Ministère de l'Enseignement Supèrieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr.Yahia Farès de Médéa

Département de Mathematique et de l'Informatique



Projet de fin d'étude

Présenté en vue de l'obtention du

Diplôme de Master en

Mathématiques

Option:

Recherche Opérationnelle

Thème

Opérations sur le nombre de la coloration packing de certains types de graphes

Par

YAHIAOUI Naziha Rania et BEN KOUIDER Bochra

Soutenu devant le jury composé de :

A. BENKACI	MAA	U.D.Y.F-Médéa	Président.
R. LEMDANI	MAA	U.D.Y.F-Médéa	Encadreur.
N. IKHLEF ESCHOUF	MCA	U.D.Y.F-Médéa	Examinateur.
M. ZAMIME	MCB	U.D.Y.F-Médéa	Examinateur

Date de soutenance : 29 /10/2020

Résumé

Le but de ce travail est consacré à l'étude du nombre de la coloration de packing, il s'agit de trouver le plus petit nombre de couleurs à affecter aux sommets d'un graphe G, de telle sorte que, si deux sommets u et v ont la même couleur $f(u) = f(v)$, alors $d_G(u, v) > f(u)$. Cette fonction f est appelée une coloration de diffusion. Le nombre chromatique de diffusion d'un graphe G, noté par $\chi_{_p}(G)$, est l'ordre minimum d'une coloration de diffusion. Nous déterminons le nombre chromatique de diffusion de plusieurs types et classes de graphes à savoir, produit croisé d'une étoile avec une chaîne, étoile avec un cycle. Nous avons également déterminé le nombre chromatique de diffusion pour une classe importante de graphe, appelée graphe subdivisé super finis. Un graphe subdivisé super fini d'un graphe G est noté par $FSSD_m(G)$. Nous déterminons le nombre chromatique de diffusion des graphes subdivisés super finis pour les graphes suivants : Tadpole , prisme, produit croisé d'une étoile avec une chaîne et produit cartésien d'une étoile avec un cycle. Ainsi sur les graphes subdivisés super finis de la couronne de deux graphes : chaîne avec chaîne, chaîne avec cycle, cycle avec cycle, et pour la couronne généralisée du graphe Tadpole.

Abstract

The purpose of this work is devoted to the study of a number of coloring packing, it acts to find the smallest number of colors has to assign to the vertices of a graph G, such that for every vertices u and v, if $f(u) = f(v)$, then $d_G(u, v) > f(u)$. This function f is called packing coloring. The packing chromatic number of a graph G, denoted by $\chi_p(G)$ is the minimum order of a packing coloring. We have determined the number of packing colors of: cross of a star with a path $K_{1,n} \times P_n$ and a star with a cycle $K_{1,n} \times C_n$. We also determined the packing chromatic number of importante class of graphs, called finite super subdivision of graph. A finite super subdivision graph is the graph obtained from G denoted by $FSSD_m(G)$. We determine the packing chromatic number of finite super subdivision graph of the following graphs : TADPOLE, Prism, cross product of a star with a path and product cartesian of a star with a cycle. Thus on the super finite subdivided graphs of the corona of two graphs: path with path, path with cycle, cycle with cycle, and the generalized corona of graph TADPOLE.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة عدد تلوين الانتشار و هو إيجاد أصغر عدد من الألوان لتعيين رؤوس الرسم البياني G، بحيث إذا كان للرأسين u و v نفس اللون $f(u) = f(v)$ فإن $d_G(u,v) > f(u)$. هذه الدالة f تسمى تلوين الانتشار من الرتبة k. عدد تلوين الانتشار للرسم البياني G ، يرمز إليه بالرمز $\chi_p(\mathrm{G})$ و هو العدد الأدنى لتلوين الانتشار. نعين تلوين الانتشار للرسم البياني لعدة أنواع وفئات من الرسوم البيانية منها، ضرب متقاطع لنجمة مع سلسلة $k_{1,n} \times P_n$، نجمة مع دورة $k_{1,n} \times C_n$. حددنا أيضًا عدد تلوين الانتشار لفئة مهمة من رسوم البيانات، تسمى رسوم بيانية مقسمة ومحدودة للغاية. وهو رسم بياني يتم الحصول عليه من G عن طريق استبدال كل من حوافه برسم بياني كامل ثنائي الأجزاء $K_{2,m}$ ؛ حيث m عدد صحيح موجب محدود. ويرمز له بالرمز $FSSD_m(G)$. نحدد عدد تلوين الانتشار للرسوم البيانية المقسمة والمحدودة للرسوم البيانية التالية : $T_{p,n}$ ، $P_n \odot C_p$ ، $P_n \odot P_p$ ، $C_n \odot C_p$ ، $K_1 \odot C_3$ ، $k_{1,n} \times C_p$ ، $k_{1,n} \times P_p$ ، $k_{1,n} \square C_p$ ، $k_{1,n} \square P_p$ و $T_{p,n} \odot K_m$. تمت برهنة جميع النتائج التي تم الحصول عليها في هذه المذكرة.

Dédicace

Une chance m'a été offerte aujourd'hui pour vous parler des personnes qui sont chers a qui je leur doit tout, avec ce dédicace j'espère pouvoir leurs exprimer toutes mes remerceciement et ma profonde gratitdes

tout d'abord je commence par l'Âme de **baba Benaissa** qui m'a été un grand soutien et qui ma quitté avant de voir mon œuvre terminé que Allah ait pitie de son Âme

À **mes très chers parents :papa Bouziane et mama Guitt Bahdja Nadjia** qui me couvre d'amour ques dieu le protéges et le gardes en bonne santé.

A mes frères : Imad, Sofiane, Ilyas, Sofiane, Djamel

Mes chère sœurs : Saida et Fatma

A ma chère binûme : Bouchra

A mes grands parents paternels et maternales.

A mes oncles et mes tantes paternels et maternales .

A tout mes cousins et cousines : Bachira, Chahinez, Wafa, Riad, Morad, Nihel, Amira, Asiel, Nor, Anfel, benaissa et tout les autres sont exception du plus grand au plus petit.

A mes chères amis : Fathia, Soundouss, Nessrine, Hanen, Nassima, Abela, Cheriffa, Bouchra, Khadidja, Zaho, Rania, Aissa, Mokhtar, Bachir sans exception.

et a tous mes professeurs surtout mon promoteur MR LEMDANI Rachid

À tous ceux qui m'ont aidé afin de réaliser ce travail et à tous mes amis.

À tous, je dédie ce travail.

YAHIAOUI Naziha Rania

Dédicace

Une chance m'a été offerte aujourd'hui pour
vous parler des personnes qui sont chers a qui je leur doit tout,
avec ce dédicace j'espère pouvoir leurs exprimer toutes mes remerceciement
et ma profonde gratitdes
Je dedie ce mémoire :

A mes parents: Ben said et HAMDI Fatiha

Mes chère sœurs: Samia, Amira, Lodjaine

A mon Frère : Abd Allah

A mon marie et mon soutien : YAGOUBI Abde Laziz

A ma chère binûme : Naziha rania

A mes grands parents maternales.

A mes oncles et mes tantes paternels et maternales .

A tout mes cousins et cousines sont exception du plus grand au plus petit

A mes chères amis : Somia, Nessrin, Khalida, Hanen, Nassima, Abela, Bouchra, Rania, Nassira, Ahelm, Hoda

sans exception.

et a tous mes professeurs surtout mon promoteur MR LEMDANI Rachid

A tous ceux qui m'ont aimé et qui ne méritent pas d'être oubliés
A tous mes amis.

BEN KOUIDER BOUCHRA

Table des matières

Résumé **ii**

Abstract **iii**

molakhas **iv**

Table des figures **xi**

Introduction **xiv**

1 Notions fondamentales sur la théorie des graphes. **1**

1.1 Concepts fondamentaux 1

1.1.1 Graphe et sa présentation 1

1.1.2 Graphe non orienté 2

1.1.3 Multigraphe 2

1.1.4 Graphe simple 2

1.1.5 *Adjacence* 3

1.1.6 Voisinage, Degré d'un sommet 3

1.1.7 Sous-graphe 3

1.1.8 Graphe complet 3

1.1.9 Graphe biparti, Multiparti, graphe biparti complet 4

1.1.10 Graphe planaire 4

1.1.11 Chaîne, cycle et roue 5

1.1.12 Graphe complémentaire 6

1.1.13 Arbre 6
1.1.14 Étoile et étoile double 7
1.1.15 Produit cartésien [6] 7
1.1.16 Prroduit croisé [6] 8
1.1.17 Isthme 9
1.1.18 Distance, Excentricité, Diamètre et rayon 9
1.1.19 Graphe joint 9
1.1.20 Graphe subdivisé 10
1.1.21 Graphe connexe, graphe $k-$connexe 10
1.1.22 Graphe prisme d'un cycle Y_n [15] 11
1.1.23 Graphe TADPOLE $T_{p,n}$ [8]. 11
1.2 Quelques invariants de graphes 12
1.2.1 Nombre de stabilité 12
1.2.2 Transversal, Couplage, Recouvrement 12
1.2.3 Nombre de clique 13
1.3 La coloration dans les graphes 13
1.3.1 Coloration des sommets 13
1.3.2 La coloration de packing 14
1.3.3 Le nombre chromatique 14
1.3.4 Bornes sur le nombre chromatique : 15
1.3.5 Classes de complexité 15

2 Quelques résultats obtenus sur le nombre chromatique de packing 18
2.1 Motivation et définition du problème de la coloration de packing 18
2.1.1 i-packing 18
2.1.2 Coloration de packing de certains graphes particuliers 19
2.1.3 Graphes avec petit nombre de la coloration de packing 20
2.1.4 Coloration de packing pour les arbres 22
2.2 Coloration de packing de la couronne d'un graphe 23
2.2.1 La couronne d'une chaine 24

2.2.2 La couronne d'un cycle 24
2.3 Détermination du nombre chromatique de packing de graphe splitting 25
2.3.1 La coloration de packing de graphe splitting pour les chaines 26
2.3.2 La coloration de packing de graphe splitting pour les cycles 26
2.3.3 La coloration de packing de graphe splitting de l'étoile 27
2.3.4 La coloration de packing de graphe splitting de l'étoile double 27
2.3.5 La coloration de packing de graphe splitting pour les graphes complets 28

3 Détermination du nombre chromatique de packing de quelques types de graphes 29
3.1 Coloration de packing du produit croisé de deux graphes 29
3.1.1 Coloration de packing du produit croisé d'une étoile et une chaîne . . 29
3.1.2 Coloration de packing du produit croisé d'une étoile et un cycle . . . 32
3.2 Coloration de packing du graphe subdivisé super fini de qulques graphes . . 35
3.2.1 Graphe subdivisé super fini 35
3.2.2 Coloration de packing du graphe subdivisé super fini du produit croisé d'une étoile et une chaine 35
3.2.3 Coloration de packing du graphe subdivisé super fini du produit cartésien d'une étoile et une chaîne 38
3.2.4 Coloration de packing du graphe subdivisé super fini du produit cartsien d'une étoile avec un cycle 41
3.2.5 Coloration de packing pour un graphe subdivisé super fini d'un TADPOLE $T_{p,n}$ 44
3.2.6 Coloration de packing pour un graphe subdivisé super fini d'un Prisme de cycle Y_n 47
3.3 Coloration de packing d'un graphe subdivisé super fini d'une couronne de deux graphes 50
3.3.1 La couronne de deux graphes 50
3.3.2 Coloration de packing du graphe subdivisé super fini d'une couronne généralisée du graphe Tadpole 50

3.3.3 Coloration de packing de $FSSD_m(P_n \odot P_p)$ 59
3.3.4 Coloration de packing de $FSSD_m(P_n \odot C_p)$ 64
3.3.5 Coloration de packing de $FSSD_m(C_n \odot C_p)$ 68

Conclusion **72**

Table des figures

Figure 1.1.1	Un multigraphe	2
Figure 1.1.2	Graphe simple	2
Figure 1.1.3	Graphe biparti complet $K_{4,2}$.	4
Figure 1.1.4	Graphe planaire	5
Figure 1.1.5	Une chaîne, un cycle et une roue	5
Figure 1.1.6	Le graphe de Petersen à gauche et son complémentaire à droite . .	6
Figure 1.1.7	Le graphe $C5$, $\overline{C5}$ et K_5.	6
Figure 1.1.8	Un arbre T avec $rad(T) = 3$ et $diam(T) = 6$.	7
Figure 1.1.9	Une étoile et une étoile double	7
Figure 1.1.10	Le graphe $K_{1,3} \square P_4$.	8
Figure 1.1.11	Le graphe $K_{1,3} \square C_4$.	8
Figure 1.1.12	Figure (a): Graphe $K_{1,4} \times P_5$ . . . . . Figure (b): Graphe $K_{1,3} \times C_4$	8
Figure 1.1.13	Présentation d'un graphe G et des excentricités de ses sommets . .	9
Figure 1.1.14	Le graphe joint de G_1 et G_2	10
Figure 1.1.15	Graphes Prisme de Y_5 et Y_6	11
Figure 1.1.16	Graphes TADPOLE	12
Figure 1.1.17	Un graphe G.	13
Figure 2.1.1	Graphe $K_{1,n}$, $\chi_p(K_{1,n}) = 2$..	21
Figure 2.1.2	Un graphe G est un$T$-ajout du sommet v	21
Figure 2.1.3	Les plus petits arbres avec $\chi_p(T) = 4$.	23
Figure 2.2.1	Un graphe C_4 et sa couronne	23

Figure 2.2.2 La couronne d'une P_n 24
Figure 2.2.3 Coloration packing de $Cr(P_{10})$, $Cr(P_2)$, $Cr(P_4)$ 24
Figure 2.2.4 La couronne de C_n 25
Figure 2.2.5 Coloration packing d'un $Cr(C_4)$ et $C_r(C_3)$ 25
Figure 2.2.6 $\chi_p(Cr(C_{12})) = 5$ 25
Figure 2.3.1 Le graphe splitting d'une P_7 26
Figure 2.3.2 Splitting de C_4 26
Figure 2.3.3 Splitting d'une étoile 27
Figure 2.3.4 Splitting d'une étoile double 27
Figure 2.3.5 Graphe splitting de K_3 28
Figure 3.1.1 Graphe $k_{1,\,p} \times P_2, p \geq 3$, $\chi_{_P}(k_{1,\,p} \times P_2) = 2$. 30
Figure 3.1.2 Graphe $K_{1,p} \times P_n, p \cong 2 \pmod 4$, $\chi_{_P}(K_{1,p} \times P_n) = 3$ 31
Figure 3.1.3 Graphe $K_{1,3} \times P_5$, $\chi_{_P}(K_{1,3} \times P_5) = 3$ 31
Figure 3.1.4 $\chi_{_P}(K_{1,4} \times C_3) = \chi_{_P}(K_{1,3} \times C_4) = 3$. 32
Figure 3.1.5 Graphe $K_{1,3} \times C_n, n-2 \cong 1 \pmod 4$, $\chi_{_P}(K_{1,3} \times C_n) = 4$ 33
Figure 3.1.6 Graphe $K_{1,5} \times C_8$, $\chi_{_P}(K_{1,5} \times C_8) = 3$... 34
Figure 3.1.7 Graphe $K_{1,4} \times C_9$, $\chi_{_P}(K_{1,4} \times C_9) = 4$. 34
Figure 3.2.1 Représentation du graphe $FSSD_m(K_{1,n} \times P_p)$. 36
Figure 3.2.2 Graphe $FSSD_1(K_{1,n} \times P_p)$, $\chi_{_p}(FSSD_1(K_{1,n} \times P_p)) = 3$ 37
Figure 3.2.3 Graphe $FSSD_2(K_{1,4} \times P_4)$, $\chi_{_p}(FSSD_2(K_{1,4} \times P_4)) = 3$.. 37
Figure 3.2.4 Représentation du graphe $FSSD_m(K_{1,n} \square P_p)$ 38
Figure 3.2.5 Graphe $FSSD_2(K_{1,3} \square P_4)$, $\chi_{_p}(FSSD_2(K_{1,3} \square P_4)) = 3$. 40
Figure 3.2.6 Graphe $FSSD_1(K_{1,2} \square P_6)$, $\chi_{_p}(FSSD_1(K_{1,2} \square P_6)) = 3$. 40
Figure 3.2.7 Représentation du graphe $FSSD_m(K_{1,n} \times P_p)$. 41
Figure 3.2.8 Graphe $FSSD_2(K_{1,5} \square C_4$, $\chi_{_p}(FSSD_2(K_{1,5} \square C_4)) = 3$. 42
Figure 3.2.9 Graphe $FSSD_1(K_{1,4} \times C_3)$, $\chi_{_p}(FSSD_1(K_{1,4} \times C_3)) = 8$.. 43
Figure 3.2.10 Graphe TADPOLE $FSSD_3(T_{8,4})$. 44
Figure 3.2.11 Graphe $FSSD_2(T_{6,5})$ 45
Figure 3.2.12 Graphe $FSSD_m(T_{4,5})$, $\chi_{_p}(FSSD_m(T_{4,5})) = 3$.. 46
Figure 3.2.13 Graphe $FSSD_3(T_{9,4})$, $\chi_{_p}(FSSD_m(T_{9,4})) = 3$.. 46

Figure 3.2.14 Le graphe $FSSD_1(Y_4)$. 47
Figure 3.2.15 Graphe $FSSD_2(Y_8)$, $\chi_p(FSSD_2(Y_8)) = 3$.. 48
Figure 3.2.16 Les graphes $FSSD_1(Y_5), FSSD_1(Y_7)$:
$\chi_p(FSSD_1(Y_5)) = \chi_p(FSSD_1(Y_7)) = 5$.. 49
Figure 3.2.17 Graphe $FSSD_1(Y_{10})$, $\chi_p(FSSD_1(Y_{10})) = 3$. 49
Figure 3.2.18 Graphe $FSSD_m(Y_9)$, $\chi_p(FSSD_1(Y_9)) = 5$. 50
Figure 3.3.1 Graphe $FSSD_2(T_{8,4} \odot 3K_1)$. 51
Figure 3.3.2 Graphe $FSSD_1(T_{4,3} \odot 2K_1)$, $\chi_p(FSSD_1(T_{4,3} \odot 2K_1)) = 4$. 53
Figure 3.3.3 Graphe $FSSD_2(T_{5,4} \odot 3K_1)$, $\chi_p(FSSD_2(T_{5,4} \odot 3K_1)) = 4$. 53
Figure 3.a.1 Le graphe $FSSD_1(P_2 \odot P_4)$. 54
Figure 3.b.1 Le graphe $FSSD_1(K_1 \odot C_3)$. 57
Figure 3.3.4 Le graphe $FSSD_m(P_n \odot P_p)$ 60
Figure 3.3.5 Graphe $FSSD_2(P_4 \odot P_5)$, $\chi_p(FSSD_2(P_4 \odot P_5)) = 5$ 62
Figure 3.3.6 Graphe $FSSD_4(P_6 \odot P_3)$, $\chi_p(FSSD_4(P_6 \odot P_3)) = 5$. 62
Figure 3.3.7 Graphe $FSSD_3(P_5 \odot P_2)$, $\chi_p(FSSD_3(P_5 \odot P_2)) = 4$. 63
Figure 3.3.8 Le graphe $FSSD_m(P_n \odot C_p)$ 64
Figure 3.3.9 Graphe $FSSD_1(P_6 \odot C_3)$, $\chi_p(FSSD_1(P_6 \odot C_3)) = 5$ . . . 66
Figure 3.3.10 Graphe $FSSD_2(P_4 \odot C_4)$, $\chi_p(FSSD_2(P_4 \odot C_4)) = 5$ . . . 66
Figure 3.3.11 Graphe $FSSD_3(P_7 \odot C_3)$, $\chi_p(FSSD_3(P_7 \odot C_3)) = 5$ 67
Figure 3.3.12 Le graphe $FSSD_m(C_n \odot C_p)$. 68
Figure 3.3.13 Graphe $FSSD_1(C_6 \odot C_4)$, $\chi_p(FSSD_1(C_6 \odot C_4)) = 5$. 70
Figure 3.3.14 Graphe $FSSD_2(C_4 \odot C_4)$, $\chi_p(FSSD_2(C_4 \odot C_4)) = 5$... 70
Figure 3.3.15 Graphe $FSSD_3(C_8 \odot C_3)$, $\chi_p(FSSD_3(C_8 \odot C_3)) = 5$. 71

Introduction

La théorie des graphes est une branche des mathématiques discrètes. Elle représente un moyen très utile et très efficace pour résoudre des problèmes discrets de la Recherche Opérationnelle. Elle est ainsi souvent présente dans notre vie quotidienne. Elle peut modéliser beaucoup de problèmes pratiques et dans plusieurs domaines, notamment en technologie, par exemple les problématiques de réseaux informatiques, de réseaux routiers, de transport de marchandises, d'emplois du temps, d'électronique, de mécanique du solide et aussi les réseaux de télécommunication...etc.

Le problème des quatre couleurs est parmi les premières sources d'inspiration de la théorie des graphes, Ce problème consiste à répondre à la question suivante :"suffit-il de quatre couleurs pour colorer n'importe quelle carte géographique? ". Mathématiquement et en théorie des graphes, ce problème consiste à répondre à la question suivante : " peut-on colorer les sommets d'un graphe planaire en utilisant quatre couleurs de telle sorte que toutes les arêtes aient des extrémités de couleurs différentes ?". Ce problème a été posé sous forme de conjecture par **Francis Guthrie** en 1852, est devenu célèbre sous le nom de problème des quatres couleurs et n'a pu trouver une réponse positive en 1977, que grâce à l'ordinateur par **Appel** et **Haken**. [1,2]

Actuellement, on trouve dans la littérature plusieurs types de colorations, elles sont définies par la coloration des éléments du graphe (sommets, arêtes, faces,...) avec une ou plusieurs contraintes supplémentaires.

En 2003, Goddard et al. [5] ont introduit la coloration de packing des graphes, il s'agit de trouver le plus petit nombre de couleurs, appelé nombre chromatique de packing et noté $\chi_p(G)$, à affecter aux sommets d'un graphe G de telle sorte que si deux sommets u et v ont la même couleur $\pi(u) = \pi(v)$, alors $d_G(u, v) > \pi(u)$ où π est une fonction de V dans

l'ensemble $\{1, 2, ...\}$. La détermination du nombre chromatique de packing d'un graphe G est $NP-$complet même si elle est limitée aux arbres (voir toujours une enquête plus récente [9]). De même, Goddard et al. dans [7] ont montré que la caractérisation des graphes G dont lesquels $\chi_p(G) \leq 4$ et aussi $NP-$complet.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons principalement à l'étude de cet invariant, et l'étudions sur quelques types et classes de graphes. Notre travail est composée de deux partie, la première concerne la détermination du nombre chromatique de packing de plusieurs types de graphes, et la deuxième concerne une classe importante de graphe, appelé: graphe subdivisé super fini.

Après une introduction générale, notre mémoire est composé de trois chapitres.

Le premier chapitre portera des généralités sur la théorié des graphes. Nous introduisons les définitions fondamentales, et les notations de base dans le domaine. Nous proposons quelques bornes sur le nombre chromatique $\chi(G)$, qui est le nombre minimum de couleurs à affecter aux sommets de G, de telle sorte que deux sommets adjacents reçoivent des couleurs différentes. A la fin de ce chapitre, nous exposons brièvement la notion de la complexité algorithmique.

Dans le deuxieme chapitre, nous étudions la coloration de packing sur les graphes, les définitions, les notations ainsi que les résultats obtenus par les chercheurs dans [1, 3, 7, 10, 11, 16] sont énoncés.

Au troisième chapitre, nous présentons nos résultats sur la détermination du nombre chromatique de packing de plusieurs types et classe de graphes. Nous déterminons les valeurs exactes du nombre chromatique de packing pour les produits croisés, ainsi pour les produits cartésiens d'une étoile avec une chaine, ensuite pour les produits croisés d'une étoile et un cycle, ensuite sur les graphes subdivisés super finis des graphes: produit croisé et produit cartésien d'une étoile avec une chaine, produit cartésien d'une étoile avec un cycle. Nous terminons ce chapitre par déterminer le nombre chromatique de packing des graphes subdivisés super finis pour les graphes Tadpole et prisme d'un cycle.

Au dernier chapitre, nous étudions une classe de graphe très importante qui est la couronne de deux graphes que nous allons la définir dans la suite. Nous commençons par déterminer le nombre chromatique du graphe subdivisé super fini du graphe Tadpole

généralisé. Nous déterminons le nombre chromatique de packing des graphes subdivisés super finis de la couronne de deux graphes suivants: chaine avec une chaine, chaine avec un cycle et cycle avec un cycle. Tous les résultats obtenus dans ce mémoire ont été démontrés, des figures illustratives de ces résultats en utilisant le logiciel Geogebra sont mêmes insérées. Le mémoire s'achève par une conclusion générale et quelques perspectives.

Chapitre 1

Notions fondamentales sur la théorie des graphes.

Dans ce chapitre, nous donnons quelques concepts de base de la théorie des graphes, ainsi que les définitions nécessaires utilisées tout au long de ce mémoire, ensuite nous rappelons la definition de la coloration propre, ainsi quelques resultats obtenus par les chercheurs.

1.1 Concepts fondamentaux

1.1.1 Graphe et sa présentation

Définition 1.1.1 *Un graphe $G = (V, E)$ est défini par deux ensembles finis non vide, un ensemble de sommets V et un ensemble d'arêtes E. Le cardinal de V est appelé l'ordre de G ; noté par $n(G)$ et le cardinal de E est appelé la taille de G ; noté par $m(G)$. Une arête $e \in E$ est un couple de sommets (u, v) noté par $e = uv$, ou u et v sont les extrémités de e. On dira dans ce cas que u et v sont adjacents et que e est incidente à u et v. Les graphes tiennent leur nom du fait qu'on peut les représenter par des dessins. A chaque sommet de G, on fait correspondre un point distinct du plan et on relie par une courbe simple les points correspondant aux extrémités de chaque arête. Une boucle est une arête dont les deux extrémités sont confondues*

1.1.2 Graphe non orienté

Définition 1.1.2 *Un graphe non orienté n'est qu'un graphe orienté symétrique, si un arc relie le sommet u au sommet v, un autre arc relie le sommet v au sommet u. On ne trace alors qu'un trait entre u et v que l'on appelle une « arête ».*

1.1.3 Multigraphe

Définition 1.1.3 *Un multigraphe $G = (V, E)$ est un graphe dans lequel il peut exister plusieurs arêtes entre une paire de sommets.*

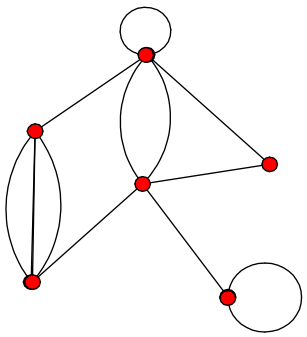


Figure 1.1.1: Un multigraphe

1.1.4 Graphe simple

Définition 1.1.4 *Un graphe est dit simple s'il est sans boucles et sans arêtes multiples (deux arêtes distinctes joignantes la même paire de sommets). La figure suivante illustre un graphe simple $G = (V, E)$ où $V = \{a, b, c, d, g, h\}$ et $E = \{ab, ah, bh, bg, bc, cg, cd, dg, gh\}$.*

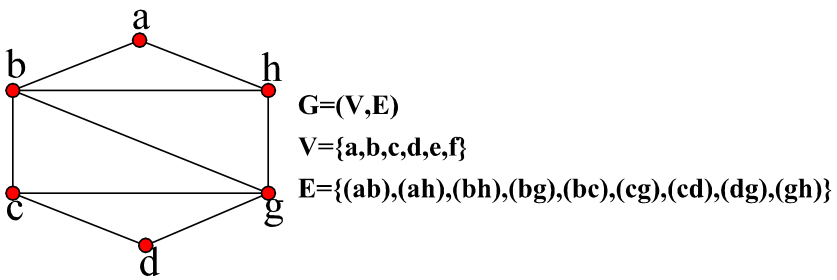


Figure 1.1.2: Graphe simple

1.1.5 *Adjacence*

Définition 1.1.5 *Soit G un graphe. Pour une arête $e = \{u; v\}$, notée aussi uv, on dit que:*

u et v sont adjacents ;

u et v sont les extrémités de e ;

e est incidente aux sommets u et v ;

u et v sont voisins.

