République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr. Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques et Informatique



MEMOIRE

présentée pour l'obtention du diplôme

Master en Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Thème

Autour de la coloration dynamique dans les graphes

Présentée par

ATCHI Meriem

Soutenue devant le jury composé de :

K. TABLENNEHAS , MAA, UDYF, Médéa ..... Président

N. IKHLEF ESCHOUF, MCA, UDYF, Médéa ..... Encadreur

A. BENDALI-BRAHAM , MAB, UDYF, Médéa..... Examinatrice

M. ZAMIME, MCB, UDYF, Médéa..... Examinateur

2018-2019

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à la notion de la coloration r-dynamique des sommets et le nombre chromatique r-dynamique dans les graphes.

Soit G = (V, E) un graphe simple et sans sommet isolé. Une coloration propre de sommets de G est une affectation de couleurs aux sommets de sorte que deux sommets adjacents aient des couleurs différentes. Le nombre minimum de couleurs nécessaires à la coloration des sommets de G est appelé le nombre chromatique de G et noté χ(G). Une coloration r-dynamique d'un graphe G est une coloration propre c de G tel que $|c(\mathrm{N}(v))| \geq \min\{r, d(v)\}$ pour chaque sommet $v \in \mathrm{V(G)}$, où $\mathrm{N}(v)$ est le voisinages de v. Le plus petit entier k pour lequel un graphe G a une k-coloration r-dynamique est le nombre chromatique r-dynamique χ_r(G).

Dans ce travail, nous déterminons la valeur exacte du nombre chromatique r-dynamique $\chi_{r\in\{2,3,4\}}$(G) de certains graphes classiques comme le graphe milieu et total d'une chaîne P_n, d'un cycle C_n et d'une couronne d'une chaîne $\mathrm{C}r(\mathrm{P}_n)$, le produit cartésien du book graphe $\mathrm{P}_2\square\mathrm{K}_{1,n}$, des étoiles $\mathrm{K}_{1,n}\square\mathrm{K}_{1,n}$ et des graphes complets $\mathrm{K}_n\square\mathrm{K}_n$ et le produit total des chaînes $\mathrm{P}_n \boxtimes \mathrm{P}_n$. De plus, nous donnons les valeurs exactes du nombre chromatique r-dynamique $\chi_{r\in\{2,3,4\}}$(G) du graphe de mycielski de quelques graphes particuliers comme le graph complet K_n, l'étoile $\mathrm{K}_{1,n}$, la roue W_n et le fan graphe F_n. En outre, nous étudions les graphes dits χ_d-critique et χ_{d_e}-critiques ($d = 2$) c'est à dire les graphes G dont le nombre chromatique dynamique change lorsque G est modifié en supprimant et contractant une arête quelconque de G. Dans ce sens, on donne une caractérisation des arbre χ_d-arête critiques et χ_{d_e}-critiques.

ABSTRACT

In this report, we are interested in the notion of the r-dynamic coloring of vertices and the r-dynamic chromatic number in graphs.

Let G = (V, E) be a simple graph without an isolated vertex. A proper vertex coloring of a graph G is an assignment of colors to the vertices of G such that adjacent vertices have different colors. The minimum number of colors which is necessary for a proper vertex coloring of graph G is called the chromatic number χ(G). A r-dynamic coloring of a graph G is a proper coloring c of G such that $|c(N(v))| \geq \min\{r, d(v)\}$ for each vertex v in V(G), where N(v) is the neighborhood of v. The smallest number k for which a graph G has a r-dynamic k-coloring is the r-dynamic chromatic number χ_r(G).

In this work, we determine the exact value of the r-dynamic chromatic number $\chi_{r\in\{2,3,4\}}$(G) of some classical graphs such as the middle and total graph of a path P_n, a cycle C_n and a corona of a path, the cartesian product of book graph $P_2\square K_{1,n}$, stars $K_{1,n}\square K_{1,n}$ and complet graphs $K_n\square K_n$ and total product of paths $P_n \boxtimes P_n$. Moreover, we give the exact value of the r-dynamic chromatic number $\chi_{r\in\{2,3,4\}}$(G) of mycielski graph of some particular graphs like complet graph K_n, stars K1, n, wheel W_n and fan graph F_n. In addition, we study the graphs called χ_d-edge critical and χ_{d_e}-edge critical ($d = 2$), that is, the graphs G whose number chromatic dynamic change when G is modified by deleting or contracting an edge. In this sense, we characterize the trees χ_d-edge critical and χ_{d_e}-edge critical.

مُلَخَص

فِي هَذِه الأُطرُوحَة نُرَكِزُ علَى دِرَاسَةِ مَفهُوم ر – تلوِين الدِينَامِيكِي لِلرُؤُوس وَ العَدَد اللّونِي ر – الدِينَامِيكِي.

لِيَكُن $G=(V,E)$ بَيَان. اَلتَلوِين الأَجوِد لرُؤُوس البَيَان G هُوَ تَوزِيعُ الَالوَان علَى الرُؤُوس بِحَيث أَنَ كُلَ رَأسَين متَجَاورين لهمَا لونين مختلفين. يسَمَى الحَد الأَدنَى لعَدَد الَالوَان المَطلُوبة لتلوِين البَيَان G العدّ اللّونِي و يرمز له ب $\chi(G)$. اَلتَلوِين ر – الدِينَامِيكِي لِلرسم البيَانِي G هُوَ تلوِين منَاسب c لـ (G) ، بِحيث $|c(N(v))| \geq \min\{r, d(v)\}$ من أَجل كل رأَس v من $V(G)$ ،حيث $N(v)$ هوَ جِوَار لـ v . أَصغَر عَدَد صَحِيح k الذِي من أَجله يكُون لِلبَيَان k– تلوِين ر – دِينَامِيكِي هُوَ العَدَد اللّونِي ر – الدِينَامِيكِي $\chi_r(G)$.

فِي هذَا العمل، نقُوم بتحدِيد القِيمة الدَقِيقة لِلعَدَد اللّونِي ر – الدِينَامِيكِي $\chi_{r\in\{2,3,4\}}(G)$ لبعض الرّسُوم البيَانِيّة الكلَاسّيكيّة مثل الرّسم البيَانِي الوسطِي و البيَانِي الكُلِي لكل من السلسلة P_n ، اَلحَلقة C_n و تَاج السلسلة $Cr(P_n)$ ، اَلجُدَاء الدّكَارتِي لِلرسم البيَانِي الكتَاب $P_2\square K_{1,n}$ ، اَلنجمَات $K_{1,n}\square K_{1,n}$ و الرَسم البيَانِي الكَامل $K_n\square K_n$ ، و الجُدَاء الكلِي لّسلسلة $P_n\boxtimes P_n$. أَيضَا، نعطِي القِيمة الدَقِيقة لِلعَدَد اللّونِي ر – الدِينَامِيكِي $\chi_{r\in\{2,3,4\}}(G)$ لِلرَسم البيَانِي المَايسِيلسكِي لبعض الرّسُوم البيَانِيّة المعَينة مثل الرَسم البيَانِي الكَامل K_n ، اَلنجمَات $K_{1,n}$ ، اَلعجلة W_n و المروحيّة F_n . بالإِضَافة الَى ذلك، ندرُس البيَانَات المسمَات χ_d ـ حَافة حرجة و χ_{d_e} ـ حَافة حرجة، أَي البيَانَات G التِي من اجلِهَا يتغَير العَدَد اللّونِي ر – الدِينَامِيكِي عِند تعدِيل البيَان G بوَاسطة حذف او تَقلِيص اي حَافة. فِي هذَا الإِطَار، نقُوم بتمِيز الاشجَار χ_d– حَافة حرجة و χ_{d_e}– حَافة حرجة.

REMERCIEMENTS

Avant tous, je remercie le Dieu le tout puissant de m'avoir donné le courage, la patience et la force durant toutes ces années d'étude.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements et ma profonde reconnaissance à mon promoteur Monsieur *IKHLEF-ESCHOUF Noureddine*, Maître de conférences à l'Université Dr. Yahia Farès de Médéa, pour la confiance qu'il m'a accordée en me permettant de réaliser ce mémoire sous sa direction. Je le remercie également pour ses précieux conseils, sa disponibilité illimité, son aide, sa patience et sa bonne humeur.

Je tiens à exprimer également mes plus vifs remerciements et toute ma gratitude à :

— Monsieur *K. TABLENNEHAS*, Maître assistant à l'Université Dr. Yahia Farès de Médéa, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

— Mademoiselle *BENDALI-BRAHAM Amel*, Maître assistante à l'Université Dr. Yahia Farès de Médéa, pour avoir accepté de participer au jury de ce mémoire et pour sa disponibilité, son aide et ses précieux conseils tout au long de ce travail.

— Monsieur *M. ZAMIME*, Maître de Conférences à l'Université Dr. Yahia Farès de Médéa, pour avoir accepté de participer au jury de ce mémoire.

Je tien à exprimer mon profonde gratitude et je remercie très sincèrement mademoiselle *AIOUlA Soumia* pour leur aide et leur précieux conseils.

Enfin, j'adresse un grand merci à tous les enseignants de l'Université Dr. Yahia FARES de Médéa qui m'ont accompagnés dès la première année jusqu'à la fin de mes études.

DÉDICACE

Je dédie ce modeste travail à :

Mes très chers parents qui ont été toujours là pour moi, pour leurs soutiens durant toute ma formation, leurs patiences, leurs amours et leurs encouragements tout au long de mes études et au cours de la réalisation de ce mémoire.

Mes très chères sœurs : Nassima, Khadidja, Sara, mon petit frère Youcef pour tout l'effort et leurs soutiens moral, leurs encouragements et leurs patiences durant la réalisation de ce travail.

A toute ma grande famille sans exception.

A qui m'aime pour leur soutient, leur aide, leur encouragement et leur confiance afin d'accomplir mon travail à son terme.

A mes amis : kenza, Farida, Ihsen, Fella et a tous mes amis au long de mes études.

A tous mes collègues de promo recherche opérationnelle 2018/2019.

Table des matières

RÉSUMÉ **1**

ABSTRACT **2**

RÉSUMÉ EN ARABE **3**

REMERCIEMENTS **4**

DÉDICACE **5**

INTRODUCTION **10**

1 Définitions et notations basiques **14**

1.1 Définitions et notations 14

1.1.1 Terminologie 14

1.1.2 Voisinages et degrés 15

1.1.3 Chaînes et cycle 16

1.1.4 Distance, excentricité, diamètre, rayon et centre 17

1.1.5 Sous-graphes et graphes partiels 17

1.1.6 Ensemble maximal (resp., minimal) / maximum (resp., minimum) . . . 17

1.1.7 Graphes connexes 18

1.1.8 Graphes particuliers 18

1.1.9 Invariants de graphes 22

1.2 Quelques opérations sur les graphes 23
1.3 Complexité algorithmique 26
1.3.1 Problème de décision 26
1.3.2 Classes de complexité 27
1.4 Coloration des sommets d'un graphe 29
1.4.1 Coloration propre et nombre chromatique 29
1.4.2 Bornes sur le nombre chromatique 30
1.4.3 Coloration r-dynamique et nombre chromatique r-dynamique 31

2 Quelques résultats existants sur la coloration r-dynamique 32
2.1 Bornes supérieures et inférieurs 32
2.2 Nombre chromatique $r-$dynamique de graphes particuliers 33
2.3 Nombre chromatique $r-$dynamique de graphes réguliers 34
2.4 Nombre chromatique $r-$dynamique de certaines opérations sur les graphes . . 35
2.5 La différence entre nombre chromatique et nombre chromatique dynamique . 37
2.6 Complexité 37

3 Coloration r-dynamique de certains graphes particuliers 38
3.1 Nombre chromatique r-dynamique du graphe milieu et total de certains graphes 38
3.2 Nombre chromatique r-dynamique du produit de quelques graphes 46
3.3 Nombre chromatique r-dynamique du graphe de Mycielski 52

4 Graphes χ_d-arête critiques 59
4.1 Comparaisons entre $\chi_d(G)$ et $\chi_d(G-e)$, et entre $\chi_d(G)$ et $\chi_d(G-v)$ 60
4.2 Résultats particuliers sur les graphes χ_d^--arête critique 61

5 Graphes χ_{d_e}-critiques 64
5.1 Résultats particuliers sur les graphes χ_{d_e}- critiques 64
5.1.1 Caractérisation des graphe $\chi_{d_e}-$critiques 65

CONCLUSION ET PERSPECTIVES **68**

BIBLIOGRAPHIE

Table des figures

1.1 Un graphe G. 15

1.2 Une chaîne d'ordre 5 et un cycle d'ordre 4. 16

1.3 Exemple d'un graphe G avec un graphe partiel et un sous graphe de G. 17

1.4 a, b, f sont des sommets d'articulation. L'arête ab est un isthme. 18

1.5 Exemple d'un arbre avec six feuilles. 19

1.6 Une étoile $K_{1,6}$ 19

1.7 Une double étoile $S_{3,4}$. 19

1.8 Une chenille $C(2,1,0,4)$. 20

1.9 Un graphe complet à 6 sommets (K_6). 20

1.10 Un graphe G et son complémentaire. 20

1.11 Un graphe biparti et biparti complet $K_{4,3}$ 21

1.12 Cubique. 21

1.13 Le graphe de Petersen G_{10}. 21

1.14 Exemple de deux graphes isomorphes. 22

1.15 S = $\{a, c, h, i\}$ est un ensemble stable avec $\alpha(G) = 4$. 23

1.16 M = $\{x_2x_3, x_4x_5, x_6x_1\}$ est un couplage parfait avec $\beta(G) = 3$ 23

1.17 Exemple de la suppression d'un sommet v d'un graphe. 24

1.18 Exemple de la suppression d'une arête uv d'un graphe 24

1.19 Exemple de la subdivision d'une arête uv d'un graphe 24

1.20 Exemple de la contraction d'une arête uv d'un graphe 25

1.21 Le cycle C_4 et sa couronne $C_4 \circ K_1$. 25

1.22 Exemple du produits de chaîne P_2 et P_3. 26

1.23 Une coloration dynamique de sommets d'un graphe avec $\chi_d(G) = 3$. 31

3.1 Exemple d'un graphe milieu et d'un graphe total d'une chaîne. 39

3.2 Coloration 3-dynamique du $M(P_5)$ et $T(P_5)$. 40

3.3 Coloration 4-dynamique du $M(P_5)$ et $T(P_5)$. 41

3.4 Coloration 3-dynamique de $M(C_6)$ et $M(C_9)$. 42

3.5 Coloration 3-dynamique de $T(C_3)$. 43

3.6 Coloration 3-dynamique de $T(C_6)$ et $T(C_4)$. 44

3.7 Coloration 3-dynamique de $T(C_7)$ et $T(C_5)$. 44

3.8 Coloration dynamique de $M(Cr(P_4))$ et $T(Cr(P_4))$. 46

3.9 Coloration dynamique de $P_2 \square K_{1,4}$. 47

3.10 Coloration dynamique de $K_{1,3} \square K_{1,4}$. 48

3.11 Coloration 3-dynamique de $K_{1,3} \square K_{1,4}$. 49

3.12 Coloration dynamique de $K_3 \square K_4$. 50

3.13 Coloration 3-dynamique de $K_3 \square K_3$. 51

3.14 Coloration $\{2,3\}$-dynamique de $P_3 \boxtimes P_4$. 51

3.15 Le graphe complet K_4 et son Mycielski graphe. 52

3.16 Coloration dynamique de $\mu(K_4)$ et 3-dynamique de $\mu(K_3)$. 54

3.17 Coloration $\{2,3\}$-dynamique de $\mu(K_{1,4})$. 56

3.18 Coloration dynamique de $\mu(W_5)$ et $\mu(W_6)$. 57

3.19 Coloration dynamique de $\mu\left(F_{1,5}\right)$. 58

4.1 Coloration dynamique de P_n et $P_n - e$ pour $n \in \{2,3,4\}$. 61

INTRODUCTION

Il arrive souvent, devant un problème donné, qu'on soit amené à dessiner un schéma sur un papier pour éclairer et simplifier la compréhension, et en conséquence obtenir des solutions efficaces. Donc, parfois

"Un bon dessin vaut mieux qu'un long discours"

Napoléon Bonaparte

Ce schéma est constitué par un ensemble de points représentant les différents objets du problème dont certains sont reliés par des lignes symbolisant les relations existant entre eux. Pour raisonner sur de tels schémas, les mathématiciens ont convenu d'appeler ce schéma *un graphe*. Les points sont appelés *des sommets* et les lignes sont dites *des arêtes* (*arcs*, si les lignes sont orientées). Alors, un graphe est une manière de pensé qui permet la modélisation d'une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude des sommets et des arêtes. Ce type de problèmes fait le but d'un très vaste domaine bien évoluée des mathématiques qui s'appelle "*la théorie des graphes*". Ce domaine s'est développé dans des divers disciplines comme la chimie, la biologie, la sociologie, l'économie ... Cela explique pourquoi la théorie des graphes devient le domaine le plus populaire des mathématiques discrètes malgré son jeune âge.

Historiquement, la théorie des graphes a été commencée depuis $18^{\text{ème}}$ siècle et trouve son origine dans l'étude du problème des sept ponts de la ville russe de Königsberg, posé par le mathématicien suisse *Leonhard Euler*, lorsqu'il a pensé à la possibilité de traverser chacun des ponts, une et une seule fois et de revenir à son point de départ. La théorie des graphes est devenue l'un des instruments les plus efficaces, elle contribue à résoudre de nombreux problèmes concrets de la vie courante.

Actuellement, la théorie des graphes comprend plusieurs domaines les uns aussi intéressant que les autres, à titre d'exemple la coloration, la domination, la stabilité, le couplage, etc.. . .

Le problème de coloration est au cœurs de la théorie des graphes et fait l'objectif de plusieurs recherches. Il est apparue en 1852, quand le problème des quatre couleurs a été posé pour la première fois par Francis Guthrie, lorsqu'il s'est demandé s'il est toujours possible de colorer n'importe quelle carte géographique en n'utilisant que quatre couleurs, de manière à éviter que deux pays voisins aient la même couleur. C'est qu'en 1976, que deux chercheurs américains, K. Appel et W. Haken [7, 8] ont pu répondre affirmativement à cette question à l'aide d'un calcul par ordinateur. Et depuis, les problèmes de coloration apparaissent dans plusieurs domaines pour modéliser de nombreux problèmes pratiques, nous citons par exemple les problèmes d'ordonnancement, de planning de la vie de tous les jours, et dans le domaine des réseaux/télécom, etc.. . . Divers types de coloration ont été considérés dans la littérature (coloration des sommets, coloration des arêtes, coloration totale, coloration par liste, etc.. . .). Pour de plus amples détails sur ce sujet, le lecteur peut se reporter aux livres de G. Chartrand et P. Zhang [14] et de T. R. Jensen et B. Toft [27].

La coloration des sommets est certainement le concept le plus ancien et le plus étudié. Il s'agit d'affecter des couleurs (entiers positifs) aux sommets de telle sorte que deux sommets adjacents ne doivent pas porter la même couleur, une telle coloration est dite *propre (classique)*. Une coloration optimale d'un graphe est une coloration propre de sommets utilisant un nombre minimum de couleurs appelé *nombre chromatique* et noté $\chi(G)$. Une classe de couleur i est un ensemble de sommets stable colorés avec la même couleur i. Le problème de décision lié à ce paramètre est NP-complet. Pour cette raison, plusieurs travaux ont été menés pour borner ce paramètre en fonction d'autres paramètres de graphe.

Le nombre chromatique a permis d'introduire de nombreux paramètres de coloration. La plupart de ces derniers cherchent à minimiser le nombre de couleurs nécessaires à la coloration d'un graphe. Cependant, il existe d'autres paramètres qui ont pour objet l'utilisation du plus grand nombre possible de couleurs.

Parmi les paramètres de coloration existants, nous avons étudié la coloration r-dynamique. C'est une généralisation de la coloration classique.

Une k-coloration r-dynamique ($k, r \in \{1,2,...,\mathbb{N}\}$)est une k-coloration propre de G telle que pour chaque voisinage de sommet $N(v)$, au moins le minimum entre r et $d(v)$ couleurs sont utilisées. Le nombre chromatique r-dynamique $\chi_r(G)$, introduit par Montgomery [35, 29], est le petit entier k tel que G a une k-coloration r-dynamique. Dans[29], Montgomery a noté le nombre chromatique 2-dynamique χ_2 par le nombre chromatique dynamique χ_d.

Ce mémoire comporte cinq chapitres dont voici une description.

Chapitre 1 **: Définitions et notations basiques.**

Nous rappelons les principales définitions nécessaires à la compréhension du contenu de ce mémoire. En outre, nous présentons quelques opérations sur les graphes qui nous seront utiles dans la suite et nous faisons une brève présentation sur l'efficacité des algorithmes et de la complexité des problèmes. Enfin, nous exposons un aperçu de la coloration classique et la coloration r-dynamique.

Chapitre 2 **: Quelques résultats existants sur la coloration r-dynamique.**

Nous donnons un recueil des principaux résultats existants sur la coloration r-dynamique des sommets d'un graphe, bornes et valeurs exactes du nombre chromatique r-dynamique pour certaines classe de graphes.

Chapitre 3 **: Coloration r-dynamique de certains graphes particuliers.**

Dans la première section de ce chapitre, nous nous intéressons à la détermination de la valeur exacte du nombre chromatique r dynamique $\chi_{r\in\{2,3,4\}}(G)$ de certains graphes classiques comme le graphe milieu et total d'une chaîne P_n, d'un cycle C_n et d'une couronne d'une chaîne $Cr(P_n)$. Dans la deuxième section, nous donnons les valeurs exactes du nombre chromatique r-dynamique $\chi_{r\in\{2,3,4\}}(G)$ du produit cartésien de boucle graphe $P_2 \square K_{1,n}$, des étoiles $K_{1,n} \square K_{1,n}$ et des graphes complets $K_n \square K_n$ et le produit totale des chaînes $P_n \boxtimes P_n$. Dans la troisième section, nous déterminons les valeurs exactes du nombre chromatique r-dynamique $\chi_{r\in\{2,3,4\}}(G)$ du graphe de mycielski du quelques graphes particuliers comme le graph complet K_n, l'étoile $K_{1,n}$, la roue W_n et le fan graphe F_n.

