Republique Algerienne Democratique et Populaire
Ministere de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique
Universite Dr. Yahia Fares de Medea
Faculte des Sciences
Departement de Mathematiques et de L'informatiques



MEMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHEMATIQUES

Spécialité : Recherche Opérationnelle

par
Amina NEDJOUM & **Imane BOUGUERROUMI**

Intitulé par :

L'ETUDE DE LA CONTRACTION D'UNE ARÊTE SUR LA DOMINATION STABLE D'UN GRAPHE.

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Président :	D. LAISSAOUI	*MCB*	*U.Y.F.M*
Directeur de mémoire :	K. TABLENNEHAS	*MAA*	*U.Y.F.M*
Examinatrice :	K. SERIER ABDALLAH	*MAA*	*U.Y.F.M*
Examinateur :	R. LEMDENI	*MAA*	*U.Y.F.M*

ANNEE UNIVERSITAIRE : 2018-2019

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui nous avons donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.En second lieu, nous tenons à remercier notre encadreur Monsieur TABLENNEHAS KAMEL, à ses précieux conseils et son aide durant toute la période du travail.

Nous remercions sincèrement Ms. D. LAISSAOUI, Ms. R.LEMDENI, et Mme. K. SERIER ABDALLAH d'avoir accépter de faire partie du jury ainsi que pour leurs conseils judicieux

Nous remercions également les membres du département de Mathématique et Informatique de nous avons permis de travailler dans de bonnes conditions pendant la réalisation de notre travail.

Merci également a tous les enseignants qui Aide nous pendant notre cursus, sans oublier leurs conseils précieux. Enfin, nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail particulièrement à mes chers parents, qui ont consacré leur existence à bâtir la mienne, pour leur soutien, patience et soucis de tendresse et d'affection pour tout ce qu'ils ont fait pour que je puisse arriver à ce stade.

A ma mère qui m'a encouragé durant toutes mes études, et qui sans elle, ma réussite n'aura pas en lieu. Qu'elle trouve ici mon amour et mon affection.

A mon père, qu'est toujours disponible pour nous, et prêt à nous aider, je lui confirme mon attachement et mon profond respect.

A mes frères : Oussama et Houssam Eddine.

A mes sœurs : Rabab, Kaouthar et ma petite brocoli Arwa.

A mon marré Mohamed Amine Bougherbal et à toute sa famille.

A ma grande famille, surtout mes cher oncle Ibrahim Zouatini, et n'oublie pas mon cousin Kamel Zouatini et sa petite famille(sa femme et son fils Abed Essamie).

A ma collègue Amina et à sa famille.

A mes amis : Samia, Sabrina, Zahra, ahlem, Chahinez, Amel, Hanane, Islah, Sabah.

Tout les proches que j'ai mentionnés et les autres que j'ai oubliés veuillez m'excuser.

Imane

Dédicace

Je dédie ma graduation à l'adorateur de l'ascète qui s'est moqué de tous ses pouvoirs pour que je puisse arriver à ce que je suis, mon père bien-aimé.

A la mer d'amour, de tendresse et de pouls qui vit dans mes veines et qui ne dort pas jusqu'à ce que Dieu appelle au succès, ma mère mon amour.

A mon honneur dans la vie et aux yeux de mes chères sœurs : Samira, Khadidja et Fatima.

A la montagne à laquelle je me suis confié aux tribulations de mes frères : Omar et Ibrahim.

A le petit oiseau Adam.

A mes grand-mères et mon grand-père.

A l'odeur de ma mère et d'un autre nom d'amour : Fadila, Hada et hanouna

A ma tante, je vous remercie du fond du cœur pour votre service constant.

Je remets mon diplôme à tous ceux qui ont une empreinte dans ma vie :Amel, Fatima, Sihem et son fils Louay, Amina, Somia et Hanan.

A tous ceux qui m'ont soutenu et m'ont souhaité du succès :Mhamed et khaled.

A ma collègue Imane et à sa famille

A tous mes amis surtout : Amina, Zineb, Ahlem, Chahinaz, Yasmina et Amel.

Tout les proches que j'ai mentionnés et les autres que j'ai oubliés veuillez m'excuser.

Amina

Table des matières

Résumé **VI**

Abstract **VII**

Introduction générale **I**

1 Notions fondamentales de la théorie des graphes **1**

1.1 Définitions et notations 1

1.2 Graphes particuliers 5

1.3 Quelques invariants de graphes 9

1.4 Concept de domination dans les graphes 11

1.5 Bornes sur le dominant stable $i(G)$ 12

2 Les différentes opérations sur les graphes **14**

2.1 Suppression d'un sommet 14

2.2 Suppression d'une arête 16

2.3 L'ajoute d'une arête 17

2.4 La subdivision 18

2.5 La contraction des arêtes 19

2.5.1 Nombre de domination par contraction 20

2.6 Graphe dynamique 20

3 Impacte de la contraction sur la domination stable d'un graphe. 22

3.1 Graphe μ-point critique. 22

3.2 L'effet de la contraction sur le nombre de domination γ 23

3.3 L'effet de la contraction sur le nombre de domination connexe γ_c 24

3.4 L'effet de la contraction sur le nombre de stabilité. 25

3.4.1 Les conditions pour qu'un graphe G est α-point critique. 27

3.4.2 Les graphes sans $k_{1,3}$ α-point critique 29

3.4.3 Les graphes sans triangle α-point critique 30

3.4.4 Le nombre de stabilité par contraction $Ct_\alpha(G)$ 31

3.5 L'effet de la contraction sur le nombre de domination stable 31

3.5.1 Les graphes i-point critique 32

3.5.2 Caractérisation des arbres 2-i-point critique. 33

3.5.3 Le nombre de domination stable par contraction $Ct_i(G)$ 33

Conclusion 35

Bibliographie 36

Table des figures

1.1 Représentation d'un sous graphe et graphe partiel à partir d'un graphe G. 3
1.2 Un graphe complet d'ordre 4 (K_4). 5
1.3 Un graphe complémentaire de K_4. 6
1.4 Exemple de graphe biparti et biparti complet $K_{3,2}$ 6
1.5 Un exemple d'un graphe 3-régulier. 7
1.6 Un exemple d'un graphe planaire. 7
1.7 Représentation de la couronne $G = C_4 \circ K_1$. 7
1.8 Représentation d'un arbre T. 8
1.9 Une étoile $K_{1,n}$. 8
1.10 Représentation d'un cactus graphe. 9

2.1 Un graphe G avant et après la suppression d'un sommet. 15
2.2 Un graphe G avant et après la suppression d'une arête. 16
2.3 Un graphe G avant et après l'ajoute d'une arête. 17
2.4 Un graphe G et leur subdivision. 19
2.5 La contraction de l'arête $e = bd$ dans le graphe G. 20
2.6 Exemple d'un graphe dynamique. 21

3.1 Un graphe biparti qui n'est pas α-point critique. 28

Résumé

Le but principal de ce mémoire est l'étude de l'effet de la contraction d'une arête sur le nombre de stabilité $\alpha(G)$ et le nombre de domination stable $i(G)$ d'un graphe.

Dans ce travail, nous commençons par donner les conditions nécessaires et suffisantes pour que un graphe est α-point critique, ainsi qu'une caractérisation de quelques graphes α-point critique à savoir les graphes sans $K_{1,3}$ et les graphes sans tringle, ensuite nous montrons que le nombre de domination stable par contraction noté $Ct_{\alpha}(G)$ est inférieur ou égale à deux.

Pour $\mu = i(G)$, nous montrons en premier lieu que la classe des graphe sans griffe 2-i-point critique est équivalent à la classe des graphes 2-γ-point critique. Dans le second, nous caractérisons les arbres 2-i-point critique.

Mots clés : Nombre de domination, la contraction d'une arête, graphe μ-point critique.

Abstract

The principal goal of this memory is the study of the effect of the contraction of rear ête on the number of stability $\alpha(G)$ and numbers it stable domination $i(G)$ of a graph.

In this work, we start by giving the conditions necessary and sufficient so that a graph is α-point critical, as well as a characterization of some graphs α-point critical with knowing the graphs without $K_{1,3}$ and the graphs without rod, then we show that the number of stable domination by contraction noted $Ct_{\alpha}(G)$ is lower or equal to two.

For $\mu = i(G)$, we show initially that the class of the graph without critical claw 2-i-point is equivalent to the class of the graphs 2-γ-point critical. In the second, we characterize the trees critical 2-i-point.

Key words : Number of domination, the contraction of an edge, graph μ-dot critical.

ملخص

الغرض الرئيسي من هذه المذكرة هو دراسة التطابق السائد في الرسم البياني.

في هذه المذكرة، نبدأ بإعطاء الشروط الضرورية والكافية ليكون الرسم البياني α-نقطة حرجة ، بالإضافة إلى وصف لبعض الرسوم البيانية النقدية α وهي الرسوم البيانية دون $K_{1,3}$ والرسوم البيانية بدون مثلث ، ثم نظهر أن عدد الهيمنة المستقلة بالتطابق نرمز لها $Ct_\alpha(G)$ أقل من أو يساوي اثنين.

