الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

Republique Algérienne Démocratique Et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة يحيى فارس – **المدية** -

Université Dr. Yahia Fares de Médéa

Faculté des Sciences

Departement des Sciences de la matiere

Spécialité : Physique Théorique

Polycopie
Vibrations et Ondes Mécaniques
Rappels de Cours et Exercices Corrigés

Module : Physique 03

Niveau : 2ième Année Licence ST, SM

جامعة يحيى فارس بالمدية
المجلس العلمي
كلية العلوم

Présenté par: Dr. Mohammed AHMED AMMAR

Année Universitaire : 2018 /2019

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

Republique Algérienne Démocratique Et Populaire

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جـــامعة يحيى فارس – **المدية** -

Université Dr. Yahia Fares de Médéa

Faculté des Sciences

Departement des Sciences de la matiere

Spécialité : Physique Théorique

Polycopie
Vibrations et Ondes Mécaniques
Rappels de Cours et Exercices Corrigés

Module : Physique 03

Niveau : 2ième Année Licence ST, SM

Présenté par: Dr. Mohammed AHMED AMMAR

Email : ahmed_028pht@yahoo.fr

Année Universitaire : 2018 /2019

Préface

Ce cours s'adresse aux étudiants de 2ième Année Licence Sciences de la matière (SM) et Sciences de Technologie (ST). Ce cours présenté dans ce manuscrit est une contribution à l'étude des phénomènes des vibrations et des ondes mécaniques réparties en quatre chapitres. Après un rappel sur notions de Base sur les oscillations des systèmes physiques dans le premier chapitre, nous décrirons dans le second chapitre les oscillations libres des systèmes à un degré de liberté. Dans le troisième chapitre, nous avons présenté les oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté. Finalement, le chapitre quatre est consacré à l'étude des oscillations des systèmes mécaniques à deux degrés de liberté.

Dr M. AHMED AMMAR

" أطلب من الله عز و جل أن يكون هذا العمل صدقة جارية في ميزان حسنات والدتي رحمها الله"

Remerciements

Ce travail a été effectué à l'université Dr. Yahia Farès de Médéa, département de physique, mes premiers remerciements vont donc naturellement à cette université pour son accueil chaleureux et les conditions de travail idéales dont j'ai pu bénéficier.

Je suis très reconnaissante envers le Pr. A. DIAF et le Dr. H. ZITOUNI d'avoir accepté de lire mon manuscrit et de me faire part de leurs constructives remarques.

Dr M. AHMED AMMAR

Table des matières **Numéro de page**

Chapitre I : Notion de base sur les oscillations **1**
Généralités sur les oscillations 1
Degrés de liberté 1
Équations différentielles 2
Nombres complexes 2
Moment d'inertie 3
Énergie cinétique et potentielle 5
Exercice 1.1 7
Exercice 1.2 7
Exercice 1.3 7
Exercice 1.4 8
Exercice 1.5 8
Solutions des Exercices du Chapitre I **10**
Solution 1.1 11
Solution 1.2 10
Solution 1.3 12
Solution 1.4 12
Solution 1.5 14
Chapitre II : Oscillations libres des systèmes à un degré de liberté **17**
Méthode de Lagrange 17
Oscillations libres non amorties $F_q(t)=0$ et $\mathcal{D}=0$ 18
Oscillations libres amorties $F_q(t)=0$ et $\mathcal{D}\neq 0$ 19
Analogies entre les systèmes électriques et mécaniques 21
Exercice 2.1 22
Exercice 2.2 23
Exercice 2.3 24
Exercice 2.4 25
Exercice 2.5 25
Exercice 2.6 26
Exercice 2.7 27
Exercice 2.8 27
Exercice 2.9 28
Exercice 2.10 28
Exercice 2.11 29
Exercice 2.12 30
Solutions des Exercices du Chapitre II **31**
Solution 2.1 31
Solution 2.2 33
Solution 2.3 35
Solution 2.4 38
Solution 2.5 39
Solution 2.6 41
Solution 2.7 42
Solution 2.8 44