Chapitre 4 **: Graphes χ_d-sommet critiques et χ_d-arête critiques.**

Ce chapitre est consacré à l'étude de graphes χ_d-arête critiques, c'est à dire l'étude de l'effet de la suppression d'une arête quelconque sur le nombre chromatique dynamique de G pour certaines classes particulières de graphes et on donne une caractérisation des arbre χ_d^--arête critique.

Chapitre 5 **: Graphes χ_{d_e}-critiques.**

Dans ce chapitre, nous avons établi des bornes sur le nombre chromatique dynamique après la contraction d'une arête quelconque dans le graphe et nous déterminons quelques graphes atteignant ces bornes. En outre, nous caractérisons les arbres $\chi_{d_e}^-$-critiques, c'est à dire les arbres T dont le nombre chromatique dynamique change lorsque T est modifier en contractant une arête quelconque de T.

Ce mémoire s'achève par une conclusion et quelques perspectives.

Chapitre 1

Définitions et notations basiques

Dans ce chapitre, nous donnons la terminologie utilisée dans ce mémoire.
Nous commençons par introduire les notations usuelles dans le domaine de la théorie des graphes ainsi que les définitions de base utilisées tout au long de ce document. Ensuite, nous présentons quelques opérations sur les graphes qui nous seront utiles dans la suite et nous faisons une brève présentation sur l'efficacité des algorithmes et de la complexité des problèmes. Enfin, nous exposons un aperçu de la coloration classique et la coloration r-dynamique.
Pour plus de détails sur la terminologie utilisée dans ce mémoire, nous invitons le lecteur à se référer à les ouvrages suivants : BERGE [10], J.A.Bondy et U. S. R. Murty [11].

1.1 Définitions et notations

Dans cette section, nous rappelons les principales notions nécessaires à la compréhension du contenu de ce mémoire.

1.1.1 Terminologie

— Un *graphe* G est la donnée d'un couple (V, E) où V est un ensemble finie non vide dit ensemble des *sommets* et un ensemble E de paires de sommets, appelées *arêtes*.

— Les sommets sont notés de manière usuelle par des lettres minuscules : *u, v, x, y, a, b*, etc.. . . Les arêtes sont notées *uv, xy, ab*, etc.. . .

— Si u et v sont deux sommets reliés par une arête e, alors u et v sont dits *adjacents* ou *voisins*, et e est dite *incidente* à u et v, de plus u et v sont appelés les *extrémités* de e, on écrit donc $e = uv$ ou $e = vu$.

— Deux arêtes distinctes sont dites *adjacentes* si elles ont au moins une extrémité commune.

— Un sommet u est dit *isolé* s'il n'existe aucune arête dans E incidente à u.

— Une arête dont les deux extrémités sont confondues est dite une *boucle*.

— Un ensemble d'arêtes est dits *multiples* s'ils ont les mêmes extrémités.

— Un graphe *simple* est un graphe sans boucles et sans arêtes multiples.

— On appelle *ordre* d'un graphe G , noté n, le nombre de ses sommets et qui est égal au cardinal de V, et la *taille* de G, noté m, le nombre de ses arêtes et qui est égal au cardinal de E.

Au vu de ces définition, il est naturel de représenter un graphe où les points représentent les sommets du graphe et les segments entre deux points représentent les arêtes. Par exemple, la Figure 1.1 montre un graphe G = (V, E) avec V(G) = a, b, c, d, e, f, g et E(G) = $ab, bc, cd, bd, ce, de, df, ef, fg$.

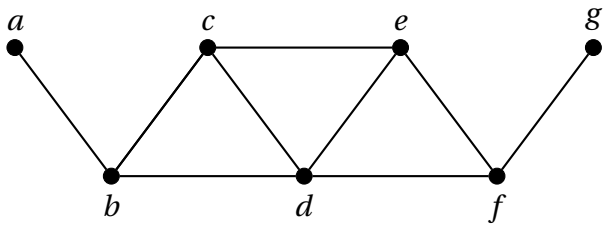


FIGURE 1.1 – Un graphe G.

Notons que tous les graphes considérés dans ce mémoire sont non-orientés, finis, simples et sans sommets isolés.

1.1.2 Voisinages et degrés

— Le *voisinage ouvert* d'un sommet v d'un graphe G = (V, E) est défini par l'ensemble suivant $N_G(v) = \{u \in V : uv \in E\}$.

— Le *voisinage fermé* d'un sommet v d'un graphe G = (V, E), noté $N_G[v]$, est défini par $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$.

— L'ensemble $N_G(S) = \cup_{v \in s} N_G(v)$ (resp. $NG[S] = \cup_{v \in s} N_G(v) \cup (S)$) est le voisinage ouvert (resp. fermé) du sous ensemble $S \subseteq V$.

— Le nombre de voisins d'un sommet v d'un graphe G est appelée *degré* de v, noté $d_G(v)$ (ie. $d_G(v) = |N_G(v)|$). D'une autre manière le *degré* de v est le nombre d'arêtes incidentes à v.

— Les sommets isolés sont de degré nul.

— Un sommet de degré 1 est dit sommet *pendant*, et tout sommet adjacent à un sommet pendant est appelé *support*.

— Le degré minimum et le degré maximum d'un graphe G sont notés par $\delta(G)$ et $\Delta(G)$ respectivement tel que $\delta(G) = \min\{d(u) : u \in V\}$ et $\Delta(G) = \max\{d(u) : u \in V\}$.

1.1.3 Chaînes et cycle

— Une *chaîne* d'ordre k (avec $k \geq 2$), notée P_k, est une suite finie d'arêtes $v_i v_{i+1}$, avec $i \in \{1, ..., k-1\}$. Les sommets v_1 et v_k sont les *extrémités* de P_k et les sommets $v_2, v_3, ..., v_{k-1}$ sont les sommets intérieurs de P_k. La *longueur* de la chaîne P_k est le nombre de ses arêtes, donc c'est $k-1$. Une chaîne P est dite *simple* si chaque arête de P est empruntée une seule fois. Une chaîne P est dite *élémentaire* si elle ne passe pas deux fois par le même sommet. Une arête reliant deux sommets non successifs dans une chaîne est dite une *corde*. Une chaîne sans corde est dit *induit* (voir Figure 1.2).

— Un *cycle* d'ordre k (avec $k \geq 3$), noté C_k, est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues. Un cycle élémentaire C_n induit par n sommets est un cycle dont les sommets sont distincts. Le nombre d'arêtes d'un cycle représente sa *longueur* (voir Figure 1.2).

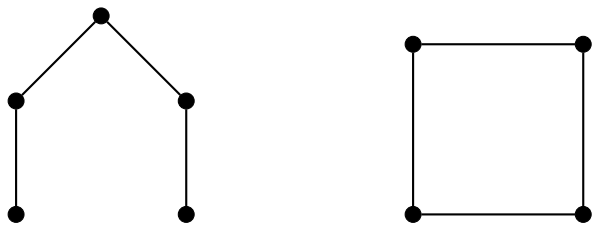


FIGURE 1.2 – Une chaîne d'ordre 5 et un cycle d'ordre 4.

1.1.4 Distance, excentricité, diamètre, rayon et centre

— La *distance* entre deux sommets u et v d'un graphe G, notée $d(u,v)$, est la longueur de la plus petite chaîne les reliant.

— *L'excentricité* de v , noté $exc(v)$, est définie par $exc(v) = \max\{d(v,w) : w \in V\}$.

— Le *diamètre* de G est $diam(G) = \max\{exc(v) : v \in V\}$.

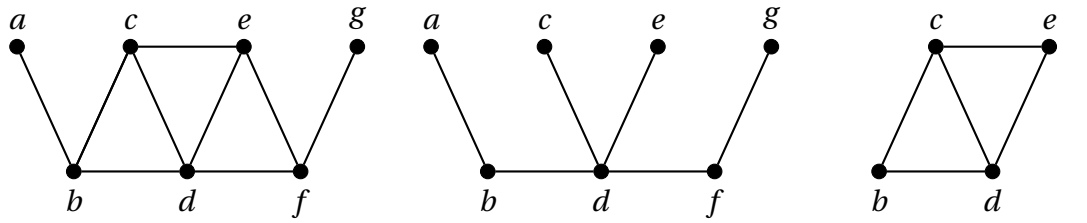
— Le *rayon* de G est $r(G) = \min\{exc(v) : v \in V\}$.

— Un sommet de G ayant une excentricité minimale est appelé *centre*.

1.1.5 Sous-graphes et graphes partiels

— $H = (V', E')$ est un *graphe partiel* d'un graphe $G = (V, E)$ si $V' = V$ et $E' \subseteq E$ (voir un exemple d'un graphe partiel dans la Figure 1.3).

— $H = \left(V', E'\right)$ est un *sous-graphe* de $G = (V, E)$ si $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$. En outre, si $E' = \left\{uv \in E : \ u, v \in V'\right\}$, alors H est dit sous-graphe induit (ou engendré) par V', dans ce cas H est noté par $G\left[V'\right]$ (Voir un exemple d'un sous-graphe de G induit par A = b, c, d, e dans la Figure 1.3).



Graphe G — Graphe partiel de G. — Sous graphe de G.

FIGURE 1.3 – Exemple d'un graphe G avec un graphe partiel et un sous graphe de G.

1.1.6 Ensemble maximal (resp., minimal) / maximum (resp., minimum)

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $\mathscr{P}$ une propriété .

— Un sous-ensemble A de V est dit *minimal* (resp., *maximal*) par rapport à la propriété $\mathscr{P}$ s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq A$ (resp., $A \subseteq B$) tel que $G[B]$ vérifie $\mathscr{P}$.

— Un sous-ensemble A de V est dit *minimum* ou de *taille minimale* (resp., *maximum* ou de taille *maximale*) par rapport à la propriété $\mathscr{P}$ s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq V$ tel que $G[B]$ vérifie $\mathscr{P}$ et $|A| \geq |B|$ (resp., $|A| \leq |B|$).

1.1.7 Graphes connexes

— Un graphe $G = (V, E)$ est dit *connexe* si pour toute paire de sommets, il existe une chaîne les reliant. Une *composante connexe* de G est un sous-graphe de G qui est maximal pour la propriété d'être connexe. Un graphe qui n'est pas connexe est dit *non connexe*.

— Un sommet $v \in V$ $e \in E$ (resp., Une arête $e \in E$) est dit sommet *d'articulation* (resp., *un isthme*) si sa suppression de V (resp., E) augmente le nombre de composantes connexes de G (voir Figure 1.4).

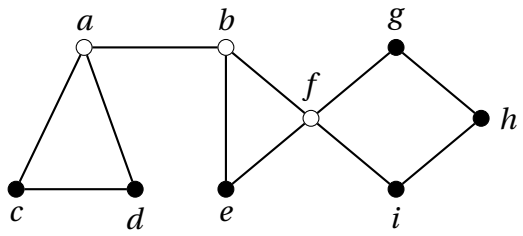


FIGURE 1.4 – a, b, f sont des sommets d'articulation. L'arête ab est un isthme.

1.1.8 Graphes particuliers

— Un graphe *discret* d'ordre n, noté D_n, est un graphe sans arêtes.

— Un graphe est *trivial* s'il contient un seul sommet.

— Un *arbre* est un graphe connexe et sans cycle, noté T. Tout arbre à n sommets contient exactement $n-1$ arêtes. Et, tout sommet de degré 1 dans un arbre est appelé une *feuille* et tout sommet adjacent à un sommet pendant est appelé sommet *support* (voir Figure 1.5). Un arbre est dit *trivial* s'il contient un seul sommet.

— Une *forêt* est un graphe non connexe où chaque composante connexe est un arbre.

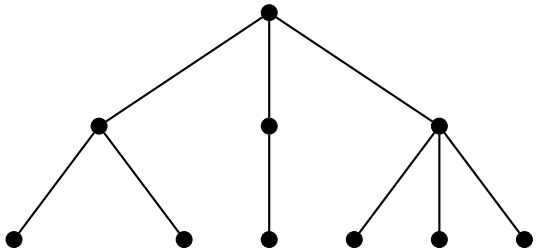


FIGURE 1.5 – Exemple d'un arbre avec six feuilles.

— On appelle *étoile*, et on note par $K_{1,n}$, l'arbre à $n+1$ sommets ayant *n feuilles*. Le sommet qui est adjacent à toutes les feuilles est dit *centre* (voir Figure1.6).

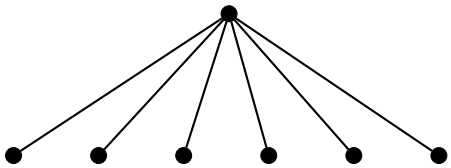


FIGURE 1.6 – Une étoile $K_{1,6}$

— Une *double étoile*, notée $S_{r,t}$, est le graphe obtenu en ajoutant une arête reliant deux centres de deux étoiles distinctes $K_{1,r}$ et $K_{1,t}$ (voir Figure 1.7).

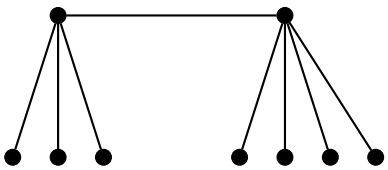


FIGURE 1.7 – Une double étoile $S_{3,4}$.

— Une *galaxie* est un graphe dont toutes les composantes connexes sont des étoiles.

— Un graphe est dit *sans griffe* s'il ne contient pas $K_{1,3}$ comme un sous-graphe induit.

— Une *chenille*, notée $C(t_1, t_2, ..., t_n)$, est un arbre dont la suppression de ses sommets pendants donne une chaîne u_1-u_2-...- u_n, où t_i est le nombre de sommets pendants adjacents à u_i (Voir Figure 1.8).

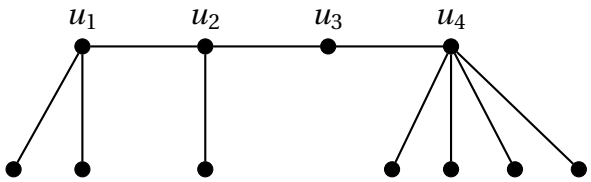


FIGURE 1.8 – Une chenille C(2,1,0,4).

— *Graphe complet* d'ordre n, noté K_n, est un graphe dont tous ses sommets sont deux à deux adjacents et de degré $(n-1)$, il contient $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes (voir Figure 1.9).

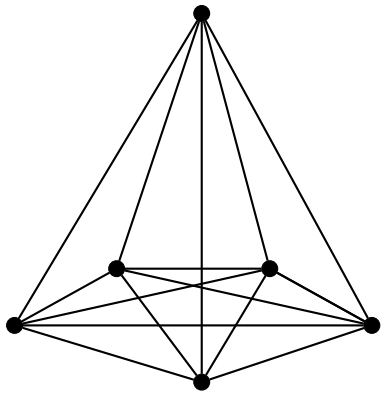


FIGURE 1.9 – Un graphe complet à 6 sommets (K_6).

— *Graphe complémentaire* d'un graphe G = (V,E), noté $\overline{G} = (V,\overline{E})$, est un graphe d'ensemble de sommets V et d'ensemble d'arêtes $\overline{E} = \{uv : u,v \in V \text{ et } uv \notin E(G)\}$ (voir Figure 1.10).

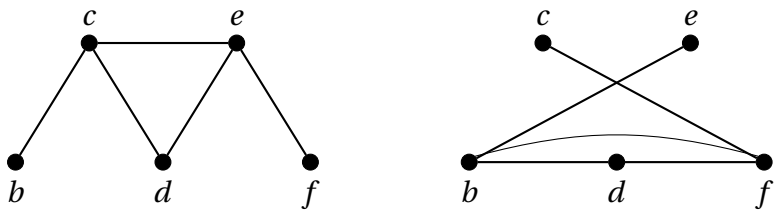


FIGURE 1.10 – Un graphe G et son complémentaire.

— Un graphe G = (V,E) est dit *biparti* si l'ensemble de ses sommets V peut être partitionné en deux sous-ensembles disjoints V_1 et V_2 de sorte que deux sommets de V_i ne soient jamais adjacents pour tout $i \in \{1,2\}$. Si tous les sommets de V_1 sont adjacents à tous les sommets de V_2, alors G est dit *biparti complet*, noté $K_{m,n}$, avec $m = |V_1|$ et $n = |V_2|$ (voir Figure 1.11) .

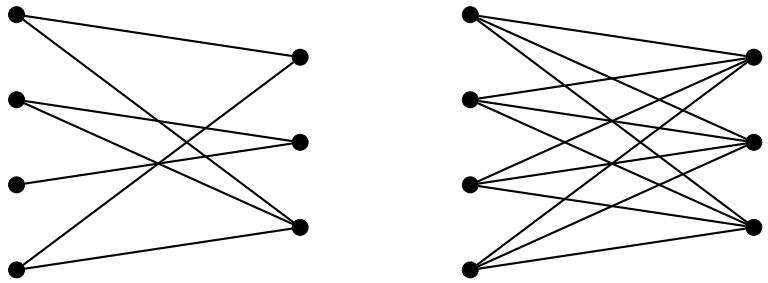


FIGURE 1.11 – Un graphe biparti et biparti complet $K_{4,3}$.

— Un graphe $G = (V, E)$ est dit *d-régulier* (resp., *d-arête régulier*) si tous ses sommets (resp., arêtes) sont de degré d. C'est-à-dire : $\forall u, v \in V(G)$; $d_G(u) = d_G(v) = d$.
Et d'autre part nous avons : $\delta(G) = \Delta(G)$. Si $d = 3$, alors G est dit *cubique* (voir Figure 1.12). Notons que les cycles sont des graphes 2-réguliers, les couplages sont des graphes 1-réguliers, les stables sont des graphes 0-réguliers et les cliques sont des graphes $(n-1)$-réguliers.

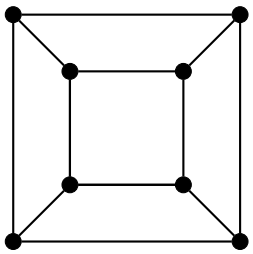


FIGURE 1.12 – Cubique.

— Le graphe de *Petersen* est un graphe 3-régulier de 10 sommets et 15 arêtes (voir Figure 1.13).

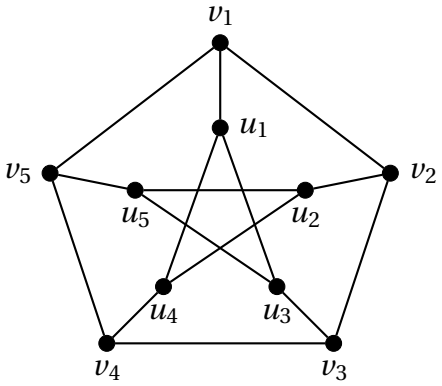


FIGURE 1.13 – Le graphe de Petersen G_{10}.

— Un graphe est dit *planaire* s'il peut être dessiné dans le plan de sorte que ses arêtes ne se croisent pas.

— Une *roue,* notée W_n est un graphe formé en connectant un sommet universel à tous les sommets d'un cycle C_{n-1}.

— le *Fan graphe,* notée $F_{1,n}$ est le graphe joint $K_1 \vee P_n$.

1.1.9 Invariants de graphes

Soit G = (V, E) un graphe.

— Deux graphes G = (V, E) et G′ = $\left(V', E'\right)$ sont dits *isomorphes* et on écrit G ≅ G′ s'il existe une bijection f de V vers V′ telle que pour tous u, $v \in V$, on a $uv \in E$ si et seulement si $f(u) f(v) \in E'$ (voir Figure 1.14).

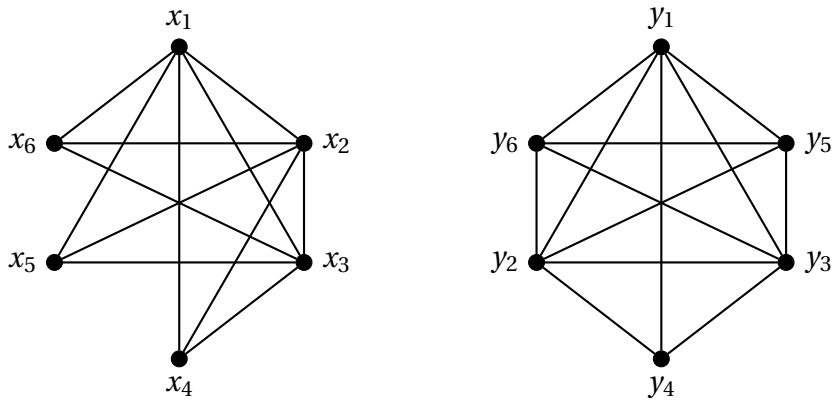


FIGURE 1.14 – Exemple de deux graphes isomorphes.

Si deux graphes sont isomorphes alors ils ont des propriétés communes. Ces propriétés communes sont appelées *invariants* de graphes. En d'autre termes un *invariant* est une propriétés stable par isomorphisme. Le nombre de sommets et d'arêtes sont deux invariants de base d'un graphe. Nous définissons ci-après quelques invariants de graphes intervenant dans la suite.

— Une *clique* de G est un sous-graphe complet. La taille d'une clique est le nombre de ses sommets. On note par ω (G) la taille de la clique maximum dans G.

— Un *stable* (ou *indépendant*) dans un graphe G est un sous-ensemble de sommets de G deux à deux non adjacents. Un *stable maximum* de G est un stable de cardinalité

maximale. Le nombre de sommets d'un stable maximum dans G est appelé nombre de stabilité (ou nombre d'indépendance) et noté par $\alpha(G)$ (voir Figure 1.15).

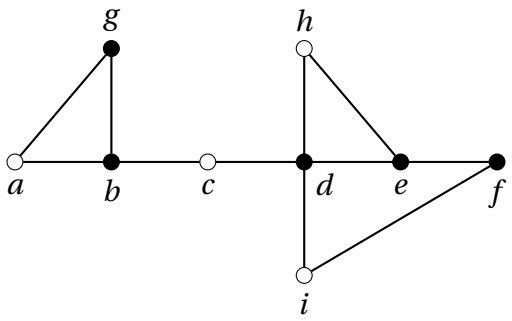


FIGURE 1.15 – S = $\{a, c, h, i\}$ est un ensemble stable avec $\alpha(G) = 4$.