بالنسبة إلى $\mu = i(G)$، نظهر أولاًأن فئة الرسوم البيانية بدون مخلب $i-2$ نقطة حرجة تعادل فئة الرسوم البيانية$2-\gamma$-نقطة حرجة. في الثانية ، نحن نميز الأشجار $2-i$-نقطة حرجة

Introduction générale

Ce mémoire s'inscrit dans le domaine de la théorie des graphes. La théorie de graphe est la branche des mathématiques concernée par la structure et les propriétés des graphes. Elle représente un moyen très utile et très efficace pour résoudre des problèmes discrets de la Recherche Opérationnelle. Ainsi, souvent trouvé dans nos vies quotidiennes, sans s'en rendre compte. Le problème appelé "problème des ponts de Koenigsberg" posé par Euler (voir [3]) est à l'origine de cette branche. Le problème consiste à déterminer s'il existe ou non une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque point, et de revenir à son point de départ. Les graphes constituent à la fois une théorie et un outil qui permettent de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude de graphe.

Un graphe est un dessin géométrique défini par deux ensembles : son ensemble de sommets et son ensemble d'arêtes, une arête étant une paire de sommets reliés. Il ne faut pas confondre un graphe et son dessin : un même graphe peut être dessiné de plusieurs façon. Les domaines d'applications des graphes sont diverses, justifiant une recherche importante, on peut citer : les réseaux de communication, la gestion de la production et les problèmes d'ordonnancement des tâches, les flots dans les réseaux, la chimie, la physique et en l'économie, etc...

La domination dans les graphes est considérée actuellement comme l'un des do-

maines les plus florissants de la théorie des graphes. il s'agit de trouver un ensemble de sommets d'un graphe qui satisfasse certaines conditions d'optimalité. Par exemples, si on impose à ce que le dominant soit un stable alors on a la domination stable.

Généralement les graphes ne sont pas stable, il existe plusieurs opérations sur les graphes. Parmi les opération qui existent, nous nous intéressons dans ce mémoire à la contraction des arête.

Après une introduction générale, ce mémoire est composée par quatre chapitres. Dans le premier chapitre nous rassemblons quelques définitions de base sur les graphes qui sont nécessaires pour les chapitres suivants.

Dans le deuxième chapitre nous étudions quelques opérations sur les graphes on donne des définitions et des résultats concernant ces opérations.

Le troisième chapitre est divisé en deux parties. La première partie est consacrée aux travaux entreprise par certains chercheurs concernant la contraction et ses variantes. Ensuite nous rappelons les principaux résultats existants sur la contraction des arêtes. Dans la deuxième partie, nous proposons notre travail sur l'impacte de la contraction sur la domination stable et nous déterminons quelque résultat qui nous avons trouvé.

Le mémoire s'achève par une conclusion générale sur l'ensemble des travaux réalisés et propose des perspectives de recherche.

Chapitre 1

Notions fondamentales de la théorie des graphes

Dans ce chapitre, nous introduisons d'abord les définitions de base de la théorie des graphes qui nous seront utilises tout au long de cette mémoire.

1.1 Définitions et notations

★ Graphes

Un graphe G est représenté par le couple (V,E) où :

V : est l'ensemble fini non vide des sommets.

E : est l'ensemble des d'arêtes qui sont des paires de sommets.

La seule difficulté potentielle réside dans la définition de l'ensemble des arêtes. Dans la définition, une arête est un élément de l'ensemble $V \times V$, ce qui signifie qu'une arête est un couple de sommets. Donc on a deux cas

Le première cas est que le couple (s_1, s_2), n'est pas la même chose que le couple (s_2, s_1). D'où les arêtes sont orientées, ce qui donne un graphe orienté.

Le deuxième cas est que entre deux sommets en peut trouver plusieurs d'arêtes, ce qui donne un graphe multiple.

Notation 1.1.1. *Le nombre de sommets et d'arêtes de G sont notés $n(G)$ et $m(G)$,*

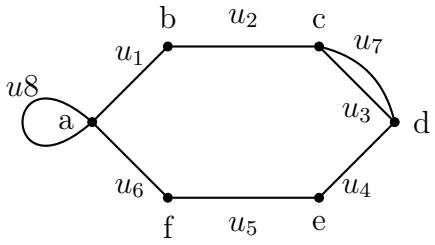
ces deux paramètres fondamentaux sont appelés l'ordre et la taille de G respectivement.

Une boucle est une arête d'un graphe ayant pour extrémités le même sommet.

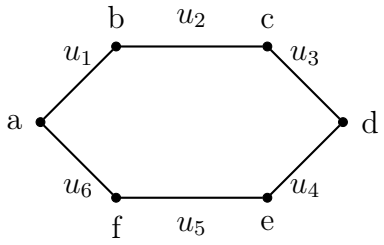
★ Graphe simple

Un graphe simple est un graphe sans boucle et toute paire de sommets est reliée par ou plus une arête.

Par exemple sur la figure (1.1)(a), le graphe H possède une boucle en u_8 et une arête multiple u_7 (il s'agit d'une arête double). Le graphe G donné en exemple sur la Figure (1.1)(b) ne possède pas de boucle ni d'arête multiple, donc G est un graphe simple, il est d'ordre 6 et a pour ensemble de sommets $V(G) = \{a,b,c,d,e,f\}$. Ce graphe est de taille 6 et a pour ensemble d'arêtes $E(G) = \{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6\}$.



(a) Un graphe H avec arête multiple et boucle.



(b) Un graphe G simple.

Dans toute la suite de ce document, nous considérerons uniquement des graphes sans boucle ni arête multiple, c'est-à-dire des graphes simples.

★ Voisinages

Pour un graphe G.

- Le voisinage ouvert d'un sommet u ; noté $N_G(u)$, est l'ensemble des sommets adjacents à u défini par : $N_G(u) = \{u \in (V(G)) : uv \in (E)\}$.
- Le voisinage fermé de u, noté $N_G[u]$,est défini par : $N_G[u] = N_G(u) \cup \{u\}$.
- Le voisinage ouvert d'un ensemble des sommets S est : $N_G(S) = \cup_{u \in S} N_G(u)$.
- Le voisinage fermé d'un ensemble des sommets S est : $N_G(S) = \cup_{u \in S} N_G[u]$.

- Le voisinage privé d'un sommet $v \in S$ par rapport à un ensemble S, noté $Pn[u, S]$ est l'ensemble des sommets du voisinage fermé de v qui n'ont pas d'autre voisin dans S $\left(i.e : pn[v, S] = \left\{u \in V(G) : N[u] \cap S = \{v\}\right\}\right)$.

★ Degré d'un sommet

Le degré d'un sommet u dans un graphe G noté $d_G(u)$ est le nombre d'arêtes incidentes à u, et donc $d_G(u) =\mid N_G(u) \mid$. Le degré maximum (resp minimum) d'un graphe G est noté $\Delta(G)$(resp $\delta(G)$) est défini comme le maximum (resp minimum) des degrés des sommets de G.

* Si le degré d'un sommet u égale 1, alors u est un sommet pendant.

* Si le degré d'un sommet u égale 0, alors u est un sommet isolé .

★ Sous-graphes et Graphes partiels

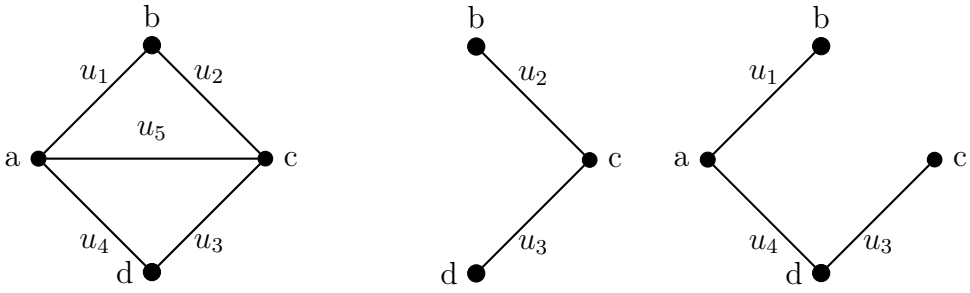
Soit G un graphe, H est un sous graphe de G si $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$.

On appelle graphe partiel un graphe obtenu en supprimant des arêtes au graphe initiale.

Par exemple la figure(1.1) représente

H un sous graphe de G, tel que : $V(H) = \{b, c, d\}$, $E(H) = \{u_2, u_3\}$.

H' un graphe partiel de G, tel que : $V(H') = \{a, b, c, d\}$, $E(H') = \{u_1, u_3, u_4\}$.



Graphe G. H :Sous-Graphe de G. H' :Graphe partiel de G.

FIGURE 1.1: Représentation d'un sous graphe et graphe partiel à partir d'un graphe G.

★ Chaînes et Cycles

Soit G=(V,E) un graphe simple.

Une chaîne joignant deux sommets x_0 et x_k dans un graphe G est une suite de sommets reliés par des arêtes tel que, deux sommets successifs ont une arête commune.

Un cycle est une chaîne simple dont les deux extrémités coïncident.

★ Distance

La distance entre deux sommets u et v d'un graphe G, notée $d_G(u, v)$, est la longueur d'une plus courte chaîne qui relie u à v. Si aucune chaîne ne relie u et v, on définit par convention $d_G(u; v) = \infty$.

★ Excentricité

L'excentricité d'un sommet u d'un graphe G, notée $e_G(u)$, est la plus grande des distances $d_G(u, v)$ où $v \in V(G)$, c'est-à-dire $e(u) = \max_{v \in V(G)} d_G(u, v)$.

