))} + \frac{\alpha_2^{n+4}(x)}{(\alpha_2(x)-\alpha_1(x))(\alpha_2(x)-\alpha_3(x))} + \frac{\alpha_3^{n+4}(x)}{(\alpha_3(x)-\alpha_1(x))(\alpha_3(x)-\alpha_2(x)}\right)\\
&= \frac{(1+i\alpha_1(x)+\varepsilon\alpha_1^2(x)+h\alpha_1^3(x))\alpha_1^{n+1}(x)}{(\alpha_1(x)-\alpha_2(x))(\alpha_1(x)-\alpha_3(x))} + \frac{(1+i\alpha_2(x)+\varepsilon\alpha_2^2(x)+h\alpha_2^3(x))\alpha_2^{n+1}(x)}{(\alpha_2(x)-\alpha_1(x))(\alpha_2(x)-\alpha_3(x))}\\
&+ \frac{(1+i\alpha_3(x)+\varepsilon\alpha_3^2(x)+h\alpha_3^3(x))\alpha_3^{n+1}(x)}{(\alpha_3(x)-\alpha_1(x))(\alpha_3(x)-\alpha_2(x))}\\
&= \frac{\hat{\alpha_1}(x)\alpha_1^{n+1}(x)}{(\alpha_1(x)-\alpha_2(x))(\alpha_1(x)-\alpha_3(x))} + \frac{\hat{\alpha_2}(x)\alpha_2^{n+1}(x)}{(\alpha_2(x)-\alpha_1(x))(\alpha_2(x)-\alpha_3(x))} + \frac{\hat{\alpha_3}(x)\alpha_3^{n+1}(x)}{(\alpha_3(x)-\alpha_1(x))(\alpha_3(x)-\alpha_2(x))}.
\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Binet pour le polynôme $n^{ème}$ de Tribonacci-Lucas donné dans l'équation (4.4) et l'équation (5.2) , nous avons

$$\begin{aligned}
&\mathbb{H}K_n(x) = K_n(x) + iK_{n+1}(x) + \varepsilon K_{n+2}(x) + hK_{n+3}(x)\\
&= \alpha_1^n(x) + \alpha_2^n(x) + \alpha_3^n(x) + i(\alpha_1^{n+1}(x) + \alpha_2^{n+1}(x) + \alpha_3^{n+1}(x))\\
&+ \varepsilon(\alpha_1^{n+2}(x) + \alpha_2^{n+2}(x) + \alpha_3^{n+2}(x)) + h(\alpha_1^{n+3}(x) + \alpha_2^{n+3}(x) + \alpha_3^{n+3}(x))\\
&= (1 + i\alpha_1(x) + \varepsilon\alpha_1^2(x) + h\alpha_1^3(x))\alpha_1^n(x)\\
&(1 + i\alpha_2(x) + \varepsilon\alpha_2^2(x) + h\alpha_2^3(x))\alpha_2^n(x)\\
&(1 + i\alpha_3(x) + \varepsilon\alpha_3^2(x) + h\alpha_3^3(x))\alpha_3^n(x)\\
&= \hat{\alpha_1}(x)\alpha_1^n(x) + \hat{\alpha_2}(x)\alpha_2^n(x) + \hat{\alpha_3}(x)\alpha_3^n(x),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha_1}(x) &= 1 + i\alpha_1(x) + \varepsilon\alpha_1^2(x) + h\alpha_1^3(x),\\
\hat{\alpha_2}(x) &= 1 + i\alpha_2(x) + \varepsilon\alpha_2^2(x) + h\alpha_2^3(x),\\
\hat{\alpha_3}(x) &= 1 + i\alpha_3(x) + \varepsilon\alpha_3^2(x) + h\alpha_3^3(x),
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. ■

Pour $x = 1$, on peut donner le cas particulier de ce théorème comme corollaire.

Corollaire 5.1.2 *Les formules de Binet pour le $n^{ème}$ nombre hybride Tribonacci et le $n^{ème}$ nombre hybride Tribonacci-Lucas sont donnés par :*

$$\mathbb{H}T_n = \frac{\hat{\alpha_1}\alpha_1^{n+1}}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} + \frac{\hat{\alpha_2}\alpha_2^{n+1}}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)} + \frac{\hat{\alpha_3}\alpha_3^{n+1}}{(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)}$$

et

$$\mathbb{H}K_n = \hat{\alpha_1}\alpha_1^n + \hat{\alpha_2}\alpha_2^n + \hat{\alpha_3}\alpha_3^n,$$

respectivement.