— Un *couplage* M dans un graphe G est un sous-ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes. Un sommet x de G est dit *saturé* par M, s'il existe une arête de M incidente à x. Un couplage est dit *parfait*, s'il sature tous les sommets de G. Un *couplage maximum* est un couplage de taille maximale. On note par $\beta(G)$ la taille du couplage maximum dans G (voir Figure 1.16).

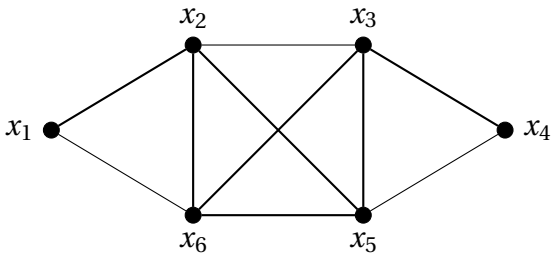
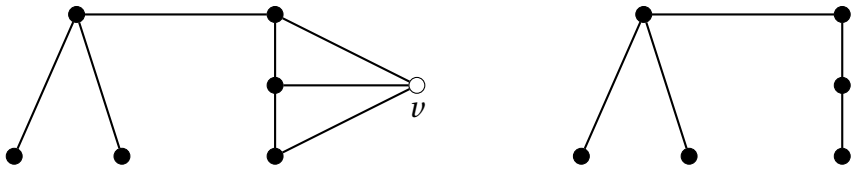


FIGURE 1.16 – M = $\{x_2x_3, x_4x_5, x_6x_1\}$ est un couplage parfait avec $\beta(G) = 3$.

1.2 Quelques opérations sur les graphes

Nous donnons, ci-après, les différentes opérations de base sur les graphes.

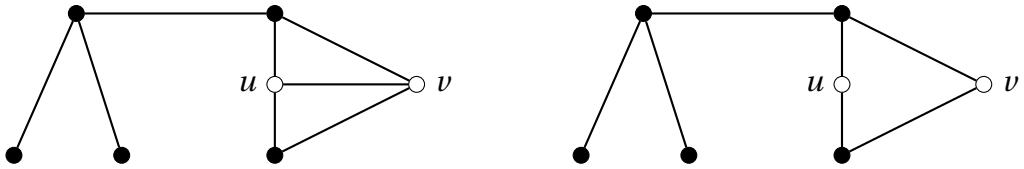
— Soient $v \in V$ et $S \subseteq V$. Le graphe $G \setminus \{v\}$ est le graphe obtenu à partir de G en supprimant le sommet v et toutes les arêtes incidentes à v (Voir Figure 1.17). Le graphe $G \setminus S$ est le sous-graphe engendré par $V \setminus S$.



Graphe G Graphe G$\setminus\{v\}$

FIGURE 1.17 – Exemple de la suppression d'un sommet v d'un graphe.

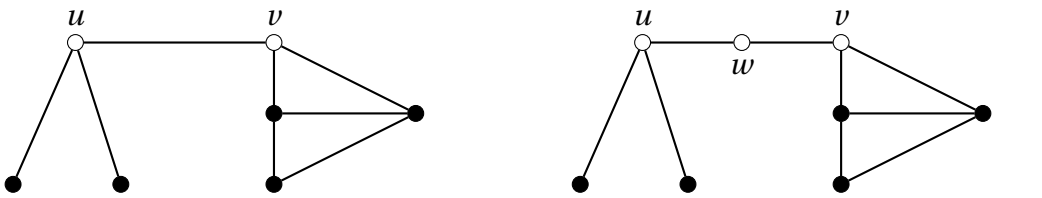
— Soit uv une arête de G. Le graphe G$\setminus\{uv\}$ est le graphe obtenu à partir de G en supprimant l'arête uv (les extrémités de uv ne sont pas supprimées) (Voir Figure 1.18).



Graphe G Graphe G$\setminus\{uv\}$

FIGURE 1.18 – Exemple de la suppression d'une arête uv d'un graphe .

— La *subdivision* d'une arête uv d'un graphe G = (V, E) consiste à supprimer l'arête uv et rajouter un sommet w et deux arêtes uw et wv. Le graphe obtenu à partir de la subdivision de uv est noté par S(G) où V(S(G)) = V(G) $\cup$ w et E(S(G)) = E(G) $\cup$ $\{uw, wv\}$. (Voir Figure 1.19).



Graphe G Graphe G après la subdivision de uv.

FIGURE 1.19 – Exemple de la subdivision d'une arête uv d'un graphe .

— La *contraction* d'une arête uv d'un graphe G = (V, E) consiste à supprimer l'arête uv et à fusionner les extrémités de l'arête uv. Le sommet résultant est adjacents à tous les voisins de u et de v. Le graphe obtenu à partir de la contraction de uv est noté par G_{uv} (Voir Figure 1.20).

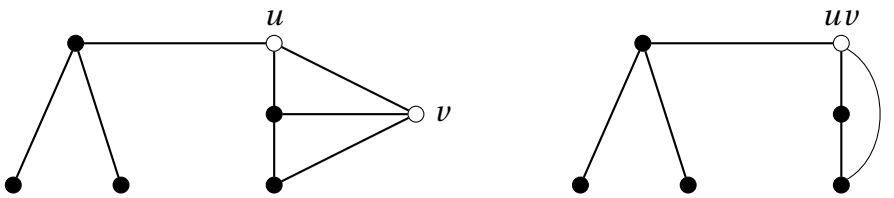


FIGURE 1.20 – Exemple de la contraction d'une arête uv d'un graphe .

— L'*union* de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$, notée $G_1 + G_2$, est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V_1 \cup V_2$ et ensemble d'arêtes $E_1 \cup E_2$. On note par kG l'union de $k \geq 1$ copies de G.

— Le *joint* de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$, noté $G_1 \vee G_2$ est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V_1 \cup V_2$ et ensemble d'arêtes $(E_1 \cup E_2) \cup \{uv : u \in V_1 \text{ et } v \in V_2\}$. Autrement dit, $G_1 \vee G_2$ est le graphe obtenu à partir de $G_1 + G_2$ en ajoutant toutes les arêtes entre tous les sommets de G_1 et G_2.

— La *couronne* d'un graphe G, notée $Cr(G)$ ou $G \circ K_1$ est le graphe d'ordre $2|V(G)|$, obtenu en attachant à chaque sommets de G un sommet pendant (voir Figure 1.21).

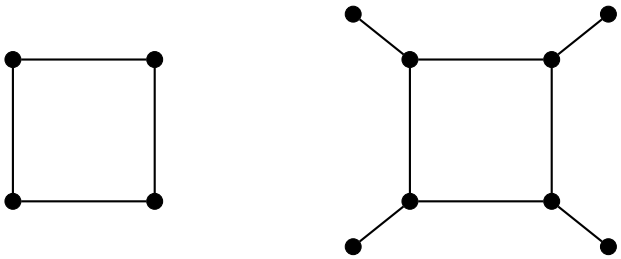


FIGURE 1.21 – Le cycle C_4 et sa couronne $C_4 \circ K_1$.

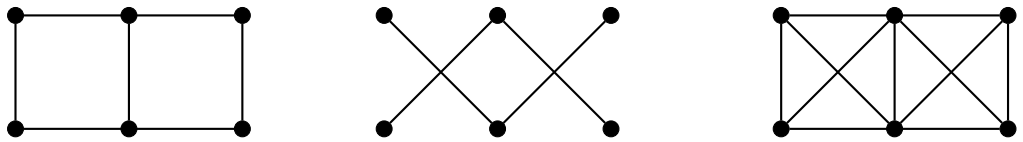
— Le *produit cartésien* de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$, noté $G_1 \square G_2$, est le graphe ayant pour ensemble de sommets $\{(u, v) : u \in V_1 \text{ et } v \in V_2\}$. Deux sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont adjacents si $u_1 = u_2$ et $v_1 v_2 \in E_2$ ou $v_1 = v_2$ et $u_1 u_2 \in E_1$.

— Une *grille* est le produit cartésien de deux chaîne, noté $G_{m,n}$.

— Le *produit direct* (ou *croisé*) de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$, noté $G_1 \times G_2$, est le graphe ayant pour ensemble de sommets $\{(u, v) : u \in V_1 \text{ et } v \in V_2\}$. Deux sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont adjacents si $v_1 v_2 \in E_2$ et $u_1 u_2 \in E_1$.

— Le *produit total* (ou *fort*) de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$, noté $G_1 \boxtimes G_2$, est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V(G_1) \times V(G_2)$ et dont deux sommets $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$ sont reliés par une arête si et seulement si $u_1 = u_2$ ou $u_1u_2 \in E(G_1)$ et $v_1 = v_2$ ou $v_1v_2 \in E(G_1)$. Ceci veut dire que $E(G_1 \boxtimes G_2) = E(G_1 \square G_2) \cup E(G_1 \times G_2)$.

Les trois produits sont illustrés dans la Figure suivante



$P_2 \square P_3$ $P_2 \times P_3$ $P_2 \boxtimes P_3$

FIGURE 1.22 – Exemple du produits de chaîne P_2 et P_3.

1.3 Complexité algorithmique

La théorie de la compléxité s'intéresse à l'étude formelle de la difficulté des problèmes en informatique et plus précisément à leur résolution de façon éfficace, en tenant compte le temps de calcul et les données stoquées en mémoire.

1.3.1 Problème de décision

Chaque problème informatique peut se réduire à un problème de *décision*, c'est-à-dire un problème formulé comme une question dont la réponse est Oui ou Non. Un problème qui n'est pas formulé de cette manière peut être très simplement transformé en un problème de décision équivalent. Le problème du voyageur de commerce qui cherche, dans un graphe, à trouver la taille du cycle le plus court passant une fois par chaque sommet, peut s'énoncer en un problème de décision ainsi : Existe-t-il un cycle passant une et une seule fois par chaque sommet tel que la somme des coûts des arcs utilisés soit inférieure à k, avec $k \in \mathbb{N}$. Ce problème est équivalent au problème du voyageur de commerce au sens où si l'on sait résoudre efficacement l'un, on sait aussi résoudre efficacement l'autre.

1.3.2 Classes de complexité

La théorie de la complexité repose sur la définition de classes de complexité qui permettent de classer les problèmes en fonction de la complexité des algorithmes qui existent pour les résoudre.

Classe P

Un problème p est dit Polynomial (ie. $p \in$P), s'il peut être résolu par un algorithme déterministe en un temps polynomial.

Prenons par exemple le problème de la connexité dans un graphe. Étant donné un graphe à n sommets, il s'agit de savoir si toutes les paires de sommets sont reliées par une chaîne. Pour le résoudre, on dispose de l'algorithme de parcours en profondeur qui va construire un arbre couvrant du graphe à partir d'un sommet. Si cet arbre contient tous les sommets du graphe, alors le graphe est connexe. Le temps nécessaire pour construire cet arbre est au plus n^2, donc le problème est bien dans la classe P.

Les problèmes dans P correspondent en fait à tous les problèmes facilement solubles.

Classe NP

Un problème p est NP, s'il est résoluble par un algorithme Non déterministe en un temps polynomial par rapport à la taille de l'instance.

De façon équivalente, c'est la classe des problèmes qui admettent un algorithme dans P qui, étant donné une solution du problème NP, est capable de répondre oui ou non.

Intuitivement, les problèmes dans NP sont tous les problèmes qui peuvent être résolus en énumérant l'ensemble des solutions possibles et en les testant avec un algorithme polynomial.

Par exemple, la recherche de cycle hamiltonien dans un graphe peut se faire avec deux algorithmes :

— le premier génère l'ensemble des cycles (ce qui est exponentiel) ;

— le second teste les solutions (en temps polynomial).

On constate, immédiatement, que P$\subset$NP.

Problème NP-Complet

Un problème est NP-difficile si ce problème est au moins aussi dur que tous les problèmes dans NP. Formellement, on définit une notion de réduction : Soient p et p' deux problèmes. Une réduction de $p^{'}$ à p est un algorithme transformant toute instance de $p^{'}$ en une instance de p. Ainsi, si l'on a un algorithme pour résoudre p, on sait aussi résoudre $p^{'}$. p est donc au moins aussi difficile à résoudre que $p^{'}$. Les problèmes les plus étudiés sont les problèmes NP -complets, parce qu'on ne sait pas les résoudre éfficacement à cause de leur indéterminisme. Il est clair que P∈NP, puisqu'un algorithme déterministe est un algorithme non déterministe particulier.

p est alors NP-difficile si pour tout problème $p^{'}$ de NP, $p^{'}$ se réduit à p. Quand on parle de problèmes NP-difficiles on s'autorise uniquement des réductions dans P, c'est-à-dire que l'algorithme qui calcule le passage d'une instance de $p^{'}$ à une instance de p est polynomial.

Classe NP-complet

Le problème étant dans NP et NP-difficile, il est NP-complet; en d'autres termes, les problèmes NP-complets sont les plus difficiles de la classe NP.

1.4 Coloration des sommets d'un graphe

Dans cette section, nous nous intéressons uniquement à la coloration des sommets d'un graphe. Nous donnons un aperçu sur l'un des problèmes les plus étudié dans la théorie des graphes et qui a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs à savoir "*la coloration de graphes*". Tout d'abord, nous présentons brièvement l'historique de la coloration dans les graphes, ensuite nous donnons sa définition ainsi que le paramètre lié à cette notion. Puis, nous définissons la coloration r-dynamique avec leurs paramètres qui sont dérivées de la coloration classique.

1.4.1 Coloration propre et nombre chromatique

Les problèmes de la coloration des graphes est apparue en 1852, quand le problème des quatre couleurs a été posé pour la première fois par Francis Guthrie, lorsqu'il s'est demandé s'il est toujours possible de colorer n'importe quelle carte géographique en n'utilisant que quatre couleurs, de manière à éviter que deux pays voisins aient la même couleur. C'est qu'en 1976, que deux chercheurs américains, K. Appel et W. Haken [7, 8] ont pu répondre affirmativement à cette question à l'aide d'un calcul par ordinateur.

La notion de coloration de graphes a fait donc l'objet de nombreuses études engendrant une littérature très dense en théorie des graphes. La coloration des sommets est sans doute le concept le plus connus et le plus étudié en théorie des graphes. Généralement, il s'agit de trouver une coloration des sommets d'un graphe qui satisfasse certaines conditions d'optimalité de telle sorte que les sommets adjacents n'ont pas la même couleur.

Définition 1.4.1 *Une coloration propre de sommets d'un graphe* $G = (V, E)$ *est une application* $c : V \to \mathbb{N}$ *qui consiste à affecter une couleur à chaque sommet de* V *de telle manière que deux sommets adjacents ne reçoivent pas la même couleur. Une classe de couleur est un sous-ensemble stable de sommets de* V *qui sont de même couleur.*

Dans le domaine de la coloration, de nombreux paramètres ont été définis ; parmi les paramètres fondamentaux nous trouvons le nombre chromatique.

Définition 1.4.2 *Le nombre chromatique de* G*, noté* $\chi(G)$*, est le plus petit nombre de couleurs nécessaires à une coloration propre des sommets de G.*
On le définit aussi comme étant le plus petit entier k tel que G admet une k-coloration. C'est donc la taille minimale d'une partition de V(G) en stables.

Le calcul du nombre chromatique est NP-complet dans le cas général [21]. De ce fait, beaucoup de travaux ont été consacrés à la recherche des bornes du nombre chromatique en fonction d'autres paramètres de graphe. Un des vieux résultats établi sur le nombre chromatique est celui de R. Brooks [13].

1.4.2 Bornes sur le nombre chromatique

Proposition 1.4.1 *[13] Si* H *est un sous-graphe de* G*, alors* $\chi(H) \leq \chi(G)$.

Théorème 1.4.1 *[13] Pour tout graphe* G *de degré maximum* $\Delta(G)$*,*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Avec égalité si et seulement si on est dans l'un des deux cas suivants :

1. *soit* $\Delta(G) \neq 2$ *et* G *admet* $K_{\Delta(G)+1}$ *comme composante connexe ;*
2. *soit* $\Delta(G) = 2$*, et* G *admet un cycle d'ordre impair comme composante connexe.*

Il est bien connu aussi que, tout graphe G admet une coloration avec au moins $\omega(G)$ couleurs, et donc $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Le résultat suivant a été établi par C. Berge [10].

Théorème 1.4.2 *[10] Soit* G *un graphe d'ordre n. Alors,*

$$\chi(G)\alpha(G) \geq n \quad \text{et} \quad \chi(G) + \alpha(G) \leq n + 1.$$

Gaddum et Nordhaus [37] ont prouvé le résultat suivant.

Théorème 1.4.3 *[37] Soit* G *un graphe d'ordre n et* $\overline{G}$ *son complémentaire. Alors,*

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1.$$

1.4.3 Coloration r-dynamique et nombre chromatique r-dynamique

La notion de la coloration r-dynamique des graphes a été introduit pour la première fois par Montgomery [35, 29]. Plus tard dans [28], elle est appelée la coloration conditionnelle. C'est une généralisation de la coloration classique. Dernièrement, elle a été étudié de manière approfondie par plusieurs auteurs en [16, 19, 31].

Définition 1.4.3 *Une coloration r-dynamique,* $r \in \{1,2,...,\mathbb{N}\}$ *est définie comme une coloration propre dans laquelle tout sommet à plusieurs degrés est adjacent à plus d'une classe de couleur. Une coloration r-dynamique est donc une application* $c : \mathrm{V(G)} \to \overline{k}$, $k \in \{1,2,...,\mathbb{N}\}$ *telle que*

— *Si* $uv \in \mathrm{E(G)}$, *alors* $c(u) \neq c(v)$.

— *Pour chaque sommet* $v \in \mathrm{V(G)}$, $|c(\mathrm{N}(v))| \geq \min\{r, d(v)\}$.

Nous appelons la première condition, qui caractérise la coloration propre, la condition d'adjacence, et nous appelons la deuxième condition la condition de multiple adjacence.

Définition 1.4.4 *Le nombre chromatique r-dynamique* $\chi_r = \chi_r(\mathrm{G})$, *est le plus petit entier k,* $k \in \{1,2,...,\mathbb{N}\}$ *tel que* G *a une k-coloration r-dynamique.*

Dans [29], Montgomery a noté le nombre chromatique 2-dynamique χ_2 par le nombre chromatique dynamique χ_d.

Exemple

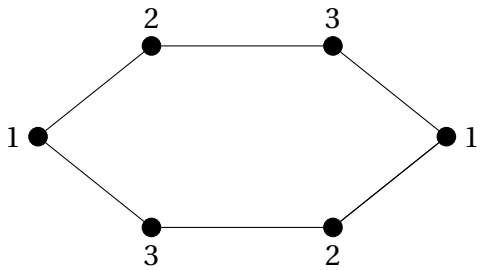


FIGURE 1.23 – Une coloration dynamique de sommets d'un graphe avec $\chi_d(\mathrm{G}) = 3$.

Chapitre 2

Quelques résultats existants sur la coloration r-dynamique

Dans ce chapitre, nous exposons brièvement quelques résultats fondamentaux obtenus sur la coloration r-dynamique des sommets, bornes et valeurs exactes du nombre chromatique r-dynamique pour certaines classes de graphes.

2.1 Bornes supérieures et inférieurs

Le nombre chromatique dynamique, $\chi_d(G)$, a été étudié dans plusieurs articles, voir[35, 29, 2, 4, 3, 6, 38], il existe de nombreuses bornes supérieures et inférieures pour $\chi_d(G)$ en termes de paramètres de graphe.

Théorème 2.1.1 *[35] Soit* G *un graphe du degré maximum* $\Delta(G)$. *Alors,*

$$\chi_d(G) \leq \Delta(G) + 3.$$

Théorème 2.1.2 *[29] Si* $\Delta \leq 3$ *alors,* $\chi_d(G) \leq 4$, *avec une seul exception que si* $G = C_5$ *alors,* $\chi_d(C_5) = 5$.

Pour un graphe G avec $\Delta(G) \geq 4$, il a été prouvé que $\chi_d(G) \leq \Delta(G) + 1$ [29].

Proposition 2.1.1 *[28]* $\chi(G) = \chi_1(G) \leq ... \leq \chi_{\Delta(G)}(G)$.
Si $r \geq \Delta(G)$, *alors* $\chi_r(G) = \chi_{\Delta(G)}(G)$.

Proposition 2.1.2 *[28]* $\chi_r(G) \geq \min\{\Delta(G), r\} + 1$ *avec égalité si et seulement si* G *est un arbre.*

Théorème 2.1.3 *[25]* $\chi_r(G) \leq r\Delta(G)+1$, *avec égalité pour* $r \geq 2$ *si et seulement si* G *est* $d-$*régulier avec* $diam(G) = 2$ *et* $g(G) = 5$.

Théorème 2.1.4 *[23] Soit* G *un graphe et* H *un sous graphe induit de* G. *Alors,* $\chi_r(G) \geq \chi_r(H)$.

Théorème 2.1.5 *[35] Soit* G *un graphe et* $l(G)$ *la longueur du plus long cycle.*
Si G *a un cycle alors,* $\chi_d(G) \geq l(G)$. *Avec égalité si* G *est un graphe complet.*

Théorème 2.1.6 *[6] Soit* G *un graphe et* $\alpha(G)$ *le nombre de stabilité de* G.
Si $\chi(G) \geq 4$ *alors,* $\chi_d(G) \leq \chi(G) + \alpha(G)$.

Théorème 2.1.7 *[15] Soit* G *un graphe et* $\alpha(G)$ *le nombre de stabilité de* G. *Alors,*

$$\chi_d(G) \leq \chi(G) + 2\log_2 \alpha(G) + 3.$$

Théorème 2.1.8 *[35] Pour* $r \geq 2$, *Si* $\Delta \leq r$ *alors,* $\chi_r(G) \leq \Delta + r^2 - r + 1$.

2.2 Nombre chromatique $r-$dynamique de graphes particuliers

Dans cette section, le nombre chromatique dynamique est obtenu pour les graphes complets, les graphe connexes, les arbres, les graphes bipartis, bipartis complets, le graphe planaire, la roue et le fan graphe .

Théorème 2.2.1 *[35] Soit* K_n *un graphe complet. Alors,* $\chi_d(K_n) = n$.