1.1.6 Voisinage, Degré d'un sommet

Définition 1.1.6 *Pour un graphe G, le voisinage ouvert d'un sommet u, noté $N_G(u)$ est l'ensemble des sommets adjacents à u. Le voisinage fermé de u, noté $N_G[u]$ est l'ensemble $N_G[u] = N_G(u) \cup \{u\}$. Le voisinage ouvert (respectivement fermé) d'un ensemble de sommets S est $N_G(S) = \cup_{u \in S} N_G(u)$ (respectivement $N_G(S) = \cup_{u \in S} N_G(u)$).*

Définition 1.1.7 *Le degré d'un sommet u dans un graphe G, noté $d_G(u)$, est le nombre d'arêtes incidentes à u, et donc $d_G(u) = |N_G(u)|$. Le degré maximum (respectivement minimum) d'un graphe G est noté $\Delta(G)$ (respectivement $\delta(G)$) et défini comme le maximum (respectivement minimum) des degrés des sommets de G. Un sommet de degré égal à 1 est appelé sommet pendant (ou feuille).*

1.1.7 Sous-graphe

Définition 1.1.8 *Soit $G = (V, E)$ un graphe. $H = (V', E')$ est dit un sous-graphe de G si l'ensemble des sommets V' inclut dans V et l'ensimble des arêtes E' est formé par toutes les arêts de E dont les extrémités sont dans V'.*

1.1.8 Graphe complet

Définition 1.1.9 *Un graphe G est dit complet si toute paire de sommets est reliée par une arête.*

1.1.9 Graphe biparti, Multiparti, graphe biparti complet

Définition 1.1.10 *Un graphe G est dit biparti si $V(G)$ peut être partitionné en deux ensembles V_1 et V_2 de telle sorte que toute arête du graphe possède une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2. Dans le cas particulier où $|V_1| = m$, $|V_2| = n$, $d_G(u) = n$; $\forall\ u \in V_1$ et $d_G(v) = m$; $\forall v \in V_2$, alors G est dit graphe biparti complet et est noté $K_{m,n}$.*

Définition 1.1.11 *Un graphe multiparti complet ou t-parti complet $K_{n_1,n_2,...,n_t}$, $t \geqslant 2$, est un graphe G où l'ensemble des sommets $V(G)$, $|V(G)| = n_1 + n_2 + ... + n_t$, peut être partitionné en t graphes bipartis complets en t stables N_i (c'est-à-dire $G[N_i]$ est sans arête), $i = 1, ..., t$ avec $|N_i| = n_i$ et pour toute paire de sommets $u \in N_i$ et $v \in N_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant t$, $uv \in E(G)$.*

Définition 1.1.12 *Un graphe biparti est dit complet si chaque sommet de V_1 est adjacent à tous les sommets de V_2. Si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$, alors le graphe biparti complet est noté $K_{p,q}$ $p, q \geq 1$. Plus généralement, un graphe $G = (V,\ E)$ est dit $k-$parti $(k \geq 2)$, si V peut être partitionné en k stables $\{V_1, V_2, ...,\ V_k\}$. Il est dit multiparti-complet si pour tout $i \neq j$, tout sommet de V_i est adjacent à tous les sommets de V_j. La Figure 1.1.3, illustre un graphe biparti complet $K_{2,4}$.*

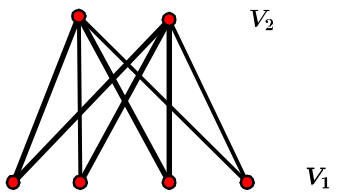


Figure 1.1.3: Graphe biparti complet $K_{2,4}$

1.1.10 Graphe planaire

Définition 1.1.13 *Un graphe est dit planaire s'il existe une façon de le représenter dans un plan sans que deux arêtes ne se croisent.*

Exemple 1.1.1 *Le graphe de la Figure 1.1.4 est le graphe complet, qui est planaire.*

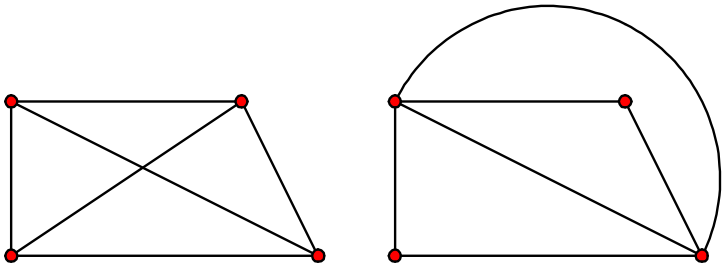


Figure 1.1.4: Graphe planaire

1.1.11 Chaîne, cycle et roue

Définition 1.1.14 *Soit un graphe $G = (V, E)$ une chaîne P de G est une séquence fini de sommets $u_1, u_2, ..., u_k$, où pour tout $i = k - 1$, $(u_i u_{i+1})$, $1 \leqslant i < k$ est une arête de G. Les sommets u_1 et u_n sont les extrémiteés de la chaîne P et les sommets $u_2, ..., u_{k-1}$ sont les sommets intérieurs de P.*

_Une chaîne P est simple si chaque arête de P rst emprunté une seule fois.

_Une chaîne P est élémentaire si elle ne passe pas deux fois par le même sommet.

Définition 1.1.15 *Un cycle C_n d'un graphe $G = (V, E)$ est une chaîne $u_1, ..., u_k$ telle que les extrémiteés sont confondues $u_1 = u_k$.*

Définition 1.1.16 *Une roue, notée W_n, est un graphe formé d'un cycle C_{n-1} avec un sommet supplémentaire connecté à tous les sommets.*

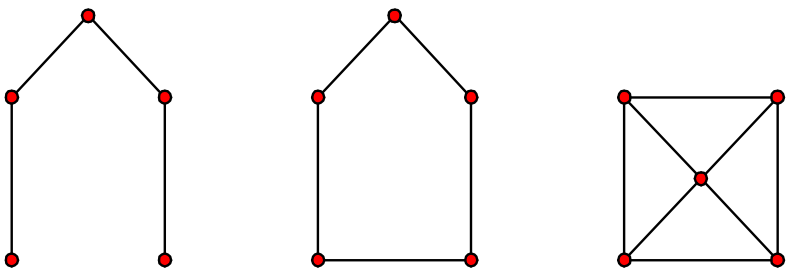


Figure 1.1.5 : Une chaîne, un cycle et une roue

1.1.12 Graphe complémentaire

Définition 1.1.17 *Le graphe complémentaire d'un graphe simple, noté* $\overline{G} = (V, \overline{E})$*, défini par* $V\ (\overline{G}) = V\ (G)$ *et* $E\left(\overline{G}\right) = \{u\ v : u \in V\,(G)\,,\ v \in V\ \ (G)\ \ et\ u\ v\ \notin E(G)\ \}$

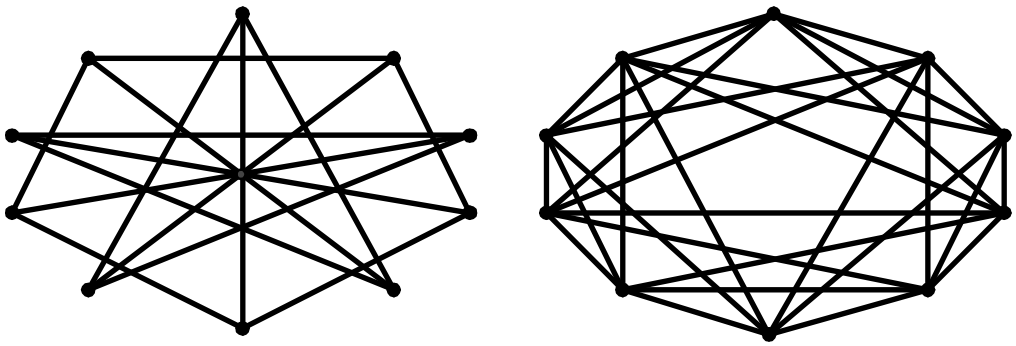


Figure 1.1.6: Le graphe de *Petersen* à gauche et son complémentaire à droite.

Remarque 1.1.1 *La superposition de* G *et* $\overline{G}$ *donne un graphe complet. Voir la Figure 1.1.7, qui illustre un* C_5 *,* $\overline{C}_5$ *et* K_5*.*

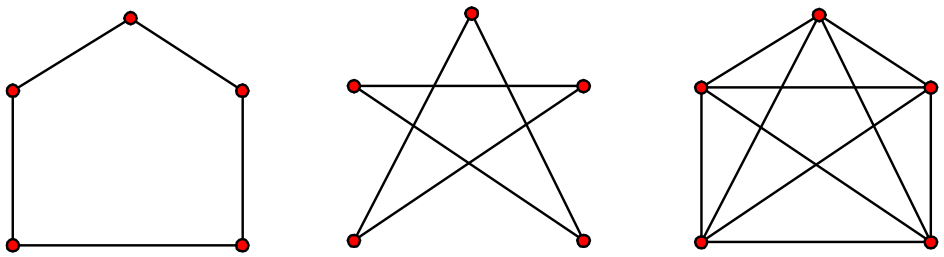


Figure 1.1.7: Le graphe C_5, $\overline{C}_5$ et K_5

1.1.13 Arbre

Définition 1.1.18 *Un arbre* T *est un graphe connexe sans cycle. Les sommets de* T *de degré 1 sont appelés sommets pendants (ou feuilles), et les sommets adjacents à des feuilles sont des sommets supports. La Figure 1.1.8 représente un arbre de rayon 3 et de diamètre 6. Notons que tout arbre* T *vérifie :* $2rad(T) - 1 \leqslant diam(T) \leqslant 2rad(T)$*.*

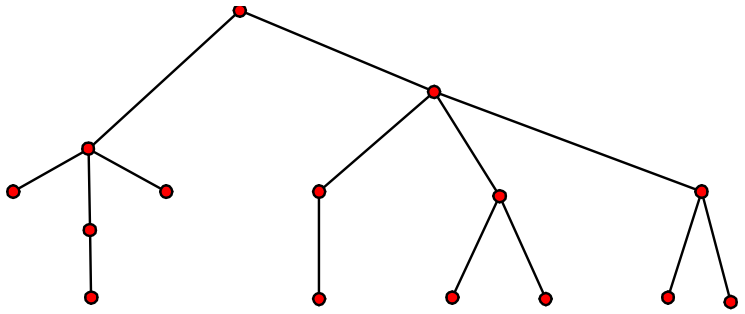


Figure 1.1.8: Un arbre T avec $rad(T) = 3$ et $diam(T) = 6$

1.1.14 Étoile et étoile double

Définition 1.1.19 *Une étoile est un arbre où seul un sommet est de degré supérieur à 1 et est notée S_n.*

L'étoile double, notée $S_{p,q}$, est le graphe obtenu en reliant par une arête le sommet central de l'étoile S_p au sommet central de l'étoile S_q.

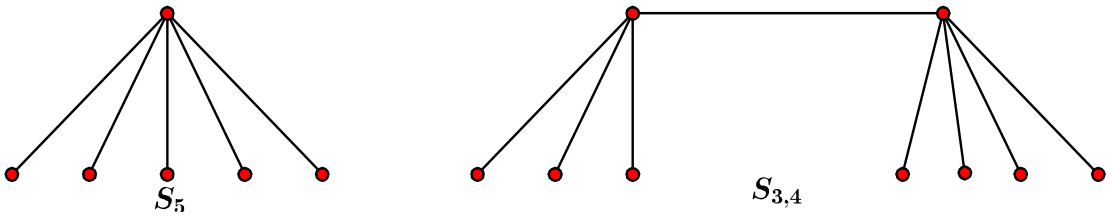


Figure 1.1.9: Une étoile et une étoile double

Avec: Le sommet central de l'étoile S_p est le sommet u de dégré maximum p.

1.1.15 Produit cartésien [6]

Définition 1.1.20 *Soit $G = (V(G),\ E(G))$et $H = (V(H),\ E(H))$ deux graphes, le produit cartésien ou la somme cartésienne de G et H, notée par $G\square H$, est le graphe défini par :*

$1_V(G\square H) = \{(u, v) : u \in V(G) \text{ et } v \in V(H)\}$.

$2_E(G\square H) = (u_1,\ v_1)(u_2,\ v_2) : (u_1 = u_2 \text{ et } v_1v_2 \in E(H)) \text{ ou } (v_1 = v_2 \text{ et } u_1u_2 \in E(G)\}$.

Le produit cartésien d'une étoile $K_{1,3}$ et une chaine P_4.

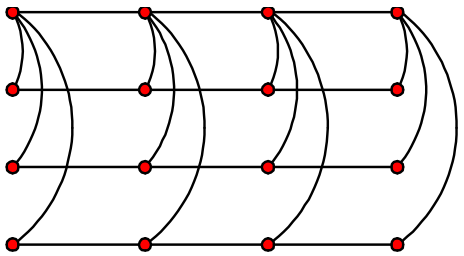


Figure 1.1.10: Le graphe $K_{1,3} \square P_4$

Exemple 1.1.2 *Le produit cartésien d'une étoile $K_{1,3}$ et un cycle C_4.*

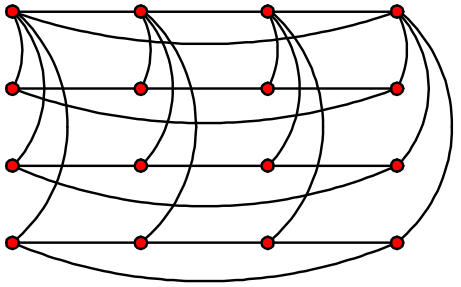
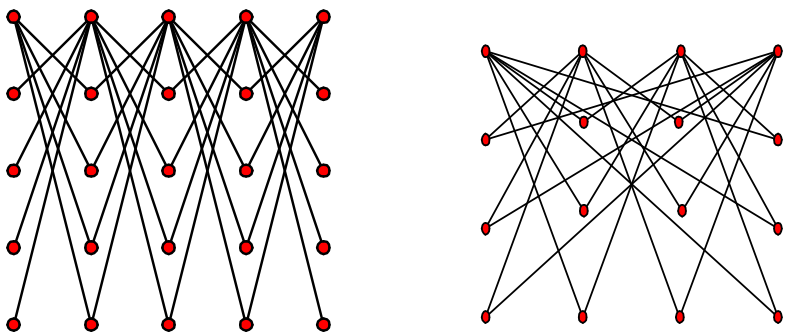


Figure 1.1.11: Le graphe $K_{1,3} \square C_4$

1.1.16 Prroduit croisé [6]

Définition 1.1.21 *Soient $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ deux graphes. Le produit direct (ou croisé) de G_1 et G_2 , noté $G_1 \times G_2$ est le graphe ayant comme ensemble des sommets $\{(u, v)\ u \in V_1$ et $v \in V_2\}$. Deux sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) de $G_1 \times G_2$ sont adjacent si et seulement si u_1 est adjacent à u_2 dans G_1 et v_1 est adjacent à v_2 dans G_2.*

Exemple 1.1.3 *La Figure 1.1.12 représente le produit croisé d'une étoile et une chaine (Figure (a)), et d'une étoile et un cycle (Figure (b)).*



Figure(a) : Graphe $K_{1,4} \times P_5$ Figure (b): Graphe de $K_{1,3} \times C_4$

Figure 1.1.12

1.1.17 Isthme

Définition 1.1.22 *Un isthme ou un pont est. Une arête d'un graphe est un isthme si sa suppression augmente le nombre de composantes connexes que le graphe initial.*

1.1.18 Distance, Excentricité, Diamètre et rayon

Définition 1.1.23 *La distance entre deux sommets u et v d'un graphe G, notée $d_G(u, v)$, est la longueur d'une plus courte chaîne qui relie u à v. Si aucune chaîne ne relie u et v, on définit par convention $d_G(u, v) = \infty$.*

Définition 1.1.24 *L'excentricité d'un sommet u d'un graphe G, notée $e_G(u)$, est la plus grande des distances $d_G(u, v)$ où $v \in V(G)$, c'est-à-dire $e(u) = \max_{v \in V(G)} d_G(u, v)$*

Définition 1.1.25 *L'excentricité maximum sur tous les sommets de G est appelée le diamètre de G, et est notée $diam(G)$. En d'autres termes, $diam(G)$ représente la plus grande distance entre deux sommets quelconques de G. L'excentricité minimum sur tous les sommets de G est appelée le rayon de G, et est noté $rad(G)$. Pour le graphe illustré dans la Figure 1.1.13, $diam(G) = 5$ et $rad(G) = 3$.*

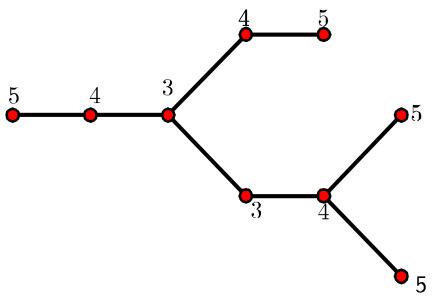


Figure 1.1.13: Présentation d'un graphe G et des excentricités de ses sommets

1.1.19 Graphe joint

Définition 1.1.26 *Soient G_1 et G_2 deux graphes. Le graphe $G_1 \vee G_2$ défini par l'ensemble de sommets $V(G_1) \cup V(G_2)$ et l'ensemble d'arêtes $E(G_1) \cup E(G_2)$ et l'ensemble de toutes les*

arêtes possibles joignant les sommets de $V(G_1)$ à $V(G_2)$, est appelé le graphe joint de G_1 et G_2.

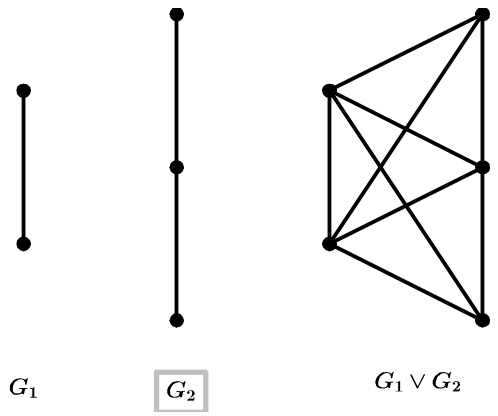


Figure 1.1.14: Le graphe joint de G_1 et G_2

1.1.20 Graphe subdivisé

Définition 1.1.27 *Le graphe subdivisé de G, noté $S(G)$, est obtenu à partir de G en remplaçant chaque arête $e = v_i v_j$ de G par un nouveau sommet $v_{i,\,j}$ et deux arêtes $v_i v_{i,\,j}$ et $v_j v_{i,\,j}$.*

1.1.21 Graphe connexe, graphe $k-$connexe

Définition 1.1.28 *Un graphe non orienté est connexe s'il y a une chaîne entre n'importe quelle paire de sommets distincts du graphe.*

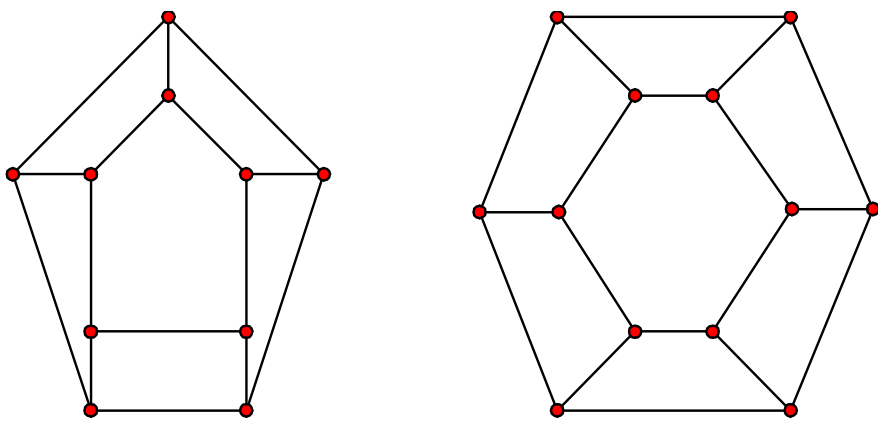
Définition 1.1.29 *un graphe connexe est dit $k-$connexe*

- Quels que soient les $k-1$ sommets supprimés, G reste connexe.
- Il est possible de supprimer k sommets "bien choisis" pour disconnecter G (Devenir non connexe).

Le graphe cycle C_n est $2-$connexe pour tout $n \geq 3$.

1.1.22 Graphe prisme d'un cycle Y_n [15]

Définition 1.1.30 *Un graphe prisme d'un cycle noté par Y_n est un graphe obtenu en prenant deux cycles disjoints C_n (cycle intérieur et cycle extérieur), et on ajout des arêtes $u_iu_{i'}$ pour i, $i' \in \{1, 2, ..., n\}$, $u_i = u_{i'}$ avec :* u_i *les sommets du cycle intérieur.* $u_{i'}$ *les sommets du cycle extérieur.*



$\boldsymbol{Y_5}$ $\boldsymbol{Y_6}$

Figure 1.1.15: Graphes Prisme Y_5 et Y_6

1.1.23 Graphe TADPOLE $T_{p,n}$ [8].

Définition 1.1.31 *Le graphe Tadpole $T_{p,n}$ (graphe têtard), est le graphe obtenu en joignant l'une des extrémité de la chaîne P_n à un sommet d'un cycle C_p par isthme.*

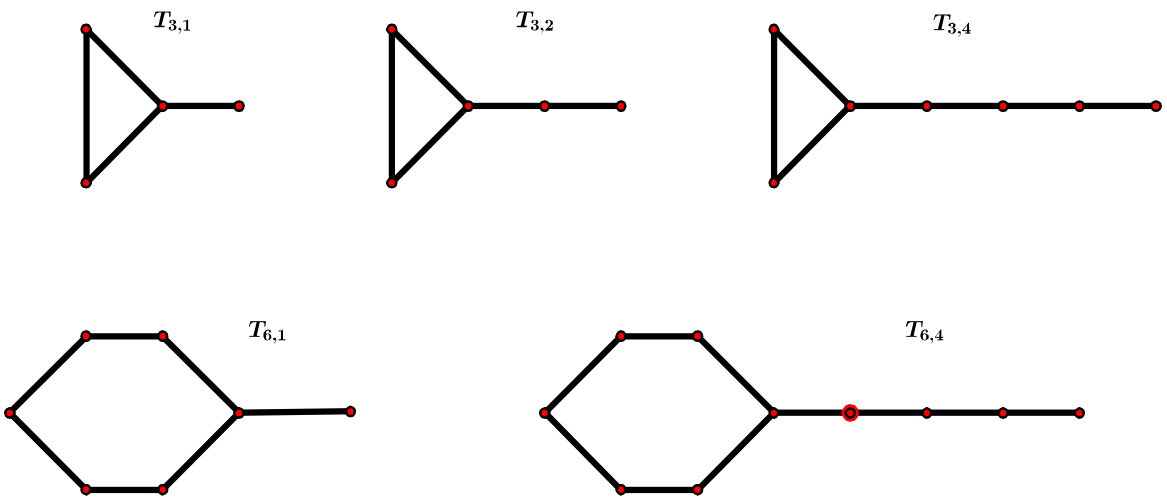


Figure 1.1.16: Graphes Tadpole

1.2 Quelques invariants de graphes

1.2.1 Nombre de stabilité

Définition 1.2.1 *Un stable S dans un graphe G est un sous-ensemble de sommets de G tel que $G[S]$ est un graphe sans arêtes. Le nombre de stabilité $\alpha(G)$ de G est le cardinal maximal d'un stable dans G : $\alpha(G) = max\{|S| : S \text{ est un stable de } G\}$.*

1.2.2 Transversal, Couplage, Recouvrement

Définition 1.2.2 *Un transversal d'un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble T de sommets de V qui couvre toutes les arêtes de G. Notons qu'un transversal existe pour tout graphe et si T est un transversal alors $V - T$ est un stable. Un transversal minimum est un transversal qui a le plus petit nombre possible de sommets. la cardinalité d'un transversal minimum est appelée nombre transversal, notée $\tau(G)$.*

Définition 1.2.3 *Etant donné un graphe $G(V, E)$, on appelle un couplage M dans G un sous – ensemble d'arêtes de E deux à deux non adjacentes. Un couplage maximum est un couplage de taille maximale. On désigne par $\beta(G)$ la taille d'un couplage maximum dans G.*

Un sommet x de G est dit saturé par le couplage M, s'il existe une arête de M incidente à x. Un couplage qui sature tous les sommets de G est appelé un couplage parfait dans G, sinon, x est dit insaturé par M .

Définition 1.2.4 *Etant donné un graphe simple G (V, E) sans sommet isolé. On appelle recouvrement de G un ensemble R d'arêtes de E qui couvre tout les sommets de G. Un recouvrement minimum est un recouvrement de cardinalité minimum. On désigne par $\upsilon(G)$ la taille minimum d'un recouvrement de G.*

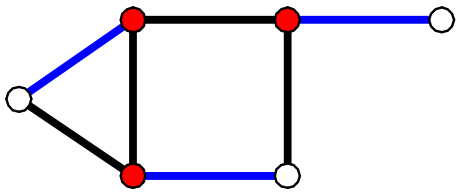


Figure 1.1.17 : Un graphe G.

Pour le graphe G illustré dans la Figure 1.1.17, l'ensemble des sommets en rouge représente un stable S de cardinalité maximum, l'ensemble des sommets noirs représente un transversal T de cardinalité minimum. L'ensemble des arêtes en bleu représente un recouvrement de cardinalité minimum $\upsilon(G)$. D'où $\alpha(G) = \tau(G) = \omega(G) = \upsilon(G) = 3$.

1.2.3 Nombre de clique

Définition 1.2.5 *Une clique K dans un graphe G est un sous-graphe de G tel que K est un graphe complet. Le nombre de clique $\omega(G)$ de G est le cardinal maximal d'une clique dans G : $\omega(G) = max\ \{|K| : K\ est\ une\ clique\ de\ G\}$.*

1.3 La coloration dans les graphes

1.3.1 Coloration des sommets

Définition 1.3.1 *On appelle coloration des sommets d'un graphe, toute attribution d'une couleur a chaque sommet (est une fonction $c : V \rightarrow \{1, 2, 3, .., k\}(k \in N)$).*

Une coloration est propre si chaque deux sommets voisins portent des couleurs différentes $(c\ (v) \neq c\ (w), \forall v, w \in V$ adjacents).

G est k−colorable si on peut colorer ses sommets avec k couleurs distinctes, sans que deux sommets voisins aient la même couleur.

Etant donné un graphe $G = (V, E)$. Une coloration triviale de G consiste à attribuer à chacun de ses sommets une couleur différente. Ainsi, tout graphe à n sommets admet une n−coloration. Donc il est naturel de se demander quel est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer G. D'où la définition du nombre chromatique de G.

1.3.2 La coloration de packing

Définition 1.3.2 *Une coloration de packing d'ordre k dans G, est une fonction $c : V \longrightarrow \{1, \ldots, k\}$ telle que si $c(u) = c(v)$ implique que la distance entre u et v soit supèrieure à $c(u)$.*

1.3.3 Le nombre chromatique

Définition 1.3.3 *Le nombre chromatique d'un graphe G, noté $\chi(G)$ est le plus petit nombre de couleurs nécessaires a une coloration propre des sommets de G.*

On le définit comme étant le plus petit entier k tel que G admet une k−coloration, il est dit aussi que G est $\chi(G)$−chromatique

Définition 1.3.4 *Une classe de couleur i est un ensemble stable de sommets de V colorés avec la même couleur i.*

Définition 1.3.5 *L'ordre minimum d'une coloration de packing est appelé le nombre de la coloration de packing de G et est noté par $\chi_p(G)$.*

Exemple 1.3.1 *: $G = P_3$ est 2− colorable, $\chi(G) = 2$.*

Remarque 1.3.1 *: Soit G un graphe d'ordre n. Il est clair que : $1 \leq \chi(G) \leq n$.*

- *$\chi(G) = 1$ si et seulement si G est un graphe discret.*
- *$\chi(G) = n$ si et seulement si G est un graphe complet.*

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 \text{ si } n \text{ est pair,} \\ 3 \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

1.3.4 Bornes sur le nombre chromatique :

Proposition 1.3.1 *[7] Si H est un sous-graphe de G,*

$$\chi(H) \leq \chi(G).$$

Proposition 1.3.2 *[13] Pour tout graphe G,*

$$\chi(G) \geq \omega(G).$$

où $\omega(G)$ est la taille d'une clique maximum de G.

Proposition 1.3.3 *[16] Pour tout graphe G d'ordre n,*

$$\left\lceil \frac{n}{\alpha(G)} \right\rceil \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

oú $\alpha(G)$ est le nombre de stabilité de G, et $\Delta(G)$est le degré maximum de G.

Proposition 1.3.4 *[4] Soit $G = (V, E)$un graphe simple d'ordre n,*

$$\chi(G) + \alpha(G) \leq n + 1.$$

Théorème 1.3.1 *[14] Soit G un graphe d'ordre n et $\overline{G}$ son complémentaire,*

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1.$$

1.3.5 Classes de complexité

La théorie de la complexité repose sur la définition de classes de complexité qui permettent de classer les problèmes en fonction de la complexité des algorithmes qui existent pour les résoudre.

Classe P

Un problème **Q** est dans la classe **P** s'il existe un algorithme déterministe en temps polynomial qui résout **Q**.