5.1.2 Fonctions génératrices

Comme on le sait, les fonctions génératrices sont l'une des techniques les plus puissantes pour résoudre les relations de récurrence linéaires. Maintenant, nous donnons les fonctions génératrices des hybrinomiaux de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas.

Théorème 5.1.3 *Les fonctions génératrices des suites hybrinomials de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas sont*

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{H}T_n(x)t^n = \frac{\mathbb{H}T_0(x) + (\mathbb{H}T_1(x) - x^2\mathbb{H}T_0(x))t + \mathbb{H}T_{-1}(x)t^2}{1 - x^2t - xt^2 - t^3}$$

et

$$r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{H}K_n(x)t^n = \frac{\mathbb{H}K_0(x) + (\mathbb{H}K_1(x) - x^2\mathbb{H}K_0(x))t + \mathbb{H}K_{-1}(x)t^2}{1 - x^2t - xt^2 - t^3},$$

respectivement.

Preuve: Soit la fonction génératrice de la suite hybrinomial de Tribonacci.

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{H}T_n(x)t^n,$$

on a

$$\begin{aligned}
g(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{H}T_n(x)t^n \\
&= \mathbb{H}T_0(x) + (\mathbb{H}T_1(x)t + \sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{H}T_n(x)t^n \\
&= \mathbb{H}T_0(x) + (\mathbb{H}T_1(x)t + \sum_{n=2}^{\infty} (x^2\mathbb{H}T_{n-1} + x\mathbb{H}T_{n-2} + \mathbb{H}T_{n-3})t^n \\
&= \mathbb{H}T_0(x) + (\mathbb{H}T_1(x)t + x^2t\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{H}T_n(x)t^n - x^2\mathbb{H}T_0(x)t \\
&+ xt^2\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{H}T_n(x)t^n + t^3\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{H}T_n(x)t^n + \mathbb{H}T_{-1}(x)t^2 \\
&= \mathbb{H}T_0(x) + \mathbb{H}T_1(x)t + x^2tg(t) - x^2\mathbb{H}T_0(x)t + xt^2g(t) + t^3g(t) + \mathbb{H}T_{-1}(x)t^2,
\end{aligned}$$

et on obtient que

$$(1 - x^2t - xt^2 - t^3g(t) = \mathbb{H}T_0(x) + (\mathbb{H}T_1(x)t - x^2t\mathbb{H}T_0(x) + \mathbb{H}T_{-1}(x)t^2).$$

Ainsi, la fonction génératrice de la suite hybrinomial de Tribonacci est

$$g(t) = \frac{\mathbb{H}T_0(x) + (\mathbb{H}T_1(x) - x^2\mathbb{H}T_0(x))t + \mathbb{H}T_{-1}(x)t^2}{1 - x^2t - xt^2 - t^3}.$$

De même, on peut facilement prouver la fonction génératrice de la suite hybrinomial Tribonacci-Lucas comme suit

$$r(t) = \frac{\mathbb{H}K_0(x) + (\mathbb{H}K_1(x) - x^2\mathbb{H}K_0(x))t + \mathbb{H}K_{-1}(x)t^2}{1 - x^2t - xt^2 - t^3}.$$

■

Pour $x = 1$, on peut donner le cas particulier de ce théorème comme corollaire.

Corollaire 5.1.3 *Soit $\mathbb{H}T_n$ le $n^{ème}$ nombre hybride de Tribonacci et $\mathbb{H}K_n$ le $n^{ème}$ Les nombres hybride Tribonacci-Lucas. Les fonctions génératrices pour les nombres hybrides Tribonacci et Les nombres hybrides Tribonacci-Lucas sont*

$$\hat{g}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{H}T_nt^n = \frac{\mathbb{H}T_0 + (\mathbb{H}T_1 - x^2\mathbb{H}T_0)t + \mathbb{H}T_1t^2}{1 - t - t^2 - t^3}$$

et

$$\hat{r}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{H}K_nt^n = \frac{\mathbb{H}K_0 + (\mathbb{H}K_1 - \mathbb{H}K_0(x))t + \mathbb{H}K_{-1}(x)t^2}{1 - t - t^2 - t^3},$$

respectivement.