Théorème 2.2.2 *[35] Soit G un graphe connexe non trivial. Alors,* $\chi_d(K_2) = 2$ *sinon* $\chi_d(G) \geq 3$.

Théorème 2.2.3 *[35] Pour tout arbre* T *autre que* K_1 *ou* K_2, $\chi_d(T) = 3$.

Théorème 2.2.4 *[35] Pour tout arbre* T *autre que* K_1 *ou* K_2, $\chi_r(T) = \min\{\Delta, r\} + 1$.

Théorème 2.2.5 *[35]* $\chi_d(K_{1,1}) = 2$, $\chi_d(K_{1,m}) = 3$ *pour* $m \geq 2$, $\chi_d(K_{m,n}) = 4$ *pour* $m, n \geq 2$ *et* $\chi_d(K_{n_1,n_2,...,n_k}) = k$ *pour* $k \geq 3$.

Remarque 2.2.1 *[35] Si* $G = G_1 + G_2 + ... + G_p$ $(p \geq 2)$ *est un graphe avec p composantes connexes alors,* $\chi_d(G) = \max_{1 \leq i \leq p}\{\chi_d(G_i)\}$.

Théorème 2.2.6 *[4] Soit* G *un graphe biparti tel que pour tout* $u, v \in V(G), |N(u) \cap N(v)| \neq 1$. *Alors,* $\chi_d(G) \leq 4$.

Théorème 2.2.7 *[30] Si* G *est un graphe planaire avec* $g(G) \geq 6$ *alors,* $\chi_d(G) \leq r + 5$, $r \geq 3$.

Remarque 2.2.2 *[35] Soit* W_n *une roue d'ordre n. Alors,*

$$\chi_{r=1,2,3}(W_n) = \begin{cases} 3 \text{ si } n \text{ est impair;} \\ 4 \text{ si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Remarque 2.2.3 *[35] Soit* $F_{1,n}$ *un fan graphe. Alors,* $\chi_d(F_{1,n}) = 3$.

2.3 Nombre chromatique $r-$dynamique de graphes réguliers

Dans 2001, Montgomery [29] a conjecturé que pour un graphe régulier G, $\chi_d(G) - \chi(G) \leq 2$. Akbari et al. [4] ont prouvé cette hypothèse pour les graphes réguliers bipartis. En 2017, Bowler et al. [12] ont réfuté cette conjecture.
Dans cette section, nous présentons quelques résultats existant sur le nombre chromatique dynamique de graphes réguliers.

Théorème 2.3.1 *[35] Soit* C_n *un cycle d'ordre n. Alors,*

$$\chi_d(C_n) = \begin{cases} 5 \text{ si } n = 5 \ ; \\ 3 \text{ si } n = 3k, \forall k \geq 1 \ ; \\ 4 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Théorème 2.3.2 *[6] Si G est un graphe d-régulier alors,* $\chi_d(G) \leq \chi(G) + 14.06 \log d + 1$.

Proposition 2.3.1 *[6] Soit n un entier $n > 1$, il existe des graphes d-réguliers avec* $\chi(G) = n$ *et* $\chi_d(G) > n$.

Théorème 2.3.3 *[6] Soit* G *graphe d-régulier. Alors,* $\chi_d(G) - \chi(G) \leq 6 \ln d + 2$.

Proposition 2.3.2 *[6] Pour tout entier $n > 1$, il existe des graphes réguliers tels que* $\chi(G) = n$ *et* $\chi_d(G) \geq n$.

Théorème 2.3.4 *[4] Soit* G *un graphe biparti d-réguliers ou $d \geq 4$. Il existe alors, une Coloration* 4*-dynamique de* G *en utilisant* 2 *couleurs dans chaque partie.*

2.4 Nombre chromatique $r-$dynamique de certaines opérations sur les graphes

Les résultats suivants sont prouvé par *AKBARI et al.* dans [5].

Théorème 2.4.1 *[5] Soit* G *et* H *deux graphes. Si* $\delta(G) \geq 2$. *Alors,*

$$\chi_d(G \square H) \leq \max(\chi_d(G), \chi(H)).$$

Théorème 2.4.2 *[5] Pour deux nombres naturels m et n ($m \geq 3$) on a,*

$$\chi_d(C_m \square P_n) = \begin{cases} \chi_d(C_m) \text{ si } n = 1 \text{ ;} \\ 3 \text{ si } 3 \mid m \text{ ;} \\ 4 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Théorème 2.4.3 *[5] Soit* G *un graphe et $m \geq 3$ un nombre naturel. Alors,*

i) Si $3 \mid m$, *alors* $\chi_d(C_m \square G) = max(3, \chi(G))$.

ii) Si $3 \nmid m$ *et* $\chi_d(G) = 3$, *alors* $\chi_d(C_m \square G) = \begin{cases} 3 \text{ si } \delta \geq 2 \text{ ;} \\ 4 \text{ si } \delta = 1. \end{cases}$

iii) Si $3 \nmid m$ *et* $\chi_d(G) > 3$, *alors* $\chi_d(C_m \square G) \geq 4$. *De plus, si* G *est un graphe biparti sans sommet isolé alors,* $\chi_d(C_m \square G) = 4$.

Théorème 2.4.4 *[5] Soit $m, n \geq 3$ deux nombres naturels. Alors,*

$$\chi_d(C_m \square C_n) = \begin{cases} 3 \text{ si } 3 \mid mn \text{ ;} \\ 4 \text{ si } 3 \nmid mn. \end{cases}$$

Les résultats suivants sont prouvés par *Sogol Jahanbekam et al.* dans [25] .

Théorème 2.4.5 *[25] Soit $G_{m,n}$ est une grille tel que $m, n \geq 2$. Alors,*

$$\chi_d(G_{m,n}) = 4.$$

Théorème 2.4.6 *[25] Soit $G_{m,n}$ est une grille tel que $m, n \geq 2$. Alors,*

$$\chi_3(G_{m,n}) = \begin{cases} 4 \text{ si } \min\{m,n\} = 2 \text{ ,} \\ 4 \text{ si } m \text{ et } n \text{ sont pairs.} \end{cases} \qquad \chi_4(G_{m,n}) = \begin{cases} 4 \text{ si } \min\{m,n\} = 2 \text{ ;} \\ 5 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Théorème 2.4.7 *[25] Si m et n ne sont pas pairs alors, $\chi_3(G_{m,n}) = 5$.*

Lemme 2.4.1 *[25] Une 4-coloration 3-dynamique de $G_{m,n}$ quand $m, n \geq 3$ et m, n ne sont pas pairs nécessite $mn \equiv 2 mod 4$.*

Les résultats suivants sont prouvés par *Agustin et al.* dans [1]

Théorème 2.4.8 *[1] Soit G le joint de P_n et C_m. Alors,*

$$\chi(G) = \chi_d(G) = \chi_3(G) = \begin{cases} 4 \text{ si } m \text{ est pair ;} \\ 5 \text{ si } m \text{ est impair.} \end{cases}$$

$$\chi_4(G) = \begin{cases} 5 \text{ si } m \equiv 3 (mod\, 3); \\ 6 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Théorème 2.4.9 *[1] Soit G le joint de W_n et P_m. Pour $n \geq 3$ et $m \geq 2$ on a,*

$$\chi(G) = \chi_d(G) = \chi_3(G) = \chi_4(G) = \begin{cases} 5 \text{ si } m \text{ est pair ;} \\ 6 \text{ si } m \text{ est impair.} \end{cases}$$

2.5 La différence entre nombre chromatique et nombre chromatique dynamique

Le nombre chromatique $\chi(G)$ et le nombre chromatique dynamique $\chi_d(G)$ peuvent être arbitrairement grand. Cependant, il a été conjecturé dans [35] que pour les graphes réguliers la différence est au plus 2. Dans [31], il a été prouvé que la complexité de calcul de $\chi_d(G)$ pour les graphes 3-réguliers est un problème NP-complet. Donc, il est intéressant d'examiner la borne optimale supérieure et inférieur pour $\chi_d(G) - \chi(G)$. On présentant ci-après quelques résultats existants.

Théorème 2.5.1 *[25] Si* $diam(G) = 2$ *alors,* $\chi_d(G) \leq \chi(G) + 2$. *Avec égalité si et seulement si* G *est un graphe biparti complet ou* C_5.

Théorème 2.5.2 *[20] Si* G *est un graphe connexe sans* $K_{1,3}$ *et* $\chi(G) = 2$ *alors,* $\chi_d(G) \leq 4$. *Avec égalité si et seulement si* G *est un cycle de longueur pair différent de* $3k$.

Théorème 2.5.3 *[20] Si* G *est sans* $K_{1,3}$ *alors,* $\chi_d(G) \leq \chi(G) + 2$. *Avec égalité si et seulement si* G *est un cycle de longueur* 5 *ou de longueur pair différent de* $3k$.

Théorème 2.5.4 *[20] Si* G *est sans* $K_{1,4}$ *alors,* $\chi_d(G) \leq 2\chi(G)$.

Théorème 2.5.5 *[20] Soit* $n \geq 2, n \in \mathbb{N}^+$. *Si* G *n'admet pas* C_{2n} *comme un sous graphe induit alors,* $\chi_d(G) \leq 2\chi(G)$.

2.6 Complexité

— NP-complet en général (Xuehang Li et al. [31]).

— NP-complet pour les graphes 3-réguliers (Xuehang Li et al. [31]).

— NP-complet pour les graphes sans $k_{1,3}$ avec $\Delta(G) \leq 3$ (Ahadi et al. [2].

— NP-complet pour les graphes hamiltonien avec $\Delta(G) \leq 6$ (Xuehang Li et al. [31]).

Chapitre 3

Coloration r-dynamique de certains graphes particuliers

Dans la première section de ce chapitre, nous nous intéressons à la détermination de la valeur exacte du nombre chromatique r-dynamique $\chi_{r\in\{2,3,4\}}(G)$ de certains graphes classiques comme le graphe milieu et total d'une chaîne P_n, d'un cycle C_n et d'une couronne d'une chaîne $Cr(P_n)$. Dans la deuxième section, nous donnons les valeurs exactes du nombre chromatique r-dynamique $\chi_{r\in\{2,3,4\}}(G)$ du produit cartésien du book graphe $P_2\square K_{1,n}$, des étoiles $K_{1,n}\square K_{1,n}$ et des graphes complets $K_n\square K_n$ et le produit totale des chaînes $P_n \boxtimes P_n$. Dans la troisième section, nous déterminons les valeurs exactes du nombre chromatique r-dynamique $\chi_{r\in\{2,3,4\}}(G)$ du graphe de mycielski du quelques graphes particuliers comme le graph complet K_n, l'étoile $K_{1,n}$, la roue W_n et le fan graphe F_n.

3.1 Nombre chromatique r-dynamique du graphe milieu et total de certains graphes

Dans cette section, nous donnons les valeurs exactes de nombre chromatique r-dynamique du graphe milieu et total d'une chaîne P_n avec $r \in \{3,4\}$, le nombre chromatique 3-dynamique du graphe milieu et total d'un cycle C_n et la valeur exacte de nombre chromatique dynamique du graphe milieu et total d'une couronne d'une chaîne $Cr(P_n)$.

Dans un premier lieu, nous définissons le graphe milieu et le graphe total d'un graphe.

Définition 3.1.1 *[22] Soit* G = (V, E) *un graphe simple. Le graphe milieu de* G, *noté* M(G) *est défini comme suit : L'ensemble des sommets de* M(G) *est* V(G) ∪ E(G), *et deux sommets x, y de* M(G) *sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

— $x, y \in E(G)$ *et x est adjacent à y dans* G.

— $x \in V(G)$, $y \in E(G)$ *et x est incident à y dans* G.

Définition 3.1.2 *[9] Le graphe total d'un graphe* G = (V, E), *noté* T(G), *est défini comme suit. L'ensemble des sommets de* T(G) *est* V(G) ∪ E(G), *et deux sommets x, y de* T(G) *sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

— $x, y \in V(G)$ *et x, y sont adjacents dans* G.

— $x, y \in E(G)$ *et x est adjacent à y dans* G.

— $x \in V(G)$, $y \in E(G)$ *et x est incident à y dans* G.

Exemples

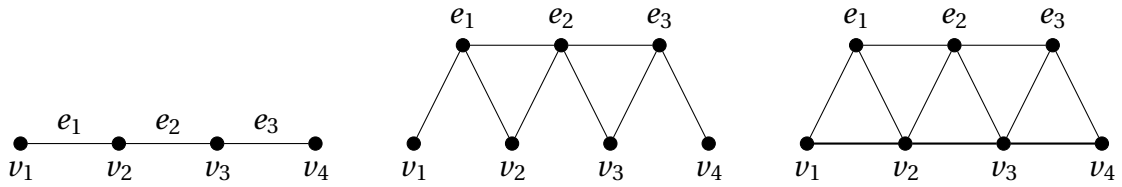


FIGURE 3.1 – Exemple d'un graphe milieu et d'un graphe total d'une chaîne.

Dans [39], Vivin et al. ont étudié la coloration dynamique du graphe milieu et total d'une chaîne et d'un cycle.

Théorème 3.1.1 *[39] Soit* P_n *une chaîne d'ordre n. Alors,*

$$i)\chi_d(M(P_n)) = 3, \qquad ii)\chi_d(T(P_n)) = 3.$$

Théorème 3.1.2 *[39] Soit* C_n *un cycle d'ordre n. Alors,*

$$i)\chi_d(M(C_n)) = 3, \qquad ii)\chi_d(T(C_n)) = \begin{cases} 3 \text{ si } n = 3k; \\ 4 \text{ sinon.} \end{cases} \quad k \geq 1.$$

Proposition 3.1.1 *Soit* P_n *une chaîne d'ordre n. Alors,*

$$i)\ \chi_3(M(P_n)) = \begin{cases} 3 \text{ si } n = 2; \\ 4 \text{ si } n \geq 3. \end{cases} \quad , ii)\ \chi_3(T(P_n)) = \begin{cases} 3 \text{ si } n = 2; \\ 4 \text{ si } n \geq 3. \end{cases}.$$

Preuve. Posons $V(P_n) = \{v_1, ..., v_n\}$ et $E(P_n) = \{e_1, ..., e_{n-1}\}$ tel que $e_j = v_j v_{j+1}$ pour tout j, $1 \leq j \leq n-1$. Soit $M(P_n)$ (resp., $T(P_n)$) le graphe milieu (resp., total) de P_n d'ensemble de sommets $V(M(P_n)) = V(P_n) \cup E(P_n)$ (resp., $V(T(P_n)) = V(M(P_n))$ et d'ensemble d'arêtes $E(M(P_n)) = \{e_i e_{i+1}, e_j v_j, e_j v_{j+1} : 1 \leq i \leq n-2 \text{ et } 1 \leq j \leq n-1\}$ (resp., $E(T(P_n)) = E(M(P_n)) \cup \{v_j v_{j+1} : 1 \leq j \leq n-1\}$). Soit c une coloration 3-dynamique de $M(P_n)$ (resp., $T(P_n)$) avec k couleurs.

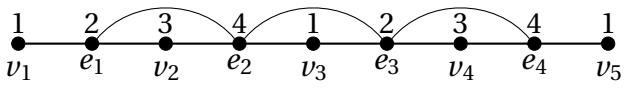
Pour $n = 2$. il est facile de voir que $M(P_2)$ (resp., $T(P_2)$) est isomorphe à P_3 (resp., C_3), donc d'après le Théorème 2.2.4 et 2.3.1, $\chi_3(M(P_2)) = 3$ (resp., $\chi_3(T(P_2)) = 3$).

Pour $n \geq 3$. Montrons que $\chi_3(M(P_n)) \geq 4$ (resp., $\chi_3(T(P_n)) \geq 4$). Vu que $\Delta(M(P_n)) = 4$ (resp., $\Delta(T(P_n)) = 4$) alors, d'après la Proposition 2.1.2, $\chi_3(M(P_n)) \geq \min\{\Delta, 3\} + 1 = 4$ (resp., $\chi_3(T(P_n)) \geq \min\{\Delta, 3\} + 1 = 4$). Il reste de montrer la borne supérieure. Pour cela, il suffit de trouver une coloration 3-dynamique à $M(P_n)$ (resp., $T(P_n)$) avec 4 couleurs. Considérons la fonction de couleur $c : V(M(P_n)) \to \{1,2,3,4\}$ (resp., $c : V(T(P_n)) \to \{1,2,3,4\}$) définie par :

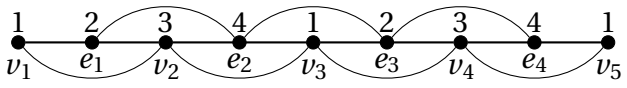
$$c(v_i) = \begin{cases} 1 \text{ si i est impair ;} \\ 3 \text{ si i est pair .} \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n. \qquad , c(e_i) = \begin{cases} 2 \text{ si i est impair ;} \\ 4 \text{ si i est pair .} \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n-1.$$

Il est claire que c est une coloration 3-dynamique de $M(P_n)$ (resp., $T(P_n)$).

D'où, $\chi_3(M(P_n)) = 4$ (resp., $\chi_3(M(P_n)) = 4$) (voir Figure 3.2). ■



$\chi_3(M(P_5)) = 4$



$\chi_3(T(P_5)) = 4$

FIGURE 3.2 – Coloration 3-dynamique du $M(P_5)$ et $T(P_5)$.

Proposition 3.1.2 *Soit* P_n *une chaîne d'ordre n. Alors,*

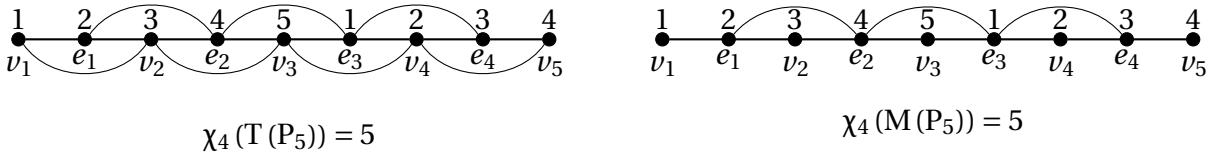
$$i)\ \chi_4(M(P_n)) = \begin{cases} 3\ si\ n = 2\,; \\ 4\ si\ n = 3\,; \\ 5\ si\ n \geq 3. \end{cases} \quad , ii)\ \chi_4(T(P_n)) = \begin{cases} 3\ si\ n = 2\,; \\ 5\ si\ n \geq 3. \end{cases}.$$

Preuve. Posons $V(P_n) = \{v_1, ..., v_n\}$ et $E(P_n) = \{e_1, ..., e_{n-1}\}$ tel que $e_j = v_j v_{j+1}$ pour tout j, $1 \leq j \leq n-1$. Soit $M(P_n)$ (resp., $T(P_n)$) le graphe milieu (resp., total) de P_n d'ensemble de sommets $V(M(P_n)) = V(P_n) \cup E(P_n)$ (resp., $V(T(P_n)) = V(M(P_n))$ et d'ensemble d'arêtes $E(M(P_n)) = \{e_i e_{i+1}, e_j v_j, e_j v_{j+1} : 1 \leq i \leq n-2 \text{ et } 1 \leq j \leq n-1\}$ (resp., $E(T(P_n)) = E(M(P_n)) \cup \{v_j v_{j+1} : 1 \leq j \leq n-1\}$). Soit c une coloration 4-dynamique de $M(P_n)$ (resp., $T(P_n)$) avec k couleurs.

Pour $n = 2$. il est facile de voir que $M(P_2)$ (resp., $T(P_2)$) est isomorphe à P_3 (resp., C_3), donc d'après le Théorème 2.2.4 et 2.3.1, $\chi_4(M(P_2)) = 3$ (resp., $\chi_4(T(P_2)) = 3$).

Pour $n = 3$. Montrons que $\chi_4(M(P_n)) = 4$. Même preuve du Proposition 3.1.1.

Pour $n > 3$. Montrons que $\chi_4(M(P_n)) \geq 5$ (resp., Pour $n \geq 3$. Montrons que $\chi_4(T(P_n)) \geq 5$). Vu que $\Delta(M(P_n)) = 4$ (resp., $\Delta(T(P_n)) = 4$) alors, d'après la Proposition 2.1.2, $\chi_4(M(P_n)) \geq \min\{\Delta, 4\} + 1 = 5$ (resp., $\chi_4(T(P_n)) \geq \min\{\Delta, 4\} + 1 = 5$). Il reste de prouver la borne supérieure. Pour cela, il suffit de trouver une coloration 4-dynamique à $M(P_n)$ (resp.,$M(P_n)$) avec 5 couleurs. Considérons une coloration de $M(P_n)$ (resp., $T(P_n)$ avec 5 couleurs comme suit. Attribuez les couleurs $1,3,5,2,4,1,3,5,2,4,...,1,3,5,2,4$ alternativement au sommet v_i et les couleurs $2,4,1,3,5,2,4,1,3,5,...,2,4,1,3,5$ alternativement au sommets e_j tel que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n-1$. Clairement, une telle coloration est 4-dynamique de $M(P_n)$ (resp., $T(P_n)$. D'où, $\chi_4(M(P_n)) = 5$ (resp., $\chi_4(T(P_n)) = 5$) (voir Figure 3.3). ■



$\chi_4(T(P_5)) = 5$ $\chi_4(M(P_5)) = 5$

FIGURE 3.3 – Coloration 4-dynamique du $M(P_5)$ et $T(P_5)$.

Proposition 3.1.3 *Soit* C_n *un cycle d'ordre n. Alors,*

$$\chi_3(M(C_n)) = 4.$$

Preuve. Posons $V(C_n) = \{v_1, ..., v_n\}$ et $E(C_n) = \{e_1, ..., e_n\}$ tel que $e_j = v_j v_{j+1} \cup v_1 v_n$ pour tout j, $1 \leq j \leq n-1$. Soit $M(C_n)$ le graphe milieu de C_n d'ensemble de sommets $V(M(C_n)) = V(C_n) \cup E(C_n)$ et d'ensemble d'arêtes $E(M(C_n)) = \{e_i e_{i+1}, e_i v_i, e_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{e_1 e_n, e_n v_1\}$. Soit c une coloration 3-dynamique de $M(C_n)$ avec k couleurs.