★ Diamètre

L'excentricité maximum sur tous les sommets de G est appelée un diamètre de G et est notée $diam(G)$. En d'autres termes, $diam(G)$ représente la plus grande distance entre deux sommets quelconques de G.

★ Connexités et composantes connexes

Un graphe G=(V,E) est dite connexe si pour toute paire de sommets $x, y \in V$, il existe une chaîne relient x à y.

Remarque 1.1.1. *Si G n'est pas connexe, alors G admet des composantes connexe C_1,C_2,....,C_n.*

Une composante connexe d'un graphe G est un sous graphe connexe maximal de G.

★ Point d'articulation, isthme et bloc

Un point d'articulation d'un graphe est un sommet dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes.

Un isthme est une arête dont la suppression a le même effet.

On définie un bloc comme suit :

Un bloc d'un graph G contenant seulement un seul isthme s'appelle un bloc isolant de G.

1.2 Graphes particuliers

★ Graphe complet

Un graphe complet d'ordre n, noté K_n est le graphe simple dans lequel tous les sommets sont de degré $n-1$. Ainsi, deux sommets quelconque de K_n sont adjacents.

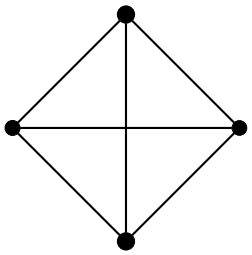


FIGURE 1.2: Un graphe complet d'ordre 4 (K_4).

★ Graphe complémentaire

Le graphe complémentaire de G=(V,E), noté $\overline{G}$=(V,$\overline{E}$), est le graphe dont l'ensemble des sommets est exactement V et l'ensemble des arêtes est l'ensemble complémentaire de E par rapport aux arête de la clique à $\mid V \mid$ sommet, c-à-d pour toute

$$e \in \overline{E} \Leftrightarrow e \in E(K_n) \backslash E.$$

Par exemple la figure(1.3) représente un graphe complémentaire du graphe qui est dans la figure(1.2).

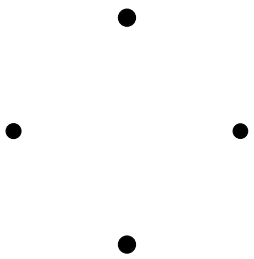
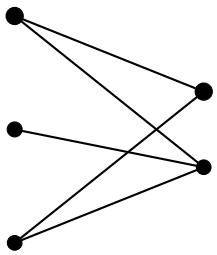


FIGURE 1.3: Un graphe complémentaire de K_4.

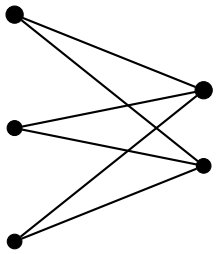
★ Graphe multipartie, biparti et biparti complet.

Un graphe G=(V,E) est multipartie si V peut être partitionné en k-parties stable. Si $k = 2$, alors le graphe est dit biparti(i.e : un graphe G=(V,E) est biparti si V peut être partitionné en deux ensembles disjoints A et B tels que $V = A \cup B$, uv est une arête de G si et seulement si $u \in A$ et $v \in B$ ou $v \in A$ et $u \in B$).

Un graphe biparti complet et un graphe biparti telle que chaque sommet de A est relié à chaque sommet de B.



un Graphe biparti.



un graphe biparti complet $K_{3,2}$.

FIGURE 1.4: Exemple de graphe biparti et biparti complet $K_{3,2}$

★ Graphe régulier

Un graphe G=(V,E)est dit d-régulier si tous ses sommets sont de degré d (i.e $\forall x \in V, d_G(x) = d$).

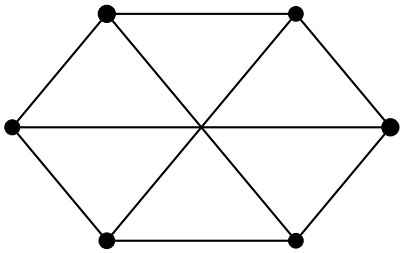


FIGURE 1.5: Un exemple d'un graphe 3-régulier.

★ Graphe planaire

Un graphe est dit planaire si on peut le représenter dans le plan de telle sorte que ses arêtes ne se croisent pas.

A partir de graphe de la figure(1.2) on peut construire un graphe planaire Comme indiqué dans la figure(1.6).

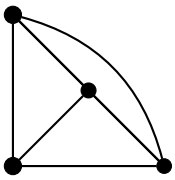


FIGURE 1.6: Un exemple d'un graphe planaire.

★ La couronne

La couronne de $G = (V, E)$, c'est le graphe $G = H \circ K_1$ obtenu d'une copie de G en attachant à chaque sommet de G un nouveau sommet. Il est à noter que l'ordre de $G = H \circ K_1$ est de $2|V|$.

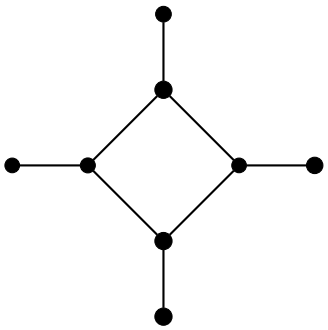


FIGURE 1.7: Représentation de la couronne $G = C_4 \circ K_1$.

★ Arbre

Un arbre est un graphe connexe sans boucle et sans cycle.

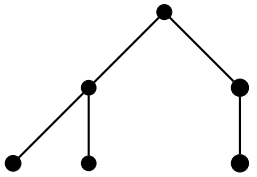


FIGURE 1.8: Représentation d'un arbre T.

★ Étoile

Une Ètoile $K_{1,n}$ est un arbre à $n+1$ sommets ayant n sommets pendants.

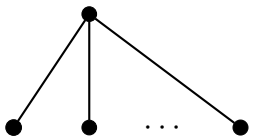


FIGURE 1.9: Une étoile $K_{1,n}$.

★ Forêt

Une forêt est un graphe sans cycle, ou chaque composante connexe est un arbre.

★ Galaxie

Une galaxie est une forêt dans laquelle chaque composant est une étoile.

★ Cactus

Une cactus est un graphe, où toute arête appartient à au plus un cycle. Un graphe contenant un seul cycle est appelé un unicycle.

Par exemple le graphe de la Figure (1.10), est un cactus graphe ayant trois cycles différents.

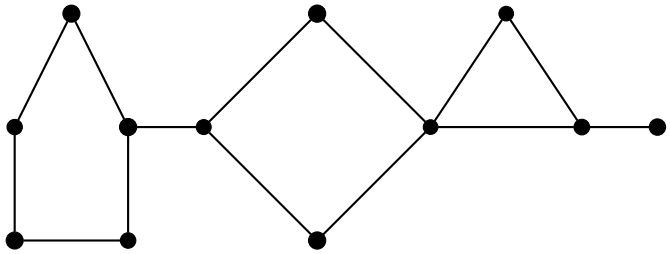


FIGURE 1.10: Représentation d'un cactus graphe.

1.3 Quelques invariants de graphes

Soit G un graphe simple.

★ Nombre de transversalité

Un transversal T dans un graphe G est un sous-ensemble de sommets de G tel que pour toute arête e de T, $\exists v \in T$, tel que v est une extrémité de e.

Le nombre de transversalité $\tau(G)$ de G est le cardinal minimal d'un transversal dans G :

$$\tau(G) = min\{|T| : T \quad est \quad un \quad transversal \quad de \quad G\}.$$

★ Nombre de clique

Une clique K dans un graphe G est un sous-graphe de G tel que K est un graphe complet.

Le nombre de clique $\omega(G)$ de G est le cardinal maximal d'une clique dans G :

$$\omega(G) = max\{|K| : K \quad est \quad une \quad clique \quad de \quad G\}.$$

★ Ensemble stable

Soit G un graphe simple connexe.

Ensemble stable(ou ensemble indépendant) S : sous-ensemble de sommets de G non reliés deux à deux.

$$S \cap N(S) = \varnothing.$$

Remarque 1.3.1. *Si G n'est pas connexe, alors on définie un ensemble stable S de G comme étant l'union des ensemble stable de chaque composante.*

On noté par $S_i, i = 1..n$ les ensembles stable de chaque composante connexe.

$$S = \{\cup S_i, i = 1..n\}.$$

★ Nombre de stabilité

La cardinalité d'un stable maximum est appelée nombre de stabilité (ou nombre d'indépendance), et notée $\alpha(G)$.

$$\alpha(G) = max\{|S| : S \quad est \quad un \quad stable \quad de \quad G\}.$$

La taille d'un stable maximum de G, et celle d'une clique maximum est notée $\omega(G)$. Naturellement, on a $\alpha(G) = \omega(G)$.

★ Quelques résultats concernant la stabilité

Dans ce partie on donne quelques théorèmes concernant la stabilité.