Théorème 5.1.4 *Pour $n \geq 0$, les fonctions génératrices exponentielles pour les suites hybrinomials de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas sont*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{H}T_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{\hat{\alpha_1}(x)\alpha_1(x)e^{\alpha_1(x)t}}{(\alpha_1(x)-\alpha_2(x))(\alpha_1(x)-\alpha_3(x))} + \frac{\hat{\alpha_2}(x)\alpha_2(x)e^{\alpha_2(x)t}}{(\alpha_2(x)-\alpha_1(x))(\alpha_2(x)-\alpha_3(x))} + \frac{\hat{\alpha_3}(x)\alpha_3(x)e^{\alpha_3(x)t}}{(\alpha_3(x)-\alpha_1(x))(\alpha_3(x)-\alpha_2(x))}$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{H}K_n(x)\frac{t^n}{n!} = \hat{\alpha_1}(x)e^{\alpha_1(x)} + \hat{\alpha_2}(x)e^{\alpha_3(x)} + \hat{\alpha_3}(x)e^{\alpha_3(x)},$$

respectivement.

Preuve: En utilisant les formules de Binet pour les $n^{ème}$ hybrinomiaux de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas donnés dans les équations (5.5) et (5.6), nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{H}T_n(x)\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\hat{\alpha_1}(x)\alpha_1^{n+1}(x)}{(\alpha_1(x)-\alpha_2(x))(\alpha_1(x)-\alpha_3(x))} + \frac{\hat{\alpha_2}(x)\alpha_2^{n+1}(x)}{(\alpha_2(x)-\alpha_1(x))(\alpha_2(x)-\alpha_3(x))} + \frac{\hat{\alpha_3}(x)\alpha_3^{n+1}(x)}{(\alpha_3(x)-\alpha_1(x))(\alpha_3(x)-\alpha_2(x))}\right)\frac{t^n}{n!} \\
&= \frac{\hat{\alpha_1}(x)\alpha_1(x)}{(\alpha_1(x)-\alpha_2(x))(\alpha_1(x)-\alpha_3(x))}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1(x)t)^n}{n!} + \frac{\hat{\alpha_2}(x)\alpha_2(x)}{(\alpha_2(x)-\alpha_1(x))(\alpha_2(x)-\alpha_3(x))}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha(x)t)^n}{n!} \\
&+ \frac{\hat{\alpha_3}(x)\alpha_3(x)}{(\alpha_3(x)-\alpha_1(x))(\alpha_3(x)-\alpha_2(x))}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_3(x)t)^n}{n!} \\
&= \frac{\hat{\alpha_1}(x)\alpha_1(x)e^{\alpha_1(x)t}}{(\alpha_1(x)-\alpha_2(x))(\alpha_1(x)-\alpha_3(x))} + \frac{\hat{\alpha_2}(x)\alpha_2(x)e^{\alpha_2(x)t}}{(\alpha_2(x)-\alpha_1(x))(\alpha_2(x)-\alpha_3(x))} + \frac{\hat{\alpha_3}(x)\alpha_3(x)e^{\alpha_3(x)t}}{(\alpha_3(x)-\alpha_1(x))(\alpha_3(x)-\alpha_2(x))}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{H}K_n(x)\frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}(\hat{\alpha_1}(x)\alpha_1^n(x) + \hat{\alpha_2}(x)\alpha_2^n(x) + \hat{\alpha_3}(x)\alpha_3^n(x))\frac{t^n}{n!} \\
&= \hat{\alpha_1}(x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1(x)t)^n}{n!} + \hat{\alpha_2}(x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_2(x)t)^n}{n!} + \hat{\alpha_3}(x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_3(x)t)^n}{n!} \\
&= \hat{\alpha_1}(x)e^{\alpha_1(x)} + \hat{\alpha_2}(x)e^{\alpha_3(x)} + \hat{\alpha_3}(x)e^{\alpha_3(x)},
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. ■

5.1.3 Quelques propriétés des hybrinomiaux de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas

Dans cette section, nous donnons quelques formules de sommation et une relation entre les hybrinomiaux de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas. De plus, nous dérivons la représentation matricielle des hybrinomiaux de Tribonacci.