Montrons que $\chi_3(M(C_n)) \geq 4$. Vu que $\Delta(M(P_n)) = 4$ alors, d'après la Proposition 2.1.2, $\chi_3(M(C_n)) \geq \min\{\Delta, 3\} + 1 = 4$. Il reste de montrer la borne supérieure. Pour cela, il faut trouver une coloration 3-dynamique de $M(C_n)$ avec 4 couleurs .

Cas 1 : Si n est pair

Considérons la fonction de couleur $c : V(M(C_n)) \to \{1,2,3,4\}$ définie par

$$c(v_i) = \begin{cases} 1 \text{ si i est impair ;} \\ 3 \text{ si i est pair .} \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n. \qquad ,c(e_i) = \begin{cases} 2 \text{ si i est impair ;} \\ 4 \text{ si i est pair .} \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Il est clair que c est une coloration 3-dynamique de $M(C_n)$ et donc, $\chi_3(M(C_n)) \leq 4$.

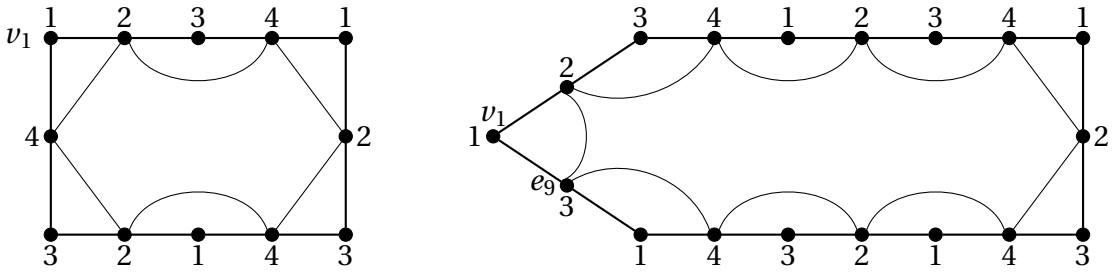
Cas 2 : Si n est impair

Considérons la fonction de couleur $c : V(M(C_n)) \to \{1,2,3,4\}$ définie par

$$c(v_i) = \begin{cases} 1 \text{ si i est impair ;} \\ 3 \text{ si i est pair .} \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n. \qquad ,c(e_i) = \begin{cases} 2 \text{ si i est impair ;} \\ 4 \text{ si i est pair ;} \\ 3 \text{ si i = n .} \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Il est clair que c est une coloration 3-dynamique de $M(C_n)$ et donc, $\chi_3(M(C_n)) \leq 4$.

Par conséquent, $\chi_3(M(C_n)) = 4$ (voir Figure 3.4). ■



$\chi_3(M(C_6)) = 4$ $\qquad$ $\chi_3(M(C_9)) = 4$

FIGURE 3.4 – Coloration 3-dynamique de $M(C_6)$ et $M(C_9)$.

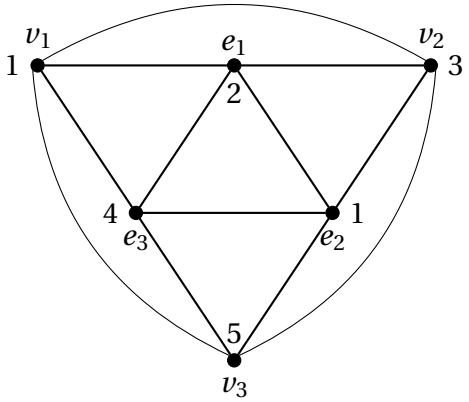
Proposition 3.1.4 *Soit* C_n *un cycle d'ordre n. Alors,*

$$\chi_3(T(C_n)) = \begin{cases} 5 \text{ si } n = 3 ; \\ 4 \text{ si } n \geq 4. \end{cases}$$

Preuve. Posons $V(C_n) = \{v_1, ..., v_n\}$ et $E(C_n) = \{e_1, ..., e_n\}$ tel que $e_j = v_j v_{j+1} \cup v_1 v_n$ pour tout j, $1 \leq j \leq n-1$. Soit $T(C_n)$ le graphe total de C_n d'ensemble de sommets $V(T(C_n)) = V(C_n) \cup E(C_n)$ et d'ensemble d'arêtes $E(T(C_n)) = \{e_i e_{i+1}, e_i v_i, e_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{e_1 e_n, e_n v_1\} \cup \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v_1 v_n\}$. Soit c une coloration 3-dynamique de $T(C_n)$ avec k couleurs. Montrons que $\chi_3(T(C_n)) \geq 4$. Vue que $\Delta(T(C_n)) = 4$, alors d'après la Proposition 2.1.2, $\chi_3(T(C_n)) \geq \min\{\Delta, 3\} + 1 = 4$. Il reste de montrer la borne supérieure. Pour cela il faut trouver une coloration avec 4 couleurs.

Cas 1 : Pour $n = 3$.

Supposons que $\chi_3(T(C_3)) = 4$. En exhibant la coloration suivante : $c(v_1) = 1$. Puisque $d_G(v_1) = 4$, $N_G(v_1) = \{e_1, v_2, v_3, e_3\}$ et comme c est une coloration 3-dynamique de $T(C_3)$ alors, v_1 a besoin du trois couleurs différentes dans son voisinage et différent de 1. Donc, nous prenons $c(e_1) = 2, c(v_2) = 3$ et $c(e_3) = 4$. Il reste deux sommets e_2 et v_3. On a $\{2,3,4\} \subseteq c(N_G(e_2))$ alors, $c(e_2) = 1$. Dans ce cas, le sommet e_3 a seulement la couleur 1 et 2 dans son voisinage et comme $v_3 \subseteq N_G(e_3)$ alors, $c(v_3) = 3$ mais v_3 est adjacent à v_2, contradiction. Donc $c(v_3) = 5$. D'où, $\chi_3(T(C_n)) = 5$ (voir Figure 3.5).



$T(C_3) = 5$

FIGURE 3.5 – Coloration 3-dynamique de $T(C_3)$.

Cas 2 : Si n est pair

Considérons la fonction de couleur $c : V(T(C_n)) \to \{1,2,3,4\}$ définie par

$$c(v_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i \text{ est impair ;} \\ 3 \text{ si } i \text{ est pair .} \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n. \qquad ,c(e_i) = \begin{cases} 2 \text{ si } i \text{ est impair ;} \\ 4 \text{ si } i \text{ est pair .} \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Il est clair que c est une coloration 3-dynamique de $T(C_n)$ et donc, $\chi_3(T(C_n)) \leq 4$.

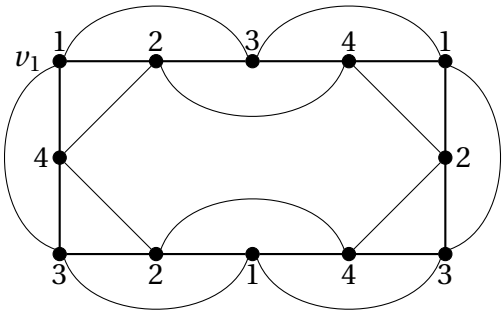
Cas 3 : Si n est impair

Considérons la fonction de couleur $c : V(T(C_n)) \to \{1,2,3,4\}$ définie par

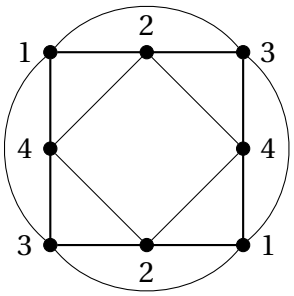
$$c(v_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i \text{ est impair }, 1 \le i \le n \\ 3 \text{ si } i \text{ est pair } ; \\ 2 \text{ si } i = n-1 \ ; \\ 4 \text{ si } i = n \ . \end{cases} \quad , c(e_i) = \begin{cases} 2 \text{ si } i \text{ est impair } ; 1 \le i \le n-3 \\ 4 \text{ si } i \text{ est pair } ; \\ 3 \text{ si } i = n-2 \text{ et } i = n \ ; \\ 1 \text{ si } i = n-1 \ . \end{cases}$$

Il est clair que c est une coloration 3-dynamique de $T(C_n)$ et donc, $\chi_3(T(C_n)) \le 4$.

Par conséquent, $\chi_3(T(C_n)) = 4$ (voir Figure 3.6 et 3.7). ■

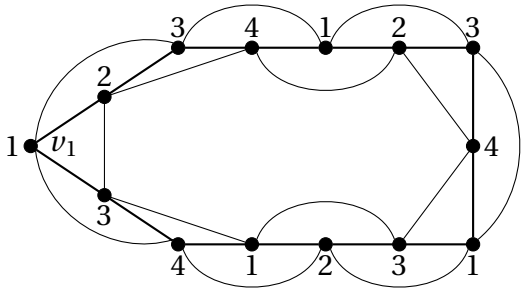


$\chi_3(T(C_6)) = 4$

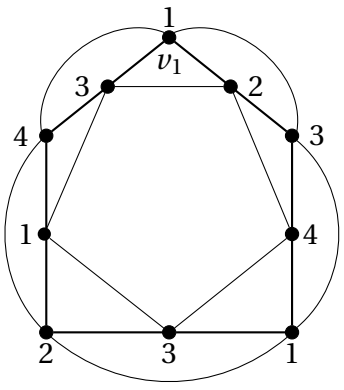


$\chi_3(T(C_4)) = 4$

FIGURE 3.6 – Coloration 3-dynamique de $T(C_6)$ et $T(C_4)$.



$\chi_3(T(C_7)) = 4$



$\chi_3(T(C_5)) = 4$

FIGURE 3.7 – Coloration 3-dynamique de $T(C_7)$ et $T(C_5)$.

Proposition 3.1.5 *Soit* $\mathrm{C}r(\mathrm{P}_n)$ *la couronne d'une chaîne. Alors,*

$$i)\chi_d(\mathrm{M}(\mathrm{C}r(\mathrm{P}_n))) = \begin{cases} 3 \text{ si } n = 2 \text{ ;} \\ 4 \text{ si } n \geq 3. \end{cases} \quad ,ii)\chi_d(\mathrm{T}(\mathrm{C}r(\mathrm{P}_n))) = 4$$

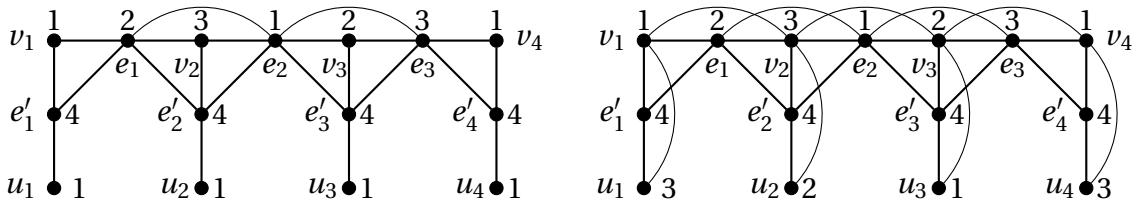
Preuve. Posons $\mathrm{G} = \mathrm{C}r(\mathrm{P}_n)$, $\mathrm{V(G)} = \{v_1,...,v_n\} \cup \{u_1,...,u_n\}$ tel que les u_i sont des sommets pendants, $1 \leq i \leq n$; et $\mathrm{E(G)} = \{e_1,...,e_{n-1}\} \cup \{e'_1,...,e'_n\}$ tel que $e_j = v_j v_{j+1}$ pour tout j, $1 \leq j \leq n-1$ et $e'_i = v_i u_i$ pour tout i, $1 \leq i \leq n$. Soit M(G) (resp., T(G)) le graphe milieu (resp., total) de G d'ensemble de sommets $\mathrm{V(M(G))} = \mathrm{V(G)} \cup \mathrm{E(G)}$ (resp., $\mathrm{V(T(G))} = \mathrm{V(M(G))}$) et d'ensemble d'arêtes $\mathrm{E(M(G))} = \{e_k e_{k+1}, e_j v_j, e_j v_{j+1}, u_i e'_i, e'_i v_i, e'_j e_j, e_j e'_{j+1} : 1 \leq k \leq n-2, 1 \leq j \leq n-1 \text{ et } 1 \leq i \leq n$ (resp., $\mathrm{E(T(G))} = \mathrm{E(M(G))} \cup \{v_j v_{j+1}, u_i v_i : 1 \leq j \leq n-1 \text{ et } 1 \leq i \leq n\}$). soit c une coloration dynamique de M(G) (resp., T(G)) avec k couleurs.

i) Pour n=2. Vue que M (G) possède une clique d'ordre trois, donc $\chi_d(\mathrm{M(G)}) \geq 3$.

Pour avoir l'égalité, il faut prouver la borne supérieure. Pour cela, il suffit de trouver une coloration dynamique à M (G) avec 3 couleurs. Considérons la fonction de couleur $c : \mathrm{V(M(G))} \to \{1,2,3\}$ définie par : $c(u_i) = 2$, $c(e'_i) = 3$, $c(v_i) = 1$ et $c(e_1) = 2$ tel que $1 \leq i \leq 2$. Il est facile de vérifier que cette coloration est dynamique de G. D'où, $\chi_d(\mathrm{M}(\mathrm{C}r(\mathrm{P}_2))) = 3$.

Pour $n \geq 3$. Vue que M (G) possède une clique d'ordre quatre donc, $\chi_d(\mathrm{M(G)}) \geq 4$. Pour avoir l'égalité, il faut prouver la borne supérieure. Pour cela, il suffit de trouver une coloration dynamique à M (G) avec 4 couleurs. Considérons la fonction de couleurs $c : \mathrm{V(M(G))} \to \{1,2,3,4\}$ définie par : $c(u_i) = 1$, $c(e'_i) = 4$, on attribue les couleurs 1,3,2 alternativement aux sommets v_i et les couleurs 2,1,3 alternativement aux sommets e_j tel que $1 \leq i \leq n$; $1 \leq j \leq n-1$. Il est facile de vérifier que cette coloration est dynamique de G. D'où, $\chi_d(\mathrm{M}(\mathrm{C}r(\mathrm{P}_n))) = 4$ (voir Figure 3.8).

ii) Vue que T (G) possède une clique d'ordre quatre donc, $\chi_d(\mathrm{T(G)}) \geq 4$. Pour avoir l'égalité, il faut prouver la borne supérieure. Pour cela, il suffit de trouver une coloration dynamique à T (G) avec 4 couleurs. Considérons la fonction de couleurs $c : \mathrm{V(T(G))} \to \{1,2,3,4\}$ définie par :$c(e'_i) = 4$, attribue les couleurs 1,3,2 alternativement aux sommets v_i, les couleurs 2,1,3 alternativement aux sommets e_j et les couleurs 3,2,1 alternativement aux sommets u_i tel que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n-1$. Il est facile de vérifier que cette coloration est dynamique de G. D'où, $\chi_d(\mathrm{T}(\mathrm{C}r(\mathrm{P}_n))) = 4$ (voir Figure 3.8). ■



$\chi_d(\mathrm{M}(\mathrm{C}r(\mathrm{P}_4))) = 4$ $\chi_d(\mathrm{T}(\mathrm{C}r(\mathrm{P}_4))) = 4$

FIGURE 3.8 – Coloration dynamique de $\mathrm{M}(\mathrm{C}r(\mathrm{P}_4))$ et $\mathrm{T}(\mathrm{C}r(\mathrm{P}_4))$.

3.2 Nombre chromatique r-dynamique du produit de quelques graphes

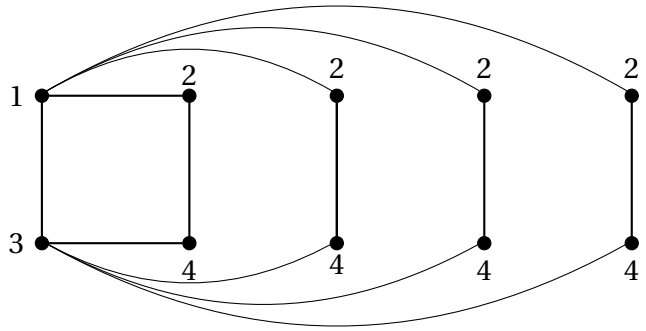
Dans cette section, nous donnons les valeurs exactes de nombre chromatique dynamique du boucle graphe $\mathrm{P}_2\square\mathrm{K}_{1,n}$, nombre chromatique r-dynamique avec $r \in \{2,3\}$ du produit cartésien des étoiles $\mathrm{K}_{1,m}\square\mathrm{K}_{1,n}$, des graphes complets $\mathrm{K}_m\square\mathrm{K}_n$ et le produit totale des chaînes $\mathrm{P}_m \boxtimes \mathrm{P}_n$.

Proposition 3.2.1 *Soit* $\mathrm{P}_2\square\mathrm{K}_{1,n}$ *le book graphe. Alors,*

$$\chi_d\left(\mathrm{P}_2\square\mathrm{K}_{1,n}\right) = 4.$$

Preuve. Soient $\mathrm{G} = \mathrm{P}_2\square\mathrm{K}_{1,n}$, $\mathrm{V}(\mathrm{P}_2) = \{u_1, u_2\}$ et $\mathrm{V}(\mathrm{K}_{1,n}) = \{v_1, ..., v_n\}$. Soit c une coloration dynamique de G avec k couleurs.

Puisque $\Delta(\mathrm{G}) \geq 2$ et $r = 2$ alors d'après la Proposition 2.1.2, $\chi_d(\mathrm{G}) \geq \min\{\Delta, 2\} + 1 = 3$. Supposons que $\chi_d(\mathrm{G}) = 3$. Considérons une coloration dynamique c de G avec trois couleurs. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que : $c((u_1, v_1)) = 1$ et $c((u_2, v_1)) = 2$. Puisque c est une coloration dynamique de G donc, on doit attribuer la couleur 3 dans un des voisins de (u_1, v_1) alors, sans perte de généralité $c((u_1, v_2)) = 3$. Maintenant, comme $\Delta((u_2, v_2)) = 2$ et les voisins de (u_2, v_2) sont colorés par $\{2,3\}$ donc, $c((u_2, v_2)) = 1$. Mais dans ce cas, le sommet (u_1, v_2) est de degré deux et il a seulement la couleur 1 dans son voisinage, contradiction. Donc, $\chi_d(\mathrm{G}) \geq 4$. Pour montrer que $\chi_d(\mathrm{G}) = 4$, considérons la fonction de couleurs $c : \mathrm{V}(\mathrm{G}) \to \{1,2,3,4\}$ définie par $c((u_1, v_1)) = 1$, $c((u_2, v_1)) = 3$, $c((u_1, v_j)) = 2$ et $c((u_2, v_j)) = 4$ pour tout j ; $1 \leq j \leq n$. Il est facile de vérifier que c est une coloration dynamique de G. Donc, pour tout $n \geq 2$, $\chi_d\left(\mathrm{P}_2\square\mathrm{K}_{1,n}\right) = 4$ (voir Figure 3.9). ■



$$\chi_d\left(P_2 \square K_{1,4}\right) = 4$$

FIGURE 3.9 – Coloration dynamique de $P_2 \square K_{1,4}$.

Proposition 3.2.2 *Soit* $K_{1,m}, K_{1,n}$ *deux étoiles tel que* $m, n \geq 2$ *et* $n \geq m$. *Alors,*

$$\chi_d\left(K_{1,m} \square K_{1,n}\right) = 4.$$

Preuve. Soient $G = K_{1,m} \square K_{1,n}$, $V(K_{1,m}) = \{u_1, ..., u_m\}$ et $V(K_{1,n}) = \{v_1, ..., v_n\}$. Soit c une coloration dynamique de G avec k couleurs.

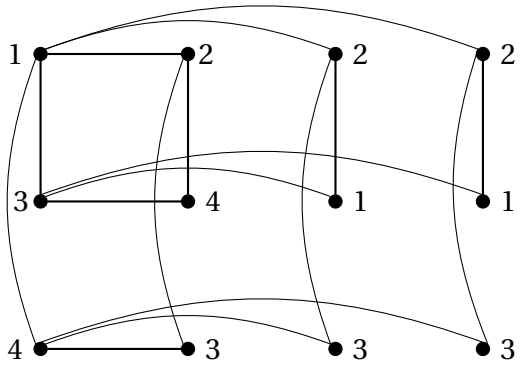
Puisque $\Delta(G) \geq 2$ et $r = 2$ alors d'après la Proposition 2.1.2, on a $\chi_d(G) \geq \min\{\Delta, 2\} + 1 = 3$. Supposons que $\chi_d(G) = 3$. Considérons une coloration dynamique c de G avec trois couleurs. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $c((u_1, v_1)) = 1$ et $c((u_2, v_1)) = 2$. Puisque c est une coloration dynamique de G donc, on doit attribuer la couleur 3 dans un des voisins de (u_1, v_1) alors sans perte de généralité, $c((u_1, v_2)) = 3$. Maintenant, les voisins de (u_2, v_2) sont colorés par 2 et 3 donc, $c((u_2, v_2)) = 1$. Aussi, on doit attribuer la couleur 3 dans un des voisins de (u_2, v_1) alors sans perte de généralité, $c((u_2, v_3)) = 3$. Puisque $(u_1, v_3) \in N_G((u_2, v_3))$ et $d_G((u_2, v_3) = 2$ alors, $c((u_1, v_3)) = 1$, contradiction. Donc $\chi_d(G) \geq 4$. Pour montrer que $\chi_d(G) = 4$, considérons la fonction de couleurs $c : V(G) \to \{1, 2, 3, 4\}$ définie par $c((u_1, v_1)) = 1$, $c((u_1, v_j)) = 2 \ \forall j ; 1 \leq j \leq n$,

$$c((u_i, v_1)) = \begin{cases} 3 \text{ si } i \text{ est pair} ; \\ 4 \text{ si } i \text{ est impair} . \end{cases} \quad 1 \leq i \leq m.$$

et

$$c((u_i, v_j)) = \begin{cases} 4 \text{ si } i \text{ est paire et } j = 2 ; \\ 1 \text{ si } i \text{ est paire} ; \\ 3 \text{ si } i \text{ est impaire.} \end{cases} \quad 2 \leq i \leq m, \quad 2 \leq j \leq n.$$

Il est facile de vérifier que c est une coloration dynamique de G. Donc pour tout $m, n \geq 2$ tel que $n \geq m$, $\chi_d\left(\mathrm{K}_{1,m}\square\mathrm{K}_{1,n}\right) = 4$ (Voir Figure 3.10). ■



$\chi_d\left(\mathrm{K}_{1,3}\square\mathrm{K}_{1,4}\right) = 4$

FIGURE 3.10 – Coloration dynamique de $\mathrm{K}_{1,3}\square\mathrm{K}_{1,4}$.

