UNIVERSITÉ YAHIA FARÈS DE MÉDÉA

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques et l'informatique



MÉMOIRE de MASTER

en Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Algèbre linéaire et Applications

présenté par

GHERNOUTI RAWIDA et MAMERI IMANE

soutenu publiquement devant le Jury composé de :

Ait AmraneNacimaRosa	Univ.Médéa	President
Hamza Abdel halim Younes	Univ.Médéa	Promoteur
Serier.Abdallah Khadidja	Univ.Médéa	Examinateur

Médéa, 2022/2023

Remerciements

Dédicace

⋆⋆ *Imane* ⋆⋆

Dédicace

⋆⋆ *Rawida* ⋆⋆

Notation

$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombres réels .
$\mathbb{N}$	L'ensemble des nombres naturels .
$\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$	L'ensemble des matrices carrées d'ordre n .
$\mathbb{E}$	L'espace vectoriel .
$\mathbb{R}^n$	L'espace vectoriel des vecteurs à composantes réels, de dimension n.
$\{e_1, e_2, e_3\}$	La base canonique.
I_n	La matrice identité d'ordre n .
$A^\top$	La matrice transposée de la matrice A
A^{-1}	La matrice inverse de la matrice A
$det(A)$	Le déterminant d'une matrice carrée A .
$ker(A)$	Le noyau de la matrice A.
$rg(A)$	Le rang de la matrice A .
$Im(A)$	L'image de la matrice A .
P	La projection.
$U^\perp$	Le sous-espace vectoriel des vecteurs orthogonaux à U .
$\langle u, v\rangle$	Le produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$
λ_i	Les valeurs propres de la matrice A .
δ_{ij}	Le symbole de Kronecker valant 1 si $i = j$,0 si $i \neq j$.
$col(A)$	l'espaceparlescolonnes de A .
$Nul(A)$	l'espace de tout les solutions Ax = 0 .
$Raw(A)$	l'espace engendré par les lignes de A qui son les colonnes de $A^\top$.

Table des matières

1 Notions préliminaires sur l'algèbre linéaire **2**

1.1 Applications linéaires et matrices 2

1.2 Produit intérieur et norme 3

1.3 Forme quadratique 4

1.4 Formes bilinéaires 4

1.5 Base 5

1.6 Valeurs propres et vecteurs propres 6

1.7 Matrice symétrique définies positives et semi-définies positives 8

1.7.1 Matrice symétriques définie positives 8

1.7.2 Matrice symétriques semi-définie positives 9

2 Espace vectoriel et Projection **10**

2.1 Expression d'une application linéaire 10

2.2 Sous-espace et projection 12

2.3 Matrices de Projection 13

2.4 Projection sur des droites vectorielles et des plans (Hyperplans)vectoriel . . . 16

2.5 Approximation par les moindres carrés 17

2.6 Moindre carrés et Projection 18

2.7 Maximum et minimum d'une forme quadratique 19

2.8 Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt 20

3 La décomposition spectrale **23**

3.1 Valeurs propres et vecteurs propres 23

3.1.1 Détermination des valeurs et vecteurs propres d'une matrice 23

3.2 Décomposition spectrale 24
3.3 Diagonalisation des matrices symétriques 25
3.4 Inverse et puissances 26
3.5 Forme quadratique 28

4 Valeurs singulières et décompostion en valeur singulier (SVD) 30

4.1 Valeurs singulières d'une matrice et décomposition en valeurs singulières . . . 30
4.2 Décomposition en valeurs singulières 33
4.3 Valeurs singuliers et vecteurs singuliers 35
4.3.1 Théorème 20 (d'Eckart-Young) 39

5 Applications 43

5.1 Problème d'optimisation avec contrainte 43
5.2 Optimisations avec contraintes de distance et d'orthogonalité 44
5.3 Les sous-espaces vectoriels fondamentaux liés à une matrice 45
5.4 La compresion de l'image 49
5.5 Décomposition polaire d'une matrice 51
5.6 Analyse par composente principale et meilleurs matrices de rang réduite . . 52
5.7 Extraction d'informations (EI) et l'indexation sémantique latente, (LSI) . . . 54
5.7.1 Aperçu sur la l'indexation sémantique latente, LSI. 55
5.7.2 Solution au probléme d'indextion 58

Table des figures

2.2.1 La projection orthogonale de P sur U 12

2.6.1 La projection orthogonale de b sur col(A) 18

INTRODUCTION

L'algèbre linéaire est une branche fondamentale des mathématiques largement utilisée dans divers domaines scientifiques et technologiques, l'algèbre linéaire trouve des applications clés dans des techniques de compression d'image, d'analyse des données telles que l'analyse en composantes principales (ACP) et l'indexation sémantique latente (latent sémantique indexent), qui permettent d'extraire des informations significatives et d'améliorer la recherche d'informations ·

L'objectif principal est de comprendre les concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire et voir comment ces concepts peuvent être appliqués de manière efficace et pertinente dans ces domaines spécifiques ·

La première partie de ce mémoire est consacré à l'étude des fondements de l'algèbre linéaire, y compris les concepts de vecteurs, de matrices, et de transformations linéaires. Nous examinerons la décomposition spectrale pour les matrices symétriques et la décomposition en valeurs singulières (SVD) applicable à toute matrice ·

Dans la deuxième partie, nous aborderons les applications de l'algèbre linéaire, notamment la SVD dans la compression d'images. La troisième partie de ce mémoire se concentrera sur l'analyse en composantes principales (ACP) et son lien avec l'algèbre linéaire. Nous étudierons les concepts clés de l'ACP, tels que la réduction de dimensionnalité, la projection des données dans un espace de composantes principales et l'interprétation des résultats. Nous explorerons les méthodes de calcul des composantes principales à l'aide de l'algèbre linéaire, notamment la décomposition en valeurs propres et la méthode des moindres carrés ·

Enfin, dans la dernière partie, nous aborderons l'indexation latente (latent semantic indexing) et son application dans la recherche d'informations. Nous examinerons comment l'algèbre linéaire peut être utilisée pour modéliser les relations sémantiques entre les termes et les documents, et comment l'indexation latente permet d'améliorer la précision des résultats de recherche ·

Chapitre 1

Notions préliminaires sur l'algèbre linéaire

voir le réference[1]

Dans ce chapitre, nous présentons une démonstration formelle selon laquelle une application linéaire peut être écrite comme le produit avec une matrice. Ensuite, nous décrivons les faits de base sur le produit intérieur et la norme des vecteurs. Nous énumérons ensuite les formules qui apparaissent fréquemment en relation avec "les formes linéaires", "les formes quadratiques" et "les formes bilinéaires". Ensuite, nous discutons brièvement de l'expansion des vecteurs par rapport à une base orthonormée et de l'approximation des moindres carrés. Ensuite, nous résumons les bases des valeurs propres et des vecteurs propres, Enfin, nous résumons les matrices symétriques définies positives et semi-définies positives ·

1.1 Applications linéaires et matrices

On considerera que des $\mathbb{R}$ espace vectoriels et des matrices à coefficients réels ·

Définition 1.1.1

Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application linéaire si : $c \in \mathbb{K}(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ où $\mathbb{C})$

$$f(u+v) = f(u) + f(v), \quad f(cu) = cf(u) \tag{1.1}$$

Supposons qu'une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ effectué une transformation du vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ vers le vecteur $u' \in \mathbb{R}^m$., Si u est un vecteur colonne dont la i^{eme} composante est u_i, que nous abrégeons en $u = (u_i)$, nous pouvons l'écrire comme :

$$u = \sum_{j=1}^{n} u_j e_j \tag{1.2}$$

où e_j est le vecteur en n dimensions dont la j^{i-eme} composante est 1 *et toutes les autres composantes sont égales à* 0. *Nous appelons l'ensemble $\{e_1, ..., e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ ·*

1.2 Produit intérieur et norme

Définition 1.2.1

Le produit intérieur $\langle a, b\rangle$ de deux vecteur $a = (a_i)$ et $b = (b_i)$ est défini par

$$\langle a, b\rangle = a^\top b = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \tag{1.3}$$

Propriétés

De la é*quation*(1.3) on a les propriétés suivantes :

Symétrie : $\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle$ ·

Bilinéarité : $\langle a, \alpha b + \beta c\rangle = \alpha\langle a, b\rangle + \beta\langle a, c\rangle$,où α et β sont des nombres réels quelconque ·

Positivité :$\langle a, a\rangle \geq 0$, où l'égalité est atteinte si seulement si pour $a = 0$ ·

Définition 1.2.2

La norme euclidienne $\parallel a \parallel$ de vecteur $a = (a_i)$ est défini par :

$$\parallel a \parallel = \sqrt{\langle a, a\rangle} = \sqrt{a^\top a} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \tag{1.4}$$

Propriétés

Un vecteur ayant une norme unitaire est appelé vecteur unitaire. La norme de é*quation*(1.4) est possède les propriétés suivantes :

Positivité : $\parallel a \parallel \geq 0$, où l'égalité est vérifiée si seulement si pour $a = 0$ ·

Inégalité de Schwarz : $|\langle a, b\rangle| \leq \parallel a \parallel \cdot \parallel b \parallel$ ·

Inégalité triangulaire : $\parallel a + b \parallel \leq \parallel a \parallel + \parallel b \parallel$ ·

PositiveHomogeneité : $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \parallel \lambda a \parallel = |\lambda| \cdot \parallel a \parallel$

1.3 Forme quadratique

Définition 1.3.1

Une forme quadratique est une fonction $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définit par $Q(x) = x^\intercal Ax$ où A est une matrice symétrique ·

Exemple 1

$$Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto Q(x) = \| Ax \|_2^2$$
$$\| Ax \|_2^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle A^\top Ax, x \rangle = x^\top \langle A^\top A \rangle x$$

où $A^\top A$ est symétrique donc Q est une forme quadratique ·

Exemple 2

$$Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$Q(x, y) = x^2 - 6xy + 9y^2$$
$$Q(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} = \mathrm{A}^\top$$

Q est un forme quadratique ·

D'une façon generale $Q(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 + \sum_{1 \leq i,j \leq n} \alpha_{ij} x_i x_j$ ·

-La question est d'etudie le sign de $Q(x)$ est de déterminer ses extremas ·

- l'idée est de voir si on peut trouver une base de $\mathbb{R}^n$ dans la quelle Q s'exprime sans les termes mixtes $(\alpha x_i x_j)$ ·; chose qu'on sera au chapitre 3 ·

1.4 Formes bilinéaires

Définition 1.4.1

Pour une matrice constante $A = (a_{ij})$ et des vecteurs variables $x = (x_i)$ et $y = (y_i)$, nous appelons l'expression B est une forme bilinéaire en x et y ·

$$B = \langle x, Ay \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \tag{1.5}$$

Pour laquelle nous observons l'égalité fondamentale

$$\langle x, Ay \rangle = \langle A^\top x, y \rangle. \tag{1.6}$$

En fait, les deux côtés sont égaux à $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$ *selon la règle du produit d'une matrice et d'un vecteur ·*

1.5 Base

Définition 1.5.1

Un ensemble des vecteurs $\{u_1, \cdots, u_r\}$ *est dit être un système orthonormal si tous les vecteurs* u_i *sont unitaires et orthogonaux les uns par rapport aux autres, c'est-à-dire que :*

$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases} \tag{1.7}$$

Où δ_{ij} *est le symbole de Kronecker ·*

Soit tout vecteur quelconque x *peut être exprimé de manière unique comme une combinaison linéaire de* n *vecteurs* $u_1, ..., u_n$*, alors ceux-ci sont considérés comme une base de cet espace et* n *est appelé la dimension de cet espace . Un système orthonormal de* n *vecteurs* $\{u_1, ..., u_n\}$ *constitue une base orthonormale de l'espace* $\mathbb{R}^n$ *de* n *dimensions ·*

L'expression d'un vecteur donné x *sous forme de combinaison linéaire d'une base orthonormale* $u_i, i = 1, ..., n$*, est de la forme :*

$$x = c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n \tag{1.8}$$

est appelée development de x *en termes de* $\{u_i\}$ *.*

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \langle \sum_{i=1}^{n} c_i u_i, \sum_{j=1}^{n} c_j u_j \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} c_i c_j \langle u_i, u_j \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} c_i c_j \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i^2$$

$= c_1^2 + \cdots + c_n^2 (1.9)$

En calculant le produit intérieur de $\langle u_i, x\rangle$ *et en notant que* $\{u_i\}$ *est un système orthonormal, nous obtenons :*

$$\langle u_i, x\rangle = c_1\langle u_i, u_1\rangle + \cdots + c_i\langle u_i, u_i\rangle + \cdots + c_n\langle u_i, u_n\rangle = c_i \tag{1.10}$$

Par conséquent, l'expansion de équation(1.8) *s'écrit sous la forme*

$$x = \langle u_1, x\rangle u_1 + \cdots + \langle u_n, x\rangle u_n \tag{1.11}$$

Puisque $\{u_i\}$ *est une base, l'expression de développement est unique. , le carré de sa norme s'écrit comme suit :*

$$\|x\|^2 = \langle u_1, x\rangle^2 + \cdots + \langle u_n, x\rangle^2 \tag{1.12}$$

1.6 Valeurs propres et vecteurs propres

Pour une matrice A d'ordre n symétrique, on appelle la valeurλ qui satisfait

$$Au = \lambda u;\ et\ u \neq 0 \tag{1.13}$$

Une valeur propre de A est un scalaire λ tel qu'il existe un vecteur $u \neq 0$ appelé vecteur propre correspondant, tel que é*quation*(1.13) soit vérifiée . L'équation(1.13) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$(\lambda I - A)u = 0 \tag{1.14}$$

Ceci est un ensemble d'équations linéaires en u . Comme il est bien connu, cela a une solution $u \neq 0$ si et seulement si le déterminant de la matrice de coefficient est égal à 0, c'est-à-dire

$$\phi(\lambda) = det(\lambda I - A) = 0 \tag{1.15}$$

Ceci est appelé l'équation caractéristique, où $|\lambda I - A|$ représente le déterminant ;$\phi(\lambda)$ est un polynôme de degré n en λ, appelé polynôme caractéristique. Étant donné que