Proposition 1.3.1. *(Berge[5]1962). Soit G=(V, E) un graphe simple. Alors*

1. *Un stable S est maximal si et seulement si il est dominant.*
2. *Tout stable maximal est un dominant minimal.*

Théorème 1.3.1. *(Berge[10] 1960). Pour tout graphe G d'ordre n ; de degré maximum Δ, on a : $\alpha(G) \geq \frac{n}{1+\Delta}$.*

Théorème 1.3.2. *(Wei[6] 1960). Pour tout graphe G, on a :*

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{n}{1 + d_G(v)}.$$

Proposition 1.3.2. *[6]. Si G est un graphe biparti d'ordre n, alors*

$$\alpha(G) \geq \frac{n}{2}.$$

Corollaire 1.3.1. *Si G est régulier, alors $\alpha(G) = \frac{n}{2}$ si et seulement si G est biparti.*

Théorème 1.3.3. *(Gallai [11] 1959) Soit G un graphe simple d'ordre n. Alors*

$$\alpha(G) + \tau(G) = n.$$

1.4 Concept de domination dans les graphes

★ Ensemble dominant

Soit G=(V,E) un graphe simple, un sous-ensemble des sommets $D \subseteq V$ de G est dit ensemble dominant si tout sommet de $V - S$ est adjacent à ou moins un sommet de D. Le cardinal minimum(resp maximum) d'un ensemble dominant de G, noté $\gamma(G)$(resp $\Gamma(G)$), est appelé nombre de domination. Un ensemble dominant S de cardinal $\gamma(G)$ est appelé $\gamma(G)$-ensemble ou simplement γ-ensemble.

★ Dominant stable

Un ensemble dominant stable d'un graphe G est un ensemble dominant dont le sous-graphe induit est un stable. Le cardinal minimum(resp maximum) d'un ensemble dominant stable de G, noté $i(G)$(resp $\beta(G)$), est appelé nombre de domination stable de G.

★ Dominant connexe

Un ensemble dominant connexe d'un graphe G est un ensemble dominant dont le sous-graphe induit est connexe. Le cardinal minimum d'un ensemble dominant connexe de G, noté $\gamma_c(G)$, est appelé nombre de domination connexe.

★ Dominant total

Un ensemble dominant total S d'un graphe G est un ensemble dominant dont le sous-graphe induit par S ne contient pas de sommets isolés. Le nombre de domination total, noté $\gamma_t(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant total de G.

★ L'irrédondance

Définition

Un ensemble $S \subset V$ est dit irrédondant si pour tout sommet $x \in S$, on a :
$pn[x, S] = N_G[x] - N[S - \{x\}] \neq \varnothing$ c'est à dire chaque sommet de S possède un voisinage privé relatif à S.

Définition

Soit G un graphe. Un ensemble irrédondant S de G est maximal si pour tout sommet x de $V - S$, $S \cup \{x\}$ n'est pas un irrédondant. Le nombre d'irrédondance inférieur $ir(G)$ (resp le nombre d'irrédondance supérieur $IR(G)$) est le cardinale minimum (resp maximum) d'un irrédondant maximal de G.

1.5 Bornes sur le dominant stable $i(G)$

Nous avons déjà mentionné la définition d'un dominant stable minimum, définis comme étant un sous ensemble $S \in V$ est un dominant et S est un stable.

On désigne par $\gamma(G)$ la taille d'un dominant minimum, appelée nombre de domination de G. Le lien avec le stable maximum est illustré par les propositions suivantes : On note à présent $i(G)$ la cardinalité minimum d'un stable maximal. D'après ce qui précède, on a :

Proposition 1.5.1. *[12] Pour tout graphe G,*

$$ir(G) \leq \gamma(G) \leq i(G) \leq \alpha(G) \leq \Gamma(G) \leq IR(G).$$

Théorème 1.5.1. *[5] Si G est un graphe d'ordre n et de degré maximum Δ, alors :*

$$i(G) \leq n - \Delta.$$

Théorème 1.5.2. *[5] Si G est un graphe sans griffe $K_{1,3}$, alors*

$$i(G) = \gamma(G).$$

Théorème 1.5.3. *[1] Si G est un graphe d'ordre $k \geq 2$ ne contient pas un étoile $K_{1,k+1}$, alors*

$$i(G) \leq \gamma(G)(k-1) - (k-2).$$

Nous donnons la définition d'un dominant parfait comme suit :

Définition 1.5.1. *Un ensemble S est dit un dominant parfait si S est un dominant et chaque sommet de $V - S$ admet exactement un seul voisin dans S.*

Corollaire 1.5.1. *[1] Un graphe G est un dominant parfait si $\gamma(H) = i(H)$ pour tout sous graphe induit H de G avec $\gamma(H) = 2$.*

Théorème 1.5.4. *[1] Si G un graphe sans sommet isolé, alors :*

$$i(G) \leq n - \gamma(G) + 1 - \left\lceil \frac{n - \gamma(G)}{\gamma(G)} \right\rceil.$$

Théorème 1.5.5. *[5] Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 2$ ayant l sommets pendants, alors*

$$i(G) \leq \frac{n + l(T)}{3}.$$

Chapitre 2

Les différentes opérations sur les graphes

La plupart des graphes ne sont pas fixes. Au contraire, ils évoluent au cours du temps : des sommets et/ou des arêtes apparaissent et disparaissent. Cette dynamique joue un rôle essentiel dans de nombreux opérations.

En utilisant des acronymes suivants pour désigner la classe des graphes(C : changement, U : pas de changement, V : sommet, E : arête, R : suppression, A : addition). Soit G=(V,E) un graphe simple et $e \in E$.

2.1 Suppression d'un sommet

Soit $G_{-v} = (V_{-v}, E_{-v})$ le graphe obtenu à partir de G en supprimant un sommet v de G avec :

$V_{-v} = V - \{v\}$ l'ensemble des sommets de G_{-v}.

$E_{-v} = E - \Big\{(xv) \in E : x \in N(v)\Big\}$ l'ensemble des arête de G_{-v}.

Par exemple la FIGURE (2.1) représente un graphe avant et après la suppression de sommet v, tel que $V_{-v} = \{x, u, v, w\} - \{v\}$, et $E_{-v} = \{xu, uv, vw, wx, xv\} - \{uv, xv, wv\}$.



FIGURE 2.1: Un graphe G avant et après la suppression d'un sommet.

On distingue deux classe

— La classe (CVR) : représente la classe des graphes qui vérifie

$\gamma(G-v) \neq \gamma(G) \quad \forall v \in V(G)$.

— La classe (UVR) :représente la classe des graphes qui vérifie

$\gamma(G-v) = \gamma(G) \quad \forall v \in V(G)$.

Pour ce dernier, c'est utile de définir les ensembles suivants :

$V = V^+ \cup V^- \cup V^0$ tel que

$V^+ = \{\gamma(G-v) > \gamma(G) \quad \forall v \in V(G)\}$.

$V^- = \{\gamma(G-v) < \gamma(G) \quad \forall v \in V(G)\}$.

$V^0 = \{\gamma(G-v) = \gamma(G) \quad \forall v \in V(G)\}$.

Remarque 2.1.1. *[1] La suppression d'un sommet de G peut augmenter $\gamma(G)$ de plus un, mais elle peut diminuer le nombre de domination pas plus qu' un.*

Par exemple la suppression de sommet centre de l'étoile $K_{1,n-1}$ augmente le nombre de domination par $n-2$. La suppression du sommet pendent diminue le nombre de domination par un.

Théorème 2.1.1. *[1] Si un graph G sans sommet isolé v tels que le sous-graphe induit par $N(v)$ est complet, alors $\gamma(G-v) = \gamma(G)$.*

Théorème 2.1.2. *[1] Si un graphe $G \in CVR$ d'ordre $n = (\Delta(G)+1)(\gamma(G)-1)+1$, alors G est régulier.*

Théorème 2.1.3. *[1] Si un graphe $G \in CVR$ avec $\gamma(G) \geq 2$, alors*

$diam(G) \leq 2(\gamma(G) - 1)$.

Théorème 2.1.4. *[7] Un graphe $G \in CVR$ si et seulement si chaque bloc de G est CVR.*

Théorème 2.1.5. *[1] Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 2$, il existe un sommet $v \in V$ tel que : $\gamma(T - v) = \gamma(T)$.*

2.2 Suppression d'une arête

On note par $G_{-e} = (V_{-e}, E_{-e})$ le graphe obtenu à partir de G en supprimant l'arête e de G avec :

$V_{-e} = V$ l'ensemble des sommets de G_{-e}.

$E_{-e} = E$-$\{e\}$ l'ensemble des arête de G_{-e}.

Dans la FIGURE (2.2) on a un graphe G avant et après la suppression de l'arête u_4, tel que $V_{-e} = \{a, b, c, d\}$, et $E_{-e} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$-$\{u_4\}$.



FIGURE 2.2: Un graphe G avant et après la suppression d'une arête.

Dans ce cas on a deux classes

— La classe (CER) : c'est la classe des graphe qui vérifie

$\gamma(G - e) \neq \gamma(G) \quad \forall e \in E(G)$.

— La classe (UER) : c'est la classe des graphe qui vérifie

$\gamma(G - e) = \gamma(G) \quad \forall e \in E(G)$.

On définie E comme suit : $E = E^+ \cup E^0$, tels que :

$E^+ = \{\gamma(G-e) > \gamma(G) \quad \forall e \in E(G)\}$.

$E^0 = \{\gamma(G-e) = \gamma(G) \quad \forall e \in E(G)\}$.