Théorème 5.1.5 *Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, on a les formules de sommation des hybrinomiaux de Tribonacci et de Tribonacci-Lucas*

$$\sum_{n=0}^{n} \mathbb{H}T_1(x) = \frac{\mathbb{H}T_{n+2}(x) + (1-x^2)\mathbb{H}T_{n+1}(x) - \mathbb{H}T_n(x) + x^2\mathbb{H}T_0(x) - \mathbb{H}T_1(x) - \mathbb{H}T_0(x) - \mathbb{H}T_{-1}(x)}{x+x^2}$$

et

$$\sum_{n=0}^{n}\mathbb{H}K_1(x)=\frac{\mathbb{H}K_{n+2}(x)+(1-x^2)\mathbb{H}K_{n+1}(x)-\mathbb{H}K_n(x)+x^2\mathbb{H}K_0(x)-\mathbb{H}K_1(x)-\mathbb{H}K_0(x)-\mathbb{H}K_{-1}(x)}{x+x^2},$$

respectivement.

Preuve: En utilisant l'équation (4.3) , nous pouvons obtenir les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
x\mathbb{H}T_0(x)&=\mathbb{H}T_2(x)-x^2\mathbb{H}T_1(x)-\mathbb{H}K_{-1}(x),\\
x\mathbb{H}T_1(x)&=\mathbb{H}K_3(x)-x^2\mathbb{H}T_2(x)-\mathbb{H}T_0(x),\\
x\mathbb{H}T_2(x)&=\mathbb{H}T_4(x)-x^2\mathbb{H}T_3(x)-\mathbb{H}T_1(x),\\
&\vdots\\
x\mathbb{H}T_{n-2}(x)&=\mathbb{H}K_n(x)-x^2\mathbb{H}T_{n-1}(x)-\mathbb{H}T_{n-3}(x),\\
x\mathbb{H}T_{n-1}(x)&=\mathbb{H}K_{n+1}(x)-x^2\mathbb{H}T_n(x)-\mathbb{H}T_{n-2}(x),\\
x\mathbb{H}T_n(x)&=\mathbb{H}K_{n+2}(x)-x^2\mathbb{H}T_{n+1}(x)-\mathbb{H}T_{n-1}(x).
\end{aligned}$$

Si on additionne les équations membre à membre, on a

$$\begin{aligned}
x\mathbb{H}T_0(x)+x\mathbb{H}K_1(x)+\ldots+x\mathbb{H}T_n(x)=\mathbb{H}T_n(x)+\mathbb{H}T_{n+1}(x)+\mathbb{H}T_{n+2}(x)-x^2\left(\sum_{i=0}^{n+1}\mathbb{H}T_i(x)-\mathbb{H}T_0(x)\right)\\
-\mathbb{H}T_{-1}(x)-\mathbb{H}T_0(x)-\mathbb{H}T_1(x),
\end{aligned}$$

aussi

$$\begin{aligned}
(x+x^2)\sum_{i=0}^{n}\mathbb{H}T_i(x)=\mathbb{H}T_n(x)+\mathbb{H}T_{n+1}(x)+\mathbb{H}T_{n+2}(x)-x^2\mathbb{H}T_{n+1}(x)+x^2\mathbb{H}T_0(x)\\
-\mathbb{H}T_{-1}(x)-\mathbb{H}T_0(x)-x^2\mathbb{H}T_1(x),
\end{aligned}$$

et on obtient

$$\sum_{n=0}^{n}\mathbb{H}T_1(x)=\frac{\mathbb{H}T_{n+2}(x)+(1-x^2)\mathbb{H}T_{n+1}(x)-\mathbb{H}T_n(x)+x^2\mathbb{H}T_0(x)-\mathbb{H}T_1(x)-\mathbb{H}T_0(x)-\mathbb{H}T_{-1}(x)}{x+x^2}.$$