é*quation*(1.15) est une équation algébrique de $n^{ième}$ ordre avec des coefficients réels, elle a en général n solutions dans le domaine complexe ·

Ainsi, la matrice A a n valeurs propres et n vecteurs propres correspondants. Cependant, pour une matrice symétrique, toutes les valeurs propres sont réelles et les vecteurs propres correspondants sont réelles. Cela peut être démontré comme suit :

Soit λ une valeur propre (éventuellement un nombre complexe) de A, et u le vecteur propre correspondant (éventuellement avec des composantes complexes). Leur équation caractéristique et son complexe conjugué est écrites comme

$$Au = \lambda u, \quad A\overline{u} = \overline{\lambda}\overline{u} \tag{1.16}$$

et on a

$$\langle \overline{u}, Au \rangle = \lambda \langle \overline{u}, u \rangle, \qquad \langle u, A\overline{u} \rangle = \overline{\lambda} \langle u, \overline{u} \rangle \tag{1.17}$$

Si on écrit $u = (u_i)(\neq 0)$ on voit que

$$\langle \overline{u}, u \rangle = \langle u, \overline{u} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{u_i} u_i = \sum_{i=1}^{n} |u_i|^2 > 0 \tag{1.18}$$

Où $|\langle \overline{u}, u \rangle = \langle u, \overline{u} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{u_i} u_i = \sum_{i=1}^{n} |u_i|^2|$ représente la valeur absolue d'un nombre complexe. Étant donné que A est symétrique, alors

$$\langle u, A\overline{u} \rangle = \langle A^{\top} u, \overline{u} \rangle = \langle Au, \overline{u} \rangle = \langle \overline{u}, Au \rangle \tag{1.19}$$

Par conséquent, $\lambda = \overline{\lambda}$, et donc λ est un nombre réel ·

De plus, les vecteurs propres correspondant à des valeurs propres différentes sont mutuellement orthogonaux. Cela est démontré comme suit ·

Soient u et $u^{'}$ les vecteurs propres de A pour les valeurs propres λ et $\lambda^{'}(\lambda \neq \lambda^{'})$, et écrivons

$$Au = \lambda u, \qquad Au^{'} = \lambda^{'} u^{'} \tag{1.20}$$

Le produit scalaire de la première équation avec $u^{'}$ des deux côtés et le produit scalaire de la deuxième équation avec u des deux côtés sont

$$\langle u^{'}, Au\rangle = \lambda\langle u^{'}, u\rangle, \qquad \langle u, Au^{'}\rangle = \lambda^{'}\langle u, u^{'}\rangle \tag{1.21}$$

Puisque A est symétrique, on à

$$\langle u^{'}, Au\rangle = \langle A^{\top}u^{'}, u\rangle = \langle Au^{'}, u\rangle = \langle u, Au^{'}\rangle \tag{1.22}$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\lambda\langle u^{'}, u\rangle = \lambda^{'}\langle u, u^{'}\rangle \ \ (= \lambda^{'}\langle u^{'}, u\rangle) \tag{1.23}$$

Cela signifie que $(\lambda - \lambda^{'})\langle u^{'}, u\rangle = 0$. Comme $\lambda \neq \lambda^{'}$, cela implique que $\langle u^{'}, u\rangle$, c'est-à-dire que u et $u^{'}$ sont orthogonaux l'un à l'autre ·

S'il y a une multiplicité parmi les n valeurs propres, les vecteurs propres pour une valeur propre multiple ne sont pas uniques. Cependant, leurs combinaisons linéaires quelconque sont également des vecteurs propres pour la même valeur propre . Par conséquent, nous pouvons les choisir, en utilisant, par exemple, l'orthogonalisation de Schmidt , pour qu'ils soient des vecteurs mutuellement orthogonaux. Si u est un vecteur propre, pour une constante quelconque $cu(c \neq 0)$ est également un vecteur propre pour la même valeur propre ·

Par conséquent, les vecteurs propres $\{u_i\}, i = (1, ..., n)$ d'une matrice symétrique peuvent être choisis pour former un système orthonormal de vecteurs ·

1.7 Matrice symétrique définies positives et semi-définies positives

1.7.1 Matrice symétriques définie positives

Soit S une matrices symétriques d'ordre $n \times n$ ·

Définition 1.7.1

On dit que S une matrice définie positive si et seulement si : $\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\} : x^{\top}Sx > 0$ ·

Théorème 1

Soit S, T deux matrices symétriques alors on a les équivalences suivants :

1)S est définie positive ·

2) Touts les valeurs propres de S sont strictement positive ·

3) Tout les mineurs de S sont strictement positive ·

4) Si S et T sont symétriques définies positives alors $S + T$ et aussi symétriques définies positives ·

5) Si Q est une matrice orthogonale et S symétrique définie positive alors : $Q^\top SQ$ l'est aussi orthogonale ·

1.7.2 Matrice symétriques semi-définie positives

Définition 1.7.2

Une matrice carré S et semi-définie positives si l'une des propriétés est réalisée :

1) Touts les valeurs propres de S sont supérieur ou égale à 0 ·

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$: $x^\intercal Sx \geq 0$ ·

3) Les mineurs de S sont superieure ou égale à 0 ·

Chapitre 2

Espace vectoriel et Projection

voir le reference [1], [4]

Dans ce chapitre, on introduit le concept de matrice de projection. Ce concept joue un rôle important vu qu'il implique le concept "d'orthogonalité" et de "plus courte distance". On parlera de décomposition en somme directe et de supplémentaire orthogonale. Puis en déduira une expression de la matrice projection. On illustrera ce concept par des exemples de projection sur des droits et des plans. On décrira aussi le principe d'orthogonalisation de Gram-Schmidt qui décrit la manière d'obtenir un système orthonormé à partir d'une famille libre de vecteurs.

Définition 2.0.1 *On appelle application linéaire de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F toute application* $f : E \to F$ *vérifiant :*

$$\forall x, y \in E,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

et $\mathbb{K}$ si le corp .

2.1 Expression d'une application linéaire

Une application linéaire f :$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ peut être représentée par une matrice A d'ordre $m \times n$. Une façon de la représenter est de choisir une base orthonormée $\{u_1, ..., u_n\}$,de $\mathbb{R}^n$ ·

Théorème 2 (Fondamental)

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

et soit $\{u_1, \cdots, u_n\}$ une base orthonormé de $\mathbb{R}^n$ on a

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i^t \tag{2.1}$$

où $a_i = f(u_i)$

Preuve

On utilise le fait que A et $\sum_{i=1}^{n} a_i u_i^t$ sont égaux sur une base, ici on utilise la base orthonormée $\{u_1, ..., u_n\}$:

$$Au_i = f(u_i) = a_i = a_i(u_i^\intercal u_i) = a_i(u_i^\intercal)u_i$$

Comme $(u_i^\intercal u_j) = (\delta_{i,j}\,)$ Alors

$$Au_i = a_1 u_1^\intercal u_i + a_2 u_2^\intercal u_i + ... + a_i u_i^\intercal u_i + ... + a_n u_n^\intercal u_i$$

Donc

$$Au_i = \sum_{j=1}^{n} (a_j u_j^\intercal) u_i \quad \forall i = 1, ..., n$$

Donc

$$A = \sum_{j=1}^{n} a_j u_j^t$$

Exemple

Si $\{e_1, ..., e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et si $f(e_i) = a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ .. \\ .. \\ a_{mi} \end{pmatrix}$, alors

$$A = a_1 e_1^\intercal + ... + a_n e_n^\intercal \tag{2.2}$$

en effet :

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ .. \\ .. \\ a_{m1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \end{pmatrix} + ... + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ .. \\ .. \\ a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & a_{2n} \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} = A$$

2.2 Sous-espace et projection

Soient $\{u_1, ..., u_r\}$ une famille libre de $\mathbb{R}^n$. Notons par U l'espace vectoriel engendré par cette famille, On sait que U est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension r ·

Un sous-espace vectoriel engendré par un seul vecteur est une droite qui passe par l'origine et qui contient ce vecteur . Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par deux vecteurs est un plan qui contient l'origine et ces deux vecteurs ·

Définition 2.2.1 *Soit P un point de $\mathbb{R}^n$ et U un sous-espace vectoriel.Le point Q de U définit de façons que $\overrightarrow{PQ}$ soit orthogonal à U s'appelle la projection orthogonale de P sur U ·*

Le point Q s'appelle la projection orthogonale de P sur U (Figure 2.2.1) ·

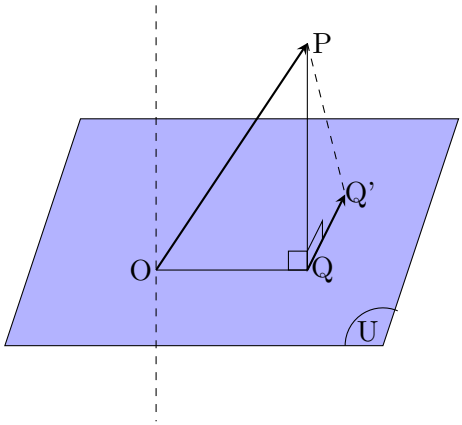


FIGURE 2.2.1 – La projection orthogonale de P sur U

Théorème 3

La projection orthogonale Q de P sur U vérifie :

$$d(P,U) = \| PQ \| \tag{2.3}$$

Autrement dit Q définit la plus petite distance de P au sous-espace U, c'est-à-dire le point de U le plus proche de P ·

Preuve

Soit $Q' \in U$, Par la considération des triangles rectangles qui y apparaissent on a :

$$\| \overrightarrow{PQ'} \| = \| \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QQ'} \|^2 = \| \overrightarrow{PQ} \|^2 + \| \overrightarrow{QQ'} \|^2 + 2\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QQ'} \rangle. \tag{2.4}$$

Où $\overrightarrow{PQ} \perp U$ et $\overrightarrow{QQ'} \in U$ ·

Donc $\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QQ'} \rangle = 0$ Alors :

$$\| \overrightarrow{PQ'} \|^2 = \| \overrightarrow{PQ} \|^2 + \| \overrightarrow{QQ'} \|^2 \geqslant \| \overrightarrow{PQ} \|^2 . \tag{2.5}$$

Finalement

$$\| \overrightarrow{PQ'} \| \geqslant \| \overrightarrow{PQ} \| \tag{2.6}$$

2.3 Matrices de Projection

$U^{\perp}$ étant l'ensemble de tous les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ orthogonaux a tous les vecteurs de U · Rappelons aussi que $U^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et vérifie :

$$\mathbb{R}^n = U \bigoplus U^{\perp} \tag{2.7}$$

Il en résulte l'unicité de la décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme direct à partir du sous-espace U. A partir de é*quation*(2.7), on peut décomposer n'importe quel vecteur x de $\mathbb{R}^n$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^{n]}, \exists! a \in U; \exists! b \in U^{\perp} : x = a + b \tag{2.8}$$

$$\forall y \in U : \| x - y \|^2 = \| (x - a) + (a - y) \|^2$$

$$= \| b + (a - y) \|^2$$

$$= \| b \|^2 + \| a - y \|^2 + 2\langle b, a - y \rangle$$

Où $b \in U^{\perp}$ et $a - y \in U$

Donc $\langle b, a - y \rangle = 0$, il rest :

$$\| x - y \|^2 = \| b \|^2 + \| a - y \|^2$$

$$\geqslant \| b \|^2 = \| x - a \|^2$$

Donc $\forall y \in U$ on à

$$\| x - y \| \geqslant \| x - a \|$$

l'unicité de la projection orthogonale implique l'unicité du point de U qui réalise la distance minimale ·

On a bien d(x, U) = a et $d(x, U^{\perp}) = b$ ·

Notons par P l'application :

$$P_r : \mathbb{R}^n \to U$$

$$x \to a$$

et notons par $P_r^{\perp}$ l'application :

$$P_r^{\perp} : \mathbb{R}^n \to U^{\perp}$$

$$x \to b$$

P_r est l'application linéaire projection orthogonale sur U ·

$P_r^{\perp}$ est l'application linéaire projection orthogonale sur $U^{\perp}$ ·

On a

$$P_r(x) = \begin{cases} x & : \ x \in U \\ 0 & : \ x \in U^{\perp} \end{cases}$$

$$P_r^{\perp}(x) = \begin{cases} 0 & : \ x \in U \\ x & : \ x \in U^{\perp} \end{cases}$$

Car $x = x + 0_{u^{\perp}}$ de façon unique si $x \in U$, et $x = 0_u + x$ de façons unique si $x \in U_{\perp}$ ·

Soient $\{u_1, ..., u_r\}$une base orthonormée de U ·

On peut, en utilisant le théorème de la base incomplète pour compléter cette base de U en une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ moyennement le procédé de Gram-Schmidt qu'on décrira en fin de chapitre ·

Soit $\{u_1, ..., u_r, u_{r+1}, ..., u_n\}$ cette base orthonormée ·

On a

$$P_r(u_i) = \begin{cases} u_i & : \ 1 \leqslant i \leqslant r \ car \ u_i \in U \\ 0 & : \ r+1 \leqslant i \leqslant n \ car \ u_i \in U^{\perp} \end{cases}$$

$$P_r^{\perp}(u_i) = \begin{cases} 0 & : \ 1 \leqslant i \leqslant r \\ u_i & : \ r+1 \leqslant i \leqslant n \end{cases}$$

Et en utilisant le Théorème suivant :
Les propositions suivantes sont équivalentes on a :

1. $E = E_1 \oplus E_2$ ·

2. $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ ·

3. $\forall x \in E, \exists! a \in E, \exists! b \in E_2 : x = a + b$ ·

On obtient le théorème suivant

Théorème 4

$$\begin{cases} P_r &= u_1 u_1^\intercal + ... + u_r u_r^\intercal \\ P_r^\perp &= u_{r+1} u_{r+1}^\intercal + ... + u_n u_n^\intercal \end{cases}$$

Corollaire

Pour tout sous-espace vectoriel U de $\mathbb{R}^n$, si P_r est la projection orthogonale sur U on a :

$$I = P_r + P_r^\perp$$

Preuve.