Remarque 2.2.1. *La suppression d'une arête ne fait pas diminuer le nombre de domination(i.e : $E^- = \varnothing$).*

Théorème 2.2.1. *[1] G un graphe dans la classe (CER) si et seulement si G est un galaxie.*

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple connexe.

Théorème 2.2.2. *[1] Un graphe $G \in UER$ si et seulement si pou tout $e = uv \in E$, il existe un γ-ensemble S tel que l'un de ces conditions suivantes sont vérifiées :*

a) $u, v \in S$.

b) $u, v \in V - S$.

c) $u \in S$ et $v \in V - S$ implique que $|N(v) \cap S| \geq 2$.

2.3 L'ajoute d'une arête

L'ajoute d'une arête e dans G donne un graphe $G_{+e} = (V_{+e}, E_{+e})$, tel que :

$V_{+e} = V$ et $E_{+e} = E \cup \{e\} \quad \forall e \in \overline{G}$.

La FIGURE (2.3) représente un graphe G avant et après l'ajoute de l'arête u_5, tel que : V_{+e}=$\{a, b, c, d\}$, et E_{+e}=$\{u_1, u_2, u_3, u_4\} \cup \{u_5\}$,$\forall u_5 \in \overline{C_4}$.



FIGURE 2.3: Un graphe G avant et après l'ajoute d'une arête.

Donc on définie deux classes qui vérifiant :

— la classe (CEA) : c'est la classe des graphe qui vérifie

$\gamma(G+e) \neq \gamma(G) \quad \forall e \in E(\overline{G})$.

— La classe (UEA) : c'est la classe des graphe qui vérifie

$\gamma(G+e) = \gamma(G) \quad \forall e \in E(\overline{G})$.

On peut partitionné E en deux sous-ensembles $E = E^- \cup E^0$, tels que :

$E^- = \{\gamma(G+e) < \gamma(G) \quad \forall e \in E(\overline{G})\}$.

$E^0 = \{\gamma(G+e) = \gamma(G) \quad \forall e \in E(\overline{G})\}$.

Remarque 2.3.1. *L'ajoute d'une arête ne fait pas augmenter le nombre de domination(i.e : $E^+ = \varnothing$).*

Théorème 2.3.1. *[1] Si G un graphe connexe dans la classe (CEA), alors le sous-graphe induit par V^0 est un graphe complet.*

Théorème 2.3.2. *[1] G un graphe dans la classe(UEA)si et seulement si V^- est vide.*

2.4 La subdivision

La subdivision d'une arête $uv \in E$ de G conduit à un graphe contenant un nouveau sommet w, où l'on remplacée l'arête uv par deux nouvelles arêtes uw et wv.

Cette opération produit d'un nouveau graphe G_{sub}=(V_{sub}, E_{sub}), tel que :

$V_{sub} = \{V \cup \{w\}\}$.

$E_{sub} = (E \setminus uv) \cup \{uw, wv\})$.

Par exemple dans la FIGURE (2.4) on a subdiviser l'arête ad de G, on obtient un nouveau graphe G_{sub} avec V_{sub}=$\{a,b,c,d,e,f,g\} \cup \{w\}$, et $E_{sub} = \{ab, ac, ad, ae, af, ag \setminus ad\} \cup \{aw, wd\}$.



FIGURE 2.4: Un graphe G et leur subdivision.

Le nombre de la subdivision de domination noté $sd_{\gamma(G)}$ est le nombre minimum des arête qui doivent être subdivisés (chacun d'une arête dans G peut être subdivisé tout au plus une fois) afin d'augmenter le nombre de domination.

Théorème 2.4.1. *[4] Pour tous graphe connexe G et arête reliés (u, v), où $d_G(u) \geq 2$ et $d_G(v) \geq 2$, on a : $sd_{\gamma(G)} \leq d_G(u) + d_G(v) - 1$.*

Corollaire 2.4.1. *[4] Pour tout graphe G k-régulier, où $k \geq 2$*

$$1 \leq sd_{\gamma(G)} \leq 2k - 1.$$

Proposition 2.4.1. *[4] Si G est un graphe d'ordre $n \geq 3$ et $\gamma(G) = 1$, alors $sd_\gamma(G) = 1$.*

Théorème 2.4.2. *[4] Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 3$, on a : $1 \leq sd_\gamma(G) \leq 3$.*

Théorème 2.4.3. *[4] Si G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$, alors*

$$sd_\gamma(G) \leq \gamma(G) + 1.$$

2.5 La contraction des arêtes

Définition

Soit un graphe G=(V, E), et $uv \in E$. La contraction de uv est l'opération qui consiste à transformer G en un graphe G_{uv}. Aussi, on note par $w = \overline{uv}$ le nouveau sommet obtenu. Donc le graphe G_{uv} est obtenu à partir de G en supprimant les sommets

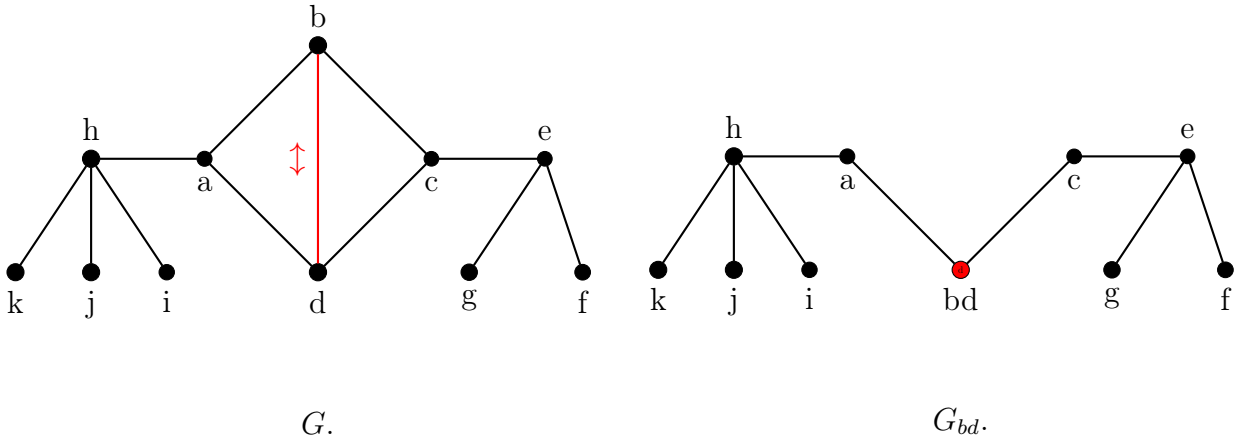
u et v et en ajoutant le sommet w qui est adjacent à tous les sommets adjacents à u ou v.

Le graphe G_{uv} est un graphe (V_{uv}, E_{uv}) avec :

$V_{uv} = \Big\{V \setminus (\{u, v\} \cup \{w\})\Big\}$.

$E_{uv} = \{xy \in E : \{xy\} \cap \{u, v\} = \varnothing\} \cup \{wz : z \in (N_G(u) \cap N_G(v)) - \{u, v\}\}$.

Par exemple la FIGURE (2.5) représente un graphe après et avant la contraction d'une arête bd, tel que : $n(G) = 11$ et $m(G) = 12$, $n(G_{bd}) = 10$ et $m(G_{bd}) = 9$.



G. G_{bd}.

FIGURE 2.5: La contraction de l'arête $e = bd$ dans le graphe G.

2.5.1 Nombre de domination par contraction

Étant donné un paramètre de domination μ d'un graphe G, on défini le nombre de domination par contraction d'un graphe G connexe, noté $Ct_\mu(G)$ comme étant le nombre minimum d'arêtes à contracter successivement pour faire diminuer le nombre de domination $\mu(G)$.

2.6 Graphe dynamique

Définition 2.6.1. *Soit $G_t = (X_t, E_t)$ où :*

- *X_t ensemble de sommets à l'instant t.*
- *E_t ensemble d'arêtes (ou d'arcs) à l'instant t.*

Définition 2.6.2. *Soit* $G_t = (X_t, E_t)$.

$G_{t+1} = G_t \pm \{sommets,\ arêtes\} + \{subdivition, contraction\}$.

Exemples : Dans cet exemple on transforme le graphe G_t à un graphe G_{t+1}, on fait une modification sur les arêtes : +(ac), -(bc), -(ab).



FIGURE 2.6: Exemple d'un graphe dynamique.

Chapitre 3

Impacte de la contraction sur la domination stable d'un graphe.

Dans la première partie, nous avons commencer par définir les concepts de criticité, ainsi nous faisons voir les principaux résultats existants sur le nombre de domination et nombre de domination connexe. Dans la deuxième partie, nous commençons par présenter quelques résultats obtenus sur nombre de stabilité et nombre de domination stable.

Ces résultats concernent un seul type d'opération : la contraction d'une arête.

Résultats préliminaires

3.1 Graphe μ-point critique.

Définition

Soit μ un paramètre de domination d'un graphe G. Un graphe est dit μ-point critique si et seulement si $\mu(G_{uv}) < \mu(G)$, où G_{uv} est le graphe obtenue par la contraction d'une arête uv.

3.2 L'effet de la contraction sur le nombre de domination γ

Définition 3.2.1. *Soit G un graphe simple.*

G est dit γ-point critique si et seulement si $\gamma(G_{uv}) < \gamma(G)$.