En revanche, un algorithme **non déterministe** est un algorithme pour lequel un état peut déterminer de nombreux états suivants simultanément. On peut considérer un algorithme non déterministe ayant la capacité de se ramifier en plusieurs copies de lui-même, un pour chaque état suivant. Ainsi, alors qu'un algorithme déterministe doit explorer un ensemble d'alternatives une à la fois, un algorithme non déterministe examine toutes les alternatives en même temps.

Les problèmes dans P correspondent en fait à tous les problèmes facilement solvables.

Classe NP

Un problème **Q** est dans la classe **NP** s'il existe un algorithme en temps polynomial non déterministe ce qui résout **Q**. Clairement $P \subseteq$**NP**.

Parmi les problèmes de **NP** sont ceux qui sont les plus difficiles dans le sens que si l'on peut être résolu en temps polynomial, alors tout problème peut aussi dans NP. Ce sont des problèmes **NP-complets**.

La classe NP-complet a des propriétés très intéressantes.

(a) Aucun problème **NP**-complet peut être résolu par un algorithme polynomial connu.

(b) S'il existe un algorithme polynomial pour tout problème **NP**-complet, alors il existe des algorithmes polynomiaux pour tous les problèmes **NP**-complets.

- On constate, immédiatement, que $P \subset NP$.

Problème NP-Complet

L'état des algorithmes est constitué des valeurs actuelles de toutes les variables et l'emplacement de l'instruction en cours à exécuter. Un **algorithme déterministe** est celui pour lequel chaque état, lors de l'exécution de l'instruction, détermine uniquement au plus l'un des états suivants. Tous les ordinateurs qui existent maintenant fonctionnent de façon déterministe.

Il existe un certain nombre de problèmes de calcul intéressants pour lesquels il n'a pas été prouvé s'il existe ou non un algorithme polynomial. Plus d'entre eux sont «**NP-complet**», que nous expliquerons brièvement dans cette section.

Classe NP-complet

- Un problème est NP-**difficile** si ce problème est au moins aussi dur que tous les problèmes dans NP. Par exemple, la détermination du nombre chromatique d'un graphe arbitraire est un problème NP-**difficile** dans le cas général.
- Parfois, nous pouvons être en mesure de montrer que, si le problème **Q** est résolu en temps polynomial, alors tous les problèmes de **NP** le sont, mais nous ne pouvons pas argumenter

que $Q \in NP$. Donc, **Q** n'est pas qualifié pour être appelé **NP-complet**. Pourtant, **Q** est sans aucun doute aussi difficile que n'importe quel problème dans **NP**. Un tel problème **Q** est appelé **NP-dur**.

Chapitre 2

Quelques résultats obtenus sur le nombre chromatique de packing

Dans ce chapitre, nous exposons la coloration de packing de certains graphes et nous citons les valeurs exactes du nombre chromatique de packing des graphes simples, à savoir : les chaînes, les cycles, les arbres, les étoiles, la couronne d'un graphe et graphe splitting .

2.1 Motivation et définition du problème de la coloration de packing

Le problème de la coloration de packing a été posé suite à l'établissement de nombreux régles et réglements par la Commission des Communications des Etats-Unis concernant l'attribution des fréquences de radio-diffusion à des stations de radio. En particulier, deux stations de radio qui sont affectées de la même fréquence de diffusion doivent être localisées suffisamment loin l'une de l'autre pour que la diffusion de l'une n'altére pas la réception de l'autre. La distance géographique entre deux stations qui sont affectées de la même fréquence est donc directement liée à la puissance de leurs signaux de radio-diffusion.

2.1.1 i-packing

Définition 2.1.1 *Un sous ensemble de sommets V_i d'un graphe $G = (V, E)$ est dit $i-$packing si et seulement si la distance entre deux sommets quelconques de V_i est supérieure à i.*

Définition 2.1.2 *Soit $G = (V, E)$ un graphe et $k \in \mathbb{N}^{\star}$. La fonction $f : V \to \{1, ..., k\}$ est appelée coloration de packing d'ordre k si l'égalité $f\ (u) = f\ (v)$ implique $d\ (u, v) > f\ (u)$.*

L'ordre minimum d'une coloration de packing de G est appelé le nombre chromatique de packing, et il est noté par $\chi_p(G)$. La coloration de packing est donc une partition $P_\pi = \{V_1, V_2, ..., V_k\}$ de V en k $(1 \leq i \leq k)$ $i-$packing. Notons que toute coloration de packing est une coloration propre et donc $\chi(G) \leq \chi_{_p}(G)$.

Dans tout ce qui suit, nous supposons que les graphes sont simples.

2.1.2 Coloration de packing de certains graphes particuliers

Tout graphe G d'ordre n admet une coloration de packing d'ordre n, il est possible d'affecter n entiers distincts, entre 1 et n, à chaque sommet de V. Ainsi, une borne supérieure naturelle serait l'ordre du graphe qui n'est pas forcément la meilleure.

Proposition 2.1.1 *[7] Pour $2 \leq n \leq 3$, $\chi_{_p}(P_n) = 2$, et pour $n \geq 4, \chi_{_p}(P_n) = 3$.*

l'affectation des couleurs $1, 2, 1, 3, ...$ aux sommets $u_1, u_2, ..., u_n$ de P_n représente une coloration de packing minimum.

Proposition 2.1.2 *[7] Pour les cycles C_n,*

$$\chi_{_p}(C_n) = \begin{cases} 3 & si\ n \equiv 0(\mathrm{mod}\,4)\ ou\ n = 3, \\ 4 & sinon. \end{cases}$$

la coloration de packing optimale est donnée par l'affectation aux sommets $v_1, ..., v_n$ de C_n les séquences des couleurs :

$$\begin{aligned} 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 3, ..., 1, 2, 1, 3 \quad si\ n &= 4r. \\ 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 3, ..., 1, 2, 1, 3, 4 \quad si\ n &= 4r + 1. \\ 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 3, ..., 1, 2, 1, 3, 1, 4 \quad si\ n &= 4r + 2. \\ 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 3, ..., 1, 2, 1, 3, 1, 2, 4 \quad si\ n &= 4r + 3. \end{aligned}$$

Proposition 2.1.3 *[7] Soit G un graphe complet, $\chi_{_p}\ (K_n) = n$.*

Proposition 2.1.4 *[7] Pour tout graphe G, $\chi_{_p}(G) \leq \tau(G)+1$, avec égalité si G a diamètre deux.*

Proposition 2.1.5 *[7] Si G est un graphe biparti de diamètre 3. Alors :*

$$\tau(G) \leq \chi_{_p}(G) \leq \tau(G)+1.$$

Proposition 2.1.6 *[7] Pour tout graphe G,*

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \chi_{_p}(G).$$

Où $\omega(G)$ est la taille maximun d'une clique.

Proposition 2.1.7 *[7] Soit G un graphe. Si $\chi(G) = \chi_{_p}(G)$, alors : $\omega(G) \geq \chi(G) - 2$.*

Proposition 2.1.8 *[7] Pour tout graphe connexe G, $\chi_{_p}(G) = 2$ si et seulement si G est une étoile.*

Proposition 2.1.9 *[3] Pour tout $n \geq 3$,*

$$\chi_{_p}(S(K_n)) = n+1.$$

Proposition 2.1.10 *[3] Pour tout graphe connexe G avec au moins trois sommets,*

$$\omega(G)+1 \leq \chi_{_p}(S(G)) \leq \chi_{_p}(G)+1.$$

Où $S(G)$ est le graphe obtenu en subdivisant toutes les arêtes de G.

Proposition 2.1.11 *[7] Pour tout sous graphe H d'un graphe G,*

$$\chi_{_p}(H) \leq \chi_{_p}(G).$$

2.1.3 Graphes avec petit nombre de la coloration de packing

En utilisant le fait qu'un graphe G tel que $\chi_{_p}(G) = 2$ ne contient pas P_4 comme sous-graphe induit et vérifie $diam(G) \leq 2$, alors d'après la Proposition **2.1.4**, on a forcément $\tau(G) = 1$ c.à.d que G est une étoile. D'où la caractérisation des graphes de nombre chromatique de packing égal à 2.

Proposition 2.1.12 *[7] Pour un graphe connexe G, $\chi_p(G) = 2$ si et seulement si G est une étoile.*

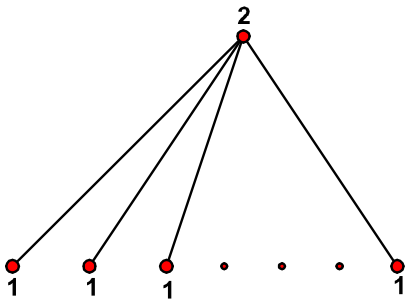


Figure 2.1.1: Graphe $K_{1,n}$,
$\chi_p(K_{1,n}) = 2$.

Proposition 2.1.13 *[7] Soit G un graphe $2-$connexe. Alors $\chi_p(G) = 3$ si et seulement si $G = S(H)$ où H est un multi-graphe biparti ou G est le joint de K_2 et d'un stable. Pour un sommet v, on définit un $T-$ajout de v comme étant l'opération qui consiste à ajouter un sommet w_v, un stable X_v, l'arête vw_v et quelques arêtes entre $\{v, w_v\}$ et X_v. Voir la Figure 2.1.2.*

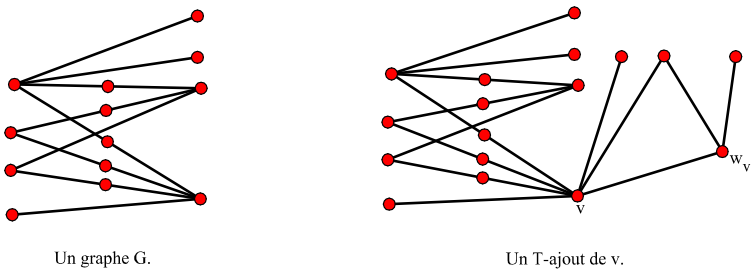


Figure 2.1.2 : Un graphe G est un $T-$ajout du sommet v.

Proposition 2.1.14 *[7] Soit G un graphe. $\chi_p(G) = 3$ si et seulement si G peut être formé en prenant un certain multigraphe biparti H avec bipartition (V_2, V_3), en subdivisant chaque arête exactement une fois, en ajoutant des feuilles à certains sommets dans $V_2 \cup V_3$, puis en effectuant un seul T-ajout à certains sommets de V_3.*

2.1.4 Coloration de packing pour les arbres

Nous nous intéressons aux arbres avec un nombre de coloration packing très grand. Pour cela, il est nécessaire d'examiner les petits cas. Un arbre de diamètre 2 (étoile) a un nombre chromatique packing égal à 2. Un arbre de diamètre 3 a un nombre chromatique packing 3. Le cas d'un arbre de diamètre 4 est plus compliqué, mais **Goddard et al** [7] ont pu donner une formule explicite basée sur le sommet central et leurs voisins de degré 1, 2 et 3 et de degré supérieur ou égal à 4. Pour cela on définit un sommet faible s'il est de degré inférieur ou égal à 3 et un sommet fort s'il est de degré supérieur ou égal à 4.

Soit T un arbre de diamètre 4 avec un sommet central v. Pour $i = 1, 2, 3$, soit n_i le nombre de voisins de v de degré i et soit L le nombre de degré max de v, alors nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.1.15 *[7] Soit T un arbre de diamètre 4. Si $L = 0$, alors :*

$$\chi_p(T) = \begin{cases} 4 & si \quad n_3 \geq 2 \quad et \quad n_1 + n_2 + n_3 \geq 3, \\ 3 & sinon. \end{cases}$$

et si $L > 0$, alors :

$$\chi_p(T) = \begin{cases} L+3 & si \quad n_3 \geq 1 \quad et \quad n_1 + n_2 + n_3 \geq 2, \\ L+1 & si \quad n_1 = n_2 = n_3 = 0, \\ L+2 & sinon. \end{cases}$$

Proposition 2.1.16 *[7] L'ordre minimum d'un arbre avec $\chi_p(T) = 2$ est 2. Pour $\chi_p(T) = 3$ c'est 4 et pour $\chi_p(T) = 4$ c'est 8. En outre, P_4 est l'arbre unique de 4 sommets qui ont besoin de 3 couleurs. Les deux arbres de 8 sommets qui ont besoin de 4 couleurs sont :*

(*i*) *l'arbre de diamètre 4 avec $n_3 = 2$, $n_1 = 1$ et $L = n_2 = 0$, appelé A_8.*

(*ii*) *l'arbre de diamètre 5 où les deux sommets centraux ont le degré 3 et pour chaque sommet central 3 sommets voisins de degrés 1, 2 et 3 respectivement, appelé B_8.*

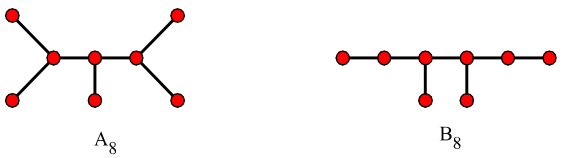


Figure 2.1.3 : Les plus petits arbres avec $\chi_p(T) = 4$.

Proposition 2.1.17 *[7] Soit T un arbre différent de P_4. Supposons T contient une chaîne $\{t\ u\ v\ w\}$ où t est de degré 1. u et v ont le degré 2. Alors : $\chi_p(T) = \chi_p(T - t)$.*

Théorème 2.1.1 *[7] Pour tout arbre T d'ordre n,*

$$\chi_p(T) \leq (n + 7)/4$$

excepter quand $n = 4$ ou 8, et cette borne est atteinte.

2.2 Coloration de packing de la couronne d'un graphe

Dans cette section, nous exposons des valeurs exactes du nombre chromatique de packing des couronnes des chaînes et des cycles, déterminées par [12]. Des valeurs exactes, et des bornes sur les différentes classes de chenilles sont énoncées. On définit la couronne d'un graphe G, notée $Cr(G)$, est le graphe obtenu à partir d'une copie de G dans laquelle on attache un sommet pendant à chaque sommet de G.

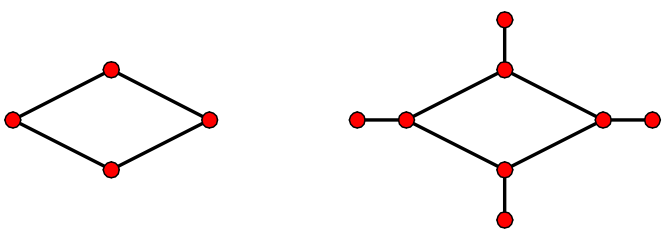


Figure 2.2.1 : Un graphe C_4 et sa couronne.

2.2.1 La couronne d'une chaine

Soit $P_n = \{x_1, ..., x_n\}$ une chaine de longueur n et $Cr(P_n)$ la couronne de P_n. Notons par $y_1, ..., y_n$ les sommets pendants adjacents aux sommets $x_1, ..., x_n$ respectivement.

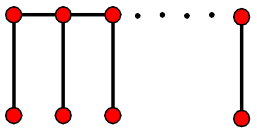


Figure 2.2.2 : La couronne de P_n.

Proposition 2.2.1 *[12] Pour tout entier n, $n \geq 10$,*

(1) *Pour $n = 2$, $\chi_p(Cr(P_n)) = 3$.*

(2) *Pour $n \in \{3, ..., 9\}$, $\chi_p(Cr(P_n)) = 4$.*

(3) *Pour $n \geq 10$, $\chi_p(Cr(P_n)) = 5$.*

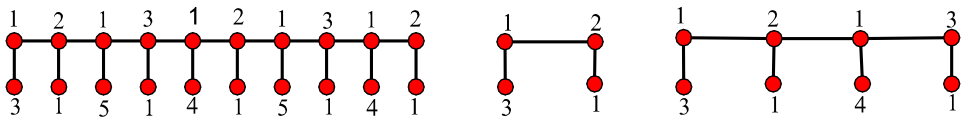


Figure 2.2.3: Coloration de packing de $Cr(P_{10})$, $Cr(P_2)$ et $Cr(P_4)$.

2.2.2 La couronne d'un cycle

Soit $Cr(C_n)$ la couronne d'un cycle $C_n = \{x_1, ..., x_n\}$ de longueur n. Notons par $y_1, ..., y_n$ les sommets pendants adjacents aux sommets de C_n.

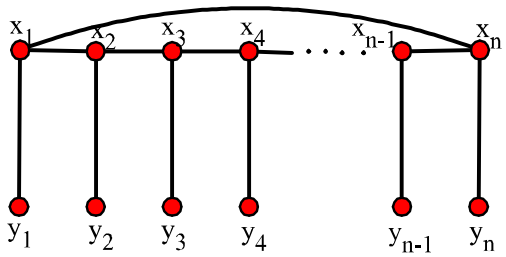


Figure 2.2.4: La couronne de C_n.

Pour la couronne du cycle, il y'a un résultat identique à celui de la couronne d'une chaîne. Pour les autres valeurs de n, le résultat est donné par la proposition suivante :

Proposition 2.2.2 *[12] Pour tout entier n,*

$$\chi_p\left(Cr\left(C_n\right)\right) = \begin{cases} 4 & si \quad n \in \{3,\ 4\}, \\ 5 & sinon. \end{cases}$$

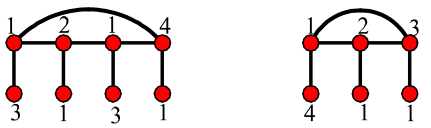


Figure 2.2.5: Coloration de packing d'un $Cr(C_4)$ et $C_r(C_3)$.

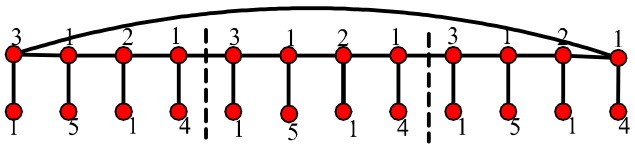


Figure 2.2.6 : $\chi_p(Cr(C_{12})) = 5$.

2.3 Détermination du nombre chromatique de packing de graphe splitting

Définition 2.3.1 *[17] Pour un graphe G, le graphe splitting d'un graphe G, noté par $S'(G)$,*

est obtenu en ajoutant un nouveau sommet v' correspondant à chaque sommet v de G, tel que le nombre de voisins de v dans G est égal le nombre de voisins de v' dans $s'(G)$.

2.3.1 La coloration de packing de graphe splitting pour les chaines

Proposition 2.3.1 *[10] Pour tout n, $\chi_p(S'(P_n)) \leq 7$.*

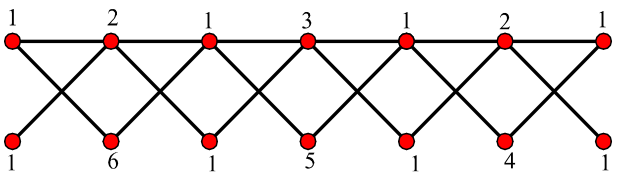


Figure 2.3.1 : Le graphe splitting de P_7.

2.3.2 La coloration de packing de graphe splitting pour les cycles

Proposition 2.3.2 *[10] Pour $n \leq 19$, $\chi_p(S'(C_n)) \leq 8$, et pour $n \geq 20$, si $n \cong 0(\mathrm{mod}\, 4)$, alors $\chi_p(S'(C_n)) = 7$.*

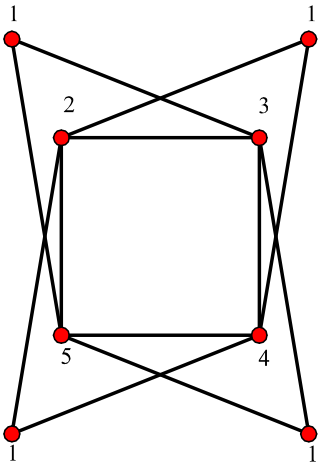


Figure 2.3.2 : Splitting de C_4.

2.3.3 La coloration de packing de graphe splitting de l'étoile

Proposition 2.3.3 *[19] Soit $K_{1,n}$, $n \geq 2$ une étoile avec n sommets. Alors $\chi_p(S'(K_{1,n})) = 3$.*

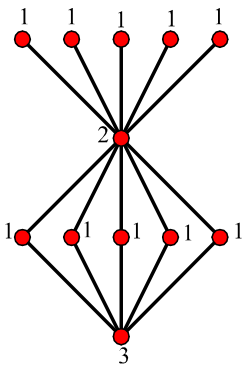


Figure 2.3.3 : Splitting d'une étoile.

2.3.4 La coloration de packing de graphe splitting de l'étoile double

Théorème 2.3.1 *[9] Pour le graphe $S'(S_{p,q})$, $\chi_p(S'(S_{p,q})) = 4$.*

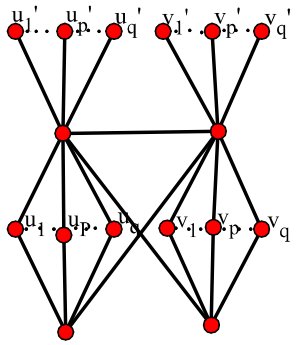


Figure 2.3.4 : Splitting d'une étoile double.

2.3.5 La coloration de packing de graphe splitting pour les graphes complets

Proposition 2.3.4 *[11] Pour K_n, $\chi_p(S^{'}(K_n)) = n + 1$.*

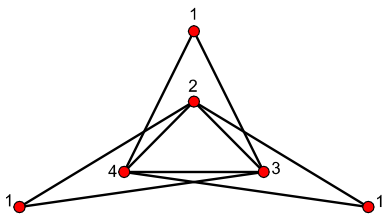


Figure 2.3.5 : Graphe Splitting de K_3.

Chapitre 3

Détermination du nombre chromatique de packing de quelques types de graphes

Dans ce chapitre, nous donnons nos résultats sur la détermination du nombre chromatique de packing de quelques types de graphes.

3.1 Coloration de packing du produit croisé de deux graphes

3.1.1 Coloration de packing du produit croisé d'une étoile et une chaîne

Théorème 3.1.1 *Pour tout $n \geq 2$, $p \geq 3$,*

$$\chi_{_P}(K_{1,p} \times P_n) = \begin{cases} 2 \ si \ n = 2, \\ 3 \ sinon. \end{cases} .$$

Preuve.

Cas 1. Pour $n = 2$, le graphe $K_{1,p} \times P_n$ peut former sous forme de l'union de deux étoiles, donc: $\chi_{_P}(k_{1,\,p} \times P_n) = \chi_{_P}(k_{1,\,p})$. D'après la Proposition 2.1.12, $\chi_{_P}(k_{1,\,p}) = 2$.

D'ou : $\chi_{_P}(k_{1,\,p} \times P_n) = 2$.

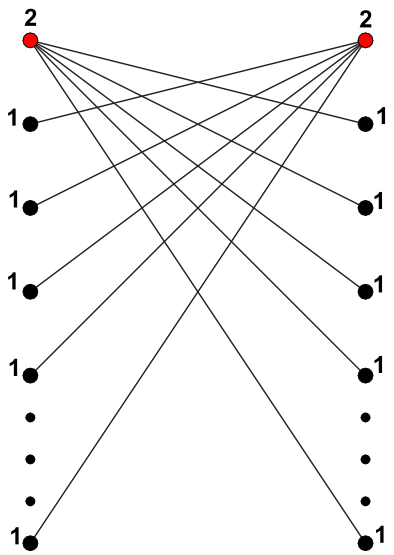


Figure 3.1.1: Graphe $k_{1,\,p} \times P_2, p \geq 3 : \chi_{_P}(k_{1,\,p} \times P_2) = 2$

Cas 2. Pour $n \geq 3$, le graphe de $K_{1,p} \times P_n$ contient un sous graphe induit C_4. D'après la Proposition 2.1.2, $\chi_{_P}(C_4) = 3$ et par la Proposition 2.1.11, $\chi_{_P}(C_4) \leq \chi_{_P}(K_{1,p} \times P_n)$. D'où $\chi_p(K_{1,p} \times P_n) \geq 3$.

Maintenant, montrerons que $\chi_{_p}(K_{1,p} \times P_n) \leq 3$. On utilise la coloration suivante :

On colore les np sommets de degré inférieur ou égal à 2 par 1, et on colore les n sommets de degré supérieur ou égal à p par la séquence de couleurs:

$$\begin{gathered} 223 \text{ si } n = 3 \\ 2233, ..., \text{ si } n \cong 0 \pmod 4 \\ 2233, ..., 2, \text{ si } n \cong 1 \pmod 4 \\ 2233, ..., 22, \text{ si } n \cong 2 \pmod 4 \\ 2233, ..., 223, \text{ si } n \cong 3 \pmod 4 \end{gathered}$$

■

Exemple 3.1.1 *Les deux figures suivantes représentent une coloration de packing de* $K_{1,p} \times P_n$, $n \cong 2 \pmod 4$ *et* $K_{1,3} \times P_5$.

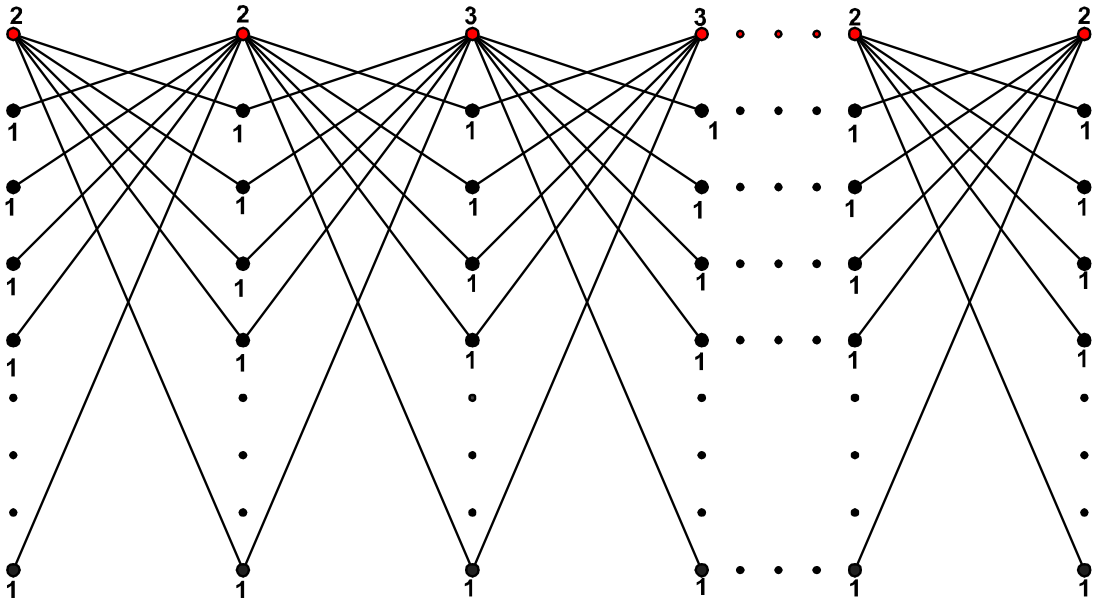


Figure 3.1.2: Graphe $K_{1,p} \times P_n, n \cong 2 \pmod 4$, $\chi_{_P}(K_{1,p} \times P_n) = 3$

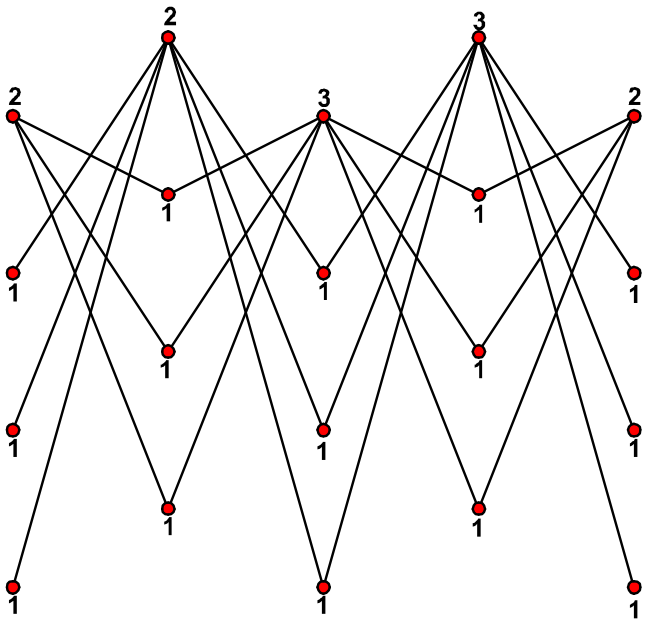


Figure 3.1.3: Graphe $K_{1,3} \times P_5$, $\chi_{_P}(K_{1,3} \times P_5) = 3$

3.1.2 Coloration de packing du produit croisé d'une étoile et un cycle

Théorème 3.1.2 *Pour tout $n \geq 3$, $p \geq 3$,*

$$\chi_{_P}(K_{1,p} \times C_n) = \begin{cases} 3 \text{ si } n \cong 0 \pmod 4 \text{ ou } n = 3, \\ 4 \text{ si } n \ncong 0 \pmod 4. \end{cases}$$

Preuve.