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \exists! a \in U, \exists! b \in U^\perp : x = a + b.$$

Où

$$I(x) = x, P_r(x) = a \ et \ P_r^\perp(x) = b.$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : I(x) = P_r(x) + P_r^\perp(x) = (P_r + P_r^\perp)(x).$$

Alors

$$I = P_r + P_r^\perp$$

Corollaire

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \| x \|^2 = \| P_r(x) \|^2 + \| P_r^\perp(x) \|^2$$

Théorème 5

Soit P_r est projection orthogonale sur U , alors pour tout U on a :

$$P_r^\top = P_r \tag{2.9}$$

et

$$P_r^2 = P_r \tag{2.10}$$

Preuve.

1) Pour démontrer la formule é*quation*(2.9), on obtient

$$\begin{aligned} P = \sum_{i=1}^{r} u_i u_i^\intercal \Rightarrow P^\intercal &= (\sum_{i=1}^{r} u_i u_i^\intercal)^\intercal \\ &= \sum_{i=1}^{r} (u_i u_i)^\intercal \\ &= \sum_{i=1}^{r} (u_i^\intercal)^\intercal u_i^\intercal \\ &= \sum_{i=1}^{r} u_i u_i^\intercal \end{aligned}$$

2) Pour démontrer la formule é*quation*(2.10), on a

$\forall$ x $\in \mathbb{R}$: $P^2(x) = P(P(x))$ où P(x) $\in$ U donc $P(P(x)) = P(x)$ alors $P^2 = P$ ·

On dit que la projection orthogonale est idempotent ($P^n = P \ \forall \ x \in N$) ·

2.4 Projection sur des droites vectorielles et des plans (Hyperplans)vectoriel

Soit Δ une droite vectorielle, $dim\Delta = 1$ donc il existe un vecteur unitaire ·

u $\in \Delta : \Delta = vect(u)$ ·

Soit P est la projection orthogonale sur Δ alors d'après le théorème 2 ·

$$P = uu^\intercal$$

On a

$$\begin{aligned} P(x) &= uu^\intercal(x) \\ &= \text{u } \langle x, u \rangle \\ &= \langle x, u \rangle u \end{aligned}$$

Rappelons que si $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ Alors

$$\begin{aligned} u^\intercal v = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ = \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Soit Π est un hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^n$, (dim $\Pi = n-1$) et si n est un vecteur normale ($\| n \| = 1$) à Π Alors

$$\begin{cases} \mathbb{R}^n & = \Pi \bigoplus vect(n) \\ vect(n) & = \Pi^{\perp} \end{cases}$$

Soit P est la projection orthogonal sur Π ·

Alors

$$I = P + P^{\perp}$$
$$I = P + nn^{\intercal}$$

Donc $P = I - nn^{\top}$ et $P(x) = x - \langle x, n \rangle n$ ·

2.5 Approximation par les moindres carrés

Définition 2.5.1

Pour un système orthonormal $\{u_i\}$, $i = 1, \ldots, r$,$(r \leqslant n)$ *de vecteurs, le vecteur x n'est pas nécessairement décomposable dans le systéme c-à-d* $x \in vect\ (u_i)_{1 \leq i \leq r}$ *. Cependant, nous pouvons déterminer les coefficients de développement* $c_i, i = 1, \ldots, r$, *de telle sorte que d(x,u) soit minimale ; on sait que* $d(x, u)$ *soit minimale ; où on sait que*

$$J = \|x - (c_1 u_1 + \cdots + c_r u_r)\|^2 = d^2(x, u) \tag{2.11}$$

est minimisé. L'expansion de cette manière est appelée l'approximation par moindres carrés. L'expression ci-dessus est réécrit comme

$$J = \langle x - \sum_{i=1}^{r} c_i u_i, x - \sum_{j=1}^{r} c_j u_j \rangle \tag{2.12}$$

En différenciant par rapport à c_k, on obtient :

$$\frac{\partial J}{\partial_{c_k}} = \langle -u_k, x - \sum_{j=1}^{r} c_j u_j \rangle + \langle x - \sum_{i=1}^{r} c_i u_i, -u_k \rangle$$
$$\frac{\partial J}{\partial_{c_k}} = -2\langle u_k, x \rangle + 2 \sum_{j=1}^{r} c_j \langle u_k, u_j \rangle = -2\langle u_k, x \rangle + 2c_k \tag{2.13}$$

En égalant cette expressions à 0, on obtient $c_k = \langle u_k, x \rangle$. Par conséquent, le développement des moindres carrés a la forme suivante :

$$x \approx \langle u_1, x \rangle u_1 + \ldots + \langle u_r, x \rangle u_r = \widehat{x} \tag{2.14}$$

donc $c_i = proj(x) = \langle x, u_i \rangle$ et $\sum c_i u_i \in vect(u_i)$

L'ensemble Ude tous les vecteurs qui peuvent être exprimés sous forme de combinaisons linéaires de $u_1, ..., u_r$est appelé le sous-espace engendré par $u_1, ..., u_r$. Si $u_1, ..., u_r$ forment un système orthonormal, ils constituent la base du sous-espace U, et sa dimension est r. Le côté droit de $équation(2.14)$ équivaut à la projection $P_U x$ de x sur le sous-espace U par la matrice de projection $P_U = u_1 u_1^\top + \cdots + u_r u_r^\top$ Autrement dit, l'approximation par moindres carrés équivaut à la projection orthogonal sur un sous-espace. De cette observation, nous constatons que si le vecteur x est dans le sous-espace U, $équation(2.14)$ est vérifiée avec égalité, c'est-à-dire :

$$x = \langle u_1, x \rangle u_1 + \cdots + \langle u_r, x \rangle u_r \ (= P_U x) \tag{2.15}$$

Les vecteurs $\{u_i\}, i = (1, ..., r)$ sont une base orthonormée de U, et le développement est unique . Le carré de sa norme est donnée par

$$\|x\|_2^2 = \langle u_1, x \rangle^2 + \cdots + \langle u_r, x \rangle^2 \tag{2.16}$$

2.6 Moindre carrés et Projection

Considérons le système d'équation $Ax = b$ ·

Si $b \notin col(A)$ alors ce système est inconsistant et donc ne possède pas de solution de tels systèmes émergent souvent en pratique il est donc raisonnable de leur trouver une solution approximative, la meilleure qui puisse être ·

Rappelons que les sous-espace engendré par les colones de A est noté $col(A)$ ·

La projection orthogonale de b sur $col(A)$ fournit un vecteur $A\hat{x}$ qui est tel que $\| A\hat{x} - b \|$ est minimale ·

Si on pose $e = A\hat{x} - b$, alors e est le vecteur erreur et il doit être orthogonale à $col(A)$ pour avoir la plus petite norme possible ·

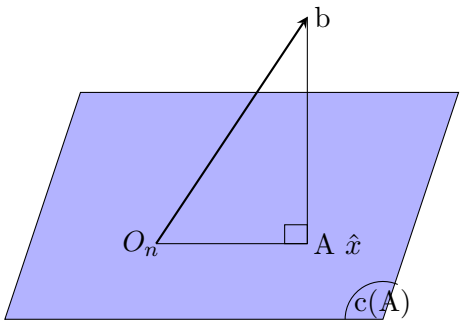


FIGURE 2.6.1 – La projection orthogonale de b sur col(A)

Donc $A\hat{x} - b \in Nul(A^\top)$ c'est à dire :

$$A^\top(A\hat{x} - b) = 0_n \text{ donc } A^\top A\hat{x} = A^\top b$$

Si $A^\top A$ est inversible , alors l'unique solution $\hat{x}$ vérifier $\hat{x} = (A^\top A)^{-1}A^\top b$, et la projection orthogonale de b sur $col(A)$ est fournit pas $p = A\hat{x} = A(A^\top A)^{-1}A^\top b$ ·

Ainsi,la matrice P de projections sur $col(A)$ est donnée par : (lorsque $rgA = n; A \in \mathbb{R}^{m\times n}$)

$$P = A(A^\top A)^{-1}A^\top \text{ et } Pb = \hat{x}$$

2.7 Maximum et minimum d'une forme quadratique

Considérez une forme quadratique $\langle v, Av\rangle$ d'une matrice symétrique $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sur son disque unité c-à-d $\{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| = 1\}$ ·

Soient $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ les n valeurs propres de A et $\{u_i\}, i = 1, ..., n$, le système orthonormal correspondant des vecteurs propres correspondants . Tout vecteur unitaire v quelconque peut être développé sous la forme : $v = \sum_{i=1}^n c_i u_i$, $\sum_{i=1}^n c_i^2 = 1$, nous pouvons récrire la forme quadratique comme :

$$\begin{aligned}\langle v, Av\rangle &= \langle\sum_{i=1}^n c_i u_i, A\sum_{j=1}^n c_j u_j\rangle = \sum_{i,j=1}^n c_i c_j\langle u_i, Au_j\rangle = \sum_{i,j=1}^n c_i c_j\langle u_i, \lambda_j u_j\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n c_i c_j\lambda_j\langle u_i, u_j\rangle = \sum_{i,j=1}^n c_i c_j\lambda_j\delta_{ij} = \sum_{i=1}^n c_i^2\lambda_i \leq \lambda_1\sum_{i=2}^n c_i^2 = \lambda_1 \qquad (2.17)\end{aligned}$$

Où l'égalité est vraie lorsque $c_1 = 1$ et $c_2 = \ldots = c_n = 0$, c'est-à-dire lorsque $v = u_1$. Inverser l'inégalité, on obtient de même :

$$\langle v, Av\rangle = \sum_{i=1}^n c_i^2\lambda_i \geq \lambda_n\sum_{i=2}^n c_i^2 = \lambda_n \qquad (2.18)$$

Ainsi, nous concluons que le maximum et le minimum d'une forme quadratique $\langle v, Av\rangle$ d'une matrice symétrique A en vecteur unitaire v sont respectivement égaux à la valeur propre maximale λ_1 et à la valeur propre minimale λ_n de A, v étant égal aux vecteurs propres unitaires correspondants u_1 et u_n, respectivement.

En suite, considérons un vecteur unitaire v orthogonal à u_1. Un vecteur unitaire quelconque v orthogonal à u_1 peut être développé sous la forme : $v = \sum_{i=2}^n c_i u_i$, $\sum_{i=2}^n c_i^2 = 1$ D'où la forme quadratique $\langle v, Av\rangle$ peut être écrit comme :

$$\langle v, Av\rangle = \langle\sum_{i=2}^n c_i u_i, A\sum_{j=2}^n c_j u_j\rangle = \sum_{i,j=2}^n c_i c_j\langle u_i, Au_j\rangle = \sum_{i,j=2}^n c_i c_j\langle u_i, \lambda_j u_j\rangle$$

$$= \sum_{i,j=2}^{n} c_i c_j \lambda_j \langle u_i, u_j \rangle = \sum_{i,j=2}^{n} c_i c_j \lambda_j \delta_{ij} = \sum_{i=2}^{n} c_i^2 \lambda_i \leq \lambda_2 \sum_{i=2}^{n} c_i^2 = \lambda_2 \qquad (2.19)$$

Avec $c_2 = 1$ et $c_3 = \cdots = c_n = 0$, c'est-à-dire lorsque $v = u_2$, l'égalité est atteinte . Par conséquent, $\langle v, Av \rangle$ pour un vecteur unitaire v orthogonal à u_1 prend son maximum lorsque v est égal au vecteur propre unitaire u_2 pour la deuxième plus grande valeur propre λ_2, la valeur maximale étant λ_2 ·

Par le même raisonnement, on en déduit que $\langle v, Av \rangle$ pour un vecteur unitaire v orthogonal à $\{u_1, ..., u_{m-1}\}$ atteint son maximum lorsque v est égal au vecteur propre unitaire u_m pour la m-ème plus grande valeur propre λ_m , le maximum étant λ_m. La même chose est vraie pour le minimum : $\langle v, Av \rangle$ pour un vecteur unitaire v orthogonal à $\{u_{n-m}, ..., u_n\}$ atteint son minimum lorsque v est égal au vecteur propre unitaire u_{n-m+1} pour la m-ème plus petite valeur propre λ_{n-m+1} , le minimum étant λ_{n-m+1} ·

2.8 Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

Définition 2.8.1

On appelle système orthonormé une famille de vecteurs unitaires deux à deux orthogonaux .

Théorème 6

Il est toujours possible de transformer une famille libre de vecteurs en un système orthonormé si l'espace vectoriel est muni d'une produit scalaire ·

Preuve

Soit $\{a_1, ..., a_n\}$ une famille libre ·

1. Posons $u_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}$, donc $\| u_1 \| = 1$·

2. On a

$$a_2 = P(a_2) + P^{\perp}(a_2)$$
$$a_2 = \langle a_2, u_1 \rangle u_1 + P^{\perp}(a_2)$$

Donc

$$P^{\perp}(a_2) = a_2 - \langle a_2, u_1 \rangle u_1$$

Posons

$$a_2^{'} = P^{\perp}(a_2) = a_2 - \langle a_2, u_1\rangle u_1 \ Alors \ a_2^{'} \perp u_1$$

Et posons

$$u_2 = \frac{a_2^{'}}{\parallel a_2^{'} \parallel}$$

Alors

$$\parallel u_2 \parallel = 1 \ et \ u_1 \perp u_2$$

3. On a

$$a_3 = P(a_3) + P^{\perp}(a_3)$$

Où P désigne la projection orthogonale sur $vect(u_1, u_2)$ Alors

$$\begin{aligned} a_3^{'} &= P^{\perp}(a_3) \\ a_3^{'} &= a_3 - (u_1 u_1^{\intercal} + u_2 u_2^{\intercal}) a_3 \\ a_3^{'} &= a_3 - \langle a_3, u_1\rangle u_1 - \langle a_3, u_2\rangle u_2 \end{aligned}$$

Donc

$$a_3^{'} \perp vect\langle u_1, u_2\rangle$$

Et si $u_3 = \frac{a_3^{'}}{\|a_3^{'}\|}$,alors

$$u_3 \perp vect\langle u_1, u_2\rangle, \ et \ \parallel u_3 \parallel = 1$$

Par itération, on a

$$a_k^{'} = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle a_k, u_i\rangle u_i.$$

$$a_k^{'} \perp \ vect \ (u_1, ..., u_{k-1}).$$

$$u_k = \frac{a_k^{'}}{\parallel a_k^{'} \parallel}$$

Pour aboutir enfin à un système orthonormal $\{u_1, ..., u_n\}$obtenu à partir de la famille libre$\{a_1, ..., a_n\}$ ·

Chapitre 3

La décomposition spectrale

voir le reference [1], [2]

Dans ce chapitre, nous montrons qu'une matrice symétrique peut être exprimée en fonction de ses « valeurs propres » et "vecteurs propres". Cette expression est appelée « décomposition spectrale » . elle permet de convertir une matrice symétrique en une matrice diagonale en la multipliant par un "matrice orthogonale" à droite et a ghouche. Ce processus est appelé "diagonalisation" d'un matrice. Nous pouvons également exprimer l'inverse et les puissances d'une matrice symétrique en termes de sa décomposition spectral .