En utilisant l'équation (5.4), obtenons

$$\sum_{n=0}^{n}\mathbb{H}K_1(x)=\frac{\mathbb{H}K_{n+2}(x)+(1-x^2)\mathbb{H}K_{n+1}(x)-\mathbb{H}K_n(x)+x^2\mathbb{H}K_0(x)-\mathbb{H}K_1(x)-\mathbb{H}K_0(x)-\mathbb{H}K_{-1}(x)}{x+x^2}.$$

■

Dans le théorème suivant nous donnons une relation entre le $n^{ème}$ hybrinomial de Tribonacci, $\mathbb{H}T_n(x)$ et le $n^{ème}$ hybrinomial de Tribonacci-Lucas.

Théorème 5.1.6 *Pour $n\geq 2$, on a la relation suivent entre le $n^{ème}$ hybrinomial de Tribonacci, $\mathbb{H}T_n(x)$ et le $n^{ème}$ hybrinomial de Tribonacci-Lucas, $\mathbb{H}K_n(x)$ est*

$$\mathbb{H}K_n(x)=x^2\mathbb{H}T_n(x)+2x\mathbb{H}T_{n-1}(x)+3\mathbb{H}T_{n-2}(x).$$

Preuve: En utilisant les équations (4.5) et (5.2), on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{H}K_n(x) = K_n(x) + iK_{n+1}(x) + \varepsilon K_{n+2}(x) + hK_{n+3}(x)\\
&= x^2T_n(x) + 2xT_{n-1}(x) + 3T_{n-2}(x) + i(x^2T_{n+1}(x) + 2xT_n(x) + 3T_{n-1}(x))\\
&+ \varepsilon(x^2T_{n+2}(x) + 2xT_{n+1}(x) + 3T_n(x)) + h(x^2T_{n+3}(x) + 2xT_{n+2}(x) + 3T_{n+1}(x))\\
&= x^2(T_n(x) + iT_{n+1}(x) + \varepsilon Tn + 2(x) + hTn + 3(x))\\
&+ 2x((T_{n-1}(x) + iT_n(x) + \varepsilon Tn + 1(x) + hTn + 2(x))\\
&+ 3((T_{n-2}(x) + iT_{n-1}(x) + \varepsilon Tn(x) + hTn + 1(x))\\
&= x^2\mathbb{H}T_n(x) + 2x\mathbb{H}T_{n-1}(x) + 3\mathbb{H}T_{n-2}(x).
\end{aligned}$$

Donc la preuve est terminée. ■

Dans le théorème suivant nous donnons la représentation matricielle des hybrinomiaux de Tribonacci.

Théorème 5.1.7 *Les hybrinomiaux de Tribonacci sont générés par matrice*

$$A(x) = \begin{pmatrix} x^2 & x & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

alors

$$Q_{\mathbb{H}T(x)}.A^n(x) = \begin{pmatrix} \mathbb{H}T_{n+4}(x) & x\mathbb{H}T_{n+3}(x) + \mathbb{H}T_{n+2}(x) & \mathbb{H}T_{n+3}(x)\\ \mathbb{H}T_{n+3}(x) & x\mathbb{H}T_{n+2}(x) + \mathbb{H}T_{n+1}(x) & \mathbb{H}T_{n+2}(x)\\ \mathbb{H}T_{n+2}(x) & x\mathbb{H}T_{n+1}(x) + \mathbb{H}T_n(x) & \mathbb{H}T_{n+1}(x) \end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

où

$$Q_{\mathbb{H}T(x)} = \begin{pmatrix} \mathbb{H}T_4(x) & x\mathbb{H}T_3(x) + \mathbb{H}T_2(x) & \mathbb{H}T_3(x)\\ \mathbb{H}T_3(x) & x\mathbb{H}T_2(x) + \mathbb{H}T_1(x) & \mathbb{H}T_2(x)\\ \mathbb{H}T_2(x) & x\mathbb{H}T_1(x) + \mathbb{H}T_0(x) & \mathbb{H}T_1(x) \end{pmatrix}$$

et $\mathbb{H}T_n(x)$ *est le* $n^{ème}$ *hybrinomial de Tribonacci.*

Preuve: En utilisant l'induction sur n, si $n = 0$, alors le résultat est évident.