Cas 1: Pour $n \cong 0(\text{mod } 4)$ ou $n = 3$, le graphe $K_{1,p} \times C_n$ contient un sous graphe induit C_4. D'après la Proposition 2.1.2, $\chi_{_P}(C_4) = 3$ et par la Proposition 2.1.1, $\chi_{_P}(K_{1,p} \times C_n) \geq \chi_{_P}(C_4)$. D'où $\chi_p(K_{1,p} \times C_n) \geq 3$.

Pour montrer que $\chi_{_p}(K_{1,p} \times P_n) \leq 3$. On utilise la coloration suivante :

On colore les np sommets de degré 2 par 1, et on colore les n sommets de degré $2p$ comme suit :

$$232 \text{ si } n = 3$$

et par la séquence $2233, ...$ si $n \cong 0 \pmod 4$.

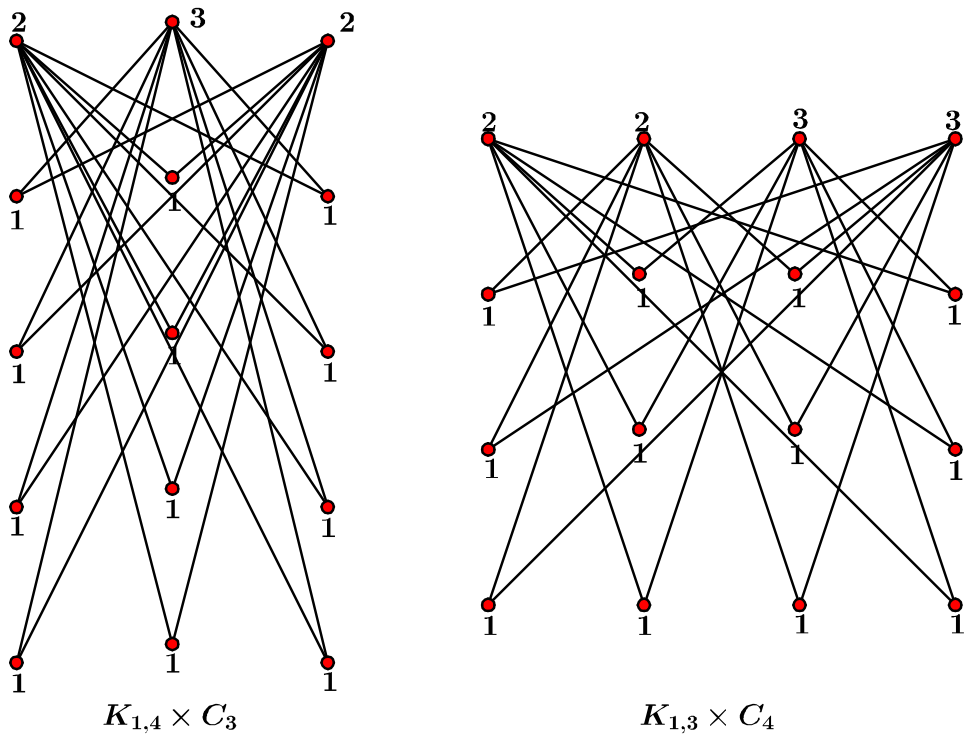


Figure 3.1.4: $\chi_{_P}(K_{1,4} \times C_3) = \chi_{_P}(K_{1,3} \times C_4) = 3$

Cas 2: Pour $n \ncong 0(\text{mod } 4)$, le graphe de $K_{1,p} \times C_n$ contient un sous graphe induit C_n n'est pas multiple de 4. D'après la Proposition 2.1.2, $\chi_{_P}(C_n) = 4$ et par la Proposition 2.1.11, $\chi_{_P}(K_{1,p} \times C_n) \geq \chi_{_P}(C_n)$.

D'où $\chi_p(K_{1,p} \times C_n) \geq 4$.

Maintenant, pour montrer que $\chi_{_p}(K_{1,p} \times C_n) \leq 4$, on utilise la coloration suivante :

On colore les np sommets de degré 2 par 1, et on colore les n sommets de degré $2p$ comme suit :

Si $n = 5$, alors on utilise la coloration suivante 22334.

Si $n > 5$, alors on utilise la coloration séquentielle suivante : $2233, ..., 44$

Les deux derniers sommets sont colorés par la couleur 4.

La figure suivante donne une coloratin de packing du graphe $K_{1,3} \times C_n, n \cong 3(\text{mod } 4)$.

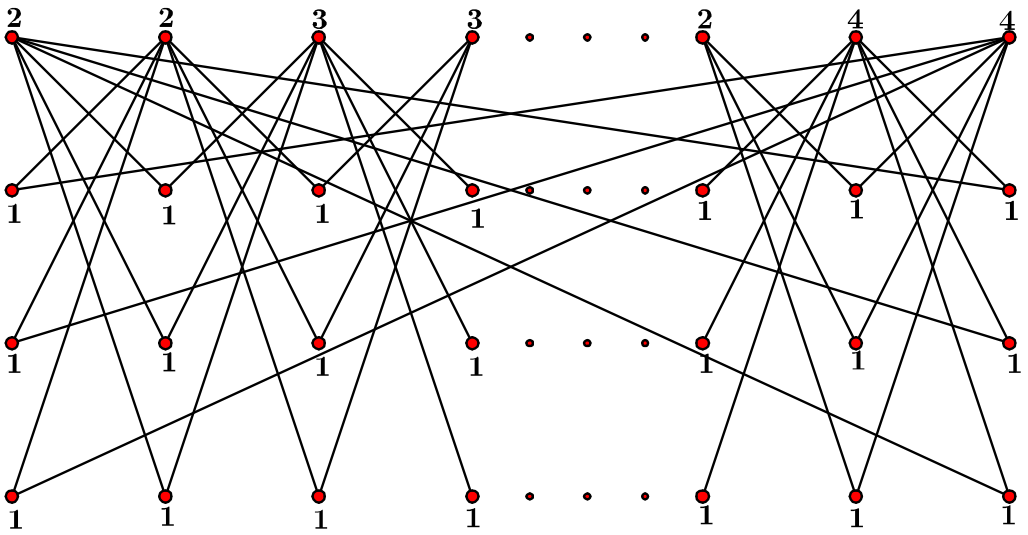


Figure 3.1.5: Graphe $K_{1,3} \times C_n$. $n \cong 3 \pmod 4$, $\chi_{_P}(K_{1,3} \times C_n) = 4$

Exemple 3.1.2 *Les figures suivantes donnent une coloration de packing de* $K_{1,5} \times C_8$ *et* $K_{1,3} \times C_9$.

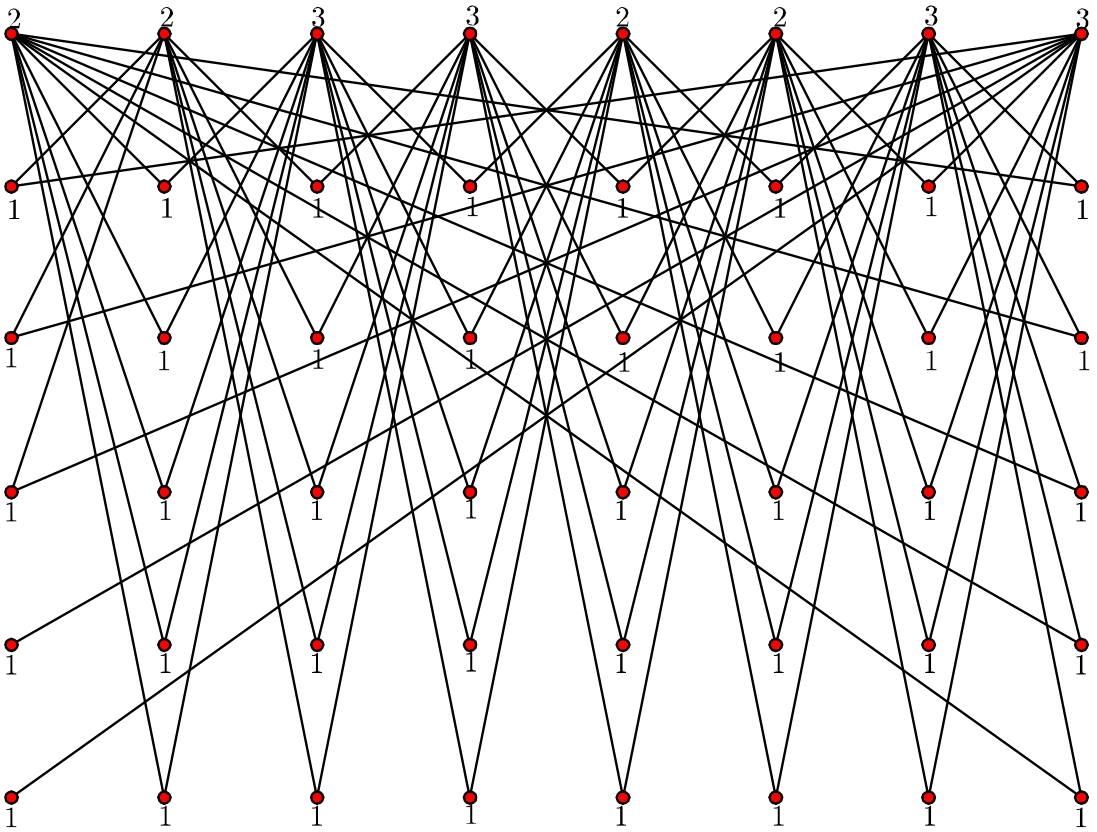


Figure 3.1.6: Graphe $K_{1,5} \times C_8$, $\chi_{_P}(K_{1,5} \times C_8) = 3$.

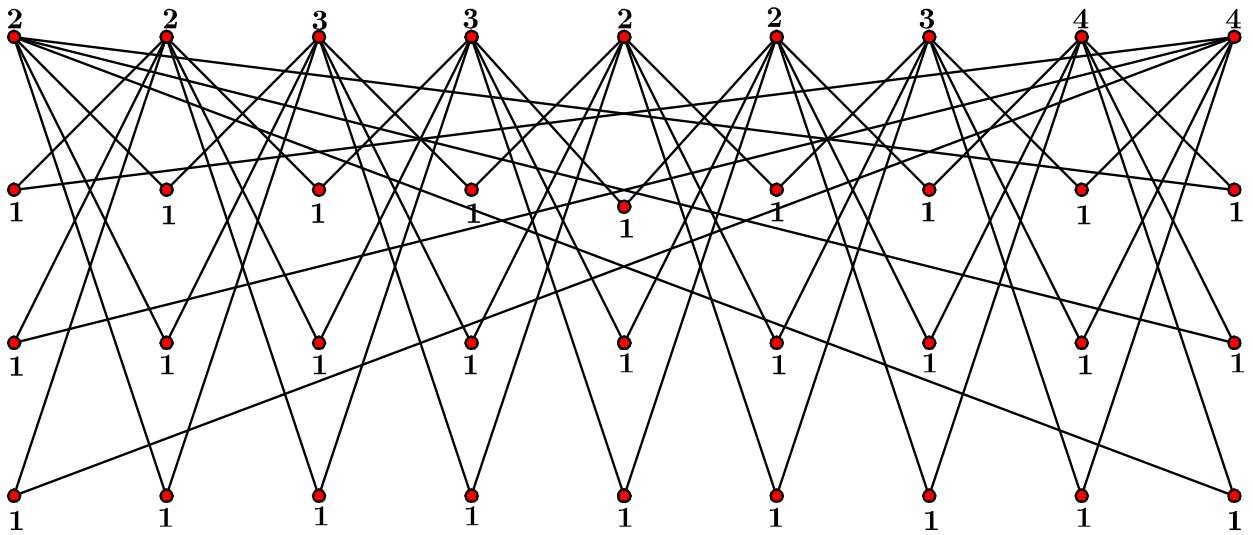


Figure 3.1.7: Graphe $K_{1,3} \times C_9$, $\chi_{_P}(K_{1,3} \times C_9) = 4$

3.2 Coloration de packing du graphe subdivisé super fini de qulques graphes

3.2.1 Graphe subdivisé super fini

Définition 3.2.1 *Soit G un graphe à n sommets et t arêtes. Le graphe obtenu en remplaçant chaque arête de G par un graphe biparti complet $K_{2,m}$ (m est fini) est appelé: graphe de subdivision super fini de G, noté $FSSD_m(G)$.*

Remarque 3.2.1 *Pour $m = 1$, le graphe $FSSD_m(G)$ est également le graphe $S(G)$.*

3.2.2 Coloration de packing du graphe subdivisé super fini du produit croisé d'une étoile et une chaine

Théorème 3.2.1 *Pour $p \geq 3$, $n \geq 2$ et $m \geq 1$,*

$$\chi_p(FSSD_m(K_{1,p} \times P_n)) = 3.$$

Preuve.

Notons par u_i, $i \in \{0, 1, ..., p\}$ les sommets de $K_{1,p}$ tel que $d_{K_{1,p}}(u_0) = p$, et v_j, $j \in \{1, ..., n\}$ les sommets de P_n. Donc les sommets de $K_{1,p} \times P_n$ sont notés par $(u_i, v_j), i \in \{0, 1, ..., p\}$, $j \in \{1, ..., n\}$. On note aussi les m sommets de chaque sous graphe induit $K_{2,m}$ qui remplace chaque arête de $K_{1,p} \times P_n$ par $(u_i, v_j)^k$, $i \in \{0, 1, ..., p\}$, $j \in \{1, ..., n\}$, $k \in \{1, ..., m\}$ (Voir Figure 3.2.1).

Soit $c : V(FSSD_m(K_{1,p} \times P_n)) \to \{1, 2, ...\}$ une coloration de packing sur $FSSD_m(K_{1,p} \times P_n)$.

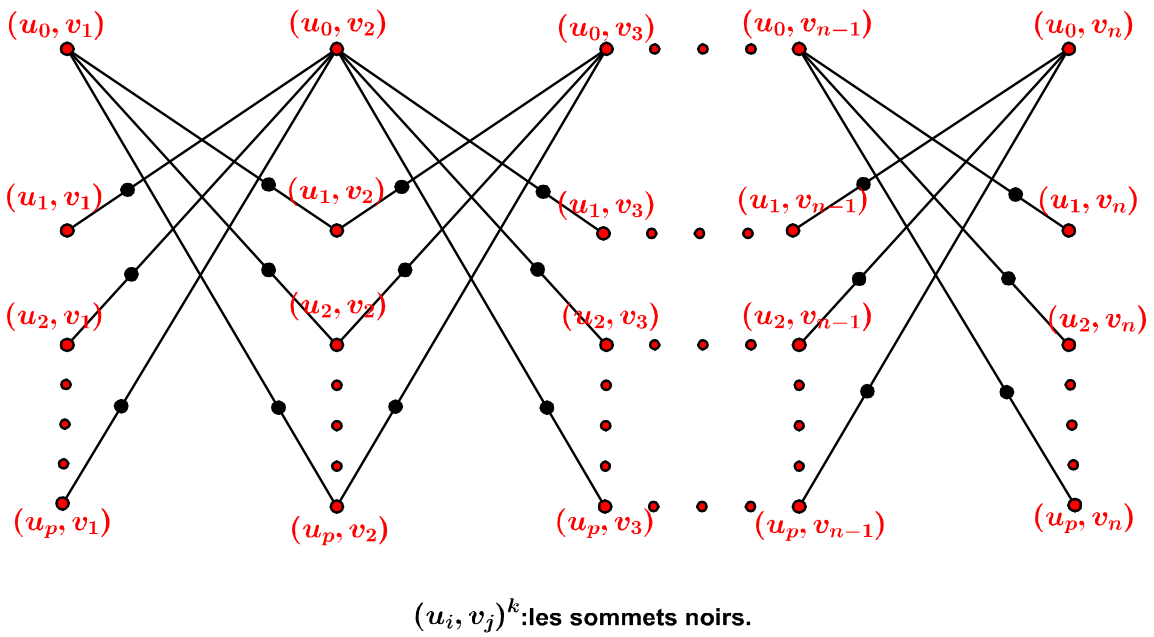


Figure 3.2.1 : Représentation du graphe $FSSD_m(K_{1,p} \times P_n)$

Pour $p \geq 3$, $n \geq 2$ et $m \geq 1$. Le graphe $FSSD_m(K_{1,p} \times P_n)$ contient un sous graphe induit P_4. D'après la Proposition 2.1.1, $\chi_{_P}(P_4) = 3$, et par la Proposition 2.1.11,

$\chi_{_P}(FSSD_m(K_{1,p} \times P_n)) \geq \chi_{_P}(P_4)$. D'où : $\chi_p(FSSD(K_{1,p} \times P_n)) \geq 3$.

Maintenant, pour montrer que $\chi_p(FSSD(K_{1,p} \times P_n)) \leq 3$, on utilise la coloration suivante: $c((u_0, v_j)) = 3$ pour tout $j \in \{1, ..., n\}$, et pour tout $i \in \{1, ..., p\}$, $c((u_i, v_j)) = 2$ et $j \in \{1, ..., n\}$, et $c((u_i, v_j)^k) = 1$ pour tout $i \in \{0, 1, ..., p\}$, $j \in \{1, ..., n\}$ et $k \in \{1, ..., m\}$ (Voir Figure 3.2.2) (les sommets noirs sont colorés par 1). ■

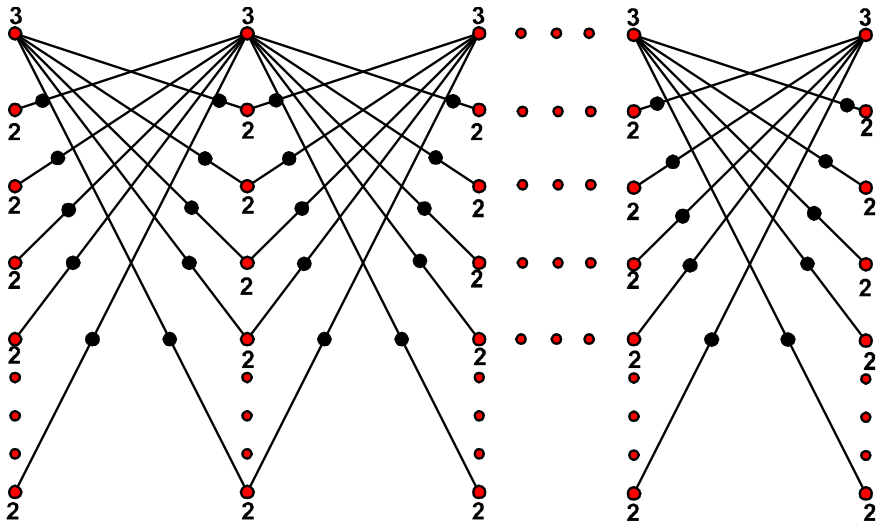


Figure 3.2.2 :Graphe $FSSD_1(K_{1,p} \times P_n)$, $\chi_p(FSSD_1(K_{1,p} \times P_n)) = 3$

Exemple 3.2.1 *La figure suivante représente la coloration de packing de* $FSSD_2(K_{1,4} \times P_4)$

(les sommets noirs sont colorés par 1).

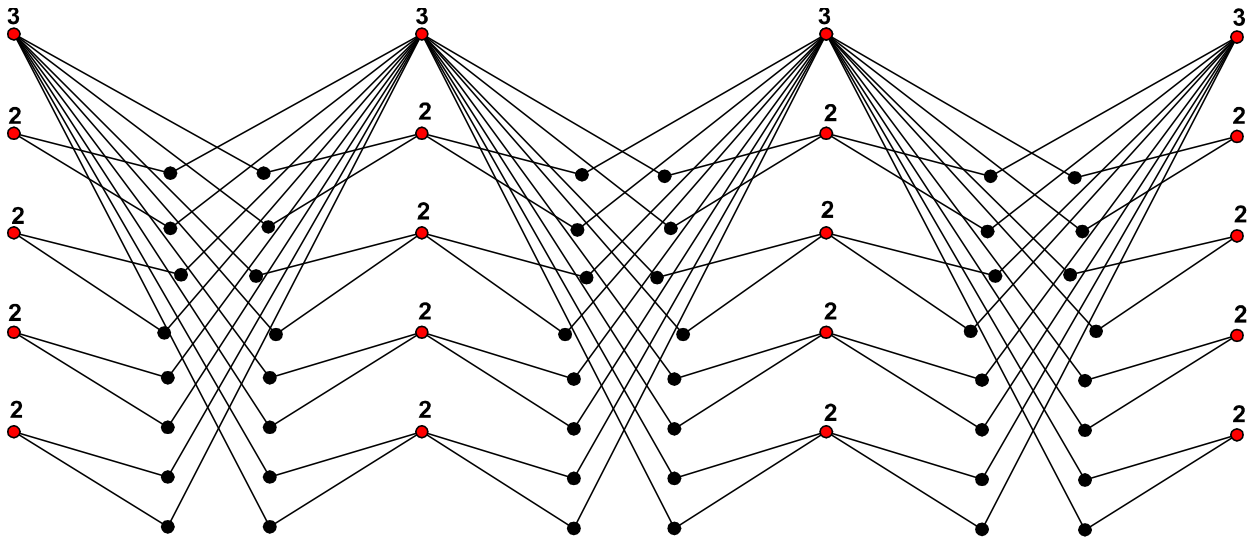


Figure 3.2.3 : Graphe $FSSD_2(K_{1,4} \times P_4)$, $\chi_p(FSSD_2(K_{1,4} \times P_4)) = 3$.

3.2.3 Coloration de packing du graphe subdivisé super fini du produit cartésien d'une étoile et une chaîne

Théorème 3.2.2 *Pour $p \geq 3$, $n \geq 2$ et $m \geq 1$,*

$$\chi_{_p}(FSSD_m(K_{1,p} \ \square \ P_n)) = 3.$$

Preuve.

Notons par u_i, $i \in \{0, 1, ..., p\}$ les sommets de $K_{1,p}$ tel que $d_{K_{1,p}}(u_0) = p$, et par v_j, $j \in \{1, ..., n\}$ les sommets de P_n. Donc les sommets de $K_{1,p} \square P_n$ sont notés par (u_i, v_j), $i \in \{0, 1, ..., p\}$, $j \in \{1, ..., n\}$. On note aussi les m sommets de chaque sous graphe induit $K_{2,m}$ qui remplace chaque arête de $K_{1,p} \square P_n$ par $(u_i, v_j)^k$, $i \in \{0, 1, ..., p\}$, $j \in \{1, ..., n\}$ et $k \in \{1, ..., m\}$ (Voir Figure 3.2.4). Soit $c : V(FSSD_m(K_{1,p} \square P_n)) \rightarrow \{1, 2, ...\}$ une coloration de packing sur $FSSD_m(K_{1,p} \square P_n)$.

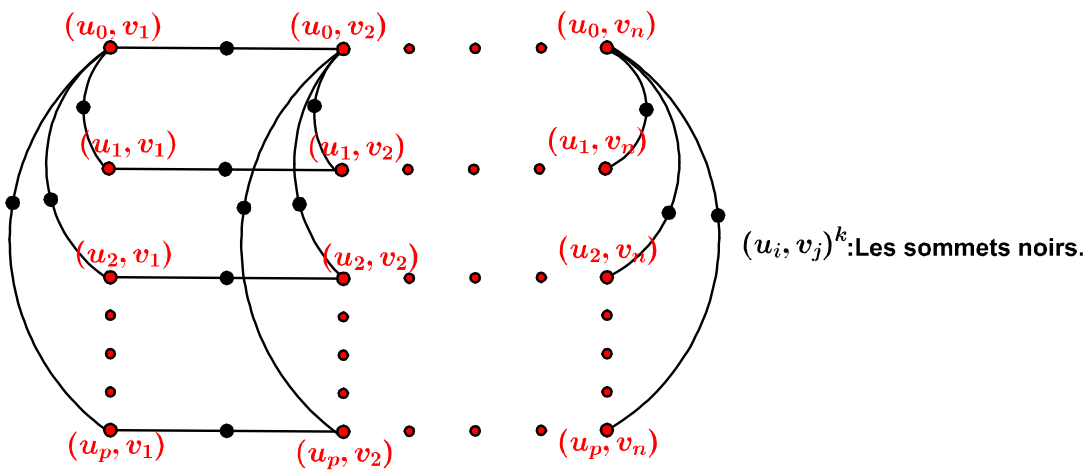


Figure 3.2.4 : Représentation du graphe $FSSD_m(K_{1,p} \square P_n)$

Pour $p \geq 3$, $n \geq 2$ et $m \geq 1$. Le graphe $FSSD_m(K_{1,p} \square P_n)$ contient un sous graphe induit P_4. D'après la Proposition 2.1.1, $\chi_{_p}(P_4) = 3$, et par Proposition 2.1.11, $\chi_{_P}(FSSD_m(K_{1,p} \square P_n)) \geq \chi_{_P}(P_4)$.

D'où: $\chi_p(FSSD(K_{1,p} \square P_n)) \geq 3$.

Maintenant, pour montrer que $\chi_p(FSSD(K_{1,p} \ \square \ P_n)) \leq 3$, on utilise la coloration suivante :

Les m sommets de chaque sous graphe induit $K_{2,m}$ qui remplace l'arête (u_i, v_j) sont colorés par 1.

Pour les sommets (u_i, v_j), $i \in \{0, 1, ..., p\}$, $j \in \{1, ..., n\}$ de $K_{1,p} \square P_n$, on distingue deux cas :

Cas1 : Si n est pair. Pour les sommets (u_0, v_j), $j \in \{1, ..., n\}$, on utilise la coloration séquentielle suivante: $23, ...,$ et pour tout $i \in \{1, ..., p\}$, les sommets (u_i, v_j), $j \in \{1, ..., n\}$ sont colorés l'aide de la coloration séquentielle suivante: $32, ..., 32$. ■

Le tableau suivant illustre cette coloration :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 & ... \\ 3 & 2 & 3 & 2 & ... \\ 3 & 2 & 3 & 2 & ... \\ . & . & . & . & ... \\ . & . & . & . & \\ . & . & . & . & ... \end{bmatrix}$$

Cas 2 : Si n est impair. Pour les sommets (u_0, v_j), $j \in \{1, ..., n\}$, on utilise la coloration séquentielle suivante: $23, ..., 2$, et pour tout $i \in \{1, ..., p\}$, les sommets (u_i, v_j), $j \in \{1, ..., n\}$, sont colorés par la séquence de couleurs suivante : $32, ..., 3$ (la séquence est fermée par 3).

Cette coloration est représentée dans le tableau suivant :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 & ... & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & ... & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & ... & 3 \\ . & . & . & . & & . \\ . & . & . & . & ... & . \\ . & . & . & . & ... & . \end{bmatrix}$$

Exemple 3.2.2 *Les deux figures suivantes donnent une coloration de packing de* $FSSD_2(K_{1,3} \square P_4)$ *et* $FSSD_1(K_{1,2} \square P_6)$ *(les sommets noirs sont colorés par 1).*

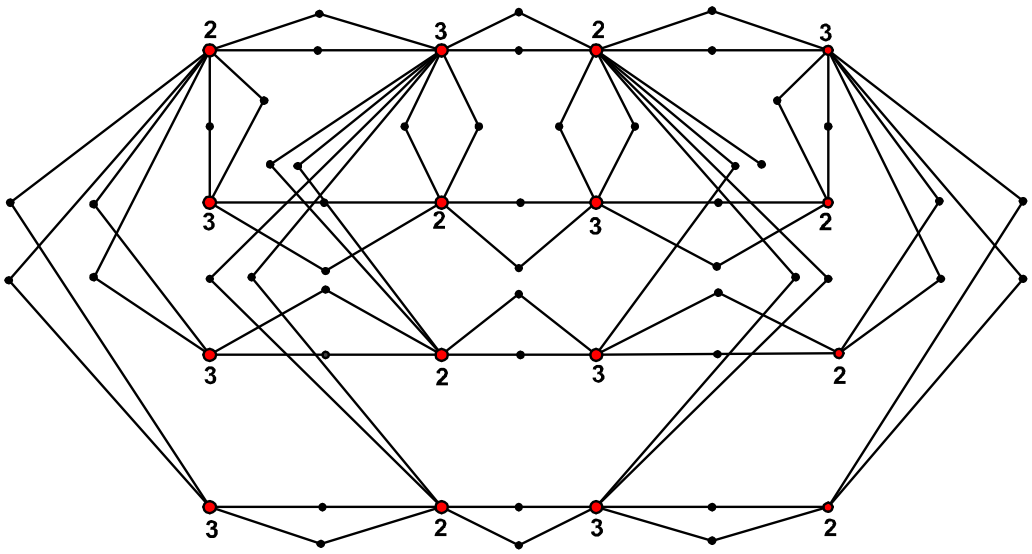


Figure 3.2.5: Graphe $FSSD_2(K_{1,3} \square P_4)$, $\chi_p(FSSD_2(K_{1,3} \square P_4)) = 3$

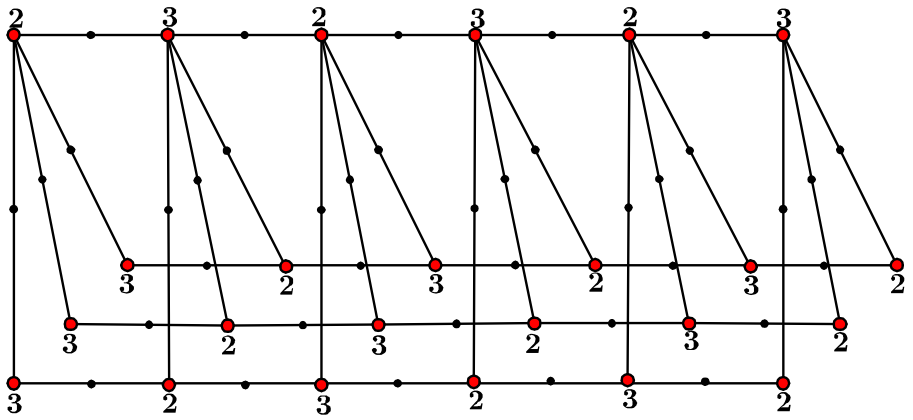


Figure 3.2.6: Graphe $FSSD_1(K_{1,3} \square P_6)$, $\chi_p(FSSD_1(K_{1,3} \square P_6)) = 3$.