3.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Définition 3.1.1

Pour une matrice A $n \times n$ symétrique, il existe n nombres réels, appelés valeurs propres, et n vecteurs non nuls u, appelés vecteurs propres, tels que :

$$\mathbf{Au} = \lambda \mathbf{u} \quad , \mathbf{u} \neq 0 \cdot \tag{3.1}$$

Le vecteur u est le vecteur propre associé à λ ·

3.1.1 Détermination des valeurs et vecteurs propres d'une matrice

Théorème 7

λ est une valeur propre de la matrice A si et seulement si

$$\phi(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda I) = 0. \tag{3.2}$$

Le polynôme $\phi(\lambda)$ est dit polynôme caractéristique de la matrice A, donc trouver les valeurs propres de A, revient à chercher les racines du polynôme caractéristique de la matrice A ·

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A, on cherchera les vecteurs propres $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \ldots, \mathbf{u_n}$ associés à chaque valeur propre, solutions de

$$\mathbf{A}u_i = \lambda u_i \text{ ou bien } (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})u_i = 0.$$

3.2 Décomposition spectrale

Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de $\mathbf{A}$ et $\{u_i\}$ la base orthonormale des vecteurs propres correspondants , on a

$$\mathbf{A}\mathbf{u_i} = \lambda_i \mathbf{u_i} \text{ , } \mathbf{i} = \{1, \ldots, n\}$$

Donc $\mathbf{A}$ transforme la base à en la base $\{\lambda_i \mathbf{u_i}\}$. Alors d'après le théorème fondamental, on a

Théorème 8

Si $\mathbf{A}$ est une matrice symétrique et $\{u_i\}$ la base orthonormé forme des vecteurs propres $\{u_i\}$ relatifs aux valeurs propres λ_i, alors

$$\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{u_1}\mathbf{u_1}^\top + \cdots + \lambda_n \mathbf{u_n}\mathbf{u_n}^\top. \tag{3.3}$$

Autrement dit, une matrice symétrique peut être exprimée en termes de ses valeurs propres et vecteurs propres ·

On sait que $\mathbf{u_i}\mathbf{u_i}^\top$ de est la projection orthogonal sur la direction u_i, donc une matrice symétrique associe a chaque point de R^n la somme de ses projection orthogonale sur les directions principles (celles formée par les vecteurs propres) suivie par la valeur propre

La matrice de l'pplication identité dans n'importe quelle base orthonormé s'écrit sous la forme : (d'apres le théorème fondamental)

$$\mathbf{I} = \mathbf{u_1}\mathbf{u_1}^\top + \cdots + \mathbf{u_n}\mathbf{u_n}^\top. \tag{3.4}$$

$I(u_i) = u_i$ pour tout $i = 1, \cdots, n$

Remarquons que si $A = \sum \lambda_i u_i u_i^\top$ et $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ alors

$$c_1\mathbf{a_1} + \cdots + c_n\mathbf{a_n} = \begin{pmatrix}\mathbf{a_1} & \cdots & \mathbf{a_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots \\ c_n\end{pmatrix} = \mathbf{Ac}\cdot$$

Si on suppose que A posséde $n-r$ valeurs propres nulles alors $\lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$

$$\mathbf{Ac} = \lambda_1\mathbf{u_1}\mathbf{u_1^\top c} + \cdots + \lambda_r\mathbf{u_r}\mathbf{u_r^\top c} = \lambda_1\langle\mathbf{u_1}, \mathbf{c}\rangle\mathbf{u_1} + \cdots + \lambda_r\langle\mathbf{u_r}, \mathbf{c}\rangle\mathbf{u_r}. \tag{3.5}$$

$$= \lambda_1 c_1 u_1 + \cdots + \lambda_r c_r u_r$$

Cela signifie qu'une des vecteurs combinaison linéaire quelconque des colonnes de **A** s'écrit comme une combinaison linéaire mutuellement orthogonaux, donc linéairement indépendant, $\mathbf{u_1}, \cdots, \mathbf{u_r}$. Ainsi, le sous-espace on joindre $\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_n}$ a une dimension **r**, signifiant que seulement **r** des n colonnes sont linéairement indépendants . Autrement dit , le rang **r** de matrice **A** est égal au nombre de ses valeurs propres non nuls . **A** est une matrice symétrique, cela vaut aussi pour les lignes , c'est-à-dire seulement r des n lignes sont linéairement indépendants ·

3.3 Diagonalisation des matrices symétriques

équation(3.3) est récrite comme :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}\lambda_1\mathbf{u_1} & \cdots & \lambda_n\mathbf{u_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u_1^\top}\\ \vdots \\ \mathbf{u_n^\top}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\mathbf{u_1} & \cdots & \mathbf{u_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{u_1^\top}\\ \vdots \\ \mathbf{u_n^\top}\end{pmatrix}$$

$$A = \mathbf{U}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\mathbf{U}^\top, \quad o\grave{u} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix}\mathbf{u_1} & \cdots & \mathbf{u_n}\end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Est la matrice composée de colonnes $\mathbf{u_1}, \ldots, \mathbf{u_n}$ · Il est facile de voir que

$$\mathbf{U}^\top\mathbf{U} = \mathbf{I} \tag{3.7}$$

Une telle matrice est appelée matrice orthogonale · Soit **U** est une matrice orthogonal · Ainsi , les lignes d'une matrice orthogonale sont également un système orthonormé · multiplier

équation(3.6) par $\mathbf{U}^\top$ de gauche et U de droite des deux côtés, on obtient

$$\mathbf{U}^\top \mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Le membre de gauche est appelé la transformation de congruence de $\mathbf{A}$ par matrice orthogonale $\mathbf{U}$. Ainsi ,

La matrice symétrique $\mathbf{A}$ est diagonalisée par la congruence transformation, en utilisant la matrice orthogonale U composé des vecteurs propres unitaires de $\mathbf{A}$ comme lignes . Les éléments diagonaux résultants sont les éléments correspondants valeurs propres de $\mathbf{A}$. Ce processus s'appelle la diagonalisation d'une matrice symétrique ·

3.4 Inverse et puissances

$\mathbf{A}$ Une matrice est non singulière si son déterminant est non nul . Il est bien connu qu'une matrice non singulière $\mathbf{A}$ a est inverse $\mathbf{A^{-1}}$: $\mathbf{A}\mathbf{A^{-1}} = \mathbf{A^{-1}}\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Pour une matrice symétrique $n \times n$, son déterminant est le produit de toutes les valeurs propres . Par conséquent, il est non singulier si et seulement si n les valeurs propres sont toutes non nulles, c'est-à-dire que son rang est n ·

Si on multiplie $Au = \lambda u$ par $\mathbf{A^{-1}}$ des deux côtés , on obtient $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{A^{-1}}\mathbf{u}, ou\ \mathbf{A^{-1}}\mathbf{u} = (1/\lambda)\mathbf{u}$ ·

Ainsi, $\mathbf{A^{-1}}$ a les mêmes vecteurs propres que $\mathbf{A}$ avec des valeurs propres $1/\lambda$. s'ensuit que $\mathbf{A^{-1}}$ a son décomposition spectrale ·

Théorème 9

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{\lambda_1}\mathbf{u_1}\mathbf{u_1^\top} + \cdots + \frac{1}{\lambda_n}\mathbf{u_n}\mathbf{u_n^\top}. \tag{3.9}$$

Preuve

Si $\mathbf{Au} = \lambda\mathbf{u}$ et A inversible, alors

$$\mathbf{A^{-1}Au} = \lambda\mathbf{A^{-1}u}.$$

C'est à dire :

$$\mathbf{A^{-1}u} = \tfrac{1}{\lambda}\mathbf{u}.$$

Donc $\frac{1}{\lambda}$ est valeur propre de $\mathbf{A^{-1}}$ ·

Théorème 10

$$\mathbf{A^{-1}} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} \mathbf{U}^\top ,$$

$$\mathbf{U}^\top \mathbf{A^{-1}} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Théorème 11

Pour tout $N \in N^*$, on a

$$\mathbf{A^N} = \lambda_1^N \mathbf{u_1} \mathbf{u_1^\top} + \cdots + \lambda_n^N \mathbf{u_n} \mathbf{u_n^\top} \cdot \tag{3.10}$$

$$\mathbf{A^N} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \lambda_1^N & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^N \end{pmatrix} \mathbf{U}^\top$$

$$\mathbf{U}^\top \mathbf{A^N} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1^N & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^N \end{pmatrix} .$$

U étant la matrice formé des vecteurs propres de **A** ·

Théorème 12

Soit f est une fonction polynomiale, alors

$$f(\mathbf{A}) = f(\lambda_1) \mathbf{u_1} \mathbf{u_1^\top} + \cdots + f(\lambda_n) \mathbf{u_n} \mathbf{u_n^\top} \tag{3.11}$$

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{U} \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} \mathbf{U}^\top$$

$$\mathbf{U}^\top f(\mathbf{A}) \mathbf{U} = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

U étant la matrice formée des vecteurs propres de A ·

Définition 3.4.1

Soit les valeurs propres de la matrice symétrique sont positives ($\lambda_i \geq 0$)*, alors on peut définir* $\sqrt{\mathbf{A}}$ ·

$$\sqrt{\mathbf{A}} = \sqrt{\lambda_1}\mathbf{u_1}\mathbf{u_1^\top} + \cdots + \sqrt{\lambda_n}\mathbf{u_n}\mathbf{u_n^\top}. \tag{3.12}$$

Théorème 13

$$\sqrt{\mathbf{A}} = \mathbf{U}\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}\mathbf{U}^\top$$

$$\mathbf{U}^\top\sqrt{A}\mathbf{U} = \begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}.$$

et d'apres le théorème 12 : $\sqrt{A}^2 = U^\top\sqrt{A}^2 U = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} = A$

Remarque 1

Soit A est une matrice symétrique définie positive alors $\mathbf{A^N}$ peut être définit pour n'importe quel nombre real ·

Remarque 2

Pour tout $N \in N^*$: $(\mathbf{A^{-1}})^N = (\mathbf{A^N})^{-1}$ ·

3.5 Forme quadratique

Théorème 14

dans la base des ses vecteurs propres , toute forme quadratique s'exprime sans les formes mixtes $\alpha x_i x_j$ · où $i \neq j$

-Soit $Q(x) = x^\top Ax$ et $A = A^\top$ alors A est diagonalisable et la famille des vecteurs propres orthonormé forment une base de $\mathbb{R}^n$ ·

$$\text{et} \begin{cases} A = UDU^\top \\ U^\top U = UU^\top = I_n \end{cases}$$

Si on pose $x = Uy$ Alors

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^\top Ax \\ Q(x) &= (Uy)^\top AUY \\ Q(x) &= y^\top U^\top AUy \\ Q(x) &= y^\top D^\top y \\ Q(x) &= y^\top Dy \\ Q(x) &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \end{aligned}$$

Théorème 15

Soit $A = A^\top$ alors dans la base orthonormée formée par les vecteurs propres de A, la forme quadratique $Q = x^\top Ax$ s'exprime sans les termes mixtes ·

Les vecteurs propres orthonormées de A s'appellont les axes principaux ·

Chapitre 4

Valeurs singulières et décompostion en valeur singulier (SVD)

voir le reference [3], [4], [7]

La décomposition spectrale n'est définit que pour les matrices symétriques , on étend le principe de la décomposition aux matrice quelconques . On définit la décomposition en valeurs singulières , qui permet d'exprimer n'importe quelle matrice en termes de ses valeurs singulières et ses vecteurs singuliers .