Supposons que l'équation (5.5) est vraie pour tout entier positif k, c'est-à-dire

$$Q_{\mathbb{H}T(x)}.A^k(x) = \begin{pmatrix} \mathbb{H}T_{k+4}(x) & x\mathbb{H}T_{k+3}(x) + \mathbb{H}T_{k+2}(x) & \mathbb{H}T_{k+3}(x)\\ \mathbb{H}T_{k+3}(x) & x\mathbb{H}T_{k+2}(x) + \mathbb{H}T_{k+1}(x) & \mathbb{H}T_{k+2}(x)\\ \mathbb{H}T_{k+2}(x) & x\mathbb{H}T_{k+1}(x) + \mathbb{H}T_k(x) & \mathbb{H}T_{k+1}(x) \end{pmatrix},$$

où $\mathbb{H}T_{k+3}(x) = x^2\mathbb{H}T_{k+2}(x) + x\mathbb{H}T_{k+1}(x) + \mathbb{H}T_k(x)$ à partir de l'équation (5.3), pour $k \geq 0$.

Ensuite, nous devons montrer que ci-dessus l'égalité vaut pour $n = k + 1$. Alors par hypothèse de récurrence, nous obtenons

$$Q_{\mathbb{H}T(x)}A^{k+1}(x) = \left(Q_{\mathbb{H}T(x)}A^k(x)\right)A(x)$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbb{H}T_{k+4}(x) & x\mathbb{H}T_{k+3}(x) + \mathbb{H}T_{k+2}(x) & \mathbb{H}T_{k+3}(x) \\ \mathbb{H}T_{k+3}(x) & x\mathbb{H}T_{k+2}(x) + \mathbb{H}T_{k+1}(x) & \mathbb{H}T_{k+2}(x) \\ \mathbb{H}T_{k+2}(x) & x\mathbb{H}T_{k+1}(x) + \mathbb{H}T_{k}(x) & \mathbb{H}T_{k+1}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbb{H}T_{k+5}(x) & x\mathbb{H}T_{k+4}(x) + \mathbb{H}T_{k+3}(x) & \mathbb{H}T_{k+4}(x) \\ \mathbb{H}T_{k+4}(x) & x\mathbb{H}T_{k+3}(x) + \mathbb{H}T_{k+2}(x) & \mathbb{H}T_{k+3}(x) \\ \mathbb{H}T_{k+3}(x) & x\mathbb{H}T_{k+2}(x) + \mathbb{H}T_{k+1}(x) & \mathbb{H}T_{k+2}(x) \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, l'équation (5.5) est valable pour tout $n \geq 0$. ■

Conclusion

Dans notre travail nous avons abordées le nouveau système de numérotation non commutatif les nombres hybrides. Et nous avons étudiées quelques généralisations des nombres hybrides qui existent dans la littérature.

Le travail réalisé durant ce mémoire ouvre plusieurs perspectives de travaux futurs, à titre d'exemple :

• Fonction génératrice de la m-extension des p-nombres de Fibonacci et de Lucas.

Bibliographie

[1] I. Bruce. A modified Tribonacci sequence, *Fibonacci Quarterly, 22(3), 244-246, (1984)*

[2] S. Falcon, A. Plaza. On the Fibonacci k-numbers, Chaos, Solitons and Fractals, 32(5), 1615-1624, (2007).

[3] M. Feinberg. Fibonacci-Tribonacci. Fibonacci Quarterly, 1, 71-74, (1963).

[4] V. K. Gupta, Y. K. Panwar and O. Sikhwal . Generalized Fibonacci-Like Polynomial and its Determinantal Identities. Int. J. Contemp. Math. Sciences, 7(29), 1415-1420, (2012).

[5] İ. Gültekin, Y. Taşyurdu. On Period of the Sequence of Fibonacci Polynomials Modulo m. Discrete Dynamics in Nature and Society, 2013, 3p. https ://doi.org/10.1155/2013/731482,(2013).

[6] Jr. V. E. Hoggatt, M. Bicknell. Generalized Fibonacci Polynomials, Fibonacci Quarterly, 11, 457-465, (1973).