Proposition 3.2.3 *Soit* $\mathrm{K}_{1,m}, \mathrm{K}_{1,n}$ *deux étoiles tel que* $m, n \geq 2$ *et* $n \geq m$. *Alors,*

$$\chi_3\left(\mathrm{K}_{1,m}\square\mathrm{K}_{1,n}\right) = 5.$$

Preuve. Soient $\mathrm{G} = \mathrm{K}_{1,m}\square\mathrm{K}_{1,n}$, $\mathrm{V}(\mathrm{K}_{1,m}) = \{u_1, ..., u_m\}$ et $\mathrm{V}(\mathrm{K}_{1,n}) = \{v_1, ..., v_n\}$. Soit c une coloration 3-dynamique de G avec k couleurs.

Puisque $\Delta(\mathrm{G}) \geq 3$ et $r = 3$ alors d'après la Proposition 2.1.2, on a $\chi_3(\mathrm{G}) \geq \min\{\Delta, 2\} + 1 = 4$.

Supposons que $\chi_3(\mathrm{G}) = 4$. Considérons une coloration 3-dynamique c avec quatre couleurs.

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $c((u_1, v_1)) = 1$, $c((u_2, v_1)) = 2$

et $c((u_1, v_2)) = 3$. Puisque c est une coloration 3-dynamique de G donc, on doit attribuer la couleur 4 dans un des voisins de (u_1, v_1) alors sans perte de généralité, $c((u_1, v_3)) = 4$. Maintenant, les voisins de (u_2, v_2) sont colorés par 2,3 et donc $c((u_2, v_2)) = [1, 4]$.

Cas 1 : Si $c((u_2, v_2)) = 1$

Comme $d_{\mathrm{G}}((u_2, v_3) = 2$ alors, $c((u_2, v_3)) = 3$. Maintenant, on a $d_{\mathrm{G}}((u_1, v_2)) \geq 3$ alors sans perte de généralité, $c((u_3, v_2)) = 2$ et $c((u_4, v_2)) = 4$. D'autre part, $d_{\mathrm{G}}((u_3, v_2)) = 2$ donc comme c une coloration propre, $c((u_3, v_1)) = 4$. Mais dans ce cas on a, $d_{\mathrm{G}}((u_3, v_3)) = 2$ et il a seulement la couleur 4 dans son voisinage, contradiction.

Cas 2 : Si $c((u_2, v_2)) = 4$

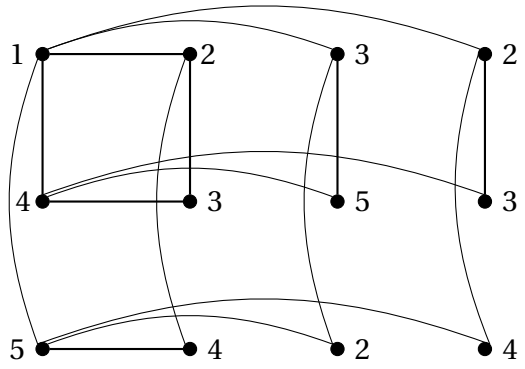
On a $d_{\mathrm{G}}((u_1, v_2)) \geq 3$ alors sans perte de généralité, $c((u_3, v_2)) = 2$. De plus, $d_{\mathrm{G}}((u_3, v_2)) = 2$

donc comme c une coloration propre, $c((u_3, v_1)) = 4$ mais dans ce cas on a, $d_G((u_3, v_3)) = 2$ et il a seulement la couleur 4 dans son voisinage, contradiction.

Par conséquent, $\chi_3(G) \geq 5$. Pour montrer que $\chi_d(G) = 5$, considérons la fonction de couleurs $c : V(G) \to \{1,2,3,4,5\}$ définie par $c((u_1, v_1)) = 1$, $c((u_{2i}, v_{2j})) = 3$, $c((u_{2i}, v_{2j+1})) = 5$, $c((u_{2i+1}, v_{2j})) = 4$, $c((u_{2i+1}, v_{2j+1})) = 2$ pour tout i et j ; $2 \leq i \leq m$ et $2 \leq j \leq n$,

$$c((u_1, v_j)) = \begin{cases} 2 \text{ si } j \text{ est pair ;} \\ 3 \text{ si } j \text{ est impair .} \end{cases} \quad 2 \leq j \leq n. \quad \text{et} \quad c((u_i, v_1)) = \begin{cases} 4 \text{ si } i \text{ est pair;} \\ 5 \text{ si } i \text{ est impair .} \end{cases} \quad 2 \leq i \leq m.$$

Il est facile de vérifier que c est une coloration 3-dynamique de G. Donc, pour tout $m, n \geq 2$ tel que $n \geq m$, $\chi_3\left(K_{1,m} \square K_{1,n}\right) = 5$ (voir Figure 3.11). ■



$$\chi_3\left(K_{1,3} \square K_{1,4}\right) = 5$$

FIGURE 3.11 – Coloration 3-dynamique de $K_{1,3} \square K_{1,4}$.

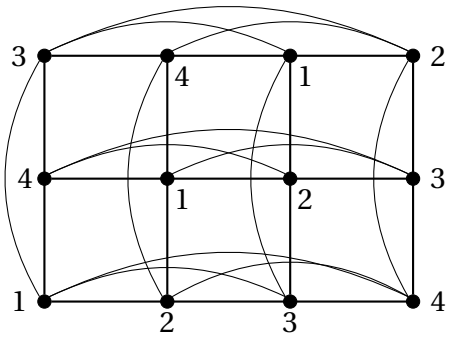
Proposition 3.2.4 *Soit* K_m, K_n *deux graphes complets tel que* $m, n \geq 3$ *et* $n \geq m$. *Alors,*

$$\chi_d(K_m \square K_n) = n.$$

Preuve. Soient $G = K_m \square K_n$, $V(K_m) = \{u_1, ..., u_m\}$ et $V(K_n) = \{v_1, ..., v_n\}$. Soit c une coloration dynamique de G avec k couleurs.

Puisque G possède une clique d'ordre n alors, $\chi_d(G) \geq n$. Il reste de montrer la borne supérieure. Considérons la fonction de couleurs $c : V(G) \to \{1, ..., n\}$ définie par

$c((u_i, v_j)) = 1 + (i + j) \mod n$, tel que $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. Il est clair que c est une coloration dynamique de G avec n couleurs. D'où $\chi_d(K_m \square K_n) = n$ (voir Figure 3.12). ■



$\chi_d(K_3 \square K_4) = 4$

FIGURE 3.12 – Coloration dynamique de $K_3 \square K_4$.

Proposition 3.2.5 *Soit* K_m, K_n *deux graphes complets tel que* $m, n \geq 3$ *et* $n \geq m$. *Alors,*

$$\chi_3(K_m \square K_n) = \begin{cases} 5 \text{ si } m = n = 3 ; \\ n \text{ sinon.} \end{cases}$$

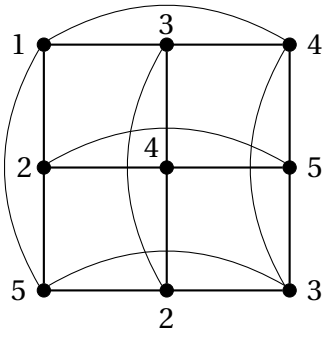
Preuve. Soient $V(K_m) = \{u_1, u_2, u_3\}$, $V(K_n) = \{v_1, v_2, v_3\}$ et $G = K_m \square K_n$. Soit c une coloration 3-dynamique de G avec k couleurs.

Cas 1 : $m = n = 3$.

Puisque $\Delta(G) \geq 3$ et $r = 3$ alors d'après la Proposition 2.1.2, on a $\chi_d(G) \geq \min\{\Delta, 2\} + 1 = 4$. Supposons que $\chi_3(G) = 4$. Considérons une coloration 3-dynamique c de G avec quatre couleurs. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $c((u_1, v_1)) = 1$, $c((u_2, v_1)) = 2$ et $c((u_1, v_2)) = 3$, et puisque c est une coloration 3-dynamique de G alors, $c((u_1, v_3)) = 4$. D'autre part, on a $d_G((u_1, v_2)) = 4$, il a les couleurs 1 et 4 dans son voisinage alors, on doit affecter la couleur 2 à (u_2, v_2) ou à (u_3, v_2) mais comme (u_2, v_2) est adjacent à (u_2, v_1) alors, on attribue la couleur 2 au sommet (u_3, v_2). Aussi, on a $d_G((u_1, v_3)) = 4$, il a les couleurs 1 et 3 dans son voisinage alors, on doit affecter la couleur 2 à (u_2, v_3) ou à (u_3, v_3), mais ces derniers ne peuvent pas prendre la couleur 2, contradiction. Donc $\chi_3(G) \geq 5$. Pour montrer que $\chi_3(G) = 5$, considérons la fonction de couleurs $c : V(G) \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ définie par $c((u_1, v_1)) = 1$, $c((u_2, v_1)) = c((u_3, v_2)) = 2$, $c((u_1, v_2)) = c((u_3, v_3)) = 3$, $c((u_1, v_3)) = c((u_2, v_2)) = 4$ et $c((u_1, v_3)) = c((u_2, v_3)) = 5$. Il est facile de vérifier que c est une coloration 3-dynamique. Donc, $\chi_3(K_3 \square K_3) = 5$ (voir Figure 3.13).

Cas 2 : Sinon

Même preuve du Proposition 3.2.4. ■



$\chi_3(K_3 \square K_3) = 5$

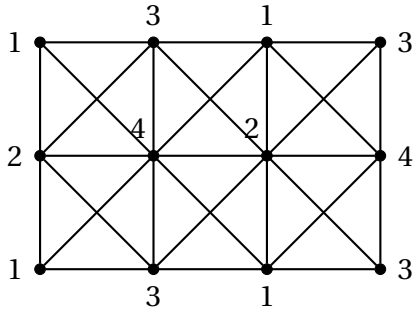
FIGURE 3.13 – Coloration 3-dynamique de $K_3 \square K_3$.

Proposition 3.2.6 *Soit* P_m, P_n *deux chaîne tel que* $m, n \geq 2$. *Alors,*

$$i)\chi_d(P_m \boxtimes P_n) = 4, \qquad ii)\chi_3(P_m \boxtimes P_n) = 4.$$

Preuve. Soient $G = P_m \boxtimes P_n$, $V(P_m) = \{u_1, ..., u_m\}$ et $V(P_n) = \{v_1, ..., v_n\}$. Soit c une coloration dynamique (resp., 3-dynamique) de G avec k couleurs.

Puisque G possède une clique d'ordre 4, alors $\chi_d(G) \geq 4$ (resp., $\chi_3(G) \geq 4$). Il reste de montrer la borne supérieure. Considérons la fonction de couleur $c : V(G) \rightarrow \{1,2,3,4\}$ définie par $c((u_{2i+1}, v_{2j+1})) = 1$, $c((u_{2i}, v_{2j+1})) = 2$, $c((u_{2i+1}, v_{2j})) = 3$ et $c((u_{2i}, v_{2j})) = 4$. Il est facile de vérifier que c est une coloration dynamique (resp., 3-dynamique) de G avec 4 couleurs. D'où ,pour tout m, n avec $m, n \geq 2$; $\chi_d(P_m \boxtimes P_n) = 4$ (resp., $\chi_3(P_m \boxtimes P_n) = 4$) (voir Figure 3.14). ■



$\chi_d(P_3 \boxtimes P_4) = \chi_3(P_3 \boxtimes P_4) = 4$

FIGURE 3.14 – Coloration $\{2,3\}$-dynamique de $P_3 \boxtimes P_4$.

3.3 Nombre chromatique r-dynamique du graphe de Mycielski

Dans cette section, nous définissons d'abord le graphe de Mycielski. Ensuite, nous donnons les valeurs exactes de nombre chromatique r-dynamique avec $r \in \{2,3\}$ du graphe de Mycielski du graphe complet K_n, d'étoile $K_{1,n}$ et le nombre chromatique dynamique de graphe de Mycielski du roue W_n et de Fan graphe $F_{1,n}$.

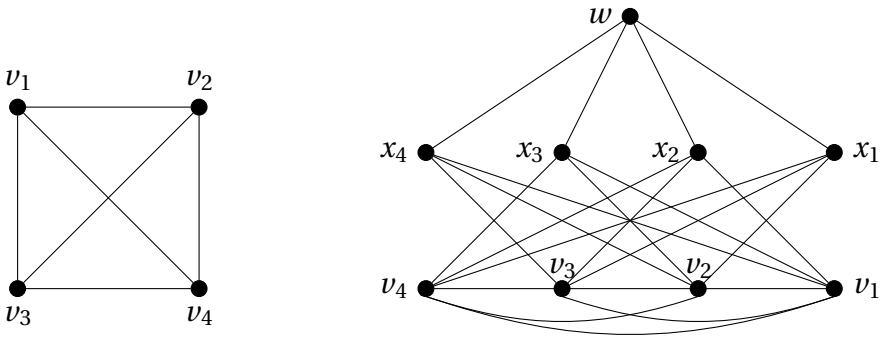
Dans un premier lieu, nous définissons le graphe de Mycielski.

Définition 3.3.1 *[36]* M*ycielski introduit une intéressante transformation de graphe en* 1955. *La transformation est décrite comme suit :*

- *Considérons tout graphe connexe simple* G *avec* $n \geq 2$ *sommets nommés* $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$.
- *Considérons l'ensemble de sommets* $V(G) \cup \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ *et ajoutez les arêtes* $v_i x_j, v_j x_i$ *: si et seulement si* $v_i v_j \in E(G)$.
- *Ajoutez un autre sommet* w *avec les arêtes* $\{w x_i : \forall i\}$.

De manière formelle, le Mycielski graphe noté $\mu(G)$*, est le simple graphe connexe avec* $V\left(\mu(G)\right) = V(G) \cup V' \cup \{w\}$ *avec* $V' = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ *et* $E\left(\mu(G)\right) = E(G) \cup E' \cup E''$ *avec* $E' = \{v_i x_j, v_j x_i$ *: si et seulement si* $v_i v_j \in E(G)\}$ *et* $E'' = \{w x_i : \forall i\}$ *tel que* $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$.

Exemple



K_4 $\mu(K_4)$

FIGURE 3.15 – Le graphe complet K_4 et son Mycielski graphe.

Dans [39], Vivin et al. ont étudié le nombre chromatique dynamique du graphe de mycielski d'une chaîne et d'un cycle.

Théorème 3.3.1 *[39] Soit* P_n *une chaîne d'ordre n. Alors,*

$$\chi_d\left(\mu(\mathrm{P}_n)\right) = \begin{cases} 5 \text{ si } n = 2, \\ 4 \text{ sinon}. \end{cases}$$

Théorème 3.3.2 *[39] Soit* C_n *un cycle d'ordre n. Alors,*

$$\chi_d\left(\mu(\mathrm{C}_n)\right) = 4$$

Proposition 3.3.1 *Soit* K_n *un graphe complet avec* $n \geq 3$. *Alors,*

$$i)\chi_d\left(\mu(\mathrm{K}_n)\right) = n+1, \qquad ii)\chi_3\left(\mu(\mathrm{K}_n)\right) = \begin{cases} 6 \text{ si } n = 3, \\ n+1 \text{ sinon}. \end{cases}$$

Preuve. Soient $\mathrm{G} = \mu(\mathrm{K}_n)$ et $\mathrm{V}\left(\mu(\mathrm{K}_n)\right)$ l'ensemble de sommets et soit c une coloration dynamique (resp., 3-dynamique) de G avec k couleurs.

i) Puisque G admet un graphe complet comme un sous graphe induit par v_i, alors d'après le Théorème 2.1.4, $\chi_d(\mathrm{G}) \geq n$. Supposons que $\chi_d(\mathrm{G}) = n$. Considérons une coloration dynamique c à G avec n couleurs. On attribue les couleurs $1, 2, ..., n$ alternativement au sommets v_j, $1 \leq j \leq n$. D'après la définition 3.3.1, les x_i sont adjacents à v_j tel que $1 \leq i \leq n$ et $i \neq j$, alors on exhibant la même coloration au sommets x_i. Mais puisque w est adjacent à $\{x_i : \forall i\}$ alors w doit avoir une couleur différente de celle utilisées au x_i, contradiction. Donc, $\chi_d(\mathrm{G}) = n+1$ (voir Figure 3.16).

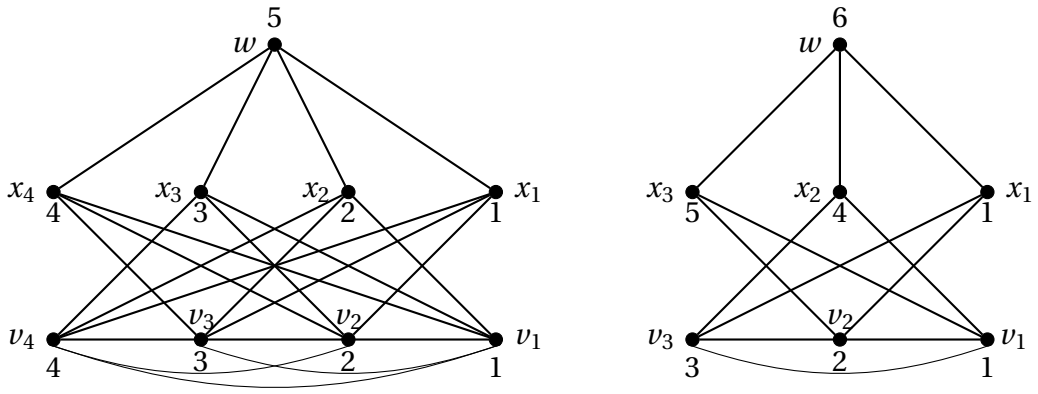
ii) Cas 1 : Si $n = 3$

Comme $\Delta \geq 3$ alors d'après la Proposition 2.1.2, $\chi_3(\mathrm{G}) \geq \min\{\Delta, 3\} + 1 = 4$. Supposons que $\chi_3(\mathrm{G}) = 4$. Comme les v_i forment une clique alors, on exhibant la coloration suivante $c(v_1) = 1, c(v_2) = 2$ et $c(v_3) = 3$. Il est à souligner que pour tout sommet de degré supérieur à 3 doit avoir trois couleurs dans son voisinage. On a $d_{\mathrm{G}}(v_1) \geq 3$ donc sans perte de généralité, $c(x_2) = 4$. D'autre part, on a $d_{\mathrm{G}}(x_2) = 3$ donc, $c(w) = 2$. Mais dans ce cas, on a $d_{\mathrm{G}}(x_1) = 3$ et il a la couleurs 2 deux fois dans son voisinage, contradiction. D'où $\chi_3(\mathrm{G}) \geq 5$. Supposons que $\chi_3(\mathrm{G}) = 5$. Comme les v_i forment une clique alors, on exhibant la coloration suivante

$c(v_1) = 1, c(v_2) = 2$ et $c(v_3) = 3$. On a $d_G(v_1) \geq 3$ donc sans perte de généralité, $c(x_2) = 4$ et $d_G(x_2) = 3$ donc, $c(w) = 5$. D'autre part, on a $d_G(v_2) \geq 3$ donc sans perte de généralité, $c(x_1) = 4$. Mais dans ce cas, on a $d_G(w) = 3$ et il a la couleurs 4 deux fois dans sans voisinages, contradiction. D'où $\chi_3(G) \geq 6$. Pour montrer que $\chi_3(G) = 6$, on exhibant la coloration suivante. On attribue les couleurs 1,2 et 3 alternativement aux sommets v_1, v_2 et v_3, aussi on affecte les couleurs 1,4 et 5 alternativement aux sommets x_1, x_2 et x_3 et la couleur 6 à w pour que chaque v_i et x_i ; $1 \leq i \leq 3$ possède trois couleurs dans son voisinage. Une vérification simple montre que cette coloration est une coloration 3-dynamique de $\mu(K_3)$ avec 6 couleurs (voir Figure 3.16).

Cas 2 : Sinon

Même preuve du Proposition i. ■



$\chi_d\left(\mu\left(K_4\right)\right) = 5$ $\qquad$ $\chi_3\left(\mu\left(K_3\right)\right) = 6$

FIGURE 3.16 – Coloration dynamique de $\mu(K_4)$ et 3-dynamique de $\mu(K_3)$.