4.1 Valeurs singulières d'une matrice et décomposition en valeurs singulières

Définition 4.1.1

Soit $A \in R^{m\times n}$ ·

$A^\top A$ *est symétrique semi défini positive* ·

Soient $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ *sont les valeurs propres de* $A^\top A$ *alors :* $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r(\sigma_i = \sqrt{\lambda_i})$ *s'appellent valeurs singulières de* A ·

Remarque 1

Les valeurs propres de $A^\top A$ sont aussi valeurs propres de $AA^\top$, en effet

Si λ est valeur propre de $A^\top A$ alors il existe un vecteur propre u non nule relatif à λ :

$$A^\top Au = \lambda u$$

multiplies à gauche par A les 2 membres

$$A(A^\top Au) = A(\lambda u)$$

ce qui donne

$$(AA^\top)(Au) = \lambda(Au)$$

Si on pose $v = Au$ alors

$$(AA^\top)(v) = \lambda v$$

Donc λ est valeur propre aussi de $AA^\top$

Le but pratique de la décomposition en valeurs singulière est de maximiser $\| Av \|$ sous la contraint $\| v \| = 1$,$max_{\|v\|=1}\{\| Av \|\}$ ·

c-à-d le but est de resoudre le Pb $(max_{\|v\|=1}\{\| Av \|\})$, la norme étant la norme euclidienne ·

Théorème 16

$$max\{\| Av \| : \| v \| = 1\} = \| Av_1 \| = \sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}$$

Où λ_1 est la plus grande valeur propre de $A^\top A$ ·

Preuve

Soit

$$max\{\| Av \| : \| v \| = 1\} = \| Av_1 \|$$

Alors

$$max\{\| Av \|^2 : \| v \| = 1\} = \| Av_1 \|^2$$

On a

$$\| Av \|^2 = \langle Av, Av \rangle = \langle A^\top Av, v \rangle$$

Posons $Q = A^\top A$ alors $\| Av \|^2 = Q(v)$ ·

Étant donnée que $A^\top A$ est symétrique alors Q est une forme quadratique ·

On a

$$max\{Q(v) : \| v \| = 1\} = Q(v_1) = \lambda_1$$

Donc

$$max\{\| Av \| : \| v \| = 1\} = \| Av_1 \| = \sigma_1 = \| Av_1 \|$$

Théorème 17

$$max\{\| Av \|:\| v \|= 1 \ et \ v \perp v_1\} =\| Av_2 \|= \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2}$$

Preuve

Soit

$$max\{\| Av \|:\| v \|= 1 \ et \ v \perp v_1\} =\| Av_2 \|$$

Alors

$$max\{\| Av \|^2:\| v \|= 1 \ et \ v \perp v_1\} =\| Av_2 \|^2$$

On a

$$\| Av \|^2= \langle A^\top Av, v\rangle = Q(v)$$

Et on a va précédemment que

$$max\{Q(v) :\| v \|= 1 \ et \ v \perp v_1\} = Q(v_2) = \lambda_2$$

Donc

$$max\{\| Av \|:\| v \|= 1 \ et \ v \perp v_1\} =\| Av_2 \|= \sigma_2$$

d'une façon generale :

$$\begin{aligned}\|Av_i\|^2 &= \langle Av_i, Av_i\rangle \\ &= \langle A^\top Av_i, v_i\rangle \\ &= \langle \lambda_i v_i, v_i\rangle \\ &= \lambda_i\langle v_i, v_i\rangle \\ \|Av_i\|^2 &= \lambda_i\|v_i\|^2 = \lambda_i\end{aligned}$$

Donc

$$\|Av_i\| = \sqrt{\lambda_i} = \sigma_i$$

Remarque 2

si on pose $u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i}$

$$\langle u_i, u_i\rangle = \langle \tfrac{Av_i}{\sigma_i}, \tfrac{Av_i}{\sigma_i}\rangle = \tfrac{\|Av_i\|^2}{\sigma_i^2} = \tfrac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2} = 1$$

$$\langle u_i, u_j\rangle = \langle \tfrac{Av_i}{\sigma_i}, \tfrac{Av_j}{\sigma_j}\rangle = \tfrac{1}{\sigma_i\sigma_j}\langle Av_i, Av_j\rangle$$

$$\langle u_i, u_j\rangle = \tfrac{1}{\sigma_i\sigma_j}\langle A^\top Av_i, v_j\rangle = \tfrac{1}{\sigma_i\sigma_j}\langle \lambda_i v_i, v_j\rangle$$

$$\langle u_i, u_i\rangle = \frac{\lambda_i}{\sigma_i\sigma_j}\langle v_i, v_j\rangle = \frac{\sigma_i}{\sigma_j}\langle v_i, v_j\rangle = \sigma_{ij}$$

Donc les vecteurs u_i ne sont definit que pour les $\sigma_i \neq 0$ et on a : $Av_i = \sigma_i u_i$ et $A^\top u_i = \sigma_i v_i$ (il suffit de composer par $A^\top$ les 2 mombres de $Av_i = \sigma_i u_i$)

4.2 Décomposition en valeurs singulières

Théorème 18

Soit A une matrice d'ordre $m \times n$, à cofficients A reelles

Soient $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$ les valeurs singuliers de A alors A se factorise sous forme soit $A \in R^{m\times n}$ $(m \geq n)$

soient $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$ les valeurs singulières de A. Alors A se factorise sous forme

$$A = U\Sigma V^\top$$

où $V = (v_1 v_2 \cdots v_n)$ est la matrice formeé par les vecteurs propre de $A^\top A$

et où $U = (u_1 u_2 \cdots u_m)$ est la matrice formeé par les vecteurs $u_i = \dfrac{Av_i}{\sigma_i}$ si $i = 1, \cdots, m$ sinon $rg(A) = r < m$ on complet la famille orthonormé $\{u_1 \cdots u_r\}$ pour avoir une base orthonormé de $\mathbb{R}^m$, dans ce cas $\sigma_{r+1} = \cdots = \sigma_m = 0$

V et U sont des matrices orthogonales et on a :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_r & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Preuve

On construit la base orthonormée $v_i, i = 1, ..., n$ formées par les vecteurs propres de $A^\top A$ on calcule les valeurs propres λ_i, puis $\sqrt{\lambda_i}$.

$$u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i}$$

$$u_i\sigma_i = Av_i$$

$$A(v_1v_2 \dots v_n) = (Av_1Av_2 \dots Av_n) = (\sigma_1u_1\sigma_2u_2 \dots \sigma_nu_n) =$$
$$(u_1 \cdots u_n)\begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_r & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$Av_i = A(v_1 \cdots v_n) = (u_1u_2 \dots u_n)\begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

Donc

$$AV = U\Sigma$$

Alors

$$A = U\Sigma V^\top$$

Exemple

Factoriser en (S V D) la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^\top A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 9 \quad , \quad \lambda_2 = 4$ donc $\sigma_1 = 3 \quad , \quad \sigma_2 = 2$, $\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^\top A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 0 & 9-\lambda \end{pmatrix}$$

Pour $\lambda = 9$

$A^\top A - 9I = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\|v_1\| = 1$

$\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$-5x_1 = 0 \doteq> x_1 = 0$

$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$u_1 = \frac{Av_1}{\sigma_1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$u_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$u_2 = \frac{Av_2}{\sigma_2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A = U\Sigma V^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1 u_1 v_1^\top + \sigma_2 u_2 v_2^\top$

$A = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

4.3 Valeurs singuliers et vecteurs singuliers

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une matrice rectangulaire ·

Il s'ajit de voi si on peut "diagonaliser" **A** ·

A n'étant pas carrée, elle n'est pas diagonalisable au sens ordinaire ; mais on peut

dans des bases bien choisis voir si **A** peut s'écrire sous forme Σ ·

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} o\text{ù } \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_r & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

L'idée est de passer au matrice symétrique à partir de A ·

On sait que $A^\top A$ et $AA^\top$ sont touts deux symétrique semi-définie positive, donc elles sont diagonalisabls et admettent chaque une décomposition spectrale ·

$$A^\top A \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \text{et} \quad AA^\top \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

D'après le théorème de la décomposition spectrale d'une matrice symétrique on a :

$A^\top A = \sum \lambda_i v_i v_i^\top$ où λ_i sont les valeurs propres de $A^\top A$ et $\{v_i\}$ la base

orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée par les valeurs propres de $A^\top A$ associés aux λ_i

il en est de même pour $AA^\top$:

$$AA^\top = \sum \mu_i u_i u_i^\top$$

Où $A^\top A$ et $AA^\top$ ont les même valeurs propres, en effet :

soit λ est une valeur propre de $A^\top A$ et v un vecteur propre associé alors :

$$A^\top Av = \lambda v \text{ donc } A(A^\top A)v = \lambda Av$$

Donc $(AA^\top)(Av) = \lambda(Av)$ donc λ est une valeur propre de $(AA^\top)$ et Av un vecteur propre associé à λ pour $AA^\top$ ·

Donc le nombre de valeur propre non nulle (comptés avec leur ordre de multiplicité) de $A^\top A$ est au plus égale à $min(n, m)$ ·

Soit **r** le nombre totale des ses valeurs propres non nulles alors : $V = (v_1 \ \ldots \ v_n)$

$$A^\top A = \mathbf{V} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_r & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \mathbf{V}^\top = \sum \lambda_i v_i v_i^\top$$

et $AA^\top = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i v_i^\top, \qquad U = (u_1 \dots u_m)$
On a : $AV = A(v_1 \dots v_n) = (Av_1 \dots Av_n)$
On a encore :
$\langle Av_i, Av_j \rangle = \langle A^\top A v_i, v_j \rangle = \langle \lambda_i v_i, v_j \rangle = \lambda_i \langle v_i, v_j \rangle = 0_{ij}$
et $\|Av_i\|^2 = \langle Av_i, Av_i \rangle = \langle A^\top A v_i v_i \rangle = \lambda_i$
donc $\|Av_i\| = \sqrt{\lambda_i}$. posons $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ et $u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i}$
Alors $\|u_i\| = 1$ et $\langle u_i u_j \rangle = \delta_{ij}$.
Donc la famille $(u_1, \dots, u_r)$ forme une famille orthonormée de $\mathbb{R}^m$.
soit $v = (v_1, \dots, v_n)$ la matrice forme par les vecteurs v_i de la base orthonormée et soit

$\mathbf{U} = (u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_m)$ la matrice formée par les vecteurs $u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i}$ $i = 1, \cdots, r$ et $(u_{r+1}, \cdots, u_m)$ les vecteurs de $\mathbb{R}^m$ qui complétent la famille $u_i, i = 1, ..., r$ en une base orthonormée de $\mathbb{R}^m$.

On a :

$$AV = A(v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$$

$$= (Av_1, \dots, Av_r, Av_{r+1}, \dots, Av_n)$$

$$= (\sigma_1 u_1, \dots, \sigma_r u_r, 0, \dots, 0)$$

$$AV = (\sigma_1 u_1, \dots, \sigma_r u_r, 0 u_{r+1} \dots 0 u_m)$$

$$= (u_1, u_2 \dots u_m) \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_r \end{pmatrix} = U\Sigma$$

D'où

$$A = U\Sigma V^\top$$

Car $V^\top V = V V^\top = \mathbf{I_n}$

Où bien

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^\top + \cdots + \sigma_r u_r v_r^\top$$

Théorème 19

Toute matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est factorisable sous la forme $A = U\Sigma V^\top$ où V est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres orthogonaux associés aux valeurs propres de $A^\top A$, U est la matrice dont les colonnes sont formées les vecteurs $u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i}$ compléte en une base de $\mathbb{R}^m$ si nécisaire ; et Σ est une matrice colonne formées par les $\sqrt{\lambda_i}$.

Corollaire 1

1- Le nombre des valeurs singuliers non nulles de A comptée chacune avec son l'ordre de multiplicité est égale au $rang$ de la matrice A ·

2- Etant donnée que $rg(A) = dimcol(A)$ et si $r = rg(A)$ alors la familles orthonormées $u_1, \cdots, u_r$ est une base de $col(A)$ ·

Corollaire 2

Soit $S = Q \bigwedge Q^\top$ est symétrique définit positive et Q est orthogonale alors $Q \bigwedge Q^\top$ est bien la décomposition en valeur singuliére de S ·

En effet ici, on est en présent d'une décomposition spectrale et comme S est symétrique définit positive alors touts les valeurs propres de S sont strictement positive et dans ce cas $Q \bigwedge Q^\top$ est bien la SVD de S ·

Corollaire 3

Soit $S = Q \bigwedge Q^\top$ et S possede une valeur propre négative et $Q \bigwedge Q^\top$ la décomposition spectrale de S alors si $Su = -\alpha u$ $(\alpha > 0)$ alors la valeur singulière associée à u sera α et l'un des vecteurs singuliers changera de singe ·

Preuve

$$S = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i q_i q_i^\top = \lambda_1 q_1 q_1^\top + \cdots + (-\alpha) q_j q_j^\top + \cdots + \lambda_r q_r q_r^\top$$

$$= \lambda_1 q_1 q_1^\top + \cdots + \alpha(-q_j) q_j^\top + \cdots + \lambda_r q_r q_r^\top$$

$$= \lambda_1 q_1 q_1^\top + \cdots + \alpha q_j (-q_j)^\top + \cdots + \lambda_r q_r q_r^\top$$

Corollaire 4

Soit Q orthogonale alors touts les valeurs singuliers de Q sont égale $\grave{a}$ 1 ·

Preuve

Soit Q orthogonale alors $Q^\top Q = I_n$ donc $Q^\top Q$ et I_n ont m valeurs propres or les valeurs singuliers de Q sont les racins des valeurs propres de $Q^\top Q$. Donc les valeurs singuliers de Q sont toutes égales $\hat{a}$ 1 :

On peut le voir autrement :

$$Q = QI_nI_n^\top$$

Où bien $Q = (QQ_1)I_nQ_1^\top$ on Q_1 est une matrice orthogonale quelconque

4.3.1 Théorème 20 (d'Eckart-Young)

Il s'agit de résoudre le problème d'optimisation suivant :

Etant donnée une matrice A de rang n , trouver parmi toutes les matrices M de rang k, $k < n$ de même ordre que A, une matrice B telle que $\|A - M\| \geq \|A - B\|$, ou la norme en question est la norme de Frobenius ·

Norme de Frobenius

Notons par $\mathbb{R}^{n\times m}$ l'espace des matrices à n lignes et m colonnes ·

Théorème 21.1 (Norme de Frobenius)

L'application $\langle A, B\rangle : \mathbb{R}^{n\times m} \times \mathbb{R}^{n\times m} \to \mathbb{R}$, $(A, B) \to trace(A, B^\top)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^{n\times m}$.