D.M. AHMED AMMAR

Solution 2.9 46
Solution 2.10 48
Solution 2.11 50
Solution 2.12 52
Chapitre III : Oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté **54**
Introduction 54
Oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté $F_q(t) \neq 0$ et $\mathcal{D} \neq 0$ 54
Pulsation de résonnance 56
Bande Passante 57
Coefficient de Qualité 57
Exercice 3.1 58
Exercice 3.2 59
Exercice 3.3 59
Exercice 3.4 60
Solutions des Exercices du Chapitre III **62**
Solution 3.1 62
Solution 3.2 68
Solution 3.3 70
Solution 3.4 72
Chapitre IV : Oscillations des systèmes mécaniques à deux degrés de liberté **74**
Partie I : Oscillations libres 74
Introduction 74
Couplage entre les différents systèmes 74
Equation du mouvement 76
Partie II : Oscillations forcées 76
Introduction 76
Equation du mouvement 77
Impédance mécanique 77
Exercice 4.1 78
Exercice 4.2 78
Exercice 4.3 79
Exercice 4.4 80
Exercice 4.5 81
Solutions des Exercices du Chapitre IV **82**
Solution 4.1 82
Solution 4.2 84
Solution 4.3 88
Solution 4.4 90
Solution 4.5 92
Bibliographie **94**

Dr M. AHMED AMMAR

Chapitre I
Notions de Base sur les oscillations

I.1 Généralités sur les oscillations

Un système mécanique oscillant est un système mécanique qui a un mouvement périodique autour de sa position d'équilibre stable. La vibration d'un système peut être libre ou forcée. Un oscillateur est dit libre, s'il oscille sans interventions extérieures pendant son mouvement, et il est dit forcé, s'il oscille avec interventions extérieures (forces extérieures).

On peut classer les phénomènes physiques en deux grandes catégories: mécanique et électrique. Dans le cas mécanique, les phénomènes sont régis par les lois de la gravitation et de l'inertie. Dans le cas électrique, c'est le champ électromagnétique lié à la propriété de charge électrique de certaines particules constituant la matière.

I.2 Degrés de liberté

Le nombre de degrés de liberté d'un système physique est égal au nombre de coordonnées linéairement indépendantes qui représentent la position de m.

Pour simplifie les choses concernant «**le nombre de coordonnées linéairement indépendantes** » on va décrire le mouvement d'un pendule simple on peut utiliser les coordonnées x et y mais ils ne sont pas linéairement indépendants vu qu'on a une relation qui les relie $x^2 + y^2 = l^2$, tel que l la longueur du fil, donc le système a un seul degré de liberté. Il sera dans ce cas plus judicieux d'utiliser θ comme coordonnée généralisée au lieu de x ou de y.

Concernant les masses ponctuelles, le nombre de degrés de liberté est égal 3 **fois** le nombre de particules N_p **moins** le nombre de contraintes :

$$N_d = 3N_p - N_c \ . \qquad \text{(I.1)}$$

Une contrainte est toute relation mathématique qui diminue le nombre de coordonnées nécessaires à la description du système.

Le nombre 3 dans la relation (I.1) est celui des translations linéairement indépendantes possible dans un espace à trois dimensions.

Pour un pendule simple oscille dans le plan xOy donc il est sujet à deux contraintes :

- La première contrainte devient de la relation $x^2 + y^2 = l^2$.

- La deuxième devient de $z = c^{te} = 0$.

Ce qui donne le nombre de contraintes $N_d = 3.1 - 2 = 1$.

Concernant pour les corps solides, le nombre de degrés de liberté est égal 6 **fois** le nombre de corps solides N_s **moins** le nombre de contraintes :

$$N_d = 6N_s - N_c \qquad \text{(I.2)}$$

Le nombre 6 dans la relation (I.2) est celui des translations et des rotations linéairement indépendantes dans un espace à trois dimensions, c-à-d : 3 translations suivant Ox, Oy et Oz + 3 rotations autours de Ox, Oy et Oz.