Définitions

Soit G=(V, E) un graphe et soit $\mu \in \{ir, \gamma, i, \Gamma, \alpha, IR, \gamma_c ...\}$.

- Un sommet v de G est dit $\mu(G)$-bon ($\mu(G)$-good) s'il existe un μ-ensemble qui le contient.

- On dit que G est μ-excellent si tout les sommets de G sont excellents.

Théorème 3.2.1. *[2] Pour tout graphe G.*

Si G est γ-point critique, alors G est γ-excellent.

Définitions[2]

- Un sommet critique dans un graphe est un sommet dont la suppression diminue le nombre de domination.

- Un graphe G est γ-sommet critique si tout sommet de G est critique.

- N' est un ensemble des sommets critiques de G.

- A' et B' sont des ensembles de sommets critiques de A et B respectivement.

Théorème 3.2.2. *[2] Soit A et B deux graphes disjoints avec $\gamma(A) = n$, $\gamma(B) = m$ et a,b deux sommets critiques de A et B respectivement. Soit G le graphe obtenu on identifient les sommets a et b. Alors*

1) $\gamma(G) = n + m - 1$.

2) $N' = (A' \cup B' - \{a, b\}) \cup \{(ab)\}$.

3) G est γ-point critique si et seulement si A et B sont γ-sommet critique.

Théorème 3.2.3. *[2] Un graphe 2-γ-points critique n'a pas de sommets critiques si et seulement s'il est multipartie complet avec chaque partie contenant au moins trois sommets.*

Théorème 3.2.4. *[2] Soit G un graphe d'ordre $n \geq 4$, avec $\gamma(G) = 2$. G est 2-γ-point critique si et seulement si $\overline{G}$ n'est pas complet et chaque composante de $\overline{G}$ est soit une couronne ou un graphe complet K_p, $p \geq 2$.*

Théorème 3.2.5. *[2] Si G est un graphe connexe 3-γ-points critique avec $N' = \varnothing$, alors $diam(G) \leq 3$.*

3.3 L'effet de la contraction sur le nombre de domination connexe γ_c

Définition 3.3.1. *Soit G un graphe simple. G est dit γ_c-point critique si et seulement si $\gamma_c(G_{uv}) < \gamma_c(G)$.*

Observation[8] Soit G un graphe connexe et u, v deux sommets de G.
Si $uv \in E$, alors $\gamma_c(G) - 1 \leq \gamma_c(G_{uv}) \leq \gamma_c(G)$.

Théorème 3.3.1. *[8] Soit G un cactus connexe. G est un graphe critique pour le cdd-critique si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

(a) Tout sommet de support appartenant à un cycle de G a le degré trois, et chaque sommet de support qui n'appartient à aucun cycle a un degré deux.

(b) Pour toute cycle C de G, l'ensemble $A_C = \{x \in C : d_G(x) = 2\}$ a une taille différente de 1 et

(i) Si C contient un sommet de support, alors A_C est un ensemble indépendant et en outre si $|A_C| \geq 2$, alors chaque sommet de support de C est adjacente à un sommet de A_C.

(ii) Si C ne contient aucun sommet support, alors le sous-graphe induit par A_C a zéro ou au moins deux arêtes.

Théorème 3.3.2. *[8]*

Soit G un graphe connexe avec $\gamma_c(G) = 2$. G est de domination connexe point critique si et seulement si G est domination point critique.

Théorème 3.3.3. *[8] Soit G un graphe connexe avec $\gamma_c(G) = 2$. Alors G est totalement connecté, domination du point critique si et seulement si G est totalement domination du point critique.*

3.4 L'effet de la contraction sur le nombre de stabilité.

Définition 3.4.1. *Soit $G=(V, E)$ un graphe simple connexe et uv une arête de E. G est α-point critique si et seulement si $\alpha(G_{uv}) < \alpha(G)$.*

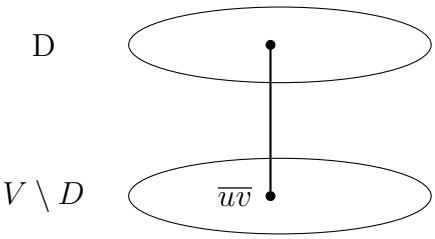
Proposition 3.4.1. *Soit $G=(V, E)$ un graphe simple et $uv \in E$. S est un stable maximum de G.*

On a : $\alpha(G) - 1 \leq \alpha(G_{uv}) \leq \alpha(G)$.

Preuve. 1) Nous montrons que $\alpha(G) \geq \alpha(G_{uv})$.

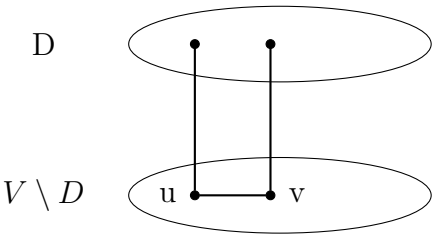
Soit D un α-ensemble de G_{uv} $\Big(i.e : |D| = \alpha(G_{uv})\Big)$ et soit $\overline{uv}$ un sommet obtenu en contractant l'arête $uv \in E$.

Cas 1 $\overline{uv} \in V \setminus D$



- Si $uv \in V \setminus D$, alors D reste un α-ensemble de G. Par conséquent $\alpha(G) \geq |D| = \alpha(G_{uv})$.

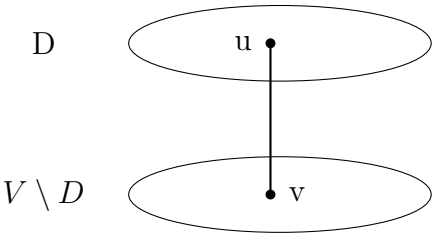
D'où le résultat $\alpha(G_{uv}) \leq \alpha(G)$.



- Si $u \in D$ *et* $v \in V \setminus D$

Soit D' un α-ensemble de G, alors $|D'| \geq |D|$

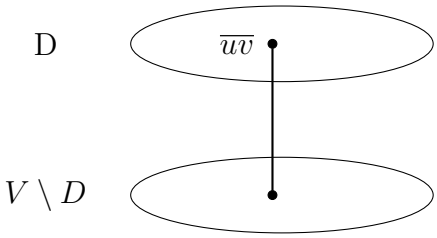
D'où le résultat $\alpha(G_{uv}) \leq \alpha(G)$.



Cas 2 $\overline{uv} \in D$.

Dans ce cas $uv \notin D$ car D est un α-ensemble de G_{uv}. Donc D reste un α-ensemble de G. Par conséquent $\alpha(G) \geq |D|$.

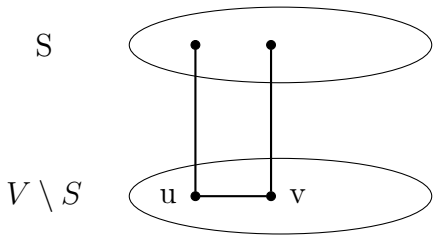
D'où le résultat $\alpha(G_{uv}) \leq \alpha(G)$.



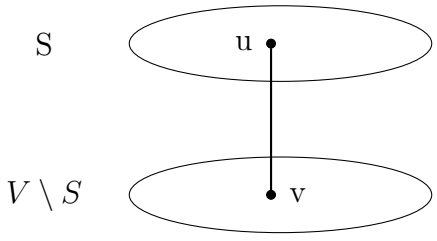
2) Montrons que $\alpha(G) - 1 \leq \alpha(G_{uv}$. Soit S un α-ensemble de G, et $uv \in E$.

Cas 1 $uv \in V \setminus S$ Comme u et $v \in V \setminus S$, alors u et v sont adjacents à au moins un sommet dans S. Donc il est claire que $\overline{uv} \notin S$ car si $\overline{uv} \in S$, alors S ne doit pas un α-ensemble de G. Par conséquent S reste un α-ensemble de G_{uv}.Alors $\alpha(G_{uv}) \geq |S| = \alpha(G)$.

D'où le résultat $\alpha(G_{uv}) \geq \alpha(G) - 1$.

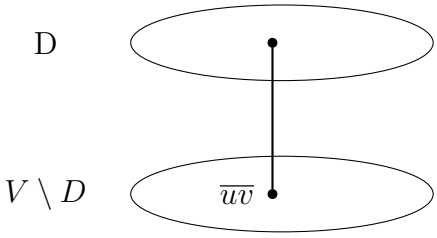


Cas 2 $u \in S, v \in V \setminus S$.



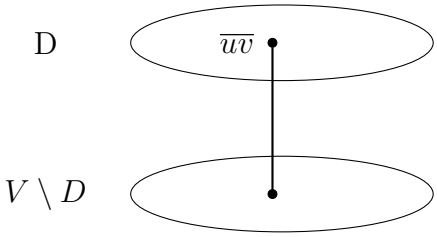
• Si $\overline{uv} \in V \setminus D$ tel que D est α-ensemble de G_{uv}, où $D = S - u$. Donc on obtient $\alpha(G_{uv}) \geq |S| - 1$.

D'où le résultat $\alpha(G_{uv}) \geq \alpha(G) - 1$.



- Si $\overline{uv} \notin V \setminus D$, alors $D = (S - \{u\}) \cup \{\overline{uv}\}$est α-ensemble de G_{uv}.

Par conséquent $\alpha(G_{uv}) \geq |D| = \alpha(G)$. D'où le résultat $\alpha(G_{uv}) \geq \alpha(G) - 1$.