Preuve

Il est clair que l'application est bilineaire · Elle est symétrique car la passage à la transposée ne change pas la position des éléments diagonaux donc la trace ne change pas par passage à la matrice transposée et que

$$\langle B, A\rangle = trace(BA^\top) = trace(A.B^\top)^\top$$

Elle est définie positive car toute matrice A non nulle admet une colonne A_i non nulle ;

$$trace(A.A^\top) = \sum_1^n A_i^\top A_i = \sum_1^n \parallel A_i \parallel^2 \geq \parallel A_i^2 \parallel > 0$$

Elle est non dégénérée car

$$trace(A.A^\top) = 0 \Rightarrow \sum_1^n \sum_1^n \parallel A_i \parallel^2 = 0 \Rightarrow \parallel A_i \parallel^2 = 0 \Rightarrow A_i = 0 \Rightarrow A = 0$$

Ce produit scalaire induit une norme sur l'espace des matrices $\mathbb{R}^{n\times m}$, qu'on appelle norme de Frobenius, $\parallel A \parallel_F = \sqrt{trace(A.A^\top}$ ·

Théorème 21.2 (Norme de Frobenius)

Si $A = (a_{ij})$ alors $\parallel A \parallel_F^2 = \sum_{i,j} a_{ij}^2 = \sum_i \parallel A_i \parallel^2 = \sum_i \parallel A_i^\top \parallel^2$ ·

Lemme

Si S est une matrice symétrique alors $\| S \| = \sqrt{\sum_i \lambda_i^2}$ ou les λ_i sont les valeurs propres de S ·

avec indice F, c'est la norme de Frobenius

Preuve

S étant symétrique, elle admet une décomposition spectrale dans la base des vecteurs propres orthonormés $\{u_1, \cdots, u_n\}$ ·

$$S = \sum_i \lambda_i u_i u_i^\top$$

On a

$$\| S \|^2 = trace((\sum_i \lambda_i u_i u_i^\top)(\sum_i \lambda_i u_i u_i^\top))$$

$$= \sum_i \lambda_i^2 \| u_i \|^2 = \sum_i \lambda_i^2$$

Théorème 21.3

Toute matrice symétrique S et toute matrice orthogonale Q multipliable par S, on a

$$\| QSQ^\top \|_F = \| A \|_F$$

Preuve

S admet une factorisation spectrale sous forme $S = U \wedge U^\top$ ou la matrice diagonale formée par les valeurs propres de S et U est la matrice orthogonale formée par les vecteurs propres de S ; d'où

$$\| QSQ \|_F = \| Q(U \wedge U^\top)Q^\top \|_F = \| (QU) \wedge (U^\top Q^\top) \|_F = \| (QU) \wedge (QU)^\top \|_F$$

Où la matrice QU est orthogonale ($QUU^\top Q^\top = QI_nQ^\top = QQ^\top = I_n$), donc si $v_1, \cdots, v_n$ sont les vecteurs colonne de QU, et étant une famille orthonormée on a

$$(QU) \wedge (QU)^\top = \sum_i \lambda_i v_i vi^\top$$

et donc

$$\| QSQ \|_F = \| (QU) \wedge (QU)^\top \|_F = \sqrt{trace(\sum_i \lambda_i v_i v_i^\top)(\sum_i \lambda_i v_i v_i^\top)} = \sqrt{\sum_i \lambda_i^2} = \| S \|_F$$

Théorème 21.4

Pour une matrice quelconque A, ayant une décomposition en valeurs singulières sous forme

$$A = \sum_i \sigma_i u_i v_i^\top, \text{ alors } \| A \|_F = \sqrt{\sum_i \sigma_i^2}$$

Preuve

Il suffit d'appliquer la définition de la norme de Frobenius en tenant compte de l'orthonormalité des familles $\{u_i\}$ et $\{v_i\}$ ·

Théoréme 21.5

Pour toute matrice A et toutes matrices orthogonales Q et R choisis de facon que le produit QAR soit possible, alors

$$\|QAR\|_F = \|A\|_F$$

Preuve

On factorise A en valeurs singuliers ,= $U\Sigma V^\top$, on multiplie par Q et R, Q A R = (Q U)$\Sigma(R^\top V)^\top$

QU et $R^\top V$ sont des matrices orthogonales , si q_i et r_i sont les vecteurs colonnes de QU et $R^\top V$ respectivemnt alors on a $QAR = \sum_i \sigma_i q_i r_i^\top$ et le résultat se déduit par simple calcul en tenant compte du fait que les familles q_i et r_i sont orthonormées ·

En *résumé* on a :

$$\|A\|_F^2 = trace \text{ de } AA^\top$$
$$\|A\|_F^2 = \sum_{i,j} a_{ij}^2$$
$$\|A\|_F^2 = \sum_i \sigma_i^2 = \|\Sigma\|_F^2$$

Théoréme 22(d'Eckart-Young)

Soit A une matrice dont la décomposition en valeur singuliére est $\sum_1^n \sigma_i u_i v_i^\top$

Parmi toute les matrices de meme rang que A dont le rang est égale $\grave{a}K$ ou K et plus petit que le rang de A alors la matrice $A_k = \sum_1^k \sigma_i u_i v_i^\top$ est la meilleure approximation de A par de telle matrice , autrement dit

$$\arg\min\{\|A - B\|_F, rang(B) = K\} = A_k$$

de plus on a

$$\min\{\|A - B\|_F, rang(B) = K\} = \sqrt{\sigma_{k+1}^2 + \cdots + \sigma_n^2}$$

Chapitre 5

Applications

5.1 Problème d'optimisation avec contrainte

(voir le reference [3])

-Soit $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme quadratique définie par $Q(x) = x^\top Ax$ où $A^\top = A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

-On vondrait résoudre les deux problème suivants :

$m = min\{Q(x) :\| x \|= 1\}$ ·

$M = Max\{Q(x) :\| x \|= 1\}$ ·

Théorème 23

Soit $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ sont les valeurs propres de A et $\{u_1, \cdots, u_n\}$ la base orthonormée formés par les vecteurs propres associés aux λ_i respectivement Alors

$M = \lambda_1$ et $Q(\pm u_1) = M$ ·

$m = \lambda_n$ et $Q(\pm u_n) = m$ ·

Preuve

On a : $A = UDU^\top$ où $U = (u_1 \cdots u_n)$, car D est diagonale

$Q = x^\top Ax$

On pose $x = Uy$ Alors

$$\begin{array}{rcl} Q & = & \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \text{ avec } \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \\ Q & \leq & \sum_{i=1}^n \lambda_1 y_i^2 \\ Q & = & \lambda_1 \sum_{i=1}^n y_i^2 \\ Q & = & \lambda_1 \parallel y \parallel^2 \\ Q & = & \lambda_1 \text{ car } \parallel y \parallel^2 = 1 \end{array}$$

Puisque $\| x \| = 1$ et $\| x \| = \| Ux \| = 1$ alors $\| x \| = \| y \| = 1$ ·

$Q = (\pm u_1) = u_1^\top A u_1 = \lambda_1 u_1^\top u_1 = \lambda_1 \| u_1 \|^2 = \lambda_1$ ·

5.2 Optimisations avec contraintes de distance et d'orthogonalité

(voir le reference [3])

On recherche à résoudre le problème suivant :

$M = Max\{Q(x) : \| x \| = 1 \ et \ x \perp u_1\}$ ·

$m = min\{Q(x) : \| x \| = 1 \ et \ x \perp u_1\}$ ·

$Q(x) = x^\top Ax \ et \ A^\top A$ ·

Théorème 24

$M = \lambda_2 = Q(\pm u_2) \ \ ; \ \ m = \lambda_n = Q(\pm u_n)$ ·

Preuve

$x = Uy \quad A = UDU^\top$ ·

$Q = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$ ·

$\langle x, u_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle Uy, u_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle y, U^\top u_1 \rangle = 0$ ·

$$U^\top u_1 = \begin{pmatrix} u_1^\top \\ \vdots \\ u_n^\top \end{pmatrix} u_1 = \begin{pmatrix} u_1^\top u_1 \\ u_2^\top u_1 \\ \vdots \\ u_n^\top u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \langle x, u_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle uy, u_1 \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \langle y, u^\top u_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Donc $Q = \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^n$ ·

et le problème devient

$M = Max\{Q(x) : \| x \| = 1 \ et \ Q = \sum_{i=2}^n \lambda_i y_i^2\}$ ·

Où

$M = \lambda_2 = Q(\pm u_2)$ ·

5.3 Les sous-espaces vectoriels fondamentaux liés à une matrice

(voir le refernce [1], [2], [3])

Il exist 4 sous-espace vectoriels liés a une matrice quelconque A , l'espace engendré par les vecteurs colonnes de A note $col(A) = vect(c_i, i = 1, \cdots, n$ et c_i colonne de A $col(A))$.

l'espace de tout les solutions $Ax = 0$ note $Nul(A)$.

l'espace engendré par les lignes de A qui son les colonnes de $A^\top$ noté $Raw(A)$ et l'espace tout les solutions $A^\top x = 0$.

$$\begin{aligned} col(A) &= \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m \\ Nul(A) &= \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\} \subset \mathbb{R}^n \\ Raw(A) &= col(A^\top) = \{A^\top x : x \in \mathbb{R}^m\} \subset \mathbb{R}^n \\ Nul(A^\top) &= \{x \in \mathbb{R}^m : A^\top x = 0\} \end{aligned}$$

Remarques sur les matrices $A^\top A$

- $A^\top A$ est symétrique semi défini positive ; donc elle est diagonalisable et factrisable en formes spectrales avec des valeurs propres superieures où égales à zero elle génére une base orthonormée de vecteur propre

Théorème 25

$Nul(A^\top A) = Nul(A)$

Preuve

On a

$$\begin{aligned} x &\in Nul(A) \\ x &\in Nul(A) \Leftrightarrow Ax = 0 \Rightarrow A^\top Ax = 0 \\ &\Rightarrow x \in Nul(A^\top A) \Rightarrow NulA \subset Nul(A^\top A) \\ x &\in Nul(A^\top A) \\ x &\in Nul(A^\top A) \Leftrightarrow A^\top Ax = 0 \\ &\Rightarrow (A^\top Ax \setminus x) = 0 \\ &\Rightarrow (Ax \setminus Ax) = 0 \\ \| Ax \|^2 &= 0, Ax = 0 \Rightarrow x \in Nul(A) \\ Nul(A^\top A) &= Nul(A) \end{aligned}$$

Théorème 26

$rg(A^\top A) = rg(A)$

Preuve

En effet :

$A^\top A \in \mathbb{R}^{n\times n}$; $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$A^\top A$: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

D'après le théorème du rang on à :

$$dimNul(A) + rg(A) = n$$
$$dimNul(A^\top A) + rg(A^\top A) = n$$

où d'après le théorème 24

$$Nul(A) = Nul(A^\top A) \text{ donc } rg(A) = rg(A^\top A)$$

Théorème 27

$(A^\top A)$ est inversible si et seulement si les vecteurs colonnes de A sont linéairement indépendants

Preuve

1)Si $A^\top A$ inversible alors $rg(A^\top A) = n$ où $rg(A) = rg(A^\top A)$ donc $rg(A) = n$ donc les colones de A sont linéaire independent

2) Soit $x \in Nul(A^\top A)$

$x \in Nul(A^\top A) \Leftrightarrow x \in Nul(A)$

$$\Leftrightarrow Ax = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i c_i = 0_n$$

où les c_i sont les colonnees de A

où les c_i sont linéaire indépendant donc

$\forall\ i\ \ x_i = 0\ \ donc\ \ x = 0_n \Rightarrow Nul(A^\top A) = \{0_n\}$

on à $\quad Nul(A^\top A) = \{0_n\} \Rightarrow rg(A^\top A) = n \Leftrightarrow (A^\top A)$ est inversible

Théorème 28

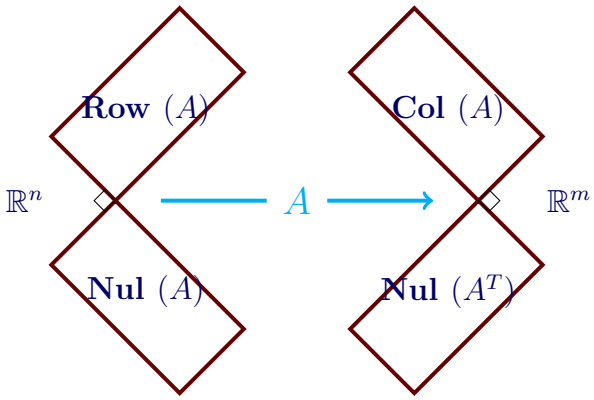
Pour toute matrice A , $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, on a :

$Raw(A^\top) \bigoplus Nul(A) = \mathbb{R}^n$ et $(Nul(A))^\perp = Raw(A^\top)$

$col(A) \bigoplus Nul(A^\top) = \mathbb{R}^m$ et $(col(A))^\perp = Nul(A^\top)$

Remarque

$col(A) = Raw(A^\top)$



Théorème 29

supposon que V_i sont les n vecteurs propres orthogonaux de $A^\top A$, ordonnés de façon que leur valeurs propres corespondents verfient $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$

supposons aussi que A posséde r valeurs sunguliéres non nulles Alors

1) L'ensemble $\{v_{r+1}, v_{r+2}, \cdots, v_n\}$ est une base orthonormée de $Nul(A)$

2) L'ensemble $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ est une base orthonormée de $Row(A)$

Preuve

1- La famille $\{v_{r+1}, v_{r+2}, \cdots, v_n\}$ est orthonormée donc elle forme une famille linéairement indépendante de $(n-r)$ vecteurs

Montrons que $\{v_{r+1}, v_{r+2}, \cdots, v_n\} \subset Nul(A)$

$$A = \sum_{i=1}^{r} \delta_i u_i v_i^\top$$

$$Av_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} \delta_i u_i v_i^\top v_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} \delta_i u_i (v_i, v_{r+1})$$

Or la famille $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ donc pour tout i , $1 \leq i \leq r$, $(v_i, v_{r+1}) = 0$ donc $Av_{r+1} = 0$ donc $v_{r+1} \in Nul(A)$