Dr M. AHMED AMMAR

I.3 Équations différentielles

Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants estune équation dont l'inconnue est une fonction dépendante d'une variable x et ses dérivées première $\dot{x}$ et seconde $\ddot{x}$ par rapport à une variable indépendante t, qui peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A(t)\ , \qquad \text{(I.3)}$$

tel que : $\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}\ et \frac{dx}{dt} = \dot{x}$.

I.4 Nombres complexes :

On définit un nombre complexe $Z \in C$, tel que le couple $(a,b) \in R^2$ est unique et Z prend la forme $Z = a + jb$. Où a + jb est la forme algébriquedu

nombre complexe Z,a est la partie réelle de Z, notée Re(Z), b est la partie imaginairede Z, notée Im(Z).

On rappel qu'un nombre complexe Z peut être écrit sous trois formes :

$$Z = a + jb \tag{I.4}$$

$$Z = |Z|(Cos\theta + jSin\theta) \tag{I.5}$$

$$Z = |Z|e^{j\theta} \tag{I.6}$$

Avec $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ est le module de Z, et θ leur argument, tel que $Tan(\theta) = \frac{b}{a}$

ce qui donne $\theta = Arc\tan(\frac{b}{a})$ en radian.

Propriété :

a- Forme trigonométrique d'un complexe non nul :

Pour tout nombre complexe non nul Z, on a : $Z = \rho e^{j\theta}$ avec $\rho = |Z|$ et $\theta = Arg(Z)[2\pi]$

b- $Z = Z_1 Z_2$ alors $|Z| = |Z_1||Z_2|$ et $\theta = \theta_1 + \theta_2$

$Z = \frac{Z_1}{Z_2}$ alors $|Z| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$ et $\theta = \theta_1 - \theta_2$

Dr M. AHMED AMMAR

I.5 Moment d'inertie :

D'après le principe d'inertie galiléen « tout objet conserve son états de repos ou de mouvement rectiligne uniforme en l'absence de force agissant sur lui ». Le moment d'inertie par rapport au centre de rotation I_Δ « théorème de Huygens », est le produit de la masse par la distance au carré entre le centre du gravité et l'axe de rotation, et a pour dimension M•L^2.

$$I_{(\Delta)} = I_0 + md^2 \tag{I.8}$$

I_0 : est le moment d'inertie d'un corps solide par rapport à un axe de rotation passant par de son centre de gravité (CG).

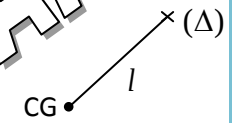
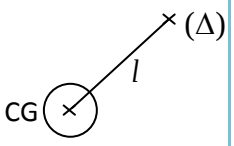
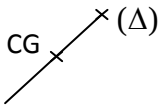
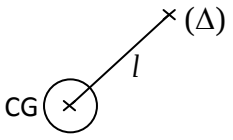
$I_{(\Delta)}$: est le moment d'inertie d'un corps solide par rapport à un axe de rotation (Δ).

a- Moment d'inertie par rapport au centre de gravité (CG) **:**

Le moment d'inertie d'un corps solide par rapport à un axe de rotation passant par de son centre de gravité (CG) s'écrit en générale sous la forme :

$$I_0 = \int r^2 dm \qquad \text{(I.9)}$$

L'intégrale (I.9) dépend de la distribution de la masse dans le solide. Selon que le solide est linéique, surfacique ou volumique, dm sera λdl, σds et ρdV. Les termes dl, ds et dV sont respectivement les éléments de longueur, de surface et de volume et λ, σ et ρ des densités linéique, surfacique ou volumique de masse. Lorsque le solide est homogène, la distribution de la masse est uniforme et ces densités sont constantes.