3.2.4 Coloration de packing du graphe subdivisé super fini du produit cartsien d'une étoile avec un cycle

Théorème 3.2.3 *Pour $p \geq 3$, $n \geq 4$ et $m \geq 1$,*

$$\chi_{_p}(FSSD_m(K_{1,p} \square C_n)) = 3 \text{ si } n \text{ est pair.}$$

Preuve.

Notons par $G = (V, E)$ le graphe $FSSD_m(K_{1,p} \square C_n)$. On note par u_i, $i \in \{0, 1, ..., p\}$ les sommets de $K_{1,p}$ tel que $d_{K_{1,p}}(u_0) = p$, et par v_j, $j \in \{1, ..., n\}$ les sommets de C_n. Donc les sommets de $K_{1,p} \times C_n$ sont notés par (u_i, v_j), $i \in \{0, 1, ..., p\}$, $j \in \{1, ..., n\}$. On note aussi les m sommets de chaque sous graphe induit $K_{2,m}$ qui remplace chaque arête (u_i, v_j) de $K_{1,p} \square C_n$ par $(u_i, v_j)^k$, $i \in \{0, 1, ..., p\}$, $j \in \{1, ..., n\}$ et $k \in \{1, ..., m\}$ (Voir Figure 3.2.7).

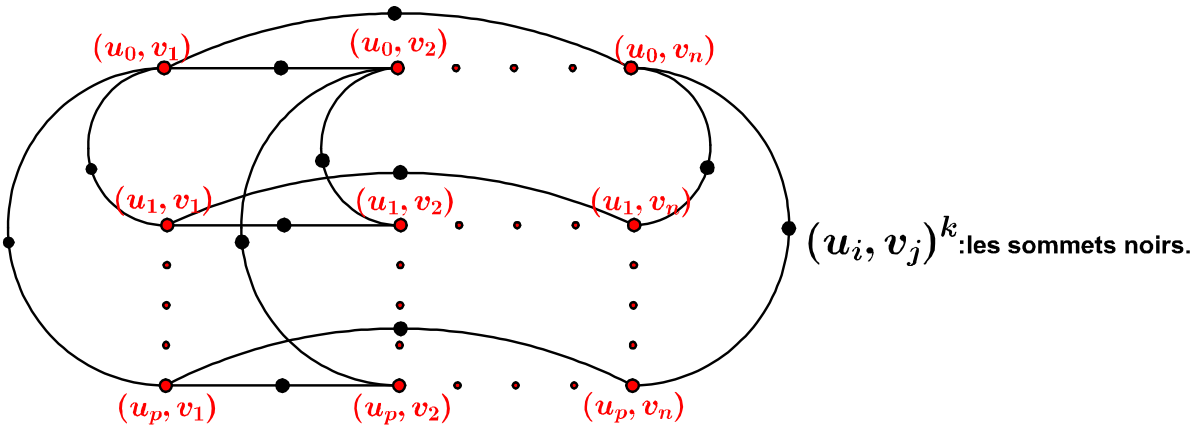


Figure 3.2.7: Représentation du graphe $FSSD_m(K_{1,p} \square C_n)$

Pour $p \geq 3$, $n \geq 4$ et $m \geq 1$. G contient un sous graphe induit C_n. D'après la Proposition 2.1.2, $\chi_{_p}(C_n) = 3$, et par la Proposition 2.1.11, $\chi_{_P}(FSSD_m(K_{1,p} \square C_n)) \geq \chi_{_P}(C_n)$.

D'où : $\chi_p(FSSD(K_{1,p} \square C_n)) \geq 3$.

Maintenant, pour montrer que $\chi_p(FSSD(K_{1,p} \square C_n)) \leq 3$, on utilise la coloration suivante:

Les m sommets de chaque sous graphe induit $K_{2,m}$ qui remplace l'arête (u_i, v_j) sont colorés par 1.

Pour les sommets (u_i, v_j), $i \in \{0, 1, ..., p\}$, $j \in \{1, ..., n\}$ de $K_{1,p} \times P_n$ on utilise la coloration suivante :

Pour les sommets (u_0, v_j), $j \in \{1, ..., n\}$ on utilise la coloration séquentielle suivante : $23, ...$, et pour les sommets (u_i, v_j), $i \in \{1, ..., p\}$, $j \in \{1, ..., n\}$, on utilise la coloration séquentielle suivante : $32, ...$

Cette coloration est représentée dans le tableau suivant :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 & ... \\ 3 & 2 & 3 & 2 & ... \\ 3 & 2 & 3 & 2 & ... \\ . & . & . & . & ... \\ . & . & . & . & \\ . & . & . & . & ... \end{bmatrix} \blacksquare$$

Exemple 3.2.3 *La figure suivante représente une coloration de packing de* $FSSD_2(K_{1,5} \square C_4)$ *(les sommets noirs sont colorés par 1).*

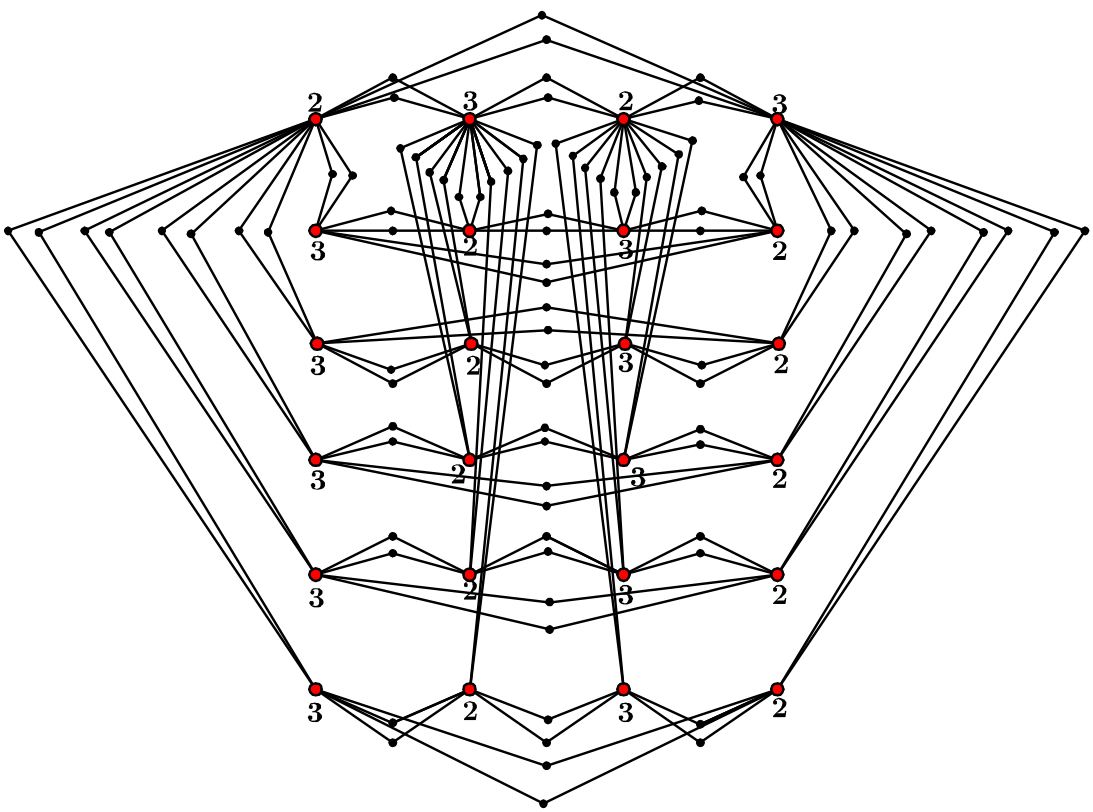


Figure 3.2.8: Graphe $FSSD_2(K_{1,5} \square C_4)$, $\chi_p(FSSD_2(K_{1,5} \square C_4)) = 3$.

Proposition 3.2.1 *Pour $p \geq 3$, $n \geq 3$ et $m \geq 1$,*

$$\chi_{_p}(FSSD_m(K_{1,p} \square C_n)) \leq p + 4 \text{ si } n \text{ est impair.}$$

La coloration de packing est donnée par : pour les sommets (u_0, v_j), $j \in \{1, ..., n\}$ on utilise la coloration séquentielle suivante : $23, ..., 4$, et pour les sommets (u_i, v_j), $i \in \{1, ..., p\}$, $j \in \{1, ..., n\}$, on utilise la coloration représentée dans le tableau suivant :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & ... & 4 \\ 3 & 2 & 3 & ... & 5 \\ 3 & 2 & 3 & ... & 6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 3 & 2 & 3 & ... & p+4 \end{bmatrix}$$

Les m sommets de chaque sous graphe induit $K_{2,m}$ qui remplace l'arête (u_i, v_j) sont colorés par 1.

Exemple 3.2.4 *La figure suivante représente une coloration de packing de $FSSD_1(K_{1,4} \square C_3)$ (les sommets noirs sont colorés par 1).*

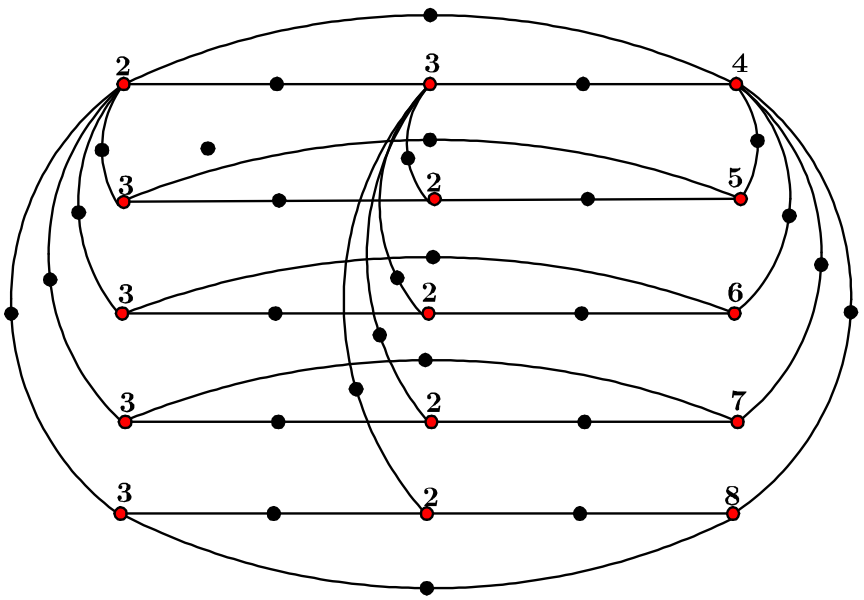


Figure 3.2.9: Graphe $FSSD_1(K_{1,4} \times C_3)$,
$\chi_{_p}(FSSD_1(K_{1,4} \times C_3)) = 8$.

3.2.5 Coloration de packing pour un graphe subdivisé super fini d'un TADPOLE $T_{p,n}$

Théorème 3.2.4 *Pour $p \geq 3$, $n \geq 2$ et $m \geq 1$,*

$$\chi_{_p}(FSSD_m(T_{p,n})) = \begin{cases} 3 \text{ si } p \text{ est pair,} \\ 4 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Notons $G = (V, E)$ le graphe $FFSD_m(T_{p,n})$. On note par u_i, $i \in \{1, ..., p\}$ les sommets de C_p, et v_j, $j \in \{1, ..., n\}$ les sommets de P_n le sous graphe induit de $T_{p,n}$. On note par w l'arête qui relie un sommet de C_p avec l'une des exterimété de P_n. Sans perte de généralite, supposons que $w = u_1v_1$, et $u^k_{i,l}$, i, $l \in \{1, ..., p\}$, $i \neq l$ et $k \in \{1, ..., m\}$ les m sommets de chaque sous graphe induit $K_{2,m}$ qui remplace l'arête u_iu_l de C_p, et $v^k_{j,g}$, $j, g \in \{1, ..., n\}$, $j \neq g$ et $k \in \{1, ..., m\}$ les m sommets de chaque sous graphe induit $K_{2,m}$ qui remplace l'arête v_jv_g de P_n. On note aussi par w^k, $k \in \{1, ..., m\}$ les m sommets de chaque sous graphe induit $K_{2,m}$ qui remplace l'arête w (Voir Figure 3.2.10). Soit $c : V(G) \to \{1, 2, ...\}$ une coloration de packing sur G.

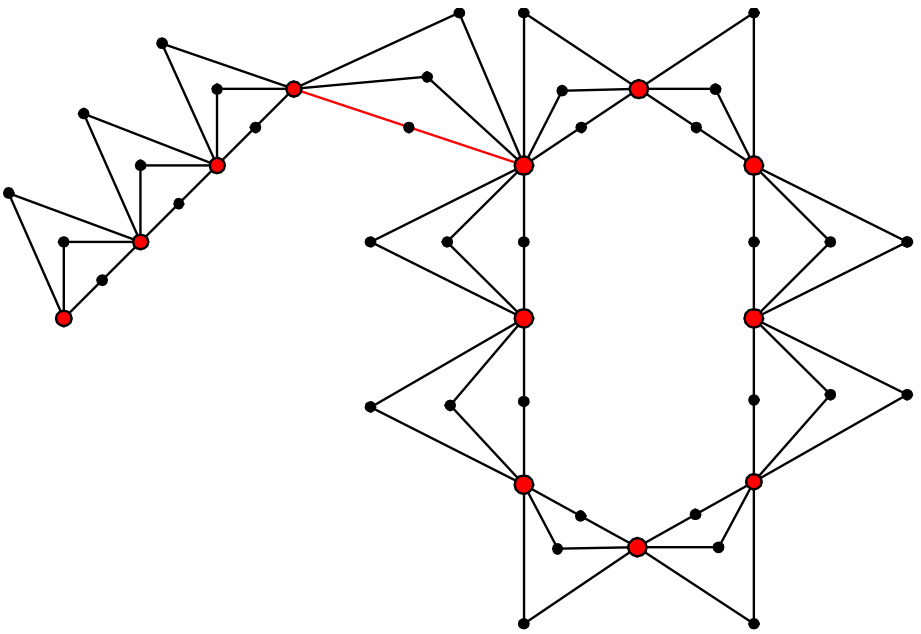


Figure 3.2.10: Graphe TADPOLE $FSSD_3(T_{8,4})$.

Cas 1. Pour $n \geq 2$ et p est pair. G peut former comme un multi-graphe biparti (voir Figure 3.2.11). D'après la Proposition 2.1.13, $\chi_p(FSSD_m(T_{p,n})) = 3$.

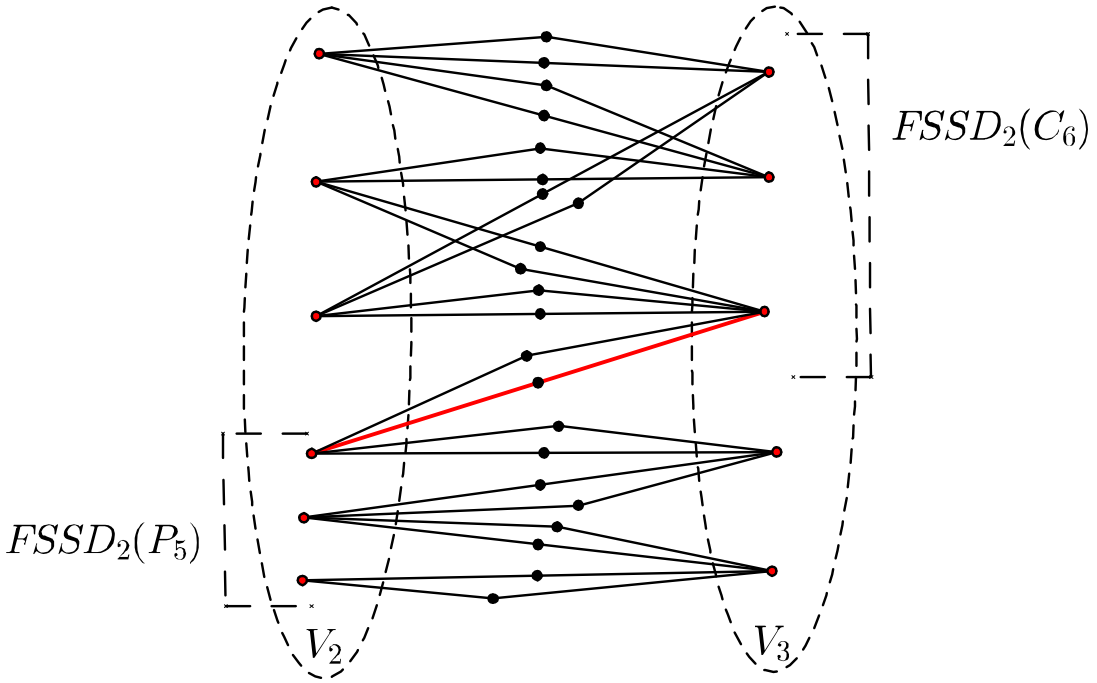


Figure 3.2.11: Graphe $FSSD_2(T_{6,5})$.

Cas 2. Pour $n \geq 2$ et p est impair. G contient un sous graphe induit C_{2p} avec $2p \ncong 0 \pmod 4$. D'après la Proposition 2.1.2, $\chi_{_P}(C_{2p}) = 4$, et par la Proposition 2.1.11, $\chi_{_P}(FFSD_m(T_{p,n})) \geq \chi_{_P}(C_{2p})$. D'où $\chi_p(FFSD_m(T_{p,n})) \geq 4$.

Montrons maintenant que $\chi_{_p}(FFSD_m(T_{p,n})) \leq 4$, pour cela on utilise la coloration suivante:

On pose $c(u^k_{i,l}) = c(w^k) = c(v^k_{j,g}) = 1$ pour tout i, $l \in \{1, ..., p\}$, $i \neq l$, j, $g \in \{1, ..., n\}$, $j \neq g$, $k \in \{1, ..., m\}$. Les sommets u_i, $i \in \{1, ..., p\}$ de C_p sont colorées par la séquence suivante : $23, 23, ..., 234.$

Pour colorier les sommets v_j, $j \in \{1, ..., n\}$ de P_n, on distingue deux cas:

Cas 2.1. Si $n \cong 0 (\mathrm{mod}\, 2)$ on distingue deux possibilités:

1_Si $c(u_1) \in \{2, 4\}$ on utilise la séquence suivante: $32, 32, ...$

2_Si $c(u_1) \in \{3, 4\}$ on utilise la séquence suivante: $23, 23, ...$

Cas 2.2. Si $n \cong 1 (\mathrm{mod}\, 2)$ on distingue deux possibilités:

1_Si $c(u_1) \in \{2, 4\}$ on utilise la séquence suivante: $32, 32, ..., 3$.

2_Si $c(u_{i1}) \in \{3,4\}$ on utilise la séquence suivante: $23, 23, ..., 2$.

Par conséquence $\chi_p(FSSD_m(T_{p,n})) = 4$. ■

Exemple 3.2.5 *Les deux figures suivantes représentent une coloration de packing de* $FSSD_m(T_{4,5})$ *et* $FSSD_3(T_{9,4})$*(les sommets noirs sont colorés par 1).*

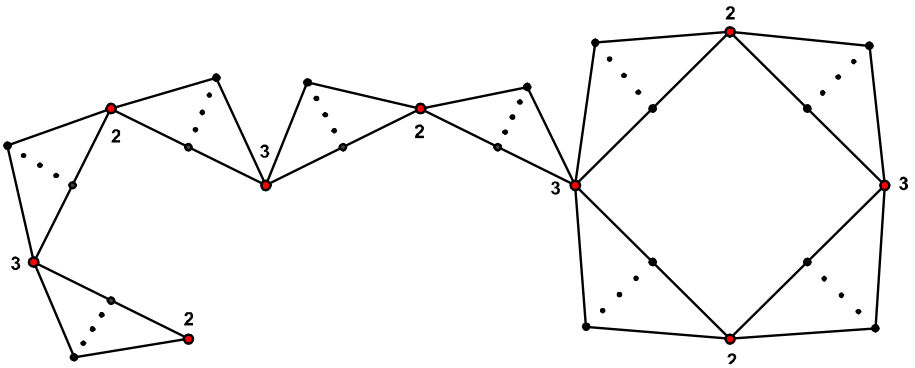


Figure 3.2.12 :Graphe $FSSD_m(T_{4,5})$, $\chi_p(FSSD_m(T_{4,5})) = 3$.

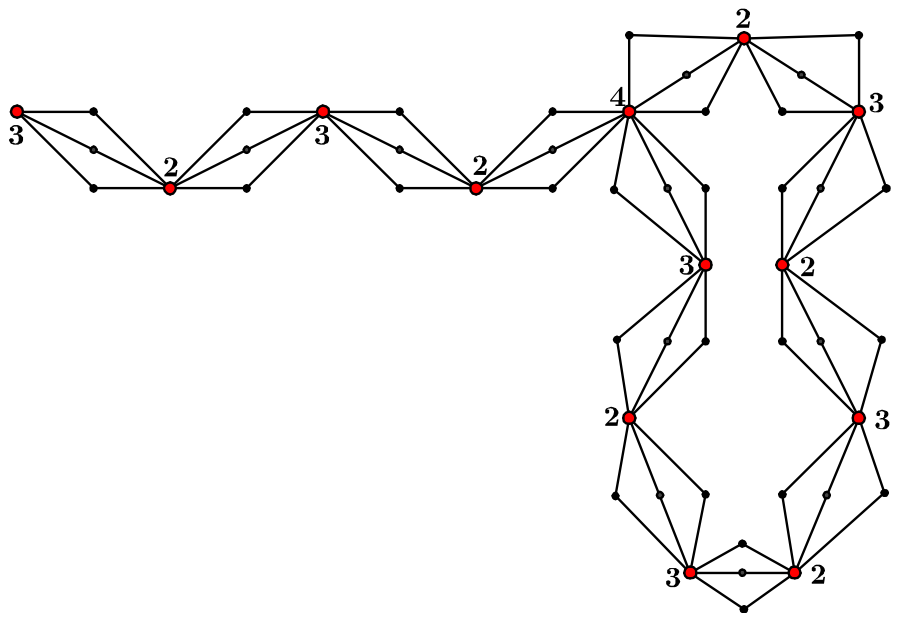


Figure 3.2.13 : Graphe $FSSD_3(T_{9,4})$, $\chi_p(FSSD_3(T_{9,4})) = 4$.

3.2.6 Coloration de packing pour un graphe subdivisé super fini d'un Prisme de cycle Y_n

Théorème 3.2.5 *Pour $n \geq 3$, $m \geq 1$,*

$$\chi_{_p}(FSSD_m(Y_n)) = 3 \text{ si } n \text{ est pair, et } \chi_{_p}(FSSD_m(Y_n)) \leq 5 \text{ si } n \text{ est impair.}$$

Preuve. Notons par $G = (V, E)$ le graphe $FSSD_m(Y_n)$. On note par u_i, $u_{i''}$, $i, i' \in \{1, ..., n\}$ les sommets Y_n,tellque u_i les sommets du cycle intérieur et $u_{i'}$ les sommets du cycle extérieur. On note par $u^k_{i,j}$, $u^k_{i',j'}$ i, i', j, $j' \in \{1, ..., n\}$, $i \neq j$, $i' \neq j'$ et $k \in \{1, ..., m\}$ les m sommets de chaque sous graphe induit $K_{2,m}$ qui remplace l'arête u_iu_j dans cycle intérieur et l'arête $u_{i'}u_{j'}$ dans cycle extérieur. Soit $c : V(G) \to \{1, 2, ...\}$ une coloration de packing sur G.

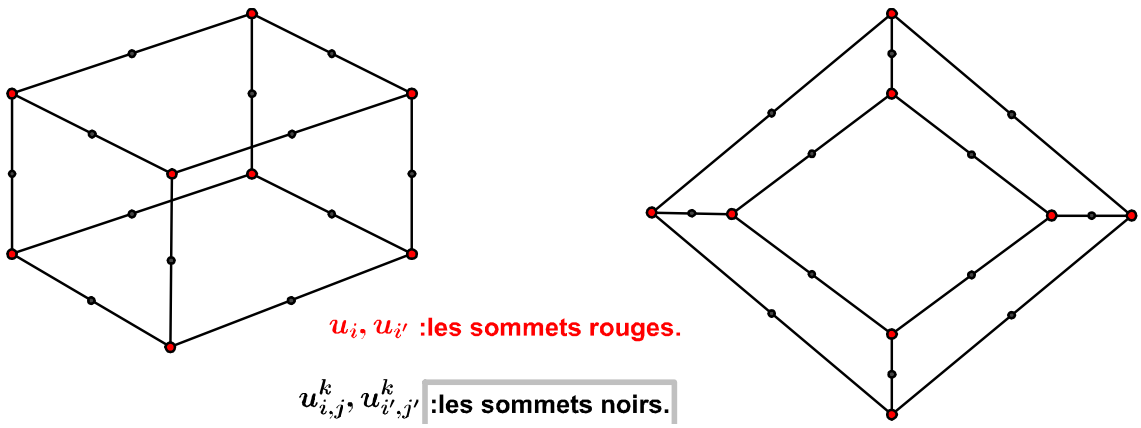


Figure 3.2.14 : Le graphe $FSSD_1(Y_4)$

Pour n est pair. G contient un sous graphe induit C_{2n} où $2n$ est un multiple de 4. D'après la Proposition 2.1.2, $\chi_{_P}(C_{2n}) = 3$, et par Proposition 2.1.11, $\chi_{_P}(FFSD_m(Y_n)) \geq \chi_{_P}(C_{2n})$. D'où $\chi_p(FFSD_m(Y_n)) \geq 3$.

Maintenant, pour montrer que $\chi_{_p}(FSSD_m(Y_n)) \leq 3$, il suffit d'utiliser la coloration suivante :

On pose $c(u^k_{i,\,j}) = c(u^k_{i',\,j'}) = 1$ pour tout i, i', j, $j' \in \{1, ..., n\}$, $i \neq j$, $i' \neq j'$ et $k \in \{1, ..., m\}$.

Concernant la coloration des sommets u_i, $u_{i'}$, i, $i' \in \{1, ..., n\}$, on utilise la coloration suivante:

Pour le cycle intérieur, on utilise la sequence suivante: $23, ..., 23$.

Pour le cycle extérieur, on utilise la sequence suivante: $32, ..., 32$.

Donc $\chi_p(FSSD_m(Y_n)) = 3$.

Pour n est impair, la bornne supérieur de la coloration de packing est donnée par l'affectation aux sommets u_i, $u_{i'}$, i, $i' \in \{1, ..., n\}$ de Y_n, on utilise la coloration suivante:

Pour le cycle intérieur, on utilise la sequence suivante: $23, ..., 4$.

Pour le cycle extérieur, on utilise la sequence suivante: $32, ..., 5$.

Les sommets $u^k_{i,\,j}, u^k_{i',\,j'}$ i, i', j, $j' \in \{1, ..., n\}$, $i \neq j$, $i' \neq j'$ et $k \in \{1, ..., m\}$ sont colorés par 1. D'où $\chi_p(FSSD_m(Y_n)) \leq 5$ ■

Exemple 3.2.6 *Les figures suivantes représentent une coloration de packing de* $FSSD_2(Y_8)$, $FSSD_1(Y_5)$, $FSSD_1(Y_7)$, $FSSD_1(Y_{10})$ *et* $FSSD_1(Y_9)$.*(les sommets noirs sont colorés par 1).*

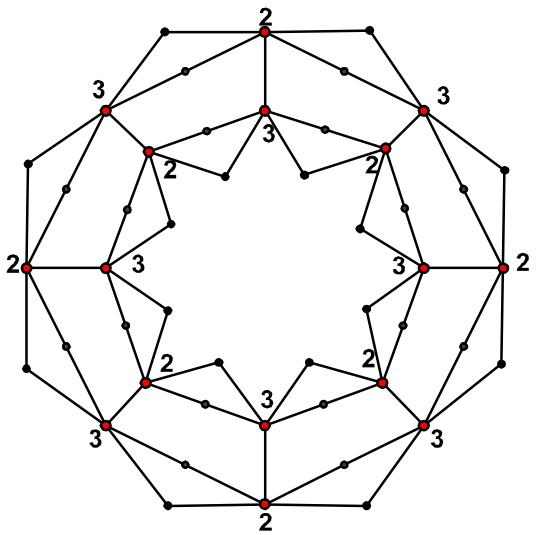


Figure 3.2.15: Graphe $FSSD_2(Y_8)$, $\chi_p(FSSD_2(Y_8)) = 3$.