Il en est de même pour tout vecteurs v_{r+i} , $1 \leq i \leq n-r$ donc $\{v_{r+1}, v_{r+2}, \cdots, v_n\} \subset Nul(A)$

comme $n = rg(A) + dimNul(A)$ et $rg(A) = r$ donc $dimNulA = n - r$ et comme les $(n-r)$ vecteurs donc $\{v_{r+1}, v_{r+2}, \cdots, v_n\}$ sont linéaire independent alors c'est une base de $Nul(A)$

2- $m = dimcol(A^\top) + dimNul(A^\top) = rg(A^\top) + dimNul(A^\top)$
où $rg(A^\top) = rg(A) = r$ donc $dimNul(A^\top) = m - r$
où $rawA = col(A^\top)$ donc $dimRaw(A) = r$

Montrons que $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\} \subset Raw(A)$

$$Raw(A) = col(A^\top) = \{A^\top x : x \in \mathbb{R}^m\}$$

On a : $A^\top A v_1 = \lambda_1 v_1$ mais $A^\top A v_1 = A^\top (A v_1)$ et $A^\top (A v_1) \in col(A^\top)$ donc $\lambda_1 v_1 \in col(A^\top)$ donc $v_1 \in col(A^\top)$ c-à-d $v_1 \in Raw(A)$

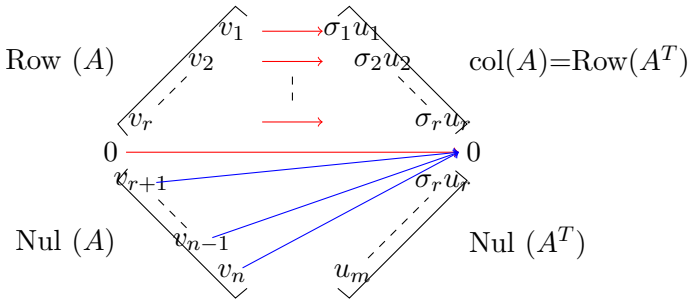
Il est de même pour les autres v_i $1 \leq i \leq r$ comme la famille $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ est orthonormée elle est libre et comme il y a r vecteurs dans la famille et $r = rg(A^\top) = dimRawA$ alors $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ est une base orthonormée de $RawA$

Corollaire

Soient $\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ la base orthonormée formée par les vecteur propres de $AA^\top$ alors

1- $\{u_{r+1}, \cdots, u_m\}$ est une base orthonormée de $Nul(A^\top)$

2- $\{u_1, \cdots, u_r\}$est une base orthonormée de $col(A)$



Exemple

Soit $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ dont la décomposition en SVD est donnée par :

$$A = U\Sigma V^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{0.8} & 0 & -\sqrt{0.2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{0.8} & 0 & \sqrt{0.2} \end{pmatrix}$$

1)$rg(A) = 3$

2) Les 3 premières colonnes de U forment une base orthonormée de $col(A)$

3) La derniers colonne de U forment une base orthonormée de $Nul(A^\top)$

4) Les 2 derniers colonnes de V forment une base orthonormée de $Nul(A)$

5)Les 3 derniers colonne de V forment une base orthonormée de $Raw(A)$.

5.4 La compresion de l'image

(voir le reference [4], [7], [2])

Supposons qu'un satellite veut envoyer une image numérique de 1000×1000 pixels , c'est à dire de 1 millions de petits carrés , chaque petite carré ayant une couleur défini .

On peut coder les couleurs et envoyer 1 millions de nombre ; mais il est préférable de trouver l'information essentielle se trouvent dans la matrice 1000×1000 , et n'envoyer que cette information . la clé pour la détermination de cette information est la décomposition de la matrice en valeurs singulières

$$\begin{aligned} A &= U\Sigma V^\top \\ &= \sigma_1 u_1 v_1^\top + \cdots + \sigma_r u_r v_r^\top \end{aligned}$$

Il s'arive en geberal que certaine valeur singulière sont significative est d'autre sont extrêmement petites .

La matrice Σ contient r valeurs singulières ($r \leq 1000$)

Si les 25 premières valeurs singulières sont les plus significatives alors on ne garde que ces valeurs singulières , et on n'envoyer que les 25 vecteurs singulières de U et 25 de V correspondent

Les autres 975 vecteurs singulières sont multipliés dans le produit $U\Sigma V^\top$ par les 985 petits valeurs singulières σ qui sont unoorée à cause de leur petitesse .

La matrice $A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^\top$ est somme de r matrice chaque une de rang 1 . Si on fait une troncature et on ne garde que les 15 premières matrices dans la somme , on aura 25 matrices chacune de rang 1

Il suffit donc d'envoyer $25 \times 2 \times 1000$ (u_i contient 1000 information , v_i 1000 information il y a 25 matrices de rang 1 dans la troncature)

Donc on 25×2000 ie 50000 information et on aura fait une compression de $20/1$

Algorithme matlab de convertit un image en matrice

% charger l'image

image = inread ('chemin / vers / votre / image . jpg ') ;

% obtenir les dimensions de l'image

hauteur = size (image ,1) ;

largeur = size (image ,2) ;

% Initialises la matrice

matrice = zeros (hauteur , largeur , 3) ;

% convertir l'image en matrice

for $i = 1$: hauteur

for $j = 1$: largeur

matrice (i , j , 1) = image (i , j , 1) ; valeur du canal rouge

matrice (i , j , 2) = image (i , j , 2) ; valeur du canal vert

matrice (i , j , 3) = image (i , j , 3) ; valeur du canal bleu

end

end

% Afficher la matrice résultante

disp (matrice) ;

Algorithme matlab de la compession d'image

% charge l'image

image = imread ('chemin / vers / votre / image . jpg ') ;

% convertir l'image en matrice de luminance en niveaux de gris

image gray = rgb2gry (image) ;

% Appliquer la transformation en cosinus discrète (D C T) dct_coeffs = dct2 (image gray) ;

% Définir la qualité de compression (entre 1 et $100, 100$ ètant la meilleurs quality = 50 ;

% calculer la facteur de quantification en fonction de la qualité

quantization factor = 50 / quality ;

% Appliquer la quantification aux coefficients D C T

quantized coeffs = round (dct coeffs / quantization factor) ;

% Reconstruct the image using the inverse D C T reconstructed image = idct2 (dequantized coeffs) ;

% Afficher l'image originale et l'image reconstruite

subplot (1 , 2 , 1) ;

imshow (image gray) ;

title ('image originale') ;

subplot (1 , 2 , 2) ;

imshow (uint8 (reconstructed image)) ;

title ('image reconstruite') ;

% calculer le taux de compression

compression ratio = numel (quantized coeffs) / numel (image gray) ;

fprintf ('taux de compression : % . 2f \n ' , compression ratio) ;

Algorithme de restilution d'image compressée

% charger les coefficients quantifiés de l'image compressée

load ('chemin / vers / coefficients quantifies . mat ') ;

% définir la qualité de compression utilisée lors de la qualité quantization factor = 50 / quality ;

% Inverser la quantification

dequantization coeffs = quantizedcoeffs* quantization factor ;

% Reconstruct the image using the inverse DCT

reconstroct image = idct2 (dequantized coeffs) ;

% Afficher l'image reconstruite

imshow (uint8 (reconstructed image)) ;

title ('image reconstruite ') ;

5.5 Décomposition polaire d'une matrice

Théorème 30

Toute matrice carrée réel peut être factorisé sous forme $A = QS$ où Q est orthogonale et S est symétrique semi définie positive

Si se plus A est inversible alors S est définie positive

Preuve

Si la décomposition SVD de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est $A = U\Sigma V^\top$, alors $V^\top V = I_n$ et on a :

$$A = U(V^\top V)\Sigma V^\top$$

$$= UV^\top(V\Sigma V^\top)$$

Sa matrice $S = V\Sigma V^\top$ est symétrique semi définie positive car σ l'est la matrice $Q = UV^\top$ est orthogonale car

$$Q^\top Q = (VU^\top)UV^\top = V(U^\top U)V^\top$$

$$= VI_nV^\top = VV^\top = I_n$$

5.6 Analyse par composente principale et meilleurs matrices de rang réduite

(voir le réfèrence [2],[7])

Les composantes prencipales de A sont ses vecteurs singuliers , c'est *à* dire les colonnes u_j et v_j des matrices orthogonales U et V qui apparaissent dans la décomposition $A = U\Sigma V^\top$.

L'analyse par composante principale (ACP) utilise les plus grands valeurs singuliers σ liées aux vecteurs u et v pour comprendre l'information qu'il y a dans la matrice des données .

Etant donnée une matrice A, la décomposition SVD la transforme en $A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^\top$ où $r = rg(A)$.

La partie la plus importante de A correspondant aux plus grands valeurs de σ et si on choisit $A_k = A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^\top$ $(k < r)$ alors A_k est la meilleur approximation de A par des matrices de $rang$ k :

Si $rg(B) = k$ alors $\|A - B\| \geq \|A - A_k\|$ c'est ce le théorème d'Eckart-Young

Dans le domaine des statistique , On faisant cette approximation , On est d'identifiat les parties de A ayant la plus grande variance . Et ceci mettre la méthode SVD au centre de la date science . Trois choix de norme $\|A\|$ possède une importance spéciale

1) La norme spectrale $\|A\|_2 = max\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sigma_1$ cette norme s'appelle aussi norme l^2

2) La norme de Frobonius $\|A\|_F = \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_r^2}$

3) La norme Nucléaire $\|A\|_N = \sigma_1 + \cdots + \sigma_r$, On l'appelle aussi la norme de la trace .

Example

si

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

alors $\|A\|_2 = 1$; $\|A\|_F = \sqrt{n}$; $\|A\|_N = n$

Théorème 31

1) Si Q est une matrice orthogonale alors

$\|Q\|_2 = 1$; $\|Q\|_F = \sqrt{n}$; $\|Q\|_N = n$

2) Si Q est orthogonale et A quelconque alors

$\|QA\|_2 = \|A\|_2$; $\|QA\|_F = \|A\|_F$; $\|QA\|_N = \|A\|_N$

Il en est mème si on multiplie A à gauche par Q

Les pointes essentielles de la A C P

S'il y a n individus et m variables, et qu'en fait 1 mesures des variables pour chaque individus et pour chaque variable , alors on peut construire une matrice $A = R^{n\times m}$, représentent un nuage de n points dans R^m.

Pour standardiser la matrice , on calcul la moyenne de chaque ligne et on la soustrait de chaque mesure de la ligne qui correspond ; ceci pour centrer le nuage de point . Puis on divise chaque ligne par la dispersion pour les normaliser .

On obtient ainsi une matrice que l'on nomira A (comme la précédent) , puis on calcule la matrice de covariance . $S = \frac{AA^\top}{n}$

Les résultats fondamentaux

1) Le variance totale dans les données est égale a T

$$T = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_m^2 = s_1^2 + s_2^2 + \cdots + s_m^2 = Trace(S)$$

2) Le 1^{er} vecteur propre u_1 de S pointe vers la direction la plus significative des données .

cette direction participe à une fraction de $\frac{\sigma_1^2}{T}$ de la variance totale .

3) La $2^{éme}$ vecteur propre u_2 de S participe a une fraction de $\frac{\sigma_2^2}{T}$ de la variance totale .

4) Quand ces fractions de variance deviennent assez petite , on arête le calcul

On obtient ainsi k directions qui explique la majorité des données .

Les n données (n vecteurs colonnes) deviennent alors assez proche de l'espace vectoriel engendré $(u_1, \ldots, u_k)$ de dimension k.

Ces vecteurs $u_1, \ldots, u_k$ sont les composants principales dans l'espace $\mathbb{R}^m$.

5) k est le rang effective de A , Le vrai rang de A est probablement m ou n .

5.7 Extraction d'informations (EI) et l'indexation sémantique latente, (LSI)

(voir le réfèrence[8], [5], [9], [6])

La SVD est devenue très utile dans le domaine de l'extraction d'information (EI) pour traiter les problèmes d'ambiguïté linguistique. L'EI fonctionne en produisant les documents les plus associés à un ensemble de mots-clés dans une requête. Cependant, les mots-clés contiennent nécessairement beaucoup de synonymie (plusieurs mots-clés font référence au même concept) et de polysémie (le même mot-clé peut faire référence à plusieurs concepts). Par exemple, si le mot-clé de la requête est "félin", les méthodes traditionnelles d'EI ne récupéreront pas les documents utilisant le mot "chat" - un problème de synonymie. De même, si le mot-clé de la requête est "java", des documents sur le sujet de Java en tant que langage informatique, Java en tant qu'ile en Indonésie et Java en tant que grain de café seront tous récupérés - un problème de polysémie. Une technique connue sous le nom d'indexation Sémantique Latente (ISL) (Berry et al., 1995) aborde ces problèmes en calculant la meilleure approximation de $rang-k$ de la matrice mots clés-document en utilisant sa SVD. Cela produit un espace de vecteurs singuliers de dimensions inférieures appelés mots-propres-clés et documents propres. Chaque mot-propre clé peut être associé à plusieurs mots-clés ainsi qu'à des sens particuliers de mots-clés. Dans l'exemple de synonymie ci-dessus, "chat" et "félin" seraient donc fortement corrélés avec le même mot-propre-clé. De même, les documents utilisant "Java" en tant que langage informatique ont tendance à utiliser de nombreux mots-clés similaires, mais pas beaucoup des mots-clés utilisés par les documents décrivant "Java" en tant que café ou ile en Indonésie. Ainsi, dans l'espace des vecteurs singuliers, chacun de ces sens de "java" est associé à des mots-propres-clés distincts. Actuellement, la plupart des approches pour récupérer des documents textuels à partir de bases de données scientifiques dépendent d'une correspondance lexicale entre les mots dans les requêtes des utilisateurs et ceux présents ou attribués aux documents dans une base de données. En raison de la diversité considérable des mots que les gens utilisent pour décrire le même document, les méthodes

lexicales sont nécessairement incomplètes et imprécises. En utilisant la décomposition en valeurs singulières (SVD), on peut tirer parti de la structure implicite d'ordre supérieur dans l'association des termes avec les documents en déterminant la SVD de grandes matrices creuses formées de termes par documents. Nous appelons cette méthode de récupération l'indexation sémantique latente (LSI) car le sous-espace représente des relations associatives importantes entre les termes et les documents qui ne sont pas évidentes dans les documents individuels. La LSI est une méthode d'indexation entièrement automatique mais intelligente, largement applicable et une manière prometteuse d'améliorer l'accès des utilisateurs à de nombreux types de documents textuels, ou à des documents et services pour lesquels des descriptions textuelles sont disponibles.