Proposition 3.3.2 *Soit* $K_{1,n}$ *une étoile avec* $n \geq 3$. *Alors,*

$$i)\chi_d\left(\mu(K_{1,n})\right) = 4, \qquad ii)\chi_3\left(\mu(K_{1,n})\right) = 5.$$

Preuve. Soient $G = \mu(K_{1,n})$ et $V\left(\mu(K_n)\right)$ l'ensemble de sommets et soit c une coloration dynamique (resp., 3-dynamique) de G avec k couleurs.

i) Vu que $\Delta(G)) \geq 2$, alors d'après la Proposition 2.1.2, $\chi_d(G) \geq \min\{\Delta, 2\} + 1 = 3$. Supposons que $\chi_d(G) = 3$ alors, on exhibant la coloration suivante. Comme les sommets v_i ; $1 \leq i \leq n+1$ forment une étoile alors d'après le Théorème 2.2.5 et sans perte de généralité on a $c(v_1) = 1$,

$c(v_2) = 2$ et $c(v_j) = 3$; $3 \leq j \leq n+1$. D'autre part, on a $d_G(v_i) = 2$; $2 \leq i \leq n+1$ tel que $N_G(v_i) = \{v_1, x_1\}$ mais x_1 ne peut pas prend les trois couleurs car sinon cette coloration n'est pas dynamique, contradiction. Donc, $\chi_d\left(\mu(K_{1,n})\right) \geq 4$. Pour avoir l'égalité, on exhibant une coloration c de G comme suit $c(w) = 2$,

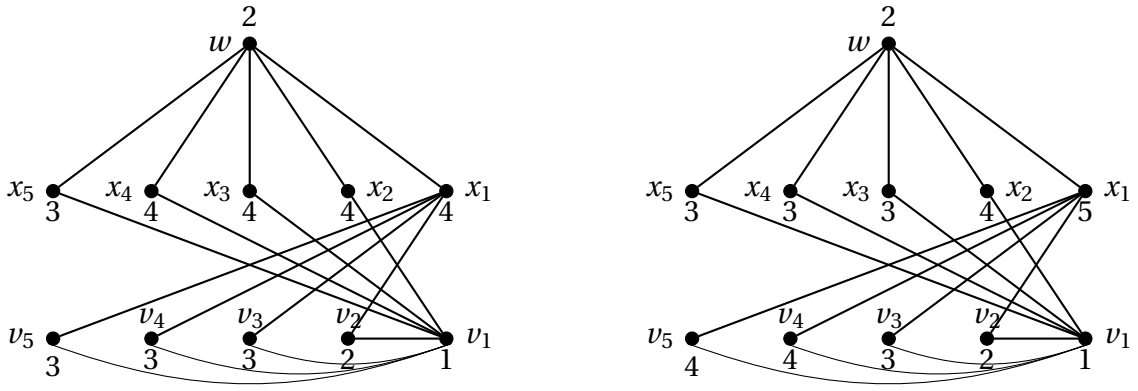
$$c(v_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = 1; \\ 2 \text{ si } i = 2; \\ 3 \text{ sinon.} \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n+1. \qquad \text{et} \qquad c(x_i) = \begin{cases} 3 \text{ si } i = n+1; \\ 4 \text{ sinon.} \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n+1.$$

Une vérification simple montre que c est une coloration dynamique de $\mu(K_{1,n})$ avec 4 couleurs. D'où, $\chi_d\left(\mu(K_{1,n})\right) = 4$ (voir Figure 3.17).

ii) Vu que $\Delta(G)) \geq 3$ alors, d'après la Proposition 2.1.2, $\chi_d(G) \geq \min\{\Delta, 3\} + 1 = 4$. Supposons que $\chi_d(G) = 4$ alors, on exhibant la coloration suivante. Comme les sommets v_i; $1 \leq i \leq n+1$ forment une étoile alors d'après le Théorème 2.2.4 et sans perte de généralité on a, $c(v_1) = 1$, $c(v_2) = 2$, $c(v_3) = 3$ et $c(v_j) = 4$; $4 \leq j \leq n+1$. D'autre part on a $d_G(v_i) = 2$; $2 \leq i \leq n+1$ tel que $N_G(v_i) = \{v_1, x_1\}$ mais x_1 ne peut pas prend les quatre couleurs car sinon cette coloration n'est pas dynamique, contradiction. Donc, $\chi_d\left(\mu(K_{1,n})\right) \geq 4$. Pour avoir l'égalité on attribue une coloration 3-dynamique c de G comme suit : $c(w) = 2$,

$$c(v_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = 1; \\ 2 \text{ si } i = 2; \\ 3 \text{ si } i = 3. \\ 4 \text{ si } i \geq 4. \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n+1. \qquad \text{et} \qquad c(x_i) = \begin{cases} 5 \text{ si } i = 1; \\ 4 \text{ si } i = 2. \\ 3 \text{ si } i \geq 3. \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n+1.$$

Une vérification simple montre que c est une coloration 3-dynamique de G avec 5 couleurs. D'où, $\chi_3\left(\mu(K_{1,n})\right) = 5$ (voir Figure 3.17). ■



$\chi_d\left(\mu\left(K_{1,4}\right)\right) = 4$ $\qquad$ $\chi_3\left(\mu\left(K_{1,4}\right)\right) = 5$

FIGURE 3.17 – Coloration $\{2,3\}$-dynamique de $\mu(K_{1,4})$.

Proposition 3.3.3 *Soit* W_n *une roue avec* $n \geq 4$. *Alors,*

$$\chi_d\left(\mu(W_n)\right) = 4.$$

Preuve. Soient $G = \mu(W_n)$ et $V\left(\mu(W_n)\right)$ l'ensemble de sommets et soit c une coloration dynamique de G avec k couleurs.

Cas 1 : Si n est pair

Puisque G admet une roue comme un sous graphe induit par v_i alors, d'après le Théorème 2.1.4 et la Remarque 2.2.2, $\chi_d(G) \geq 4$. Pour avoir l'égalité, il faut trouver une coloration dynamique à G avec 4 couleurs. Alors, considérons la fonction de couleur $c : V(G) \to \{1,2,3,4\}$ définie par : $c(w) = 4$,

$$c(v_i) = \begin{cases} 4 \text{ si } i = 1 \ ; \\ 3 \text{ si } i \text{ est pair} \ ; \\ 2 \text{ si } i \text{ est impair}; \\ 1 \text{ si } i = n. \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n. \qquad \text{et} \qquad c(x_i) = \begin{cases} 2 \text{ si } i \text{ est impair} \ ; \\ 3 \text{ si } i \text{ est pair} \ ; \\ 1 \text{ si } i = n. \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Une vérification simple montre que c est une coloration dynamique de $\mu(W_n)$ avec 4 couleurs. d'où, $\chi_d\left(\mu(W_n)\right) = 4$ (voir Figure 3.18).

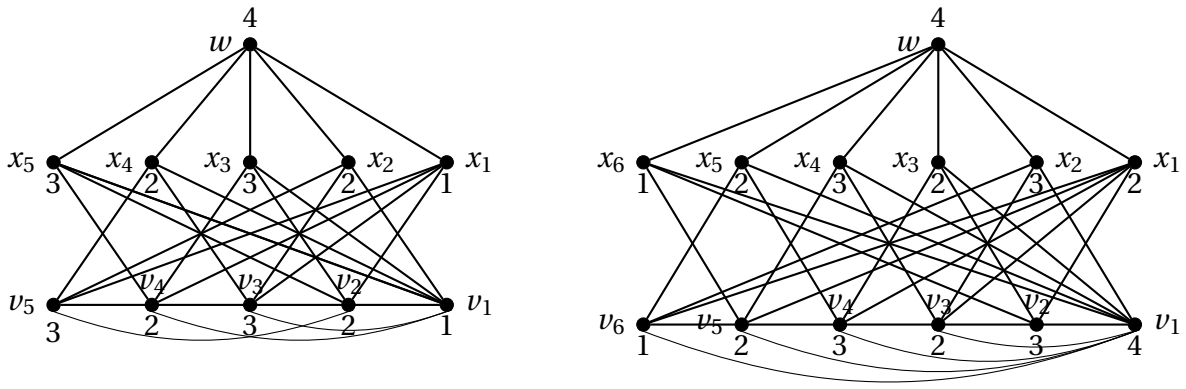
Cas 2 : Si n est impair

Puisque G admet une roue comme un sous graphe induit par v_i alors, d'après le Théorème 2.1.4 et la Remarque 2.2.2, $\chi_d(G) \geq 3$. Supposons que $\chi_d(G) = 3$. Alors, considérons la fonc-

tion de couleur $c : V(G) \to \{1,2,3\}$ définie par

$$c(v_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = 1 \text{ ;} \\ 2 \text{ si } i \text{ est pair ;} \\ 3 \text{ si } i \text{ est impair.} \end{cases} \qquad 1 \leq i \leq n.$$

et d'après la définition 3.3.1, on affecte la même coloration de v_i à x_i i.e $c(x_i) = c(v_i)$, mais comme w est adjacent à $x_i \forall i$ alors, w doit avoir une couleur différente de celles utilisées pour x_i, contradiction. Donc, $\chi_d(G) = 4$ (voir Figure 3.18). ■



$\chi_d(\mu(W_5)) = 4$ $\chi_d(\mu(W_6)) = 4$

FIGURE 3.18 – Coloration dynamique de $\mu(W_5)$ et $\mu(W_6)$.

Proposition 3.3.4 *Soit* $F_{1,n}$ *le fan graphe avec* $n \geq 3$. *Alors,*

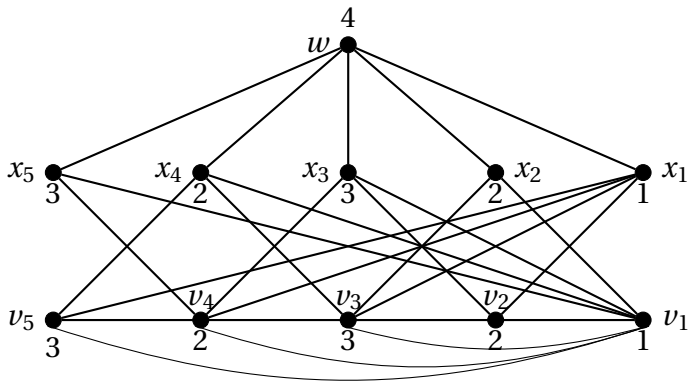
$$\chi_d(\mu(F_{1,n})) = 4.$$

Preuve. Soient $G = \mu(F_{1,n})$ et $V(\mu(F_{1,n}))$ l'ensemble de sommets et soit c une coloration dynamique de G avec k couleurs.

Puisque G admet un fan graphe comme un sous graphe induit par v_i alors, d'après le Théorème 2.1.4 et la Remarque 2.2.3, $\chi_d(G) \geq 3$. Supposons que $\chi_d(G) = 3$. Alors, considérons la fonction de couleur $c : V(G) \to \{1,2,3\}$ définie par

$$c(v_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = 1 \text{ ;} \\ 2 \text{ si } i \text{ est pair ;} \\ 3 \text{ si } i \text{ est impair.} \end{cases} \qquad 1 \leq i \leq n+1.$$

et d'après la définition 3.3.1, on exhibant la même coloration de v_i à x_i i.e $c(x_i) = c(v_i)$, mais comme w est adjacent à $x_i \forall i$ alors, w doit avoir une couleur différente de celles utilisées pour x_i, contradiction. Donc $\chi_d(G) = 4$ (voir Figure 3.19). ■



$$\chi_d\left(\mu\left(F_{1,5}\right)\right) = 4$$

FIGURE 3.19 – Coloration dynamique de $\mu\left(F_{1,5}\right)$.

Chapitre 4

Graphes χ_d-arête critiques

Parmi les problèmes dont l'étude a bénéficié des motivations pratiques et théoriques à la fois, se trouvent les problèmes des graphes critiques par rapport à un paramètre donné, le plus traditionnel d'entre eux étant le problème des graphes k-critiques.

En 1951,Dirac a étudié l'effet de la suppression d'un sommet quelconque d'un graphe G sur son nombre chromatique χ(G), d'où la notion d'un graphe *critique* [17, 18], et depuis a été largement étudié (voir [27] pour plus de détails sur le sujet).

On va définir les graphes critiques par rapport le nombre chromatique χ(G).
Soit G = (V, E) un graphe simple k-colorable (ie. $\chi(G) = k$) avec $k \geq 2$.

Définition 4.0.1 *On appelle un sommet (resp., arête) critique d'un graphe* G*, un sommet (resp., l'arête) dont sa suppression fait diminuer le nombre chromatique de* G*. La suppression d'un sommet ou d'une arête de* G *fait diminuer le nombre chromatique par au plus un. C'est-à-dire :* $\chi(G - v) = k$ *ou bien* $\chi(G - v) = k - 1$*. Par ailleurs* $\chi(G - e) = k$ *ou bien* $\chi(G - e) = k - 1$*.*

Définition 4.0.2 *Le graphe* G *est critique si tous ses sommets (resp.,arêtes) sont critiques. Le graphe dont tous ses sommets (resp., arêtes) sont critiques est dit un graphe sommet (resp., arête) critique. De plus, il est dit sommet (resp., arête)* k*-critique s'il est sommet (resp., arête) critique et* $\chi(G) = k$*.*

Tout graphe arête k-critique est sommet k-critique. En effet, soit $u, v \in V$, si $e = uv$ et $\chi(G - e) = k - 1$, alors $\chi(G - u) = k - 1$ et $\chi(G - v) = k - 1$.

C'est dans cette optique que nous allons étudier l'effet de la suppression d'un sommet ou d'une arête sur le nombre χ_d-chromatique pour certaines classes particulières de graphes. Contrairement au nombre chromatique, le nombre χ_d-chromatique d'un graphe peut augmenter, diminuer ou rester inchangé lorsque le graphe G est modifié en supprimant un sommet ou une arête. De ce fait, on peut classer les graphes critiques par rapport au nombre χ_d-chromatique en six classes de graphes.

La classe des graphes $\chi_d^=$-sommet stables : $\forall v \in \mathrm{V(G)}, \chi_d(\mathrm{G}-v) = \chi_d(\mathrm{G})$.
La classe des graphes $\chi_d^=$-arête stables : $\forall e \in \mathrm{V(G)}, \chi_d(\mathrm{G}-e) = \chi_d(\mathrm{G})$.
La classe des graphes χ_d^+-sommet critiques : $\forall v \in \mathrm{V(G)}, \chi_d(\mathrm{G}-v) > \chi_d(\mathrm{G})$.
La classe des graphes χ_d^+-arête critiques : $\forall e \in \mathrm{V(G)}, \chi_d(\mathrm{G}-e) > \chi_d(\mathrm{G})$.
La classe des graphes χ_d^--sommet critiques : $\forall v \in \mathrm{V(G)}, \chi_d(\mathrm{G}-v) < \chi_d(\mathrm{G})$.
La classe des graphes χ_d^--arête critiques : $\forall e \in \mathrm{V(G)}, \chi_d(\mathrm{G}-e) < \chi_d(\mathrm{G})$.

4.1 Comparaisons entre $\chi_d(\mathrm{G})$ et $\chi_d(\mathrm{G}-e)$, et entre $\chi_d(\mathrm{G})$ et $\chi_d(\mathrm{G}-v)$

Contrairement aux colorations classiques, un sous graphe d'un graphe G peut avoir un nombre chromatique dynamique supérieur ou inférieur à celui de G. Un naturel problème consiste à étudier la différence entre $\chi_d(\mathrm{G})$ et $\chi_d(\mathrm{G}-e)$ et entre $\chi_d(\mathrm{G})$ et $\chi_d(\mathrm{G}-v)$. Dans [32], *Miao* et al. ont étudié les meilleures bornes possibles pour ces différences.

Théorème 4.1.1 *[32]*
(i) *Soit* G *un graphe connexe avec* $|\mathrm{V(G)}| \geq 3$. *Alors* $\forall e = uv \in \mathrm{E(G)}$,

$$\chi_d(\mathrm{G}) - 2 \leq \chi_d(\mathrm{G}-e) \leq \chi_d(\mathrm{G}) + 2.$$

(ii) *Il existe un graphe* G *tel que* $\chi_d(\mathrm{G}-e) = \chi_d(\mathrm{G}) + 2$ *pour au moins une arête* $e \in \mathrm{E(G)}$.
(iii) *Si un graphe connexe* G *satisfis* $\chi_d(\mathrm{G}-e) = \chi_d(\mathrm{G}) - 2$ *pour au moins une arête* e *de* G, *alors* $\mathrm{G} = \mathrm{C}_5$.

Théorème 4.1.2 *[32] Soit* G *un graphe connexe avec* $|\mathrm{V(G)}| \geq 2$. *Si* G *ne contient pas une subdivision de* $\mathrm{K}_{3,3}$, *alors* $\chi_d(\mathrm{G}-e) \leq \chi_d(\mathrm{G}) + 1$ $\forall e \in \mathrm{E(G)}$.

Théorème 4.1.3 *[35] Pour tout graphe* G, $\chi_d(G-v) \geq \chi_d(G)-2 \ \forall v \in V(G)$. *Les seuls graphes dans laquelle* $\chi_d(G-v) \geq \chi_d(G)-2$ *pour au moins un sommet sont* $K_{1,n-1}$, $n \geq 3$ *et* C_5.

4.2 Résultats particuliers sur les graphes χ_d^--arête critique

Dans cette section, nous donnons quelques résultats sur les graphes χ_d^--arête critiques et une caractérisation des arbres et graphes χ_d^--arête critiques.

Proposition 4.2.1 *Soit* P_n *une chaîne d'ordre n. Alors,*

i) P_2 *et* P_3 *sont* χ_d^-*-arête critique.*

ii) *Si* $n \geq 5$ *alors,* P_n *est* $\chi_d^=$*-arête stable.*

Preuve. Soit P_n une chaîne d'ordre n et soit $e = uv$ une arête quelconque. Soit c une coloration dynamique de P_n ($n \geq 3$) avec 3 couleurs, c'est à dire $\chi_d(P_n) = 3$.

i) Premièrement, si $n \in \{2,3\}$, le résultat est immédiat puisque $\chi_d(P_2) = 2$ et $\chi_d(P_2 - e) = 1$ (voir la partie *a* dans la Figure 4.1), aussi $\chi_d(P_3) = 3$ et $\chi_d(P_3 - e) = 2$ (voir la partie *b* dans la Figure 4.1). Lorsque $n = 4$ le graphe n'est pas χ_d^--arête critique, puisque si on supprime l'arrêt e on obtient $\chi_d(P_4 - e) = 3 = \chi_d(P_4)$ (voir la partie *c* dans la Figure 4.1).

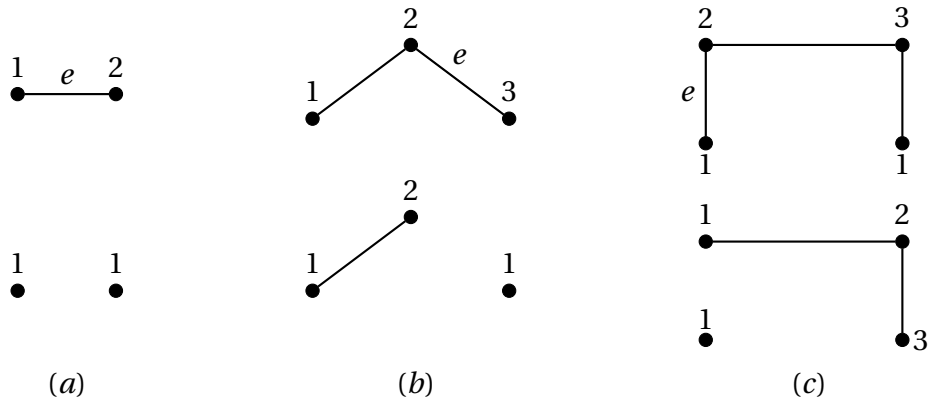


FIGURE 4.1 – Coloration dynamique de P_n et $P_n - e$ pour $n \in \{2,3,4\}$.

ii) Si $n \geq 5$, c reste une coloration dynamique de $P_n - e$ pour tout $e \in E(P_n)$. Alors, $\chi_d(P_n - e) \leq \chi_d(P_n)$. D'autre part, soit c' une coloration de $P_n - e$ avec $\chi_d(P_n)$ couleurs tel que $P_n - e = P_1 + P_{n-1}$. On interchange les couleurs de P_{n-1} de sorte que c' reste une coloration dynamique de P_n. Alors, $\chi_d(P_n - e) \geq \chi_d(P_n)$. De ce fait, si $n \geq 5$ alors, P_n est $\chi_d^=$-arête stable.

■

Proposition 4.2.2 *Soit* $K_{p,q}$ *un graphe biparti complet. Alors,*
Si $p = q = 2$ *alors,* $K_{p,q}$ *est* χ_d^-*-arête critique.*

Preuve. Soit $G = K_{2,2}$ et soit e une arête quelconque.
D'après le Théorème 2.2.5, $\chi_d(G) = 4$. Il est clair que si on supprime une arête e, G devient une chaîne alors d'après le Théorème 2.2.3, $\chi_d(G-e) = 3$. Donc, $K_{2,2}$ est χ_d^--arête critique. ■

Proposition 4.2.3 *Soit* $K_{p,q}$ *un graphe biparti complet. Alors,*
Si $p, q \neq 2$ *alors,* $K_{p,q}$ *est* $\chi_d^=$*-arête stable.*

Preuve. Soit $K_{p,q} = X_1 \cup X_2$ $(p, q \geq 2)$ et soit $e = uv$ une arête quelconque tel que $u \in X_1$, $v \in X_2$. Comme $d(u) \geq 2$ et $d(v) \geq 2$, alors d'après la deuxième condition d'adjacence, il faut utiliser au moins deux couleurs pour coloré X_1 et X_2 séparément. D'autre part, d'après la première condition d'adjacence X_1 et X_2 doit avoir des couleurs différentes, alors au moins $2+2 = 4$ couleurs sont utilisé pour coloré $K_{p,q} - e$. D'où $\chi_d\left(K_{p,q} - e\right) = \chi_d\left(K_{p,q}\right) = 4$. Donc, si $p, q \neq 2$ alors, $K_{p,q}$ est $\chi_d^=$-arête stable. ■

Proposition 4.2.4 *Soit* K_n *un graphe complet. Alors,*
K_n *est* χ_d^-*-arête critique .*

Preuve. Soit K_n un graphe complet et soit $e = uv$ une arête quelconque.
D'une part, on a d'après le Théorème 2.2.1, $\chi_d(K_n) = n$. D'autre part, $K_n - e$ possède une clique d'ordre $n-1$, alors $\chi_d(K_n - e) \geq n-1$. De plus, d'après la suppression d'une arête on obtient deux sommets non adjacent dans $K_n - e$ par conséquent, ils peuvent prendre la même couleur. Alors, $K_n - e$ est coloré avec $n-1$ couleurs. D'où, $\chi_d(K_n - e) = n-1$. Donc, K_n est χ_d^--arête critique. ■

Proposition 4.2.5 *Soit* C_n *un cycle d'ordre n. Alors,*
Si $n = 3k+1$ *ou* $n = 3k+2$ $(k \geq 1)$ *alors* C_n *est* χ_d^-*-arête critique .*

Preuve. Soit C_n un cycle d'ordre n tel que $n = 3k+1$ ou $n = 3k+2$ $(k \geq 1)$ et soit $e = uv$ une arête quelconque.
Si $n = 5$, ce cas est déjà étudier dans [32].