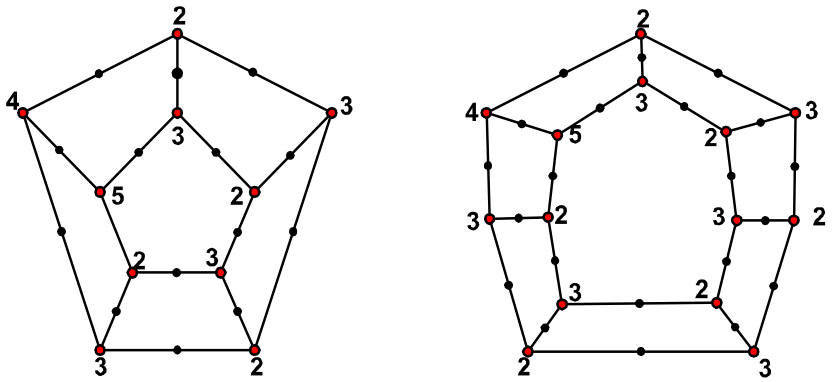


Figure 3.2.16 : Les graphe $FSSD_1(Y_5)$ et $FSSD_1(Y_7)$,
$\chi_p(FSSD_{m1}(Y_5)) = \chi_p(FSSD_1(Y_7)) = 5$

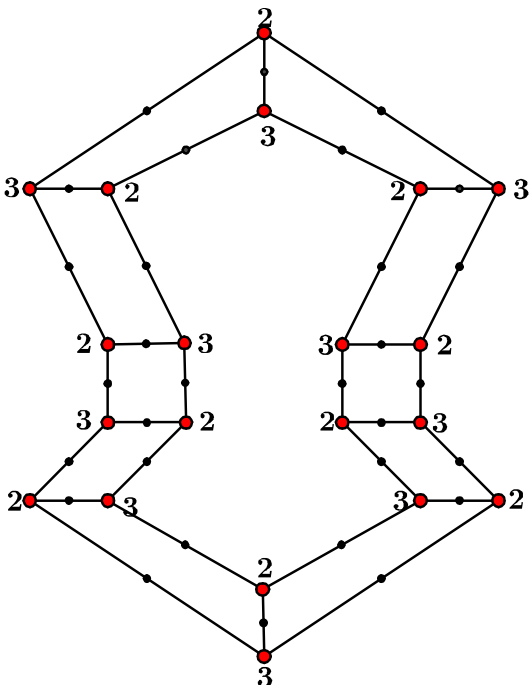


Figure 3.2.17: Graphe $FSSD_1(Y_{10})$, $\chi_p(FSSD_1(Y_{10})) = 3$.

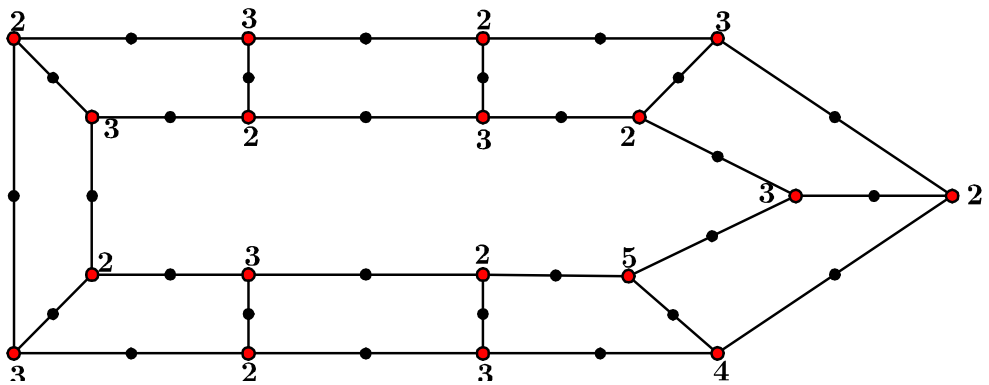


Figure 3.2.18 : Graphe $FSSD_1(Y_9)$, $\chi_{_p}(FSSD_1(Y_9)) = 5$

3.3 Coloration de packing d'un graphe subdivisé super fini d'une couronne de deux graphes

3.3.1 La couronne de deux graphes

Définition 3.3.1 *Soient G_1, G_2 deux graphes à n_1, n_2 sommets et m_1, m_2 arêtes respectivement. Alors la couronne $G_1 \odot G_2$ est le graphe formé par une copie de G_1 et $\mid V(G_1) \mid$copies de G_2, où le $i^{éme}$ sommet de G_1est adjacent à tous les sommets de la $i^{éme}$ copies de G_2. La couronne $G_1 \odot G_2$ de G_1et G_2 a $n_1 + n_1 n_2$ sommets. Si $G_2 = K_1$, alors $G_1 \odot G_2$ est le graphe $Cr\,(G_1)$.*

3.3.2 Coloration de packing du graphe subdivisé super fini d'une couronne généralisée du graphe Tadpole

Théorème 3.3.1 *Pour $p \geq 3$, $n \geq 2$, $q \geq 1$ et $m \geq 1$,*

$$\chi_{_p}(FSSD_m(T_{p,n} \odot qK_1)) = \begin{cases} 3 \text{ si } n \text{ est pair,} \\ 4 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Notons par $G = (V, E)$ le graphe $FFSD_m(T_{p,n} \odot qK_1)$. On note par u_i, $i \in \{1, ..., p\}$ et v_j, $j \in \{1, ..., n\}$ les sommets de C_p, respectivement P_n, les sous graphes induit de $T_{p,n}$. On note par w l'arête qui relie un sommet de C_p avec l'une des extrémités de P_n. Sans perte de généralité, supposons que $w = u_1 v_1$, et $u^k_{i,l}$, i, $l \in \{1, ..., p\}$, $i \neq l$

et $k \in \{1, ..., m\}$ les m sommets de chaque sous graphe induit $K_{2,m}$ qui remplace l'arête u_iu_l de C_p, et $v^k_{j,g}$, $j, g \in \{1, ..., n\}$, $j \neq g$ et $k \in \{1, ..., m\}$ les m sommets de chaque sous graphe induit $K_{2,m}$ qui remplace l'arête v_jv_g de P_n. On note aussi par w^k, $k \in \{1, ..., m\}$ les m sommets de chaque sous graphe induit $K_{2,m}$ qui remplace l'arête w. On note par $x_{i,h}$, $x_{j,h}$, $i \in \{1, ..., p\}$, $j \in \{1, ..., n\}$ et $h \in \{1, ..., q\}$ les sommets de qK_1 voisins aux sommets u_i, respectivement v_j dans le graphe $T_{p,n} \odot qK_1$. On note par $x^k_{i,h}$, $x^k_{j,h}$, $i \in \{1, ..., p\}$, $j \in \{1, ..., n\}$, $h \in \{1, ..., q\}$ et $k \in \{1, ..., m\}$ les m sommets de chaque sous graphe induit $K_{2,m}$ qui remplace l'arête x_ix_h , respectivement x_jx_h dans le graphe $T_{p,n} \odot qK_1$. Soit $c : V \to \{1, 2, ...\}$ une coloration de packing sur G.

Cas 1: $n \geq 2$ et p est pair. Le graphe $T_{p,n}$ et un graphe biparti d'ensembles V_2, V_3. Le graphe $T_{p,n} \odot qK_1$ est un graphe multiparti d'ensembles V_1, V_2, V_3 et V_4. Le graphe $FSSD_m(T_{p,n} \odot qK_1)$ reste un graphe multiparti en multipliant les arêtes de $T_{p,n} \odot qK_1$ m fois et on subdivise toutes ses arêtes une seule fois (Voir Figure 3.3.1). D'après la Proposition 2.1.13, $\chi_p(FSSD_m(T_{p,n} \odot qK_1)) = 3$.

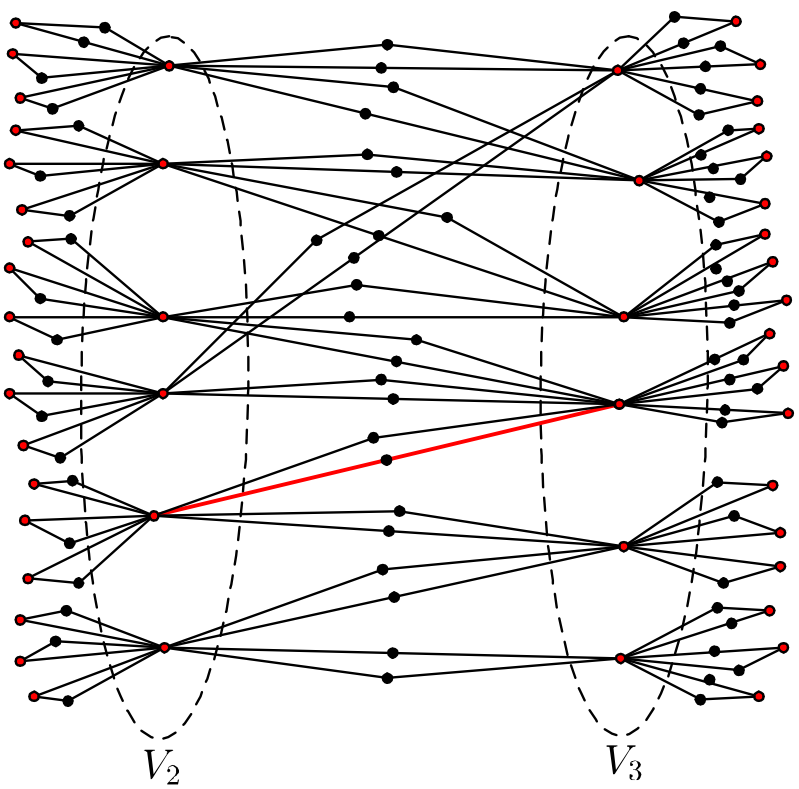


Figure 3.3.1 : Graphe $FSSD_2(T_{8,4} \odot 3K_1)$

Cas 2. Pour $n \geq 2$ et p est impair. G contient un sous graphe induit C_{2p} avec $2p \ncong 0(\mathrm{mod}\, 4)$ et d'après la Proposition 2.1.2, $\chi_{_P}(C_{2p}) = 4$, et par la Proposition 2.1.11,

$\chi_{_P}(FFSD_m(T_{p,n} \odot qK_1)) \geq \chi_{_P}(C_{2p})$. D'où $\chi_p(FFSD_m(T_{p,n} \odot qK_1)) \geq 4$.

Montrons maintenant que $\chi_{_p}(FFSD_m(T_{p,n} \odot qK_1)) \leq 4$, pour cela on utilise la coloration suivante:

On pose $c(u^k_{i,l}) = c(w^k) = c(v^k_{j,g}) = c(x^k_{i,h}) = c(x^k_{j,h}) = 1$ pour tous i, $l \in \{1, ..., p\}$, $i \neq l$, j, $g \in \{1, ..., n\}$, $j \neq g$, $h \in \{1, ..., q\}$ et $k \in \{1, ..., m\}$. Les sommets u_i, $i \in \{1, ..., p\}$ de C_p sont colorés par la séquence suivante : $23, 23, ..., 234$. Pour colorer les sommets $x_{i,h}$, $i \in \{1, ..., p\}$ et $h \in \{1, ..., q\}$, on distingue deux possibilités:

1_ Si $c(u_i) = 2$, alors $c(x_{i,h}) = 3$.

2_ Si $c(u_i) = 3$, alors $c(x_{i,h}) = 2$.

Pour colorer les sommets v_j, $j \in \{1, ..., n\}$ de P_n, on distingue deux cas :

Cas 2.1. Si $n \cong 0(\mathrm{mod}\, 2)$ on distingue deux possibilités :

1_ Si $c(u_1) \in \{2, 4\}$, alors la séquence suivante est utilisée :

$$32, 32, ...$$

2_ Si $c(u_1) \in \{3, 4\}$, alors on utilise la séquence suivante :

$$23, 23, ...$$

Cas 2.2. Si $n \cong 1(\mathrm{mod}\, 2)$, alors on distingue deux possibilités :

1_ Si $c(u_1) \in \{2, 4\}$, alors on utilise la séquence suivante :

$$32, 32, ..., 3.$$

2_ Si $c(u_1) \in \{3, 4\}$, alors on utilise la séquence suivante :

$$23, 23, ..., 2.$$

Ensuite, on distingue deux possibilités sur la coloration des sommets $x_{j.h}$, $j \in \{1, ..., n\}$ et $h \in \{1, ..., q\}$.

1_ Si $c(v_j) = 2$, alors $c(x_{j,h}) = 3$.

2_ Si $c(v_j) = 3$, alors $c(x_{j,h}) = 2$.

Par conséquence $\chi_{_p}(FSSD_m(T_{p,n})) = 4$. ■

Exemple 3.3.1 *Les figures suivantes représentent la coloration de packing de* $FSSD_1(T_{4,3} \odot 2K_1)$ *et* $FSSD_2(T_{5,4} \odot 3K_1)$*.(les sommets noirs sant colorés par 1).*

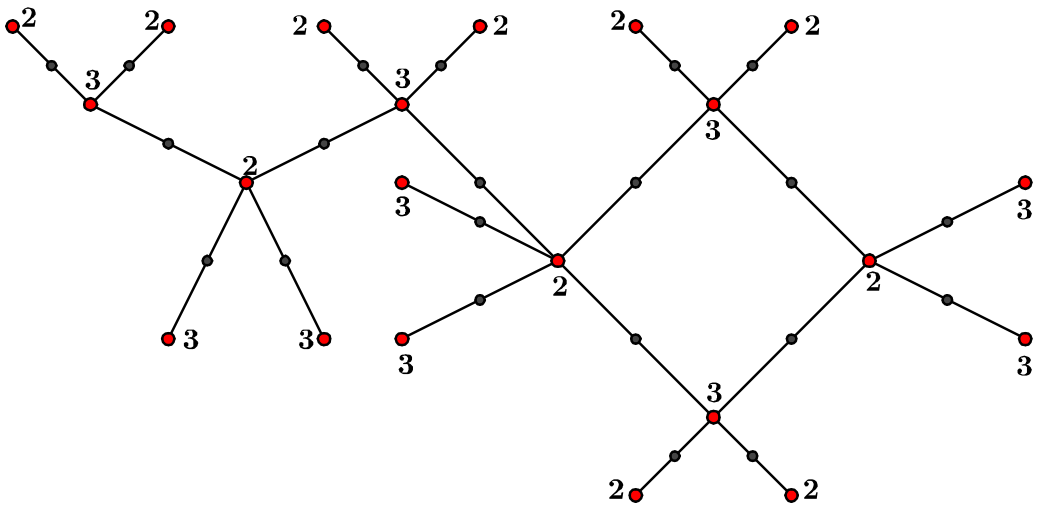


Figure 3.3.2 : Graphe $FSSD_1(T_{4,3} \odot 2K_1)$, $\chi_p(FSSD_1(T_{4,3} \odot 2K_1)) = 3$.

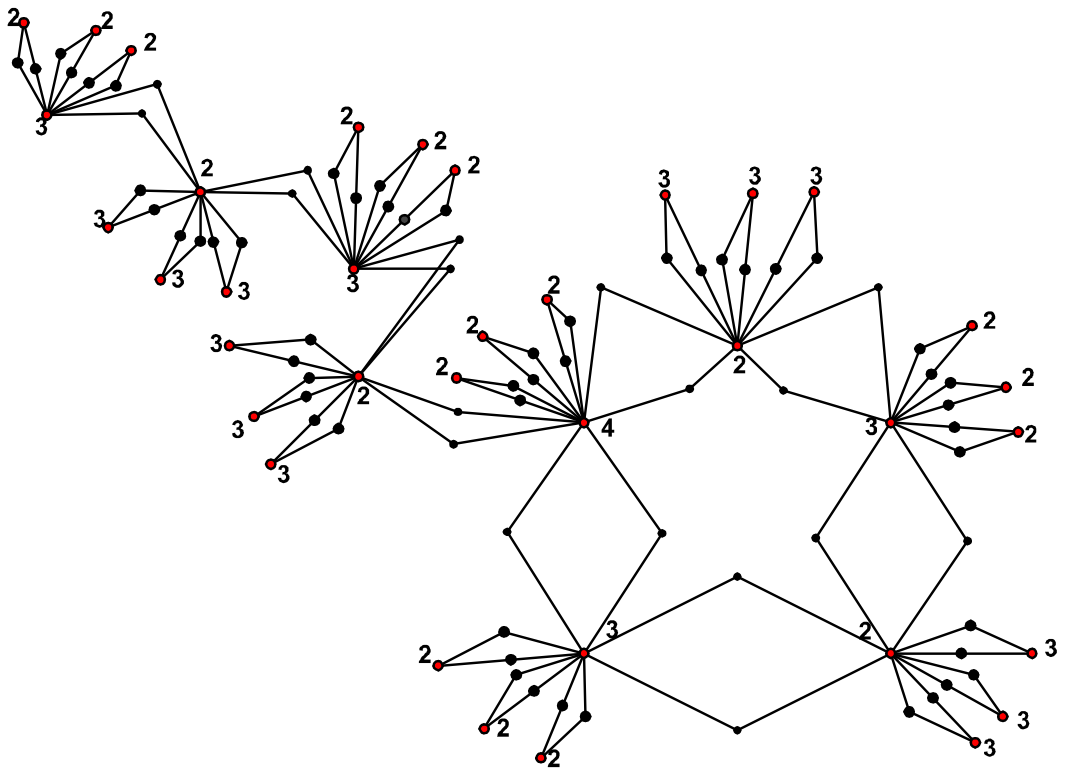


Figure 3.3.3 : Graphe $FSSD_2(T_{5,4} \odot 3K_1)$, $\chi_p(FSSD_2(T_{5,4} \odot 3K_1)) = 4$.

Lemme 3.3.1 *Pour le graphe* $FSSD_1(P_2 \odot P_4)$,

$$\chi_{_p}(FSSD_1(P_2 \odot P_4)) = 5.$$

Preuve.

On note par u_i, $i \in \{1, 2\}$ les sommets de P_2 tels que $d_{FSSD_1(P_2 \odot P_4)}(v_i) = 5$, et par $P_{i,4}$, $i \in \{1,\ 2\}$ les chaînes correspondantes aux sommets u_i. On note aussi par $v_{i,j}$, $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, ..., 4\}$ les sommets de $P_{i,4}$. Le sommet de subdivision de l'arête u_1u_2 est noté par $u^1_{1,2}$. Pour tout $i \in \{1, 2\}$, $j, l \in \{1, ..., 4\}$, $(j \neq l)$, on note par $v^1_{i,j,l}$ le sommet de subdivision de l'arête $v_{i,j}v_{i,l}$. Pour tout $i \in \{1, 2\}$ et $j \in \{1, ..., 4\}$, on note par $s^1_{i,j}$ le sommet de subdivision de l'arête $u_iv_{i,j}$. Soit $c : V \to \{1, 2, ...\}$ une coloration de packing sur $FSSD_1(P_2 \odot P_4)$ (Voir Figure 3.a.1).

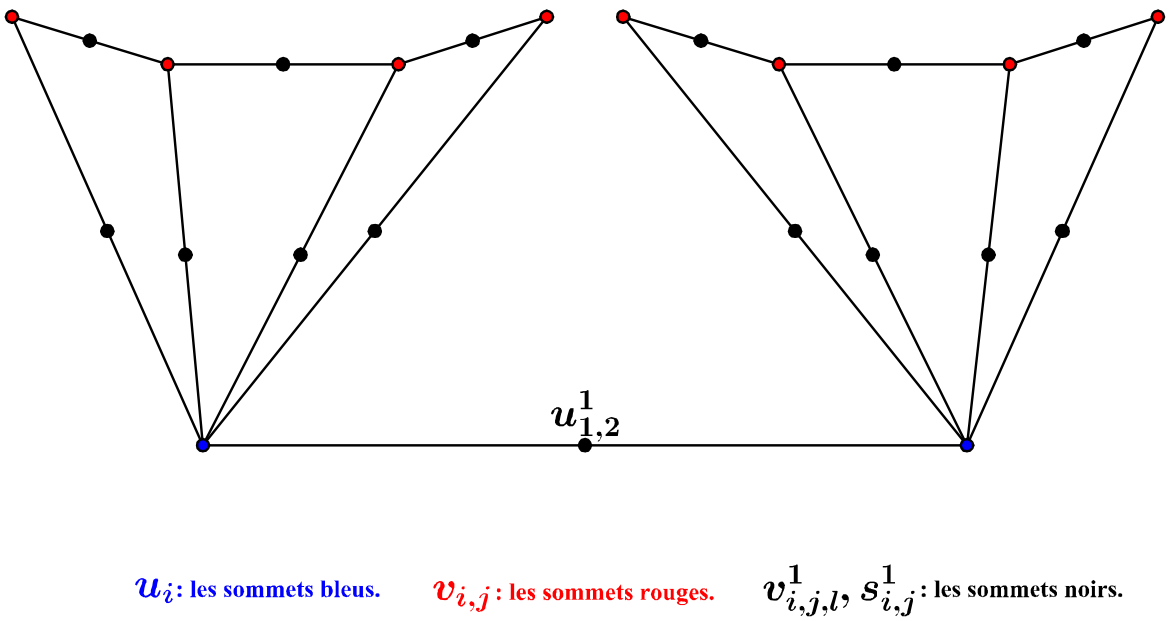


Figure 3.a.1: Le graphe $FSSD_1(P_2 \odot P_4)$

G contient un sous graphe induit C_6. D'après la Proposition 2.1.1, $\chi_{_P}(C_6) = 4$, et par Lemme 2.1.1, $\chi_{_p}(FSSD_1(P_2 \odot P_4)) \geq \chi_{_P}(C_6)$.

$$\text{D'ou } \chi_{_p}(FSSD_1(P_2 \odot P_4)) \geq 4$$

Pour montrer que c n'est pas une coloration 4-packing dans G, on suppose au contraire que c étant une coloration $4-$packing de G. Alors on distingue les cas suivants :

Cas 1**.**

On suppose qu'il existe $i \in \{1, 2\}$ tel que $c(u_i) = 1$ et sans perte de généralité, soit $i = 1$. Comme u_1 à cinq voisins $s^1_{1,1}, s^1_{1,2}, s^1_{1,3}, s^1_{1,4}$ et $u^1_{1,2}$, qui sont par paire à distance 2, ces sommets reçoivent cinq couleurs différentes $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ par c, ce qui donne une contradiction avec la supposition que c étant une coloration $4-$packing de G.

Cas 2**.**

On suppose que $c(u_1), c(u_2) \in \{2, 3, 4\}$ et on distingue les sous cas suivants.

Cas 2.1**.**

$\{c(u_1), c(u_2)\} = \{f, g\}$ avec $f, g \in \{2, 3\}$, $f \neq g$. Pour les sommets $s^1_{i,j}$ et $u^1_{1,2}$, on peut les colorer par 1, et concernant la coloration des sommets $v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}$ et $v_{i,4}$, on distingue deux possibilités :

Cas 2.1.1**.** Si $c(u_i) = f$, alors on utilise la séquence de couleurs suivante : g, 4, g, 5.

Cas 2.1.2. Si $c(u_i) = g$, alors on utilise la séquence de couleurs suivante : f, 4, f, 5.

Dans les deux possibilités, il suffit d'utiliser une autre couleur, ce qui donne une contradiction avec la supposition que c étant une coloration 4-packing de G.

Cas 2.2**.**

$\{c(u_1), c(u_2)\} = \{4, g\}$ avec $g \in \{2, 3\}$. Pour les sommets $u^1_{1,2}$ et $s^1_{i,j}$, $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, ..., 4\}$, on peut les colorer par 1. Concernant les sommets $v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}$ et $v_{i,4}$, on peut les colorer comme suit en distinguant deux possibilités suivant les sommets u_i, $i \in \{1, 2\}$.

Cas 2.2.1. Si $c(u_i) = 4$, alors on utilise la séquence suivante : 2, 3 , 2 , 3.

Cas 2.2.2. Si $c(u_i) = g$, alors on utilise la séquence suivante : f, 5, f, 6, avec $f \in \{2, 3\}$, $f \neq g$.

Il y a une contradiction avec le fait que c étant une coloration $4-$packing de G.

Cas 3.

On suppose qu'il existe $i \in \{1, 2\}$ et $j \in \{1, ..., 4\}$ tels que $c(v_{i,j}) = e$ avec $e \in \{1, 2, 3, 4\}$ et $d_{FSSD_1(P_2 \odot P_4)}(v_{i,j}) = 2$, et sans perte de généralité, on suppose que $i = 1$ et $j = 1$. On distingue les sous cas suivants.

Cas 3.1.

Si $c(v_{1,1}) = 1$, alors comme $v_{1,1}$ à deux voisins $s^1_{1,1}$et $v^1_{1,1,2}$, qui sont par paire à distance 2, ces sommets reçoivent deux couleurs différentes; soint $\{2, 3\}$ par c. D'une part, les sommets

u_1, $v_{1,2}$ et le sommet $s^1_{1,2}$ peuvent reçoivent la couleur 1 et 4 par c, c-à-d : $c(u_1) = c(v_{1,2}) = 1$ et $c(s^1_{1,2}) = 4$, mais il n'y a pas de couleur disponible pour terminer la coloration du sommet $v^1_{1,2,3}$, ce qui donne une contradiction avec le fait que c étant une coloration $4-$packing de G.

Cas 3.2.

Si $c(v_{1,1}) \in \{2, 3\}$, alors les sommets $v^1_{1,1,2}$ et $s^1_{1,1}$ reçoivent la couleur 1, et pour colorer les sommets $v_{1,2}$, $v_{1,3}$ et $v_{1,4}$, on distingue deux possibilités :

Cas 3.2.1. Si $c(v_{1,1}) = 2$, alors on utilise par ordre les couleurs suivantes : 3, 2, 3.

Cas 3.2.2. Si $c(v_{1,1}) = 3$, alors on utilise les couleurs suivantes : 2, 3, 2.

et le sommet u_1 reçoit la couleur 4, ce cas est symétrique avec le **Cas** 2_2**.** Il y a une contradiction avec le fait que c étant une coloration $4-$packing de G.

Cas 3.3.

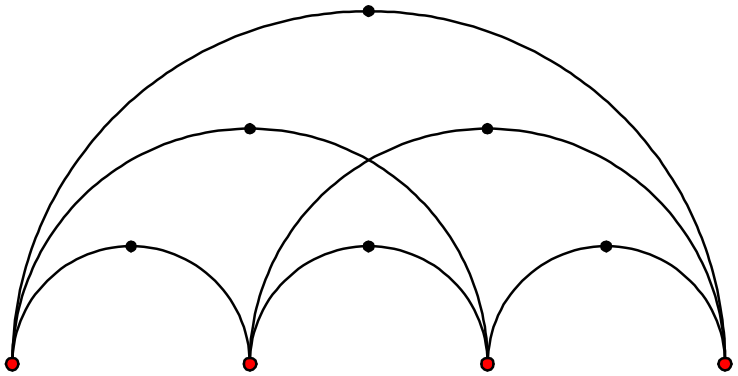
Si $c(v_{1,1}) = 4$, les sommets $s^1_{1,1}$, $v^1_{i,j,l}$, $i \in \{1, 2\}$, j, $l \in \{1, ..., 4\}$, $(j \neq l)$ reçoivent la couleur 1, et pour colorer les sommets $v_{1,2}, v_{1,3}$ et $v_{1,4}$ on utilise la séquence suivante: $2, 3, 2$, mais il n'y a pas de couleurs disponibles pour terminer la coloration de sommet u_1, ce qui donne une contradiction avec le fait que c étant une coloration $4-$packing de G.

Dans tous les cas mentionnés, nous devons utiliser au mois 5 couleurs pour colorer le graphe G. Par symétrie, on déduit que notre lemme est démontré. ■

Lemme 3.3.2 *Pour le graphe* $FSSD_1(K_1 \odot C_3)$,

$$\chi_{_p}(FSSD_1(K_1 \odot C_3)) = 5.$$

Preuve. On note par G le graphe $FSSD_1(K_1 \odot C_3)$. On note par u_i, $i \in \{0, ..., 3\}$ les sommets de $K_1 \odot C_3$, et on note par $u^1_{i,j}$, $i, j \in \{0, ..., 3\}$, $i \neq j$, les sommets de subdivision de l'arête u_iu_j (Voir Figure 3.*b*.1).Soit $c : V \to \{1, 2, ...\}$ une coloration de packing sur G.



u_i :les sommets rouges.