5.7.1 Aperçu sur la l'indexation sémantique latente, LSI.

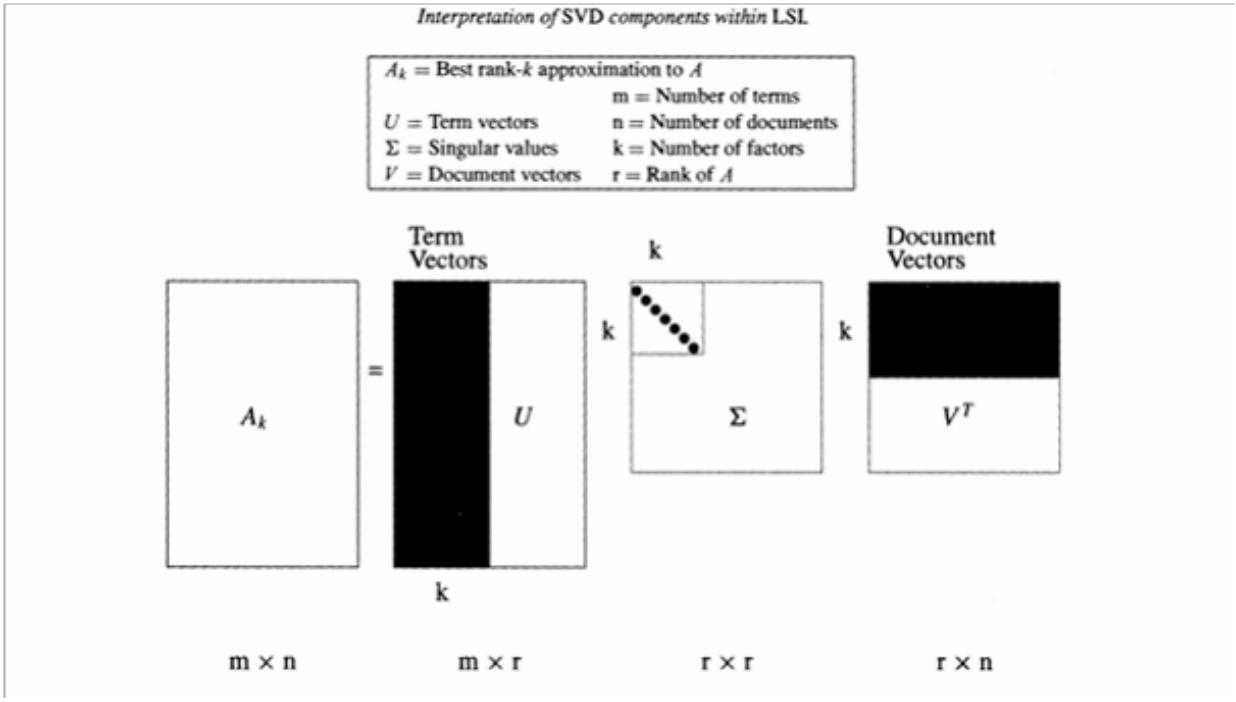
Pour l'implémentation de la LSI, une matrice « terme par document » doit être construite, les éléments de cette matrice représente le nombre d'occurrence de chaque terme dans un document particulier

$$A = [a_{ij}]$$

a_{ij} représente la fréquence d'apparition du terme i dans le document j

Généralement, du au fait qu'un terme ne se retrouve ps dans tous les documents, la matrice A est creuse, et des poids sont attribués aux termes de la matrice.

Cette matrice est décomposé en un produit de trois matrices par la technique de la SVD, et celle-ci déduit le modèle de la structure semantique latente apparaissant dans les matrices factorisée, a savoir U , V et Σ



Ces matrices reflètent la décomposition des relations d'origine en vecteurs linéairement indépendants

L'utilisation de k vecteurs de chacun des trois facteurs de la décomposition SVD, correspondants aux k plus grandes valeurs singulières , revient à farie une approximation de la matrice A par la matrice A_k

Les termes qui apparaissent dans différents documents seront proches entre eux dans l'espace d'approximation généré par les colonnes de la matrice tronquée A_k, même s'ils n'apparaissent jamais ensemble dans le même document. Ceci veut dire aussi que certains documents qui ne patagent aucun mots cité dans la requete de l'utilisateur peuvent néanmoins être proche de celle-ci dans le k-espace.

Par exemple, considérons les mots voiture, automobile, conducteur et éléphant. Les mots voiture et automobile sont synonyme , le mot conducteur est un concept qui leur est lié, mais le mot éléphant n'a aucun rapport direct avec les trois mots. Dans les anciens systèmes d'extraction d'information, il n'était pas plus probable d'extraire à partir d'une requête de voiture des documents contenant le mot automobile, que de documents contenant le mot éléphant si le mot precis automobile n'est pas cité dans le document.

Par contre dans la troncature A_k dans la SVD, Les mots synonyme aux mots dans la requête vont apparaitre dans le k-espace, mots tels que engin, moteur, chassis, sedan etc. les contextes pour le mot conducteur vont recouvrir sur une étendue moindre les contextes des mots voiture engin, etc, tans dis que le mot éléphant sera dans des contextes dissimilaires.

L'idée principale de la LSI est de modéliser explicitement les interrelations entre les termes en utilisant la SVD, et d'exploiter ceci pour améliorer l'extraction d'informations.

Example

Choisissons certains termes pour indexer le document :

- T1 : cuisson
- T2 : recettes
- T3 : pain
- T4 : gâteau

- T5 : pâtisserie
- T6 : tarte

Ensuite, voici quelques documents :

- D1 : Comment cuire du pain sans recettes
- D2 : L'art classique de la pâtisserie viennoise
- D3 : Recette numérique : L'art du calcul scientifique
- D4 : Pains, pâtisseries, tartes et gâteaux : Recettes de cuisson en quantité
- D5 : Pâtisserie : Un livre des meilleures recettes françaises

La matrice devient :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Chaque colonne représente un document

Chaque ligne représente un terme

Chaque élément de la matrice représente le nombre d'occurrence du terme ligne dans le document colonne correspondants.

Pour voir l'importance relative de chaque terme dans un document donné, nous normalisons la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0.5774 & 0 & 0 & 0.4082 & 0 \\ 0.5774 & 0 & 1 & 0.4082 & 0.7071 \\ 0.5774 & 0 & 0 & 0.4082 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4082 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.4082 & 0.7071 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4082 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette représentation est utile uniquement si nous avons un moyen de comparer la requête d'un utilisateur à un document dans la matrice. Cela sera accompli géométriquement en comparant le cosinus de l'angle entre chaque vecteur de document et un vecteur de requête de la même dimension.

$$\cos \Theta_j = \frac{\langle c_j, q \rangle}{\|c_j\| \|q\|}$$

Ici on compare le vecteur requête q au vecteur document c_j

Supposons qu'un utilisateur dans notre exemple précédent demande des documents sur la "cuisson". Cela est représenté par le vecteur de requête q

$$q = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^\top$$

En utilisant notre formule, les cosinus entre chaque document et le vecteur de requête sont de 0,5774, 0, 0, 4082 et 0. Si nous utilisons une valeur seuil de 0,5, seul le premier document de la matrice sera renvoyé.

Cependant, rappelons que le Document 1 est "Comment cuire du pain sans recettes" et le Document 4 est "Pains, pâtisseries, tartes et gâteaux : Recettes de cuisson en quantité". Le Document 4 est certainement un document pertinent pour la requête de l'utilisateur, même s'il n'est pas retourné. Cette défaillance partielle, qui est l'un des nombreux problèmes inhérents au modèle d'espace vectoriel, inspire la création d'une méthode supérieure de recherche d'informations.

5.7.2 Solution au probléme d'indextion

Une méthode puissante pour faire face aux problèmes inhérents au modèle d'espace vectoriel consiste à examiner le rang de la matrice terme-par-document. Habituellement, les grandes matrices terme-par-document contiennent une grande quantité de données redondantes. En éliminant ces informations, on obtient une recherche plus précise et plus efficace.

Nous parviendrons à cette suppression de données en approximant la matrice terme-par-document originale A par une nouvelle matrice A_k où le $rang(A) = r > rang(A_k) = k$

Pour effectuer la réduction du rang, nous devons trouver une méthode qui nous permettra de voir facilement le rang de la matrice A

Une méthode utilisée pour résoudre le problème de réduction du rang, ainsi que d'autres problèmes inhérents au modèle d'espace vectoriel, est la Décomposition en Valeurs Singulières (SVD).

$A = U\Sigma V^\top$ Si la matrice terme-par-document est de taille $t \times d$, alors U est une matrice orthogonale de taille $t \times t$, V est une matrice orthogonale de taille $d \times d$ et Σ est une matrice diagonale de taille $t \times d$. Les valeurs sur la diagonale de Σ sont appelées les valeurs singulières, où $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r$ et r est le rang de la matrice terme-par-document .

Il peut être démontré que les premières $r = rang(A)$ colonnes de U constituent une base de l'espace des colonnes de A. De plus, les premières r lignes de $V^\top$ constituent une base de l'espace des lignes de A. L'aide apportée par Σ concerne la réduction du $rang$.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En modifiant toutes les lignes sauf les k premières de Σ pour les remplacer par des lignes nulles, nous pouvons créer une approximation de rang inférieur de A appelée A_k,où

$$A_k = U_k \Sigma_k V_k^\top$$

Le rang de A a été réduit de r à k. Cette approximation de rang inférieur a éliminé la redondance de nos données d'origine . On peut construire maintenant une méthode de comparaison utilisant la matrice A_k

$$\cos\theta_j = \frac{(A_k e_j)^\top q}{\parallel A_k e_j \parallel \parallel q \parallel}$$

Théoriquement cette equation devrait renvoyer plus de résultat. e_j est le jiéme vecteur de la matrice identité d'ordre $d \times d$. il est utilisé pour extraire le jiéme vecteur colonne $\widehat{a_j}$ de la matrice A_k , c'est -à-dire $A_k e_j = \widehat{a_j}$, et on a :

$$\cos\theta_j = \frac{(\widehat{a_j})^\top q}{\parallel \widehat{a_j} \parallel q \parallel}$$

Théoriquement cette equation devrait renvoyer plus de résultat

L'application de la svd sur notre exemple prouits la matrice diagonale suivante :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1.69 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.84 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.42 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si nous remplaçons la valeur 0.42 par 0, nous obtenons une approximation de rang 3 de la matrice d'origine. En recalculant A_k avec la nouvelle matrice Σ_k on oblient :

$$A_k = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.03 & 0.02 & 0.49 & -0.01 \\ 0.6 & 0.18 & 0.99 & 0.39 & 0.71 \\ 0.5 & -0.03 & 0.02 & 0.49 & -0.01 \\ 0.18 & 0.07 & -0.05 & 0.23 & 0.02 \\ -0.03 & 0.99 & 0.01 & 0.43 & 0.70 \\ 0.18 & 0.07 & -0.05 & 0.23 & 0.02 \end{pmatrix}$$

Rappelons nous du vecteur de requete q precedant :

$$q = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^\top$$

En utilisant la nouvelle équation du cosinus, on obtient les valeurs suivantes : 0.5181, -0.0332, 0.0233, 0.5064 et -0.0069. Comparons ces valeurs avec les valeurs d'origine : 0.5774, 0, 0, 0.4082 et 0. En utilisant notre seuil de 0.5 sur les nouvelles valeurs du cosinus, les documents 1 et 4 sont renvoyés. Contrairement au modèle original de l'espace vectoriel, la nouvelle matrice renvoie les deux documents pertinents, ce qui rend notre recherche supérieure. La décomposition en valeurs singulières (SVD) a réduit le rang de la matrice d'origine, réduisant ainsi la redondance dans nos données initiales. Ensuite, nous avons permis à un utilisateur d'interroger ces données. Tout cela s'est produit sans intervention humaine. Nous avons réussi notre tâche initiale, en créant une méthode pour indexer des quantités extrêmement importantes de données et en donnant à l'utilisateur la possibilité d'interroger cet index sans introduire d'erreurs humaines ni de travail supplémentaire

Conclusion

Ce mémoire de master se propose de visiter les applications de l'algèbre linéaire dans le domaine du traitement d'images, de l'analyse en composantes principales et de l'indexation latente. En comprenant les concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire et en les appliquant de manière appropriée, nous pourrons exploiter pleinement le potentiel de ces techniques pour l'analyse et la recherche d'informations dans des domaines tels que la vision par ordinateur, le traitement d'images et l'exploration de données.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Strang, G.(20016). Introduction to linear algebra. Wellessley - Cambridge Press.

[2] Strang, G.(2016). Linear Algebra and its application. Cengage Learning.

[3] Strang, G.(2019). Linear Algebra And Learning From Data. Wellessley - Cabridge Press.

[4] Kanatani, K.(2012). Linear Algebra for pattern Recognition. World Scientific Publishing Company.

[5] Deerwester, S., et al.(1990). " Latent Semantic Indexing for Information Retreival." ACM SIGIR Forum.

[6] Liu, W., & Zhu,Q.(2013). "Linear Algebra Techniques For Information Retreival." Information Processing and managemant.

[7] wasuta, R. Singular Value Decomposition and Pricipal Component Analysis in Image Compressing. Master Thesis. Gerogia State University. 2007.

[8] Berry, W., Dumais, S., O'Brian,W.(1995). "Unisng Linear Algebra for Intelligent Informtion Retreival."Siam Review, vol(37), N°.4.(Decembre 1995), pp. 575-593.

[9] http://mse.redwoods.edu>GregLya>slides.pdf .