[7] C. Kizilateş. A Note on Horadam Hybrinomials, preprints. https ://doi.org/10.20944/preprints202001.0116.v1, (2020).

[8] E. G. Kocer , H. Alsan. Generalized Hybrid Fibonacci and Lucas p-numbers, Indian J Pure Appl Math https ://doi.org/10.1007/s13226-021-00201-w, (2021).

[9] E. G. Kocer, N. Tuglu. The Binet Formulas for the Pell and Pell-Lucas p-numbers, ARS Combinatoria, 85, 3-17, (2007).

[10] E. G. Kocer,N. Tuglu, A. Stakhov. On the m-extension of the Fibonacci and Lucas p-numbers, Chaos, Solitons and Fractals 40 (4) 1890-1906, (2009).

[11] H. Kose, N. Yilmaz, and N. Taskara. On Properties of Tribonacci-Lucas Polynomials, arXiv : 1409.3710v1 [math.NT] 12 Sep 2014, (2014).

[12] T. Koshy. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, John Wiley and Sons, (2019).

[13] M. Ozdemir. Introduction to Hybrid Numbers, Advances in Applied Clifford Algebras. ***26*** *(2018), 441–447.*

[14] J. S. Ramirez, V. F. Sirvent. Incomplete Tribonacci Numbers and Polynomials. Journal of Integer Sequences, 17, 1-13, (2014).

[15] A. Scott, T. Delaney and Jr. V. E. Hoggatt. The Tribonacci Sequence, Fibonacci Quarterly, 15(3), 193- 200, (1977).

[16] Y. Soykan. Summing Formulas for Generalized Tribonacci Numbers, Universal Journal of Mathematics and Applications, 3(1) 1-11. https ://doi.org/10.32323/ujma.637876, (2020).

[17] A. Shannon. Tribonacci Numbers and Pascal's Pyramid, Fibonacci Quarterly, 15(3), 268- 275, (1977).

[18] W. Spickerman. Binet's Formula for the Tribonacci Sequence, Fibonacci Quarterly, 20, 118-120, (1981).

[19] A. Stakhov, B. Rozin. Theory of Binet Formulas for Fibonacci and Lucas p-numbers, Chaos, Solitons and Fractals, 27(5), 1162-1177, (2006).

[20] A. Szynal-Liana, I. Wloch. On Pell and Pell-Lucas Hybrid Numbers, Commentat. Math, 58,11-17, (2018).

[21] A. Szynal-Liana, I. Wloch. The Fibonacci hybrid numbers, Utilitas Math, 110, 3-10, (2019)

[22] A. Szynal-Liana, I. Wloch. On Jacosthal and Jacosthal-Lucas hybrid numbers, Ann. Math. Sil, 33, 276-283,(2019).

[23] A. Szynal-Liana, I. Wloch. Introduction to Fibonacci and Lucas Hybrinomials, Complex Var. Elliptic Equ, 65(10), 1736-1747. https ://doi.org/10.1080/17476933.2019.1681416, (2020).

[24] A. Szynal-Liana, I. Wloch. Generalized Fibonacci-Pell Hybrinomials, Online J. Anal. Comb, 15, 1-12, (2020).

[25] E. Tan, N. R. Ait-Amrane. On a new generalization of Fibonacci hybrid numbers. Indian journal of pure and applied mathematics.

[26] Y. Taşyurdu. On the Sums of Tribonacci and Tribonacci-Lucas Numbers,Applied Mathematical Sciences, Vol. 13, 2019, no. 24, 1201-1208 HIKARI Ltd, www. m-hikari. com https : //doi. org/10. 12988/ams. 910144, (2019).

[27] Y. Taşyurdu. Tribonacci and Tribonacci-Lucas Hybrid Numbers. Int. J. Contemp. Math. Sciences, 14(4), 245-254. https ://doi.org/10.12988/ijcms.2019.91124, (2019).

[28] Y. Taşyurdu, Y. Emre polat. Tribonacci and Tribonacci-Lucas Hybrinomials,Journal of Mathematics Research, (2021).

[29] N. Tuglu, E. G. Kocer, A. Stakhov. Bivariate fibonacci like p-polynomials, journal homepage : www.elsevier.com/ locate/amc, (2011).