Sinon. D'une part, d'après le Théorème 2.3.1 on a $\chi_d(C_n) = 4$. D'autre part, $C_n - e$ est une chaîne d'ordre n, alors $\chi_d(C_n - e) = 3$. D'où, C_n est χ_d^--arête critique tel que $n = 3k+1$ ou $n = 3k+2$ ($k \geq 1$). ■

Théorème 4.2.1 *Soit* G *un graphe connexe et soit e un isthme. Alors,*
G *est* χ_d^-*-arête critique si et seulement si* $G = P_2, P_3$ *et* P_4 *avec e arête non pendante.*

Preuve. Soit $G = G_1 + G_2$ un graphe connexe et soit $e = uv$ un isthme tel que G_1 et G_2 les composantes connexes de G qui sont reliées par e , $u \in G_1$ et $v \in G_2$ et soit c une coloration dynamique de G' tel que $G' = G - e$.
Si $c(u) \neq c(v)$, donc c reste une coloration dynamique dans G, contradiction. Alors, $c(u) = c(v)$. Si $\chi_d(G_1) \geq 3$ ou $\chi_d(G_2) \geq 3$ alors, on peut faire un échange de couleurs dans G_1 ou G_2 de sorte que c reste une coloration dynamique dans G, contradiction. Alors, $\chi_d(G_1) \leq 2$ et $\chi_d(G_2) \leq 2$. Si $\chi_d(G_1) = 2$ et $\chi_d(G_2) = 2$ alors, $G_1 = G_2 = P_2$ et d'après la Proposition 4.2.1, $\chi_d(G_1) = \chi_d(G_2) = 2$, dans ce cas il faut attribuer la couleur 3 au sommet u ou v pour que c devient une coloration dynamique de G. D'où, G est χ_d^--arête critique si et seulement si $G = P_4$ et e arête non pendante. Sans perdre de généralité, si $\chi_d(G_1) = 2$ et $\chi_d(G_2) = 1$ alors, $G_1 = P_2$ et $G_2 = P_1$ .D'où, $G = P_3$. Si $\chi_d(G_1) = \chi_d(G_2) = 1$ alors, $G = P_2$.
La condition suffisante est facile à vérifier. Ceci achève la preuve du Théorème. ■

Du Théorème 4.2.1, on peut déduire la Remarque suivante :

Remarque 4.2.1 *Soit* T *un arbre. Alors,*
T *est* χ_d^-*-arête critique si et seulement si* $T = P_2, P_3$ *et* P_4 *avec e arête non pendante.*

Proposition 4.2.6 *Soit* G_1 *et* G_2 *deux graphes. Alors,*

$$\chi_d(G_1 \vee G_2) \leq \chi_d(G_1) + \chi_d(G_2)$$

Preuve. Soit $G = G_1 \vee G_2$ et soit c une coloration dynamique de G.
Clairement, aucune couleur ne peut apparaître dans G_1 et G_2 à la fois. Pour $i \in \{1,2\}$, soit k_i le nombre de couleurs qui apparaissent dans G_i. Sans perte de généralité, on peut supposer que les couleurs $1, 2, ..., k_1$ apparaissent dans G_1 et les couleurs $1 + k_1, 2 + k_1, ..., k_2 + k_1$ apparaissent dans G_2. Il est clair que $\chi_d(G) \leq \chi_d(G_1) + \chi_d(G_2)$. ■

Chapitre 5

Graphes χ_{d_e}-critiques

Un graphe G_e obtenue après la contraction d'une arête d'un graphe G peut avoir un nombre chromatique dynamique supérieur ou inférieur ou il peut rester inchangé à celui de G. Un naturel problème consiste à étudier les différences entre $\chi_d(G)$ et $\chi_d(G_e)$.
C'est dans cette optique que nous allons étudier l'effet de la contraction d'une arête sur le nombre χ_d-chromatique pour certaines classes particulières de graphes.

On peut classer les graphes χ_{d_e}-critiques par rapport au nombre χ_d-chromatique en trois classes de graphes. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.

La classe des graphes $\chi^{=}_{d_e}$-stables : $\forall e \in V(G), \chi_d(G_e) = \chi_d(G)$.
La classe des graphes $\chi^{+}_{d_e}$-critiques : $\forall e \in V(G), \chi_d(G_e) > \chi_d(G)$.
La classe des graphes $\chi^{-}_{d_e}$-critiques : $\forall e \in V(G), \chi_d(G_e) < \chi_d(G)$.

5.1 Résultats particuliers sur les graphes χ_{d_e}- critiques

Dans la première partie de cette section, nous établissons des bornes sur le nombre chromatique dynamique après la contraction d'une arête quelconque dans le graphe et nous déterminons quelques graphes atteignant ces bornes. En outre, nous caractérisons les arbres $\chi^{-}_{d_e}$-critiques.

Proposition 5.1.1 *Soit* G *un graphe et soit e une arête quelconque. Alors,*

$$\chi_d(G_e) \leq \chi_d(G) + 2.$$

Preuve. Soit G un graphe et u, v deux sommets adjacents avec $X = N_G(u) \cup N_G(v)$ et $|X| \geq 2$. Soit G_e le graphe obtenu à partir de G en contractant l'arête $e = uv$. Soit c une coloration dynamique de G avec k couleurs, c'est à dire $\chi_d(G) = k$.
S'il existe une seule couleur dans X, alors on attribue la couleur $k+1$ au sommet uv et la couleurs $k+2$ à un sommet de X. Il est clair que cette coloration est dynamique. D'où, $\chi_d(G_e) \leq k+2 = \chi_d(G)+2$. ■

Proposition 5.1.2 *Soit* G *un graphe et soit e une arête quelconque. Alors,*

$$\chi_d(G) \leq \chi_d(G_e) + 1.$$

Preuve. Soit G un graphe et soit u, v deux sommets adjacents. Soit G_e le graphe obtenu à partir de G en contractant l'arête $e = uv$. Soit c une coloration dynamique de G_e avec k couleurs, c'est à dire $\chi_d(G_e) = k$. On veut retourner au graphe initial G.
Si toute les couleurs apparaissent dans $N_G(u)$ et $N_G(v)$, alors on attribue la même couleur de uv au sommet u et la couleur $k+1$ au sommet v. Il est clair que cette coloration est dynamique. D'où, $\chi_d(G) \leq k+1 = \chi_d(G_e)+1$. ■

5.1.1 Caractérisation des graphe $\chi_{d_e}-$critiques

Rappelons qu'un graphe est dit $\chi^-_{d_e}$-critique si $\chi_d(G_e) < \chi_d(G)$ et il est dit $\chi^+_{d_e}$-critique si $\chi_d(G_e) > \chi_d(G)$.

Remarque 5.1.1

i) *Le cycle* C_6 *est* $\chi^+_{d_e}$*-critique.*

ii) $\cup C_6$ *est* $\chi^+_{d_e}$*-critique.*

Preuve. *i*) Le résultat est immédiat car la contraction d'une arête dans un cycle d'ordre n donne un cycle d'ordre $n-1$, et d'après le Théorème 2.3.1, $\chi_d(C_6) = 3$ et $\chi_d(C_5) = 5$.
ii) Le résultat est immédiat car d'après la Remarque 2.2.1, $\chi_d(G) = \max_{1 \leq i \leq p}\{\chi(G_i)\}$ tel que $G_i = C_6$. ■

Proposition 5.1.3 *Le graphe biparti complet* $K_{m,n}$ *est* $\chi^-_{d_e}$*-critique.*

Preuve. Soit $G = K_{m,n}$ un graphe biparti complet. Le résultat est immédiat car la contraction d'une arête dans un graphe biparti complet donne un graphe 3-parti complet, et d'après le Théorème 2.2.5, $\chi_d(G) = 4$ et $\chi_d(G_e) = 3$. ■

Proposition 5.1.4 *Le graphe complet* K_n *est* $\chi^-_{d_e}$*-critique.*

Preuve. Soit $G = K_n$ un graphe complet. Le résultat est immédiat car la contraction d'une arête dans un graphe complet d'ordre n donne un graphe complet d'ordre $n-1$, et d'après le Théorème 2.2.1, $\chi_d(G) = n$ et $\chi_d(G_e) = n-1$. ■

Proposition 5.1.5 *Soit* P_n *une chaîne d'ordre n. Alors,* P_2 *et* P_3 *sont* $\chi^-_{d_e}$*-critique.*

Preuve. Le résultat est immédiat car la contraction d'une arête dans une chaîne d'ordre n donne une chaîne d'ordre $n-1$, et d'après le Théorème 2.2.2 et 2.2.3, $\chi_d(P_3) = 3$, $\chi_d(P_2) = 2$ et $\chi_d(P_1) = 1$. ■

Théorème 5.1.1 *Soit* G *un graphe connexe. Alors,*
G *est* $\chi^-_{d_e}$*-critique si et seulement si* $G = P_2, P_3$.

Preuve. Soit $G = G_1 + G_2$ un graphe connexe et soit e un isthme tel que G_1 et G_2 les composantes connexes de G qui sont reliées par e. Soit c une coloration dynamique de G_e avec $\chi_d(G)$ couleurs. Si $\chi_d(G_1) \geq 3$ ou $\chi_d(G_2) \geq 3$ alors, on peut faire un échange de couleur de sorte que c reste une coloration dynamique dans G, contradiction. Donc, $\chi_d(G_1) \leq 2$ et $\chi_d(G_2) \leq 2$. Si $\chi_d(G_1) = 2$ et $\chi_d(G_2) = 2$ alors, $G_e = P_3$ et $G = P_4$ et on a d'après le Théorème 2.2.3, $\chi_d(G_e) = \chi_d(G) = 3$, contradiction. Donc sans perde de généralité, on peut supposer que $\chi_d(G_1) = 2$ et $\chi_d(G_2) = 1$ ou $\chi_d(G_1) = \chi_d(G_2) = 1$. Dans le premier cas $G_e = P_2$ et $G = P_3$ et d'après le Théorème 2.2.3, $\chi_d(G_e) = 2$ et $\chi_d(G) = 3$. Dans le deuxième cas, $G_e = P_1$ et $G = P_2$ et d'après le Théorème 2.2.3, $\chi_d(G_e) = 1$ et $\chi_d(G) = 2$.
La condition suffisante est déjà étudier dans la Remarque 5.1.5. Ceci achève la preuve du Théorème. ■

Du Théorème 5.1.1, on peut déduire la Remarque suivante :

Remarque 5.1.2 *Soit* T *un arbre. Alors,*
T *est* $\chi^-_{d_e}$*-critique si et seulement si* $T = P_2, P_3$.

Proposition 5.1.6 *Soit* $G = G_1 \vee G_2$ *un graphe. Alors,*
Si G *est* $\chi^-_{d_e}$*-critique alors* G *ne contient pas un* P_3 *comme un sous graphe induit.*

Preuve. Soit $G = G_1 \vee G_2$ un graphe $\chi^-_{d_e}$-critique et soit c une coloration dynamique de G avec χ_d couleurs. Montrons que G_i est sans P_3, $i \in \{1,2\}$.
Supposons par exemple que G_1 contient un $P_3 : x - y - z$, comme tout sommet de G_1 est adjacent à tout sommet de G_2 alors, les couleurs utilisées dans G_1 doit être différent de celle utilisées dans G_2, aussi on a x et z ne sont pas adjacent donc, $c(x) = c(z)$. Alors, la contraction de l'arête xy ou yz ne diminue pas le $\chi_d(G_e)$. Donc, $\chi_d(G) = \chi_d(G_e)$, contradiction. La même preuve pour G_2. Donc G est sans P_3. ■

Proposition 5.1.7 *Si* $G = G_1 + G_2 + ... + G_p$ $(p \geq 2)$ *est un graphe sans sommets isolés avec p composantes connexes alors,* G *n'est pas* $\chi^-_{d_e}$*-critique.*

Preuve. D'après la Remarque 2.2.1, $\chi_d(G) = \max_{1 \leq i \leq p}\{\chi(G_i)\}$. Sans perte de généralité, supposons que $\chi_d(G) = \chi_d(G_1)$. Comme G est sans sommets isolés alors, G_2 contient au moins une arête e. D'où $\chi_d(G_e) \geq \max\{\chi_d(G_1), \chi_d(G_{2_e}\} \geq \chi_d(G_1) = \chi_d(G)$, contradiction. ■

Remarque 5.1.3 *Soit* G *un graphe.*
Si G *est sans* P_3 *alors* $G = K_n$.

Remarque 5.1.4 *Soit* G *un graphe.*
Si G *est sans* P_4 *alors* G *ou* $\overline{G}$ *est non connexe.*

Théorème 5.1.2 *Un graphe sans* P_4 *est* $\chi^-_{d_e}$*-critique si et seulement si* $G = K_n$.

Preuve. Soit $G = (V, E)$ un graphe $\chi^-_{d_e}$-critique et soit c une coloration dynamique de G avec $\chi_d(G)$ couleurs.
D'après la Proposition 5.1.7, G est connexe et donc $\overline{G}$ est non connexe. Alors, $G = G_1 \vee G_2$ tel que G_1 et G_2 deux composantes connexes. D'après la Proposition 5.1.6, G est sans P_3, donc $G = K_n$. La condition suffisante est vérifiée d'après la Proposition 5.1.4. Ceci achève la preuve du Théorème. ■

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés principalement à la notion de la coloration r-dynamique dans les graphes. Plus précisément, nous nous sommes focalisés sur trois points importants.

D'abord, la détermination des valeurs exactes du nombre chromatique r-dynamique pour des classes particulières de graphes. D'abord, nous avons donné les valeurs exactes de nombre chromatique r-dynamique du graphe milieu et total d'une chaîne P_n avec $r \in \{3,4\}$, le nombre chromatique 3-dynamique du graphe milieu et total d'un cycle C_n et la valeur exacte de nombre chromatique dynamique du graphe milieu et total d'une couronne d'une chaîne $Cr(P_n)$. De plus, nous avons déterminé les valeurs exactes de nombre chromatique dynamique du book graphe $P_2 \square K_{1,n}$, nombre chromatique r-dynamique avec $r \in \{2,3\}$ du produit cartésien des étoiles $K_{1,n} \square K_{1,n}$, des graphes complets $K_n \square K_n$ et le produit totale des chaînes $P_n \boxtimes P_n$. Enfin, nous donnons les valeurs exactes de nombre chromatique r-dynamique avec $r \in \{2,3\}$ du graphe de Mycielski du graphe complet K_n, d'étoile $K_{1,n}$ et le nombre chromatique dynamique de graphe de Mycielski du roue W_n et de Fan graphe $F_{1,n}$.

Ensuite, l'étude du graphes χ_d-arête critiques. Nous avons défini les graphes critiques par rapport le nombre chromatique $\chi(G)$ et $\chi_d(G)$, c'est à dire les graphes G dont le nombre chromatique dynamique change lorsque G est modifier en supprimant un sommet ou une arête quelconques de G. Ensuite, au vu des résultats obtenus sur la différence entre $\chi_d(G)$ et $\chi_d(G-e)$ et entre $\chi_d(G)$ et $\chi_d(G-v)$ et les meilleures bornes possibles pour ces différences qui ont été étudiées par Miao dans [32], nous avons étudié et donné quelques résultats sur les graphes arête χ_d-critique et nous caractérisons les arbres et les graphes χ_d^--arête critiques.

Enfin, Établissement des bornes sur le nombre chromatique dynamique après la contraction d'une arête quelconque dans le graphe et nous déterminons quelques graphes atteignant ces bornes. En outre, nous caractérisons les arbres χ_{d_e}-critiques, c'est à dire les arbres T dont le nombre chromatique dynamique change lorsque T est modifier en contractant une arête quelconque de T.

Les travaux réalisés durant ce mémoire ouvrent plusieurs perspectives de travaux futurs. En effet, nous avons étudié la coloration r-dynamique de certaines graphes et son nombre chromatique r-dynamique n'a pas été complètement obtenu pour toutes les valeurs de r, nous les avons donc laissés comme problèmes ouverts pour une étude ultérieure. Aussi, au vu des résultats obtenus sur les graphes χ_d-arête critiques et χ_{d_e}-critiques, il est naturel de poursuivre l'étude de ce problème sur des graphes χ_d-sommet critiques et χ_{d_s}-critique,c'est à dire les graphes G dont le nombre chromatique dynamique change lorsque G est modifier en supprimant un sommet et subdivisant une arête quelconques de G .

Bibliographie

[1] I. H. Agustin, Dafik and A. Y. Harsya. On r-dynamic coloring of some graph operations. Indonesian Journal of Combinatorics 1(1)(2016), 22–30.

[2] A. Ahadi, S. Akbari, A. Dehghan, M. Ghanbari : On the difference between chromatic number and dynamic chromatic number of graphs. Discret. Math. 312, 2579–2583(2012).

[3] S. Akbari, M. Ghanbari, S. Jahanbekam. On the list dynamic coloring of graphs. Discret. Appl. Math. 157, 3005–3007(2009).

[4] S. Akbari, M. Ghanbari, S. Jahanbakam, . On the dynamic chromatic number of graphs. Combinatorics and Graphs. In : Contemporary Mathematics-American Mathematical Society, vol. 531, *pp*.11–18(2010).

[5] S. Akbari, M. Ghanbari, S. Jahanbakam. On the Dynamic Coloring of Cartesian Product Graphs. Combinatorics and Graphs. Department of Mathematical Sciences, Sharif University of Technology 1 – 6,2010.

[6] M. Alishahi. Dynamic chromatic number of regular graphs. Discret. Appl. Math. 160, 2098–2103(2012).

[7] K. Appel et W. Haken. Every planar map is four colorable : Part 1, discharging. Illinois. J. Maths., 21 : 429 – 490, 1977.

[8] K. Appel et W. Haken. Every planar map is four colorable : Part 2, reducibility. Illinois. J. Maths., 21 : 491 – 567, 1977.

[9] M. Behzad. A criterion for the planarity of the total graph of a graph. Proc. Camn.Philos. Soc. 63 : 679 – 681; (1967).

[10] C. Berge. *Graphs*. North Holland, 1985.

[11] J.A. Bondy, U.S.R. Murty. Graph Theory. Springer, 2008.

[12] N. Bowler, J. Erde, F. Lehner, M. Merker, M. Pitz, K. Stavropoulos. A counterexample to Montgomery's conjecture on dynamic colourings of regular graphs. Discret. Appl. Math. 229, 151–153(2017).

[13] R. Brooks. On coloring the nodes of a network. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 37 : 194 – 197, 1941.

[14] G. Chartrand, P. Zhang. Chromatic graph theoery. Discrete Mathematics and its Applications, Series Editor KENNETH H. ROSEN, CRC Press, 2009.

[15] A. Dehghan, A. Ahadi. Upper bounds for the 2-hued chromatic number of graphs in terms of the independence number. Discret. Math., 160, 2142–2146, (2012).

[16] C. Ding, S. Fan and H.-J. Lai. Upper bound on conditional chromatic number of graphs, J. of Jinan University 29 (2008), 7 – 14.

[17] G. A. Dirac. Note on the colouring of graphs.Math. Z.54 : 347 – 353, (1951).

[18] G. A. Dirac. Property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs. J. London,Math. Soc. 27 : 85 – 92, (1952).

[19] Louis Esperet. Dynamic list coloring of bipartite graphs, Discrete Applied mathematics 158 (2010), 1963 – 1965.

[20] Bo Ga,; Lei Sun, Huimin song, Hong-Jian Lai. On the difference between chromatic number and dynamic chromatic number of graphs without some subgraphs. Discret. Math. (2015).

[21] M. R. Garey, D. S., Johnson. Computers and Intractibility : A guide to the Theory of NP-completeness, W. H. Freman and Company, New York, 1979.

[22] T. Hamada, I. Yoshimura. Traversability and connectivity of the middle graph of a graph. Discrete. Math.14 : 247 – 256; (1976).

[23] V. Hermie, Inoferio1 Michael, P. Baldado Jr. r-dynamic chromatic number of cycles, complete graphs and forests 609 – 622; (2016).

[24] C.T. Hoàng. Perfect graphs, Ph.D. Thesis, School of Computer Science, McGill University, (1985).

[25] Sogol Jahanbekam, Jaehoon Kim, O. Suil, B. Douglas. On r-dynamic Coloring of Graphs. Last revised July, 2014.

[26] N. Ikhlef Eschouf. Etude de la b-coloration dans les graphes. Thèse de doctorat, 2012.

[27] T.R. Jensen, B. Toft. Graph Coloring Problems. JohnWiley and Sons, New York, 1994.

[28] H.-j. Lai, J. Lin, B. Montgomery, Z. Tao and S. Fan. Conditional colorings of graphs, Discret mathematics 306 (2006), 1997 – 2004.

[29] H.-j. Lai, B. Montgomery and H, Poon. Upper bounds of dynamic chromatic number, Ars Combinatoria 68 (2003), 193 – 201.

[30] H.-J. lai, and J.-L. Wu. On r-hued coloring of planar graphs with girth at least 6, Discret Appl. Math., 198(2016), 251 – 263.

[31] Xuehang Li, Xiangmei Yao, Wenli Zhou and Hajo Broersma. Complexity of conditional colorability of graphs, Applied Mathematics Letter 22 (2009), 320 – 324.

[32] Lian-Ying Miao, Hong-Jian Lai, Yan-Fang Guo, Zhengke Miao. Element deletion changes in dynamic coloring of graphs. Discrete Mathematics 339(2016), 1600–1604.

[33] N. Mohanapriya, J. Vernold Vivin, M. Venkatachalam. On dynamic coloring of fan graphs. Int. J. Pure Appl. Math. 106, 169–174(2016).

[34] N. Mohanapriya, J. Vernold Vivin, M. Venkatachalam. r-Dynamic chromatic number of Helm graph families. Cogent Math. 3(1), 1178411, 1–4(2016).

[35] B, Montgomery. Dynamic coloring of *Graphs*, Ph.D. Dissertation, West Virginia University, 2001.

[36] J. Mycielski. sur le coloriage des graphes. Colloquium Math. 3, 161 – 162(1955).

[37] E. A. Nordhaus, J. W. Gaddum. On complementary graphs. Ann. Math. Monthly, 63 : 175 – 177, 1956..

[38] A. Taherkhani. On r-dynamic chromatic number of graphs. Discret. Appl. Math. 201, 222–227(2016).

[39] J. Vernold Vivin, N. Mohanapriya, M. Johan Kok, Venkatachalam. On dynamic coloring of certain cycle-related graphs. Arabian Journal of Mathematics (2018).