□

Observation

Si G est α-point critique, alors : $\alpha(G_{uv}) = \alpha(G) - 1, \forall uv \in E$.

3.4.1 Les conditions pour qu'un graphe G est α-point critique.

Soit G un graphe simple connexe et soit uv une arête de E.

Théorème 3.4.1. *Pour tout stable maximum S du graphe G, G est α-point critique si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *$V \setminus S$ est un stable.*
2. *$\forall u \in V \setminus S$: $d_G(u) \geq 2$.*

Preuve. $\Rightarrow$) On suppose que G est α-point critique et on montre que

1) $V \setminus S$ est stable.

Soit S un α-ensemble de G. Supposons que $uv \in V \setminus S$. Donc S reste un α-ensemble de G_{uv}. Par suite $\alpha(G_{uv}) = |S| = \alpha(G)$. Contradiction le fait que G est α-point critique. Par conséquent $G[V \setminus S]$ est sans arêtes. D'où $V \setminus S$ est un stable.

2) $\forall u \in V \setminus S : d_G(u) \geq 2$

Soit $u \in V \setminus S$ et $d_G(u) = K$ par conséquent $N(u) = k$. Soit $v \in N(u)$, donc $v \in S$.

- Si $d_G(u) = 1$, alors v est le seul voisin de u dans S. donc S reste un α-ensemble de G_{uv}. Contradiction.
- Si $d_G(u) \geq 2$.

Dans ce cas u à au moins deux voisin v et w dans S, alors la contraction de uv(où uw) résulte un nouveau sommet qui est dans $V \setminus S$. Car si est dans S, alors S ne doit pas être un stable. Donc $D = S - \{u\}$ est α-ensemble de G_{uv}(où G_{uw}).

Par conséquent $\alpha(G_{uv}) < \alpha(G)$. D'où le résultat $\forall u \in V \backslash S : d_G(u) \geq 2$.

Soit S un stable maximum de G et soit $un \in E$ tel que $v \in S$ et $u \in V \setminus S$.

$\Leftarrow\big)$ On suppose que $V \setminus S$ est stable et $\forall u \in V \setminus S \quad d_G(u) \geq 2$ sont vérifiées et on montre que G est α-point critique.

Soit S un α-ensemble de G_{uv}. Par l'absurde. On suppose que G n'est pas α-point critique, donc

$$\alpha(G_{uv}) > \alpha(G). \tag{3.1}$$

Cas 1 $\overline{uv} \in V \setminus S$ tel que $\overline{uv}$ le sommet obtenu en contractant l'arête uv de E.

- Si $uv \in V \setminus S$, alors $V \setminus S$ n'est pas stable. Contradiction.
- Si $uv \notin V \setminus S$ (i.e $u \in S \quad et \quad v \in V \setminus S$), et soit S' un α-ensemble de G tel que $S' = S \cup \{u\}$, alors $|S'| > |S|$.

Par conséquent $\alpha(G) > \alpha(G_{uv})$. Contradiction avec (3.1).

Cas 2 $\overline{uv} \in S$

Il est claire que $uv \notin S(u \in S, v \in V \setminus S)$ car S est α-ensemble de G_{uv}. Dans ce cas u est l'unique voisin de v dans S, et comme $V \setminus S$ est un stable alors $d_G(v) = 1$. Contradiction.

D'où le résultat : G est α-point critique. □

Corollaire 3.4.1. *Si G est α-point critique, alors G est biparti.*

Remarque 3.4.1. *La réciproque n'est pas vrai.*

Exemple

La FIGURE (3.1) représente un graphe biparti qu'est n'est pas α-point critique car la condition (2) n'est pas vérifie.

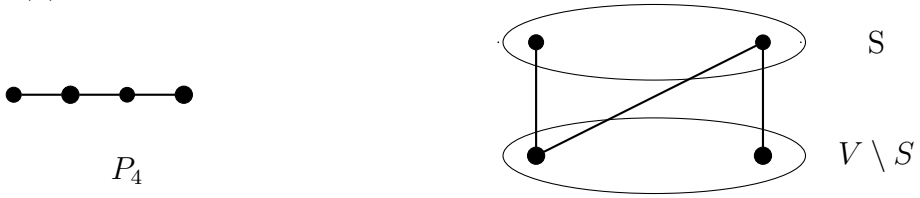


FIGURE 3.1: Un graphe biparti qui n'est pas α-point critique.

Proposition 3.4.2. *Soit G un graphe simple connexe d'ordre n. Si G est α-point critique, alors*

— *Si $G = C_n$, alors $n = 2k$.*

— *Si $G = P_n$, alors $n = 2k + 1$.*

Preuve. Soit G un graphe simple connexe et soit S un α-ensemble de G.

On a :$\alpha(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ et $\alpha(P_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

La contraction d'une arête de G diminue le nombre de sommet par un.

Cas 1 $G = C_n$.

• Si n est paire (n=2k), alors $\alpha(C_n) = \left\lfloor \frac{2k}{2} \right\rfloor = k$. Donc G_{uv} devient un cycle d'ordre impaire(n=2k-1) après la contraction.

Par conséquent $\alpha(C_n) = \left\lfloor \frac{2k-1}{2} \right\rfloor = k - 1$ $\Big(\alpha(G_{uv}) = \alpha(C_{2k-1}) = k - 1\Big)$.

• Si n est impaire (n=2k+1), alors $\alpha(C_n) = \left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor = k$. Après la contraction, G_{uv} devient un cycle d'ordre paire, donc $\alpha(C_n) = \left\lfloor \frac{2k}{2} \right\rfloor = k$ $\Big(\ \alpha(G_{uv}) = \alpha(C_{2k}) = k\Big)$.

D'où C_n est α-point critique si n est paire.

Cas 2 $G = P_n$.

Si n est paire (n=2k), alors $\alpha(P_n) = \left\lceil \frac{2k}{2} \right\rceil = k$, donc G_{uv} devient une chaine impaire(n=2k-1) après la contraction. Par conséquent $\alpha(P_n) = \left\lceil \frac{2k-1}{2} \right\rceil = k$ $\Big(\alpha(G_{uv}) = \alpha(P_{2k-1}) = k\Big)$.

• Si n est impaire (n=2k+1), alors $\alpha(P_n) = \left\lceil \frac{2k+1}{2} \right\rceil = k$. Après la contraction G_{uv} devient une chaine paire, donc $\alpha(P_n) = \left\lceil \frac{2k}{2} \right\rceil = k - 1$ $\Big(\alpha(G_{uv}) = \alpha(C_{2k}) = k - 1\Big)$.

D'où P_n est α-point critique si n est impaire. □

3.4.2 Les graphes sans $k_{1,3}$ α-point critique

Définition 3.4.2. *Un graphe sans $K_{1,3}$ est un graphe qui n'a pas un $K_{1,3}$ comme sous-graphe induit.*

Proposition 3.4.3. *Soit G un graphe simple connexe et soit S un α-ensemble de G.*

G est α-point critique si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées

1) $V \setminus S$ est stable.

2) $\forall v \in V \setminus S \qquad d_G(v) = 2.$

3) $\forall u \in S \qquad d_G(u) \leq 2.$

Preuve. Soit G un graphe simple connexe sans $K_{1,3}$ et S un α ensemble de G. Supposons que G est α-point critique et on preuve que les trois conditions sont vérifiées.

On a montré déjà que $V \setminus S$ est stable. Il reste à montrer :

1) $\forall v \in V \setminus S \qquad d_G(v) = 2.$

D'après la condition (2)

$$\forall v \in V \setminus S \qquad d_G(v) \geq 2. \tag{3.2}$$

On montre que $\forall v \in V \setminus S \qquad d_G(v) \leq 2.$

Comme G est sans $K_{1,3}$, alors

$$\forall v \in V \setminus S \qquad d_G(v) \leq 2. \tag{3.3}$$

De (3.2) et (3.3) on obtient le résultat : $\forall v \in V \setminus S \qquad d_G(v) = 2.$

2) $\forall u \in S \qquad d_G(u) \leq 2.$

De même comme G est sans $K_{1,3}$ alors $\forall u \in S \qquad d_G(u) \leq 2.$ □

3.4.3 Les graphes sans triangle α-point critique

Définition 3.4.3. *Soit G un graphe simple. G sans triangle est un graphe qui ne possède pas de triplet d'arêtes formant un triangle.*

Proposition 3.4.4. *Soit G un graphe simple connexe.*

Si G est α-point critique, alors G est sans triangle.

Preuve. Soit S un α ensemble de G.

On suppose que G est α-point critique et on montre que G est sans triangle. Supposons

le contraire c-à-d G avec triangle abc. Dans ce cas un sommet de ce triangle par exemple a est dans S.

Par conséquent, dans $V \setminus S$ il existe une arête bc. Contradiction le fait que G est un α-point critique. □

3.4.4 Le nombre de stabilité par contraction $Ct_\alpha(G)$

Définition 3.4.4. *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple connexe.*

On défini le nombre de domination par contraction d'un graphe G connexe, noté $Ct_\alpha(G)$ comme étant le nombre minimum d'arêtes à contracter successivement pour faire diminuer le nombre de domination $\alpha(G)$.