$u_{i,j}$:les sommets noires.

Figure 3.*b*.1 : Le graphe $FSSD_1(K_1 \odot C_3)$

G contient un sous graphe induit C_6. D'après la Proposition 2.1.1, $\chi_{_P}(C_6) = 4$, et par Lemme 2.1.1, $\chi_{_P}(C_6) \leq \chi_{_p}(FSSD_1(K_1 \odot C_3))$.

$$\text{D'ou } \chi_{_p}(FSSD_1(K_1 \odot C_3)) \succeq 4$$

Pour montrer que c n'est pas une coloration 4-packing dans G. On suppose que c étant une coloration 4-packing de G on distinguant les cas suivants:

Cas 1**.**

On suppose qu'il existe $i \in \{0, ..., 3\}$ tel que $c(u_i) = 1$ et sans perte de généralité, on suppose que $i = 0$. Comme u_0 est a trois voisins $u_{0,1}$, $u_{0,2}$ et $u_{0,3}$, qui sont par paire à distance 2, alors les sommets $u_{0,1}$, $u_{0,2}$ et $u_{0,3}$ reçoivent trois couleurs différentes $\{2, 3, 4\}$ par c, par conséquence, c utilise $(1 + 3 = 4)$ couleurs. D'une part, les sommets u_1, u_2 et u_3 ne peuvent recevoir que la couleur 1 par c, car pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, le sommet $u_{0,k}$ admet deux voisins u_0 et u_k qui sont par paire à distance 2. D'autre part, pour tous k, l, $h \in \{1, 2, 3\}$, $k \neq l$, $l \neq h$, $h \neq k$, $d(u_{0,k}, u_{l,h}) = 4$. Par conséquent, on peut colorer juste deux sommets de l'ensemble $\{u_{1,2}, u_{2,3}, u_{1,3}\}$ de $\{2, 3\}$ par c, mais il n'y a pas de couleur disponible pour le troisième sommet, et dans ce cas, il faut utiliser une autre couleur, soit $\{5\}$ par c, ce qui donne une contradiction avec le fait que c étant une coloration 4−packing de G.

Cas 2.

On suppose que $c(u_i) = e$ avec $e \in \{2, 3, 4\}$ pour certains $i \in \{0, ..., 3\}$ et sans perte de généralité, supposons que $i = 0$. On distingue les sous cas suivants concernant les couleurs $c(u_{0,1})$, $c(u_{0,2})$ et $c(u_{0,3})$.

Cas 2.1.

Si les sommets $u_{0,1}, u_{0,2}$ et $u_{0,3}$ reçoivent la couleur 1 par c et chaqu'un de ces sommets a deux voisins parmi l'une des deux est u_0, qui sont par paire à distance 2, alors juste deux sommets parmi l'ensemble $\{u_1, u_2, u_3\}$ peuvent colorer de $\{f, g\}$ par c avec f, $g \in \{2, 3, 4\}$, $e \neq g$, $e \neq f$ et $g \neq f$. Donc on a besoin d'une autre couleur pour terminer la coloration de ces sommets par c qui est $\{5\}$. Nous avons la même contradiction que dans le cas 1.

Cas 2.2 **.**

Si $\{c(u_{0,1}), c(u_{0,2}), c(u_{0,3})\} = \{1, 1, f\}$, $f \in \{3, 4\}, e \neq f$. Alors, on distingue les deux sous cas suivants :

Cas 2.2.1.

Si $e \in \{3, 4\}$ et les sommets $u_{0,1}$, $u_{0,2}$, $u_{0,3}$ reçoivent des couleurs de $\{1, 1, 2\}$ par c. Soit $k' \in \{1, 2, 3\}$, tel que $c(u_{0,k'}) = 2$. Alors, pour les sommets u_1, u_2 et u_3 on peut les colorer de $\{1, 2, g\}$ par c avec $g \in \{3, 4\}$, $e \neq g$, avec $c(u_{k'}) = 1$. A la suite, on peut colorer seulement un sommet de l'ensemble $\{u_{1,2}, u_{2,3}, u_{1,3}\}$ par $\{1\}$, par c. Pour k', l', $h' \in \{1, 2, 3\}$, $k' \neq l'$, $k' \neq h'$, $h' \neq l'$, si $c(u_{l'}) = 2$ et $c(u_{h'}) = g$, alors $c(u_{l',h'}) = 1$, mais il n'y a pas de couleurs disponibles pour les deux sommets restants de l'ensemble $\{u_{1,2}, u_{2,3}, u_{1,3}\}$ et dans ce cas, il faut utiliser deux autres couleurs par c qui sont $\{5, 6\}$, ce qui donne une contradiction avec le fait que c étant une coloration $4-$packing de G.

Cas 2.2.2.

Si $e = 2$ et $f \in \{3, 4\}$, $\neq e$, alors pour les sommets u_1, u_2 et u_3, on peut colorer seulement deux sommets de $\{1, g\}$, $f \neq g \neq e$ par c. Donc, on a besoin d'une autre couleur pour terminer la coloration de ces sommets par c qui est $\{5\}$. Ce qui donne une contradiction avec le fait que c étant une coloration $4-$packing de G.

Cas 2.3.

Si les sommets $u_{0,1}, u_{0,2}$ et $u_{0,3}$ reçoivent les couleurs $\{1, f, g\}$ par c, avec $f, g \in \{2,3,4\}$, $e \neq f$, $e \neq g$ et $f \neq g$, alors on distingue deux possibilités qui concernent les couleurs $c(u_1)$, $c(u_2)$ et $c(u_3)$.

Cas 2.3.1.

Si $f, g \in \{3,4\}$, alors par consequence, on peut colorer seulement deux sommets de l'ensemble $\{u_1, u_2, u_3\}$ par 1, par c . D'autre part, soit $k^{'}$, $l^{'}$,$h^{'} \in \{1,2,3\}$, $k^{'} \neq l^{'}, k^{'} \neq h^{'}, h^{'} \neq l^{'}$. Si $c(u_{0,l^{'}}) = f$ et $c(u_{0,h^{'}}) = g$, alors $c(u_{l^{'}}) = c(u_{h^{'}}) = 1$, et donc on a besoin d'une autre couleur pour terminer la coloration de ces sommets par c qui est $\{5\}$. Nous avons la même contradiction que dans le cas 1.

Cas 2.3.2.

Si $f = 2$ et $g \in \{3,4\}$, alors soient k, $l^{'}$, $h^{'} \in \{1,2,3\}$, $k \neq h^{'} \neq l^{'}$ tels que $c(u_{0,k^{'}}) = f$ et $c(u_{0,l^{'}}) = g$. Dans ce cas, les sommets u_1, u_2 et u_3 reçoivent les couleurs de $\{1, 1, f\}$ par c, avec $c(u_{k^{'}}) = c(u_{l^{'}}) = 1$ et $c(u_{h^{'}}) = 2$, mais il n'y a pas de couleurs disponibles pour les sommets $u_{1,2}, u_{2,3}, u_{3,1}$. Il suffit d'utiliser trois autres couleurs par c qui sont $\{5.6,7\}$, une contradiction que c étant une coloration $4-$packing de G.

Dans tous les cas mentionnés nous devons utiliser au mois 5 couleurs pour colorer le graphe G. Par symétrie, on déduit que notre lemme est démontré. ■

3.3.3 Coloration de packing de $FSSD_m(P_n \odot P_p)$

Théorème 3.3.2 *Pour tout* $n \geq 2$, $p \geq 2, m \geq 1$,

$$\chi_{_p}(FSSD_m(P_n \odot P_p)) = \begin{cases} 4 \ si \ n \geq 2 \ , \ p \in \{2,3\}, \\ 5 \ si \ n \geq 2 \ , \ p \geq 4. \end{cases}$$

Preuve. Notons par $G = (V, E)$ le graphe $FSSD_m(P_n \odot P_p)$. On note par u_i, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets de P_n, $P_{i,p}$, $i \in \{1, ..., n\}$ $(p \geq 2)$ les chaines correspondantes aux sommets u_i. On note aussi par $v_{i,j}$, $i \in \{1, ..., n\}$, $j \in \{1, ..., p\}$ les sommets de $P_{i,p}$, et par $u^k_{i,r}$, $i, r \in \{1, ..., n\}$, $(i \neq r)$, $k \in \{1, ..., m\}$ les m sommets de chaque sous graphe induit $K_{2,m}$ dans le graphe $FSSD_m(P_n)$, tel que u_r le sommet voisin au sommet u_i dans P_n. Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, j, $l \in \{1, ..., p\}$, $(j \neq l)$, $k \in \{1, ..., m\}$ on note par $v^k_{i,j,l}$ les m sommets de chaque sous graphe $K_{2,m}$ qui remplace l'arête $v_{i,j}v_{i,l}$. Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$

et $j \in \{1, ..., p\}$, $k \in \{1, ..., m\}$ on note par $s_{i,j}^k$ les m sommets de chaque sous graphe induit $K_{2,m}$ qui remplace l'arête $u_i v_{i,j}$. Soit $c : V \to \{1, 2, ...\}$ une coloration de packing sur G.

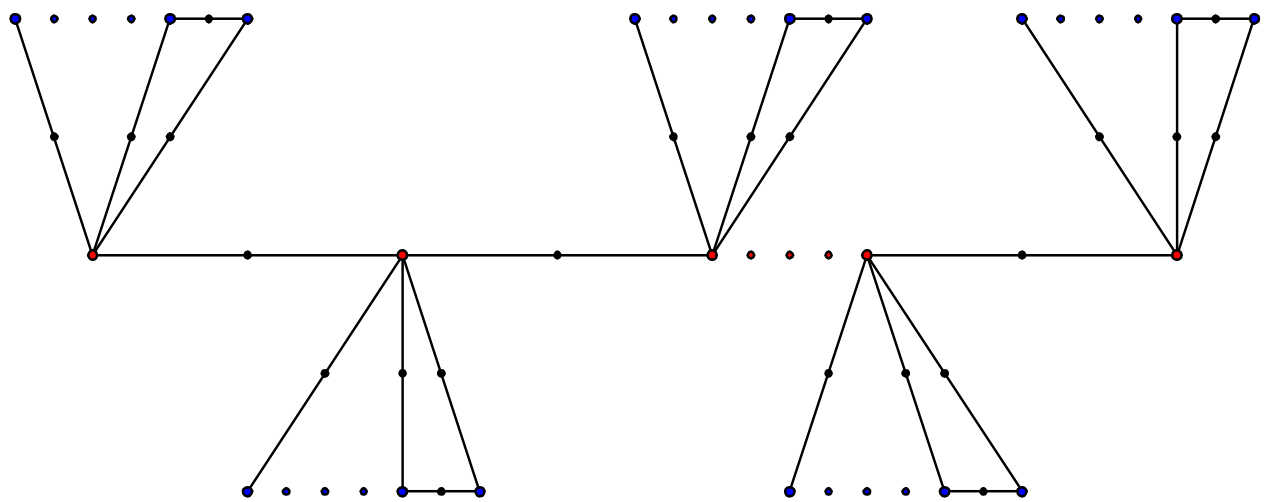


Figure 3.3.4: Le graphe $FSSD_m(P_n \odot P_p)$

Cas 1: Pour $n \geq 2$, $p \in \{2, 3\}$. G contient un sous graphe induit C_6. D'après la Proposition 2.1.1, $\chi_{_P}(C_6) = 4$, et par la Proposition 2.1.11, $\chi_{_p}(FSSD_m(P_n \odot P_p)) \geq \chi_{_P}(C_6)$.

D'ou $\chi_{_p}(FSSD_m(P_n \odot P_p)) \geq 4$.

Maintenant, pour montrer que $\chi_{_p}(FSSD_m(P_n \odot P_p)) \leq 4$, on utilise la coloration suivante :

On pose $c(u_{i,r}^k) = c(s_{i,j}^k) = c(v_{i,j,l}^k) = 1$ pour tout $l, j \in \{1, ..., p\}$ $(j \neq l)$, $i, r \in \{1, ..., n\} (i \neq r)$

Pour colorer les sommets u_i, $i \in \{1, ..., n\}$ de P_n, on distingue deux cas :

Cas 1.1. n est pair. Les sommets u_i sont colorés par la séquence $23, 23, ..., 23$.

Cas 1.2. n est impair. Les sommets u_i sont colorés par la séquence $23, 23, ..., 2$.

et pour les sommets $v_{i,j}$, $i \in \{1, ..., n\}$, $j \in \{1, ..., p\}$ de $P_{i,p}$, on distingue deux possibilités:

1_ Si $c(u_i) = 2$, alors on distingue les deux cas suivants :

Pour $p = 2$, $c(v_{i,1}) = 3$ et $c(v_{i,2}) = 4$.

Pour $p = 3$, $c(v_{i,1}) = c(v_{i,3}) = 2$ et $c(v_{i,2}) = 4$.

2_ Si $c(u_i) = 3$, alors on a deux possiblilités :

Pour $p = 2$, $c(v_{i,1}) = 2$ et $c(v_{i,2}) = 4$.

Pour $p = 3$, $c(v_{i,1}) = c(v_{i,3}) = 2$ et $c(v_{i,2}) = 4$.

Cas 2. Pour $n \geq 2$, $p \geq 4$. G contient un sous graphe induit $FSSD_1(P_2 \odot P_4)$. D'après le Lemme 3.3.1, $\chi_{_p}(FSSD_1(P_2 \odot P_4)) = 5$, et par la Proposition 2.1.11, $\chi_{_p}(FSSD_m(P_n \odot P_p)) \geq \chi_{_P}(FSSD_1(P_2 \odot P_4))$. D'où $\chi_{_p}(FSSD_m(P_n \odot P_p)) \geq 5$.

Maintenant, pour montrer que $\chi_{_p}(FSSD_m(P_n \odot P_p)) \leq 5$, $n \geq 2$, $p \geq 2$, on utilise la coloration suivante :

Pour tout $j, l \in \{1, ..., p\}$ $(j \neq l)$, $i, r \in \{1, ..., n\}(i \neq r)$ on pose :

$c(u^k_{i,r}) = c(s^k_{i,j}) = c(v^k_{i,j,l}) = 1$.

Pour colorer les sommets u_i, $i \in \{1, ..., n\}$ de P_n on distingue deux cas :

Cas 2.1. n est pair. On colore les sommets u_i par la séquence $23, 23, ..., 23$.

Cas 2.2. n est impair. Les sommets u_i sont colorés par $23, 23, ..., 2$.

et pour les sommets $v_{i,j}$, $i \in \{1, ..., n\}$, $j \in \{1, ..., p\}$, on distingue deux possibilités :

1_ Si $c(u_i) = 2$, alors on utilisera la coloration séquentielle suivante suivant le nombre p.

$$3435, ... \text{ si } p \cong 0 \pmod 4$$
$$3435, ..., 3 \text{ si } p \cong 1 \pmod 4$$
$$3435, ..., 34 \text{ si } p \cong 2 \pmod 4$$
$$3435, ..., 343 \text{ si } p \cong 3 \pmod 4$$

2_Si $c(u_i) = 3$, alors on aura la coloration séquentielle suivante suivant p.

$$2425, ...\text{si } p \cong 0 \pmod 4$$
$$2425, ..., 2 \text{ si } p \cong 1 \pmod 4$$
$$2425, ..., 24 \text{ si } p \cong 2 \pmod 4$$
$$2425, ..., 242 \text{ si } p \cong 3 \pmod 4$$

■

Exemple 3.3.2 *Les figures suivantes représentent la coloration de packing de* $FSSD_2(P_4 \odot P_5)$, $FSSD_3(P_5 \odot P_2)$ *et* $FSSD_4(P_5 \odot P_3)$*(les sommets noirs sont colorés par 1).*

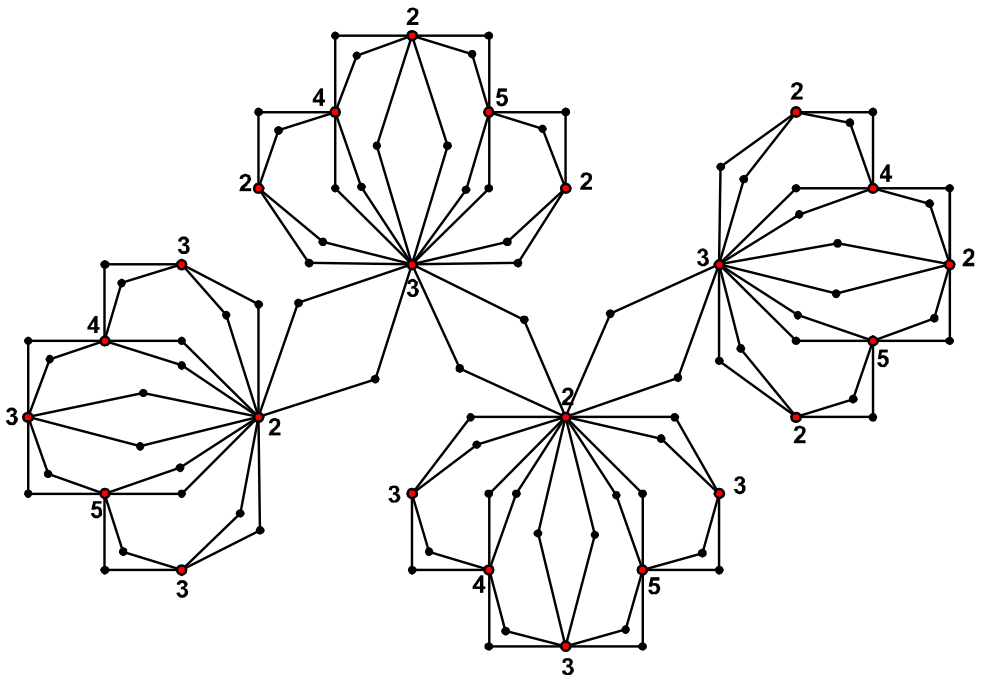


Figure 3.3.5: Graphe $FSSD_2(P_4 \odot P_5)$, $\chi_p(FSSD_2(P_4 \odot P_5)) = 5$.

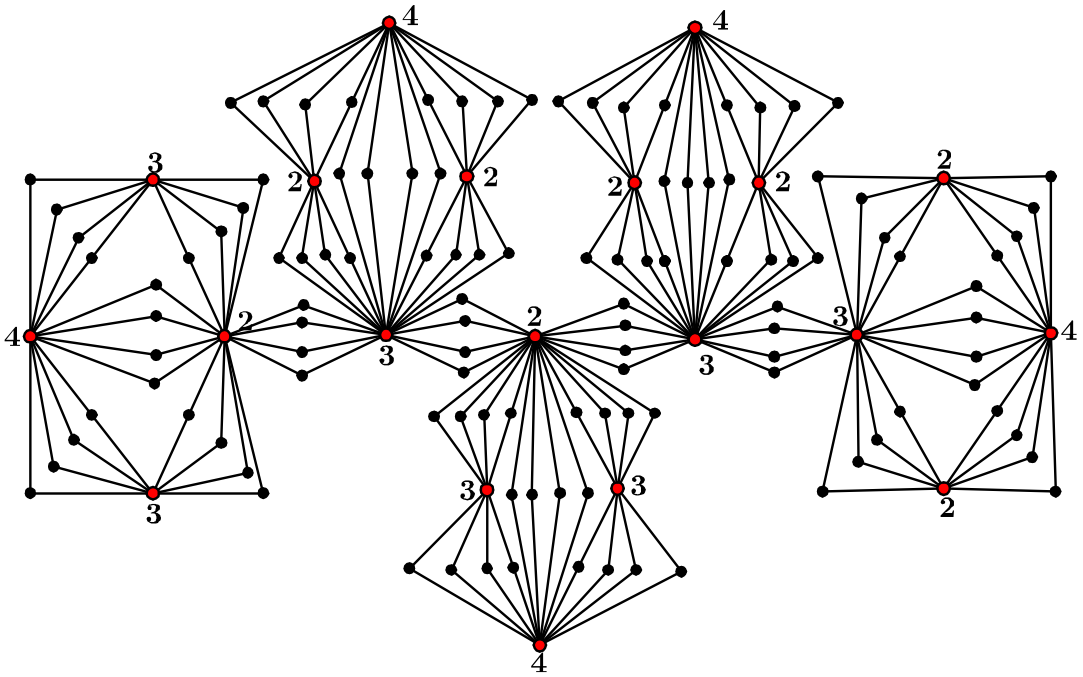


Figure 3.3.6: Graphe $FSSD_4(P_5 \odot P_3)$, $\chi_p(FSSD_4(P_5 \odot P_3)) = 4$.

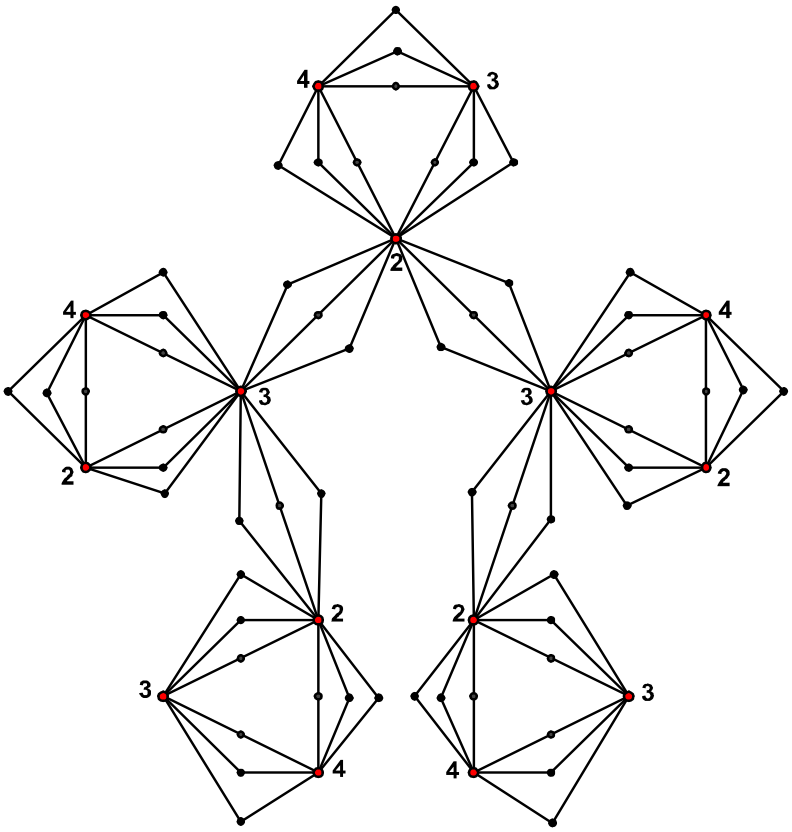


Figure 3.3.7: Graphe $FSSD_3(P_5 \odot P_2)$, $\chi_{_p}(FSSD_3(P_5 \odot P_2)) = 4$.

3.3.4 Coloration de packing de $FSSD_m(P_n \odot C_p)$

Théorème 3.3.3 *Pour tout* $n \geq 2$, $p \geq 3$, $m \geq 1$,

$$\chi_p(FSSD_m(P_n \odot C_p)) = 5.$$

Preuve. Soit $G = (V, E)$, le graphe $FSSD_m(P_n \odot C_p)$. On note par u_i, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets de P_n. On note aussi par $C_{i,p}$, $i \in \{1, ..., n\}$ $(p \geq 3)$ les cycles correspondantes aux sommets u_i et par $v_{i,j}$, $i \in \{1, ..., n\}$, $j \in \{1, ..., p\}$ les sommets de $C_{i,p}$, et par $u^k_{i,r}$, $i, r \in \{1, ..., n\}$ $(i \neq r)$, $k \in \{1, ..., m\}$ les m sommets de chaque sous graphe induit $K_{2,m}$ dans le graphe $FSSD_m(P_n)$, tel que u_r est le sommet voisin au sommet u_i dans P_n. Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $j, l \in \{1, ..., n\}$ $(j \neq l)$, $k \in \{1, ..., m\}$ on note par $v^k_{i,j,l}$ les m sommets de chaque sous graphe $K_{2,m}$ qui remplace l'arête $v_{i,j}v_{i,l}$. Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ et $j \in \{1, ..., p\}$, $k \in \{1, ..., m\}$, $s^k_{i,j}$ les m sommets de chaque sous graphe induit $K_{2,m}$ qui remplace l'arête $u_iv_{i,j}$. Soit $c : V \to \{1, 2, ...\}$ une coloration de packing sur G.

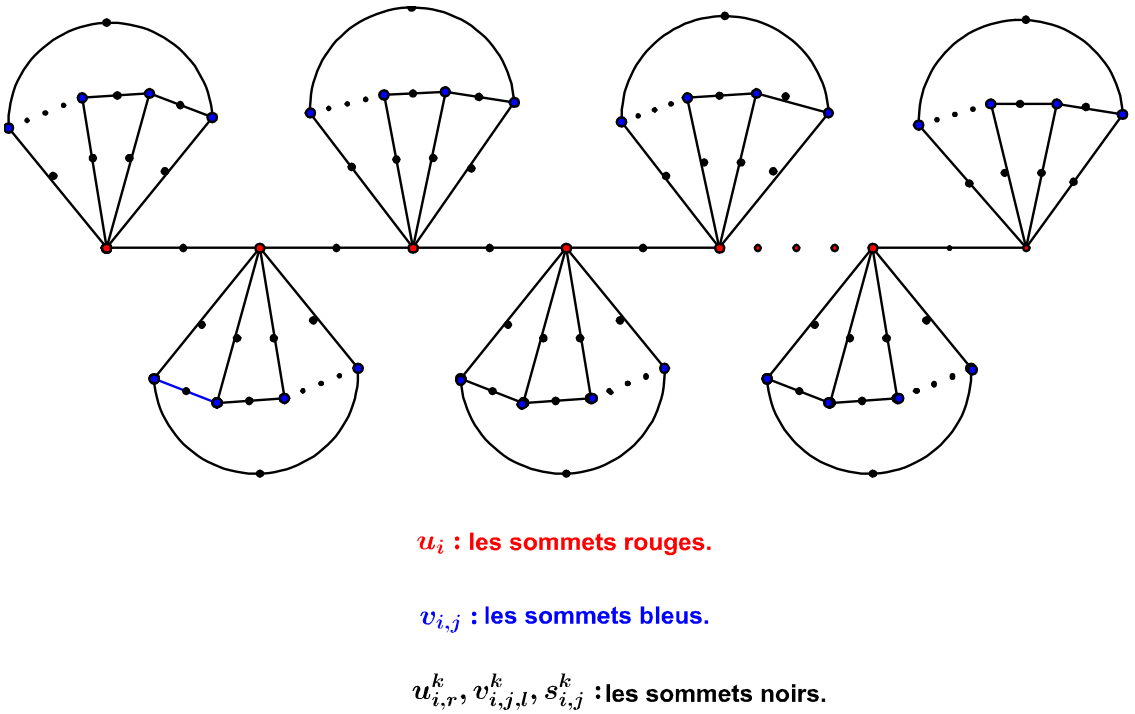


Figure 3.3.8: Le graphe $FSSD_m(P_n \odot C_p)$

Pour montrer que $\chi_{_p}(FSSD_m(P_n \odot C_p)) \geq 5$, on designe les deux cas suivants:

Cas 1. $n \geq 2$ et $p = 3$. G contient un sous graphe induit $FSSD_m(K_1 \odot C_3)$, et d'après Lemme 3.3.2, $\chi_{_p}(FSSD_1(K_1 \odot C_3)) = 5$, et par la Proposition 2.1.11, $\chi_{_p}(FSSD_m(P_n \odot C_p)) \geq \chi_{_P}(FSSD_m(K_1 \odot C_3))$, donc $\chi_{_p}(FSSD_m(P_n \odot C_p)) \geq 5$.

Cas 2. $n \geq 2$ et $p \geq 4$. G contient un sous graphe induit $FSSD_m(P_2 \odot P_4)$, d'après le Lemme 3.3.1, $\chi_{_p}(FSSD_1(P_2 \odot P_4)) \geq 5$, et par la Proposition 2.1.11, $\chi_{_p}(FSSD_m(P_n \odot C_p)) \geq \chi_{_P}(FSSD_m(P_2 \odot P_4))$. D'où $\chi_{_p}(FSSD_m(P_n \odot C_p)) \geq 5$.

Maintenant, pour montrer que $\chi_{_p}(FSSD_m(P_n \odot C_p)) \leq 5$, on utilise la coloration suivante :

On pose $c(u^k_{i,r}) = c(s^k_{i,j}) = c(v^k_{i,j,l}) = 1$ pour tout j, $l \in \{1, ..., p\}$ $(j \neq l)$, $i, r \in \{1, ..., n\}(i \neq r)$.