Proposition 3.4.5. *Soit G un graphe simple connexe.*

Si G n'est pas α-point critique, alors $Ct_\alpha(G) \leq 2$.

Preuve. Supposons que G n'est pas α-point critique et on montre que $Ct_\alpha(G) \leq 2$.

Supposons que $Ct_\alpha(G) \geq 3$. Soit S un α-ensemble de G. On distingue deux cas.

Cas 1 S'il existe deux sommet x et y de S tel que $N_G(x) \cap N_G(y) \neq \varnothing$, alors $Ct_\alpha(G) = 1$.

Cas 2 Pour tout x, y de S tel que $N_G(x) \cap N_G(y) = \varnothing$,alors $Ct_\alpha(G) = 2$.

Dans les deux cas on trouve que $Ct_\alpha(G) \leq 2$. Contradiction.

D'où le résultat : $Ct_\alpha(G) \leq 2$. □

Corollaire 3.4.2. *Soit G un graphe simple, S un α-ensemble de G.*

- *S'il existe deux sommet x et y de S tel que $N_G(x) \cap N_G(y) \neq \varnothing$, alors $Ct_\alpha(G) = 1$.*
- *Si $N_G(x) \cap N_G(y) = \varnothing$, $\forall x, y \in S$, alors $Ct_\alpha(G) = 2$.*

3.5 L'effet de la contraction sur le nombre de domination stable

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple connexe et $\overline{uv}$ le sommet obtenue on contractant l'arête uv de E. Soit D un i-ensemble de G.

Définition 3.5.1. *On peut partitionnée E comme suit :*

- $E_i^0 = \{e \in E : i(G_{uv}) = i(G)\}$.
- $E_i^- = \{e \in E : i(G_{uv}) < i(G)\}$.
- $E_i^+ = \{e \in E : i(G_{uv}) > i(G)\}$.

3.5.1 Les graphes i-point critique

Dans ce partie, on va étudier le cas où $i(G) = 2$.

Proposition 3.5.1. *Soit G un graphe simple connexe.*

Si G est $2i$-point critique, alors G est 2γ-point critique .

Preuve. On suppose que $i(G) = 2 \ldots (1)$, et on suppose que

G est i-point critique $\ldots (2)$

de (1) on a : $i(G) = 2 \Rightarrow \gamma(G) = 2$ car $\gamma(G) \leq i(G)$.

de (2) on a : $i(G_{uv}) < i(G)$ et comme $i(G) = 2$ alors $i(G_{uv}) = 1$, par conséquent $\gamma(G_{uv}) = 1$.

D'où le résultat : G est γ-point critique. □

Théorème 3.5.1. *Si G est un graphe sans griffe $k_{1,3}$, alors G est $2i$-point critique si et seulement si G est 2γ-point critique .*

Preuve. D'après la proposition (3.5.1) on a le sens directe.

Inversement, On suppose que G est 2-γ-point critique, et on montre que G est 2-i-point critique.

Comme G est sans griffe, d'après le théorème (1.5.2) on a $\gamma(G) = i(G)$, donc $i(G) = 2$.

Il reste à montrer que G est i-point critique.

On a : $\gamma(G) = 2$, et comme G est γ-point critique alors $\gamma(G_{uv}) < \gamma(G) = 2$.

Donc $\gamma(G_{uv}) = 1$. Par conséquent $i(G_{uv}) = 1$,par suite $i(G_{uv}) < \gamma(G) = i(G)$.

D'où le résultat : G est 2-i-point critique. □

3.5.2 Caractérisation des arbres 2-i-point critique.

On s'intéresse dans cette partie à donner une caractérisation sur les arbres T i-point critique ayant $i(T) = 2$.

Proposition 3.5.2. *Soit T un arbre.*

T est 2-i-point critique si et seulement si $T = P_4$.

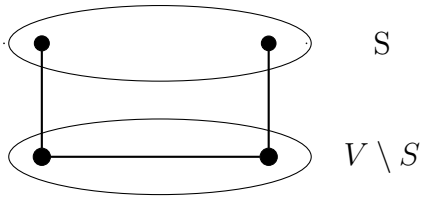
Preuve. $\Rightarrow\big)$ On suppose que T est 2-i-point critique et on montre que T est P_4.

Soit S un i-ensemble de T, et soit x, y deux sommet de S.

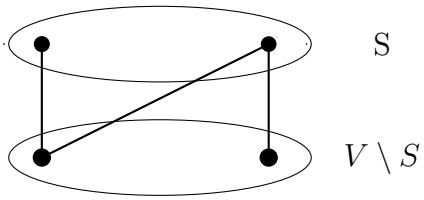
• Au premier lieu, il suffit de montrer que $\left|P_n[x,V]\right| = \left|P_n[y,V]\right| = 1$.

On suppose que x (resp y) a au moins deux voisins privés dans V, notons a, b (resp a', b') alors la contraction de xb ou xa (resp ya' ou yb') ne diminuer pas le stable. Contradiction le fait que T est i-point critique.

Cas 1 Si $N(x) \cap N(y) = \varnothing$, alors pour garder la connexité de T, il existe une arête qui relie les voisinages de x et de y donc $T = P_4$.



Cas 2 Si $N(x) \cap N(y) \neq \varnothing$, alors $V \setminus S$ est un stable et comme T est connexe alors il existe un sommet de S qui adjacent a deux sommets de $V \setminus S$ donc $T = P_4$.



$\Leftarrow\big)$ On suppose que T est P_4 et on montre que T est 2-i-point critique.

Soit $T = P_4$ un graphe simple connexe et $i(P_4) = 2$. Par la contraction de n'importe quelle arête de P_4 on obtient $T_{uv} = P_3$, donc $i(T_{uv}) = 1$ Par conséquent$i(T_{uv}) < i(T)$. D'où T est 2-i-point critique. □

3.5.3 Le nombre de domination stable par contraction $Ct_i(G)$

Définition 3.5.2. *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple connexe.*

On défini le nombre de domination par contraction d'un graphe G connexe, noté $Ct_i(G)$ comme étant le nombre minimum d'arêtes à contracter successivement pour faire diminuer le nombre de domination $i(G)$.

Il a été démontré qu'il existe des graphes où $Ct_i(G)$ peut être très grand.

Observation[9] Pour tout entier $k \geq 1$ il existe un arbre T_k tel que $Ct_i(T_k) \geq k$.

Conclusion

Dans ce mémoire nous nous sommes intéressés à l'étude de l'effet de la contraction sur certain paramètres des graphes, en particulier les paramètres de domination stable. Une revue des résultats les plus importants obtenus dans ce domaine a été notre premier objectif. Dans le but d'apporter quelques modestes contributions.

Nous avons dans un premier temps exposé l'effet de la contraction sur le nombre de stabilité, on a donné les conditions nécessaire et suffisante pour qu'un graphe est α-point critique. Ensuite nous avons présenté quelques graphes α-point critique en particulier les graphes sans $K_{1,3}$ et les graphes sans triangle. Enfin, nous avons estimé que le nombre de stabilité par contraction $Ct_\alpha(G)$ est inférieur ou égale à deux pour tout graphe G.

En second temps, nous avons étudie l'effet de la contraction sur le nombre de domination stable. Pour $i(G) = 2$, nous avons démontré que la classe des graphes 2-i-point critique est équivalent à la classe des graphes 2-γ-point critique, puis nous avons caractérisé les arbres 2-i-point critique.

Comme perspective, on propose d'étudier l'effet de la modification d'un graphe par rapport à d'autre opérations et par rapport à d'autre paramètres de graphe G.

Bibliographie

[1] Teresa W.Haynes Stephen T.Hedetniemi Peter J.Slater, *Fundamentals of domination in graphs*,Marcel Dekker, New York, 1998.

[2] Tamara Burton,David P.Sumner, *Domination dot-critical graphs*,Discrete Mathematics 306,2006.

[3] Paul Deguire, *Les ponts de Königsberg*, Département de mathématiques et statistique Université de Moncton, Canada.

[4] Teresa W. Haynes, *Domination Subdivision Numbers*, Johnson City, TN 37614 USA.

[5] C. Berge, *theory of Grephs and its Aplication*, Methuen, London, 1962.

[6] V.K.Wei, *A lower bound on the stability number of a simple graph*,Bell Laboratories Technical Memorandum 81-11217-9, Murray Hill, NJ,(1981).

[7] Yamuna and Karthika, *A Survey on the Effect of Graph Operations on the Domination Number of a Graph*, Yamuna M et al. / International Journal of Engineering and Technology (IJET).

[8] Mustapha Chellali, Frédéric Maffray, and Kamel Tablennehas, *Connected domination dot-critical graphs*, Contributions to Discrete Mathematics Volume 5, Number 2, Pages 1125ISSN 1715-0868.

[9] Kamel Tablennehas et Mustapha Chellal , *Le nombre de domination par contraction.*

[10] C. Berge, *Les problèmes de coloration en théorie des graphes* , Publ.Inst. Statist. Univ. Paris 9, (1960) 123-160.

[11] T. Gallai, *Ubel extreme Punkt- und Kantenmengen*, Ann. Univ. Sci. Budapest, Eotvos Sect. Math. 2(1959), 133-138.

[12] G. H. Fricke, S. T. Hedetmiemi and D. P. Jacobs, *Independencxe and Irredundance in k-regular graphs*, Ars Combin,49(1998) 271-279.