Pour colorer les sommets u_i , $i \in \{1, ..., n\}$ de P_n, on distingue deux possibilités :

1_ n est pair. On colore u_i par la séquence $23, 23, ...$

2_ n est impair. On colore u_i par la séquence $23, 23, ..., 2$.

et pour les sommets $v_{i,j}$, $i \in \{1, ..., n\}$, $j \in \{1, ..., p\}$, on distingue deux cas :

Cas 1 : Si $c(u_i) = 2$, alors on utilisera la coloration séquentielle suivante :

$$345, \text{ Si } p = 3.$$
$$3435, \text{ Si } p \cong 0(\text{mod } 4).$$
$$3435, ..., 4, \text{ Si } p \cong 1(\text{mod } 4).$$
$$3435, ..., 34, \text{ Si } p \cong 2(\text{mod } 4).$$
$$3435, ..., 345, \text{ Si } p \cong 3(\text{mod } 4).$$

Cas 2 : Si $c(u_i) = 3$, alors on aura la coloration séquentielle suivante :

$$245, \text{ Si } p = 3.$$
$$2425, \text{ Si } p \cong 0(\text{mod } 4).$$
$$2425, ..., 4, \text{ Si } p \cong 1(\text{mod } 4). \quad \blacksquare$$
$$2425, ..., 24, \text{ Si } p \cong 2(\text{mod } 4).$$
$$2425, ..., 245, \text{ Si } p \cong 3(\text{mod } 4).$$

Exemple 3.3.3 *Les figures suivantes montrent une coloration de packing de* $FSSD_1(P_5 \odot C_3)$, $FSSD_2(P_4 \odot C_4)$ *et* $FSSD_3(P_7 \odot C_3)$*(les sommets noirs sont colorés par 1).*

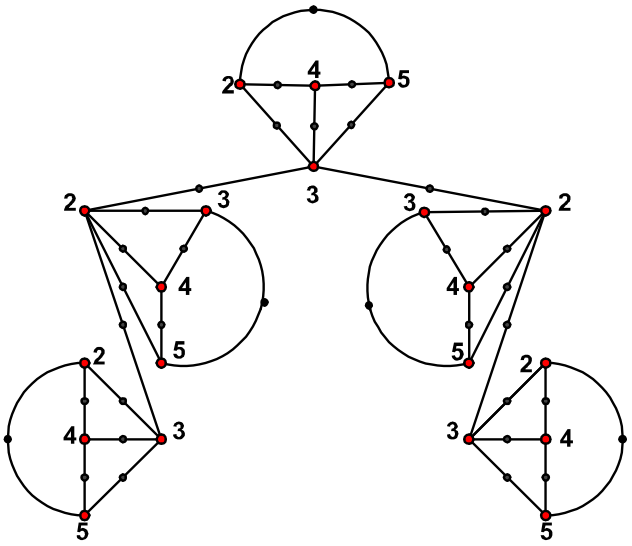


Figure 3.3.9: Graphe $FSSD_1(P_5 \odot C_3)$, $\chi_p(FSSD_1(P_5 \odot C_3)) = 5$

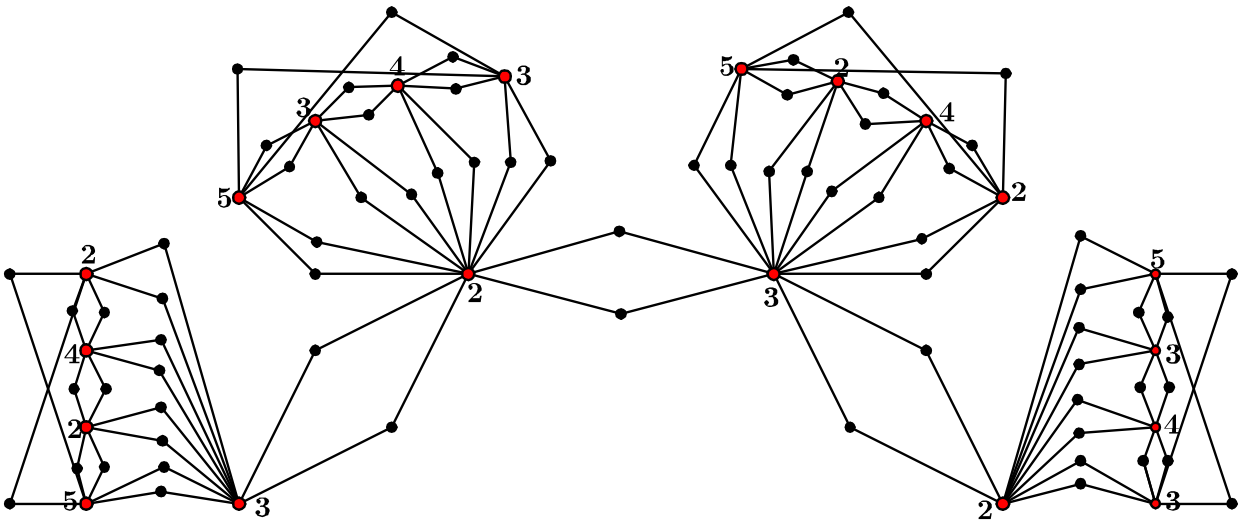


Figure 3.3.10: Graphe $FSSD_2(P_4 \odot C_4)$, $\chi_p(FSSD_2(P_4 \odot C_4)) = 5$.

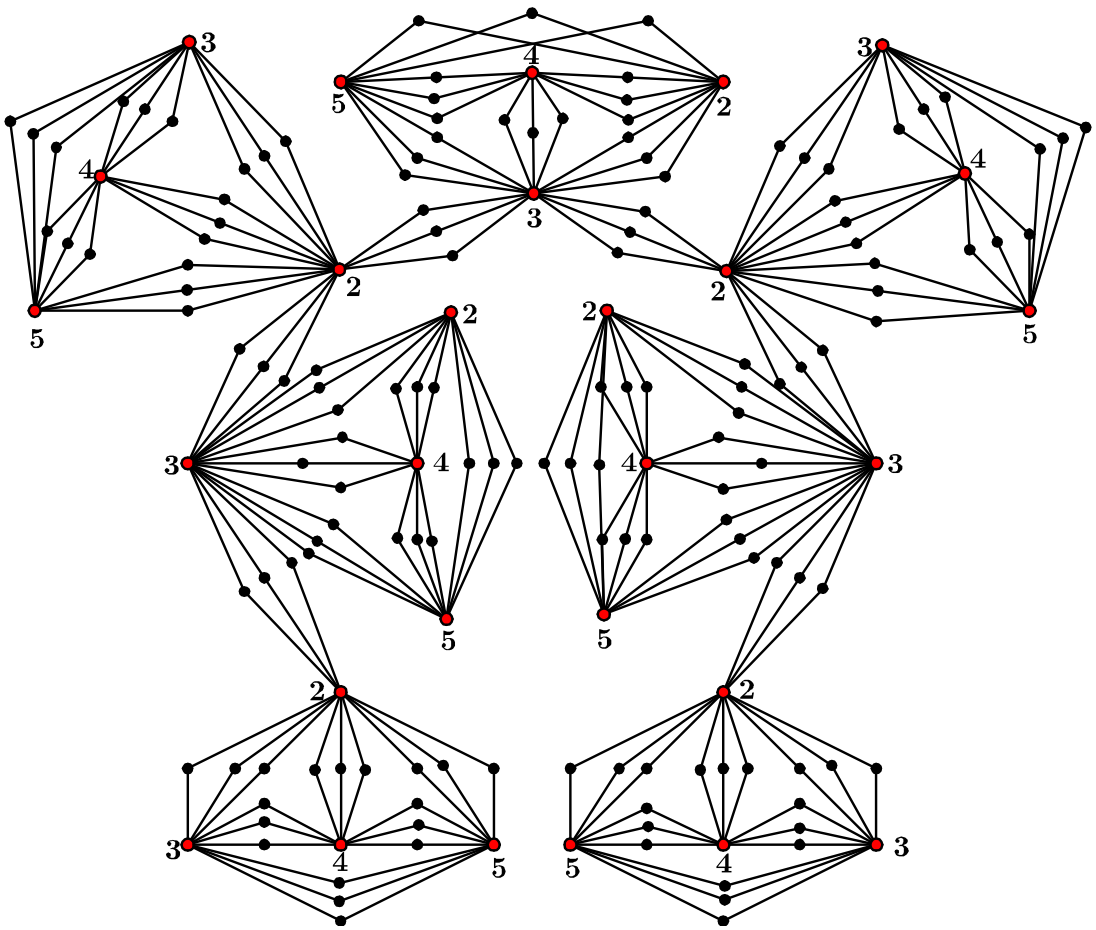


Figure 3.3.11: Graphe $FSSD_3(P_7 \odot C_3)$, $\chi_p(FSSD_3(P_7 \odot C_3)) = 5$.

3.3.5 Coloration de packing de $FSSD_m(C_n \odot C_p)$

Théorème 3.3.4 *Pour tout $n \geq 4$, $p \geq 3$, $m \geq 1$,*

$$\chi_p(FSSD_m(C_n \odot C_p)) = 5 \text{ si } n \text{ est pair.}$$

Preuve. On note par $G = (V, E)$, le graphe $FSSD_m(C_n \odot C_p)$. On note par u_i, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets du C_n, $C_{i,p}$, $i \in \{1, ..., n\}$ $(p \geq 3)$ les cycles correspondantes aux sommets u_i, on note aussi $v_{i,j}$, $i \in \{1, ..., n\}$, $j \in \{1, ..., p\}$ les sommets de $C_{i,p}$, et par $u^k_{i,r}$, $i, r \in \{1, ..., n\}$ $(i \neq r)$, $k \in \{1, ..., m\}$ les m sommets de chaque sous graphe induit $K_{2,m}$ dans le graphe $FSSD_m(C_n)$, tel que u_r le sommet voisin au sommet u_i dans P_n. Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, j, $l \in \{1, ..., n\}$ $(j \neq l)$, $k \in \{1, ..., m\}$ on note par $v^k_{i,j,l}$ les m sommets de chaque sous graphe $K_{2,m}$ qui remplace l'arête $v_{i,j}v_{i,l}$. Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ et $j \in \{1, ..., p\}$, $k \in \{1, ..., m\}$, $s^k_{i,j}$ les m sommets de chaque sous graphe induit $K_{2,m}$ qui remplace l'arête $u_iv_{i,j}$. Soit $c : V \to \{1, 2, ...\}$ une coloration de packing sur G.

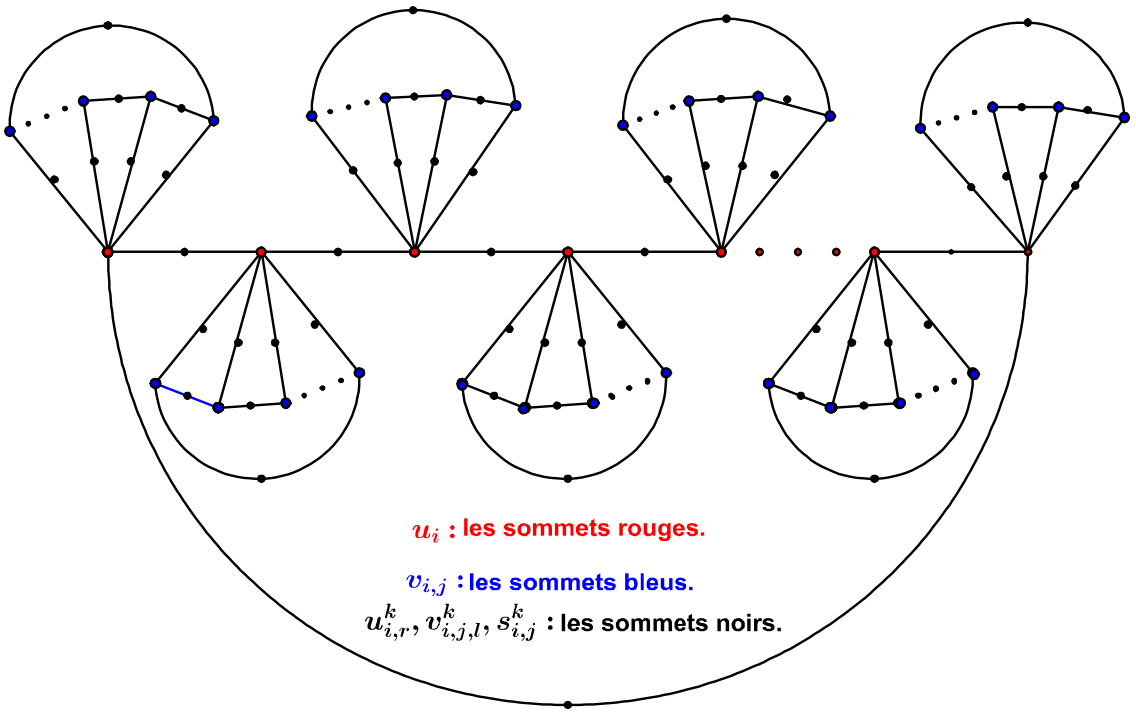


Figure 3.3.12: Le graphe $FSSD_m(C_n \odot C_p)$

Pour montrer que $\chi_p(FSSD_m(C_n \odot C_p)) \geq 5$, on désigne les deux cas suivants :

Cas 1 : Pour $n \geq 2$ et $p = 3$. G contient un sous graphe induit $FSSD_m(K_1 \odot C_3)$. D'après le Lemme 3.3.2, $\chi_p(FSSD_1(K_1 \odot C_3)) = 5$, et par la Proposition 2.1.11, $\chi_p(FSSD_m(C_n \odot C_p)) \geq \chi_P(FSSD_m(K_1 \odot C_3))$, et donc $\chi_p(FSSD_m(C_n \odot C_p)) \geq 5$.

Cas 2 : Pour $n \geq 2$ et $p \geq 4$. G contient un sous graphe induit $FSSD_m(P_2 \odot P_4)$. D'après le Lemme 3.3.1, $\chi_p(FSSD_1(P_2 \odot P_4)) \geq 5$,et par la Proposition 2.1.11, $\chi_p(FSSD_m(C_n \odot C_p)) \geq \chi_P(FSSD_m(P_2 \odot P_4))$. D'où $\chi_p(FSSD_m(C_n \odot C_p)) \geq 5$.

Maintenant, pour montrer que $\chi_p(FSSD_m(C_n \odot C_p)) \leq 5$, $n \geq 3$, $p \geq 3$, on utilise la coloration suivante :

Pour tout $j, l \in \{1, ..., p\}$ $(j \neq l)$, $i, r \in \{1, ..., n\}(i \neq r)$, on pose :

$c(u^k_{i,r}) = c(s^k_{i,j}) = c(v^k_{i,j,l}) = 1$.

Les sommets u_i , $i \in \{1, ..., n\}$ de C_n sont colorés suivant la séquence $23, 23, ...$

et pour les sommets $v_{i,j}$, $i \in \{1, ..., n\}$, $j \in \{1, ..., p\}$, on distingue deux cas :

Cas 1 : Si $c(u_i) = 2$, alors la coloration séquentielle suivante est utilisée suivant le nombre p.

$$345, \text{ Si } p = 3.$$

$$3435, \text{ Si } p \cong 0(\text{mod } 4).$$

$$3435, ..., 4, \text{ Si } p \cong 1(\text{mod } 4).$$

$$3435, ..., 34, \text{ Si } p \cong 2(\text{mod } 4).$$

$$3435, ..., 345, \text{ Si } p \cong 3(\text{mod } 4).$$

Cas 2 : Si $c(u_i) = 3$, alors on utilise la coloration séquentielle suivante :

$$245, \text{ Si } p = 3.$$

$$2425, \text{ Si } p \cong 0(\text{mod } 4).$$

$$2425, ..., 4, \text{ Si } p \cong 1(\text{mod } 4).$$

$$2425, ..., 24, \text{ Si } p \cong 2(\text{mod } 4).$$

$$2425, ..., 245, \text{ Si } p \cong 3(\text{mod } 4).$$

Dans tous les cas, $\chi_p(FSSD_m(C_n \odot C_p)) = 5$ et notre théorème est démontré. ■

Exemple 3.3.4 *Les figures suivantes représentent la coloration de packing de* $FSSD_1(C_6 \odot C_4)$, $FSSD_2(C_4 \odot C_4)$ *et* $FSSD_3(C_8 \odot C_3)$*(les sommet noirs sont colorés par* 1*).*

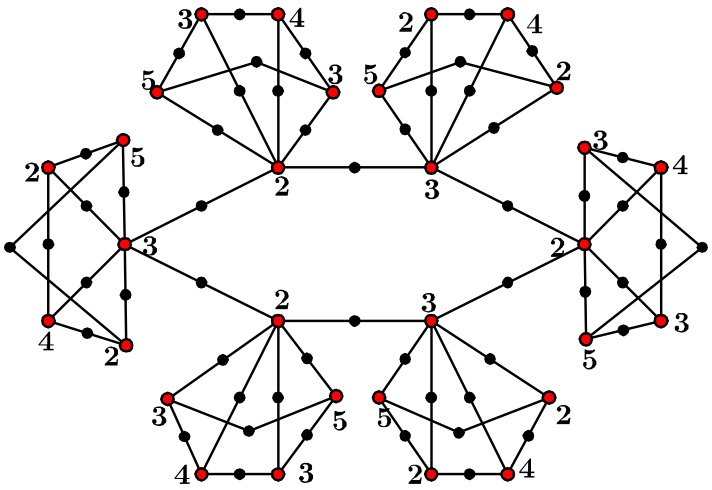


Figure 3.3.13: Graphe $FSSD_1(C_6 \odot C_4)$, $\chi_p(FSSD_1(C_6 \odot C_4)) = 5$.

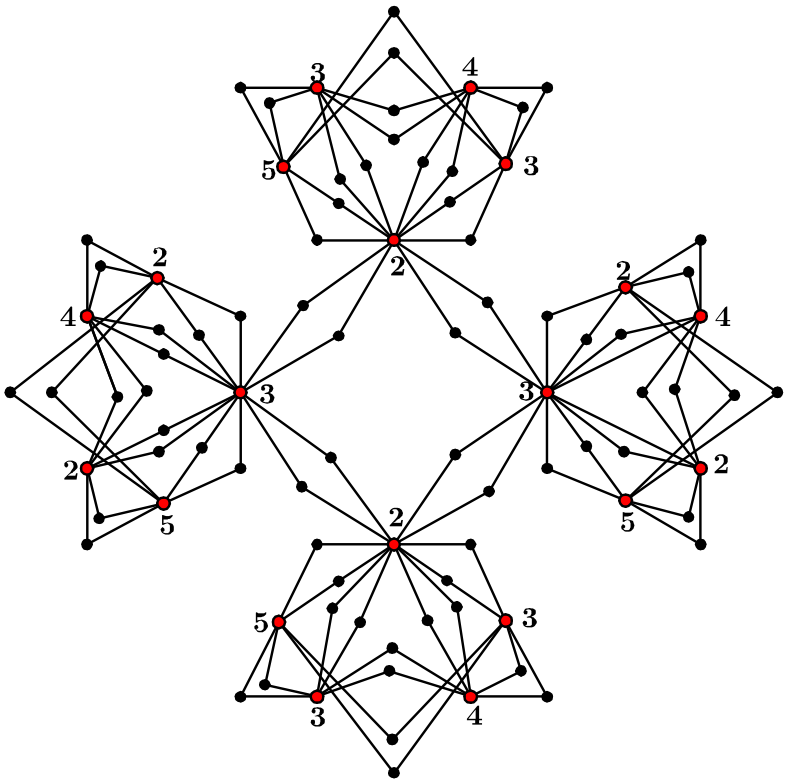


Figure 3.3.14: Graphe $FSSD_2(C_4 \odot C_4)$, $\chi_p(FSSD_2(C_4 \odot C_4)) = 5$.

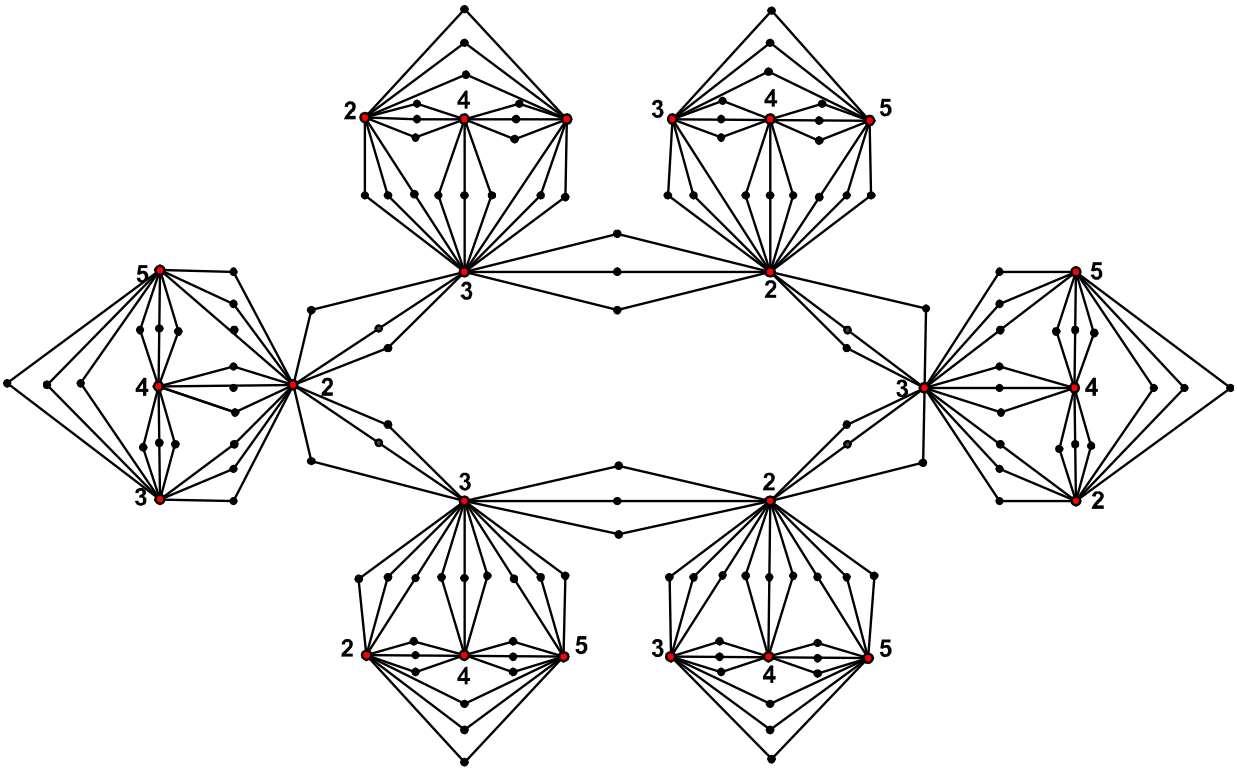


Figure 3.3.15: Graphe $FSSD_3(C_8 \odot C_3)$, $\chi_p(FSSD_3(C_8 \odot C_3)) = 5$.

Conclusion

Tout au long de ce travail, nous nous sommes intéréssés principalement à l'étude du problème de la coloration de packing . Dans un premier temps, nous avons rappelé quelques résultats existant sur la coloration de packing dans les graphes, notamment les résultats obtenus par Goddard et al. [7]. Ensuite, nous avons abordé la notion du nombre chromatique de packing et nous avons étudié ce paramètre pour diverses classe de graphes. Nous avons déterminé les valeurs exactes de $\chi_{_P}(K_{1,p} \times P_n)$, $\chi_{_P}(K_{1,p} \times C_n)$. Dans [19] William et Roy ont étudié une bonne classe de graphe, appelé classe des graphes subdivisés super finis. Pour cela, nous avons déterminé la valeur exacte du nombre chromatique de packing des graphes subdivisés super finis pour les graphes, produit croisé et cartésien d'une étoile avec une chaine $FSSD_m(K_{1,p} \times P_n)$, $FSSD_m(K_{1,p} \square P_n)$ et pour le produit cartésien d'une étoile avec un cycle $FSSD_m(K_{1,p} \square C_n)$ si n est pair. Ensuite pour les graphes Tadpole $T_{p,n}$ et Prisme d'un cycle Y_n. Nous avons déterminé aussi le nombre chromatique de packing du graphe subdivisé super fini d'une classe très complexe, appelée: couronne de deux graphes. Dans ce cadre, nous avons pu trouver les valeurs exactes des graphes : $FSSD_m(T_{p,n} \odot qK_1)$, $FSSD_m(P_n \odot P_p)$, $FSSD_m(P_n \odot C_p)$ et $FSSD_m(C_n \odot C_p)$.

On conclut que la détermination du nombre chromatique de packing en général est NP Complet pour certains types de graphes.

Comme perspective à notre travail, nous proposons à étudier les problèmes suivants :

• Déterminer la borne inférieure du nombre de la coloration de packing du graphe subdivisé super fini de: produit cartésien d'une étoile avec un cycle $FSSD_m(K_{1,p} \square C_n)$ si n est impair (voir Proposition 3.2.1).

• Déterminer la borne inférieure du nombre de la coloration de packing du graphe subdivisé super fini d'un graphe Prisme d'un cycle Y_n si n impair (voir Théorème 3.2.5).

• Déterminer la valeur exacte du nombre de la coloration de packing du graphe subdivisé super fini d'un graphe Prisme pour d'autres graphes.

• Déterminer le nombre de la coloration de packing d'un graphe subdivisé super fini d'une couronne d'un cycle C_n avec un cycle C_p si p est impair.

• Déterminer le nombre de la coloration de packing du graphe subdivisé super fini d'une couronne d'un graphe TADPOLE $T_{p,n}$ avec une chaîne ou bien un cycle.

Bibliographie

[1] K. Appel and W. Haken. The solution of the four-color-map problem. Scientific American, 237(4) :108-121, 152, 1977.

[2] K. Appel, W. Haken and J. Koch. Every planar map is four colorable : Part 2, reducibility. Illinois Journal of Mathematics, 21 :491-567, 1977.

[3] B. Bresar, S. Klavsãr, D. F. Rall, On the packing chromatic number of cartesian products, Hexagonal lattice, and trees. Discrete Appl. Math., 155(17) : 2303- 2311; 2007.

[4] C. Berge. Graphes, North Holland, 1985.

[5] Christian Sloper. Broadcast-coloring of trees, Reports in informatics ISSN 0333-3590, 2002.

[6] IE. Djamel et M.Abdesaamed, Mémoire Présenté pour l'obtention du diplome de magister en recherche opérationnelle.Sur caractérisation des graphes double b-critiques, Univ Dr. Yahya Farés de Médéa, Mai 2017.

[7] W. Goddard, S.M.Hedetniemi, J. M. Harris, D.F. Rall, Broadcast chromati numbers of graphs, Ars Combin., 86 : 33 49, 2008.

[8] M. Kubesa et T. Aiman, Factorizations of complete graphs into tadpoles, AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics, DOI: 10.1016/ j.akcej.2020.02.004.

[9] M. Kim, B. Lidický, T.Masaik, F. Pfender, Notes on complexity of packing coloring, Information Processing Letters 137 (2018), 6–10.

[10] R. Lemdani et A.Taibaoui et O. Mezioud . Mémoire Présenté pour l'obtention du diplome de master en recherche opérationnelle. Opérations sur le nombre de la coloration broadcast, Univ Dr. Yahya Farés de Médéa, juin 2015.

[11] R. Lemdani et M. Abbas. On the broadcast chromatic subdivision number ingraphs. Soumi, 2016.

[12] D. Laiche, Mémoire Présenté pour l'obtention du diplome de magister en recherche opérationnelle. Sur les nombres broadcast chromatiques, USTHB, Bab Ezzouar, (2010).

[13] D. Miller**.** Introduction à la théorie des graphes, www.apprendre-en-ligne.net/graphes, 2008.

[14] E. A. Nordhaus, J. W. Garddum. On complementary graphs. Ann. Monthly, 63:175 − 177, 1956.

[15] K.Praveena, M.Venkatachalam, A. Rohini, Dafikk, Equitable coloring of Prism graph and itís central, middle, total and line graph. International journal of scientific et technology research volume 8, issue08, august 2019

[16] E. Sigward. Introduction à la théorie des graphes

[17] S. K. Vaidya et P. L. Vihol, Discussion on Some Interesting Topics in GraphTheory, Ph.DThesis, Saurashtra University, Rajkot, April 2011.

[18] S. Velammel, Studies in Graph Theory : Covering, Independence, Domination and Related Topics, Ph.D. Thesis (Manonmaniam Sundaranar University),1997.

[19] A. William, S. Roy**,** Paking chromatic number of certain graphs. Department of Mathematics, Loyola College, Chennai 600034, INDIA.

[20] A. William, S. Roy, Packing Chromatic Number of Certain Trees and Cycle Related Graphs, International Conerence on Mathematical Computer Engineering, ICMCE, 2013.