$I_0 = \int r^2 dm = 0 \quad , \ (dm = 0)$ $I_{(\Delta)} = ml^2$	 Une masse ponctuelle (M)
$I_0 = \int_0^{2\pi} R^2 \lambda R d\theta \ , \ (r = R \text{ et } dm = \lambda R d\theta)$ $= \lambda R^3 \int_0^{2\pi} d\theta$ $= MR^2$ $I_{(\Delta)} = MR^2 + M(R+l)^2$	 Un anneau (M,R)
$I_0 = \int_{-l/2}^{+l/2} \lambda x^2 dx \ , \ (r = x \ \text{ et } \ dm = \lambda dx)$ $= \frac{1}{12} Ml^2$ $I_{(\Delta)} = \frac{1}{12} Ml^2 + M(\frac{l}{2})^2 = \frac{1}{3} Ml^2$	 Une tige (M,l)
$I_0 = \int_0^R r^2 (\sigma r \, dr \, d\theta) \ , \ (r = R \text{ et } dm = \sigma r \, dr \, d\theta)$ $= \sigma \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 dr \, d\theta$ $= \frac{1}{2} MR^2$ $I_{(\Delta)} = \frac{1}{2} MR^2 + M(R+l)^2$	 Un disque plain (M,R)

Dr M. AHMED AMMAR

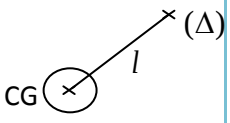
$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow \rho = \frac{m}{4\pi R^3/3}\ ,\ (r = R\sin\phi\ et\ dm = \rho R^2 \sin\phi dR d\theta d\phi)$$

$$I_0 = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho R^4 \sin^3\phi dR d\theta d\phi$$

$$= \rho \int_0^R R^4 dR \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin^3\phi d\phi$$

$$= \frac{2}{5} MR^2$$

$$I_{(\Delta)} = \frac{2}{5} MR^2 + M(R+l)^2$$



Une sphère (M,R)

Dr M. AHMED AMMAR

I.6 Énergie cinétique et potentielle :

a. Énergie cinétique :

Par définition l'énergie cinétique est égale :

$$T = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} I_{(\Delta)} \dot{\theta}^2 \qquad (I.10)$$

$\frac{1}{2} mv^2$: énergie cinétique de translation.

$\frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2$: énergie cinétique de rotation.

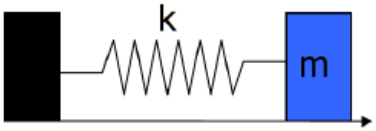
b. Énergie potentielle :

Généralement l'énergie potentielle U ne dépend que des positions initiale et finale, ainsi que ne dépend pas de la vitesse.

b.1. Énergie potentielle élastique :

L'énergie potentielle élastique prend la forme :

$$U_k = \frac{1}{2} kx^2 \qquad (I.11)$$

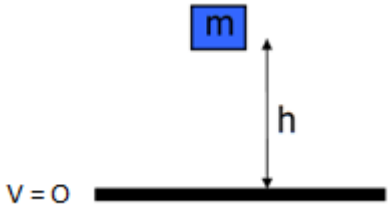


b.2. Énergie potentielle pesanteur:

L'énergie potentielle pesanteur prend la forme :

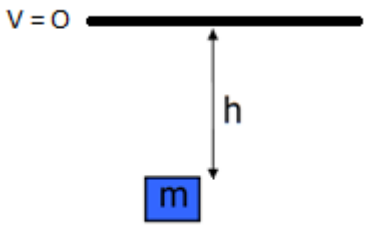
$$U_m = mgh \qquad (I.12)$$

Cette énergie due au champ gravitationnel, et dépond d'un choix arbitraire du niveau zéro de l'énergie potentielle (dans ce cas le centre de gravité est au-dessus du niveau V=0) .



Pour h=0, nous avons choisi V=0.

Si le centre de gravité est au-dessous du niveau V=0 :



L'énergie potentielle pesanteur prend la forme :

$$U_m = -mgh \qquad \text{(I.13)}$$

c. Énergie mécanique totale:

L'énergie mécanique totale reste toujours conservatrice et prend la forme :

$$E = E_c + E_p \qquad \text{(I.14)}$$

Tel que E_p est égale l'énergie potentielle élastique U_k plus l'énergie potentielle pesanteur U_m .

La figure (Fig.I.1) représente l'énergie mécanique totale en fonction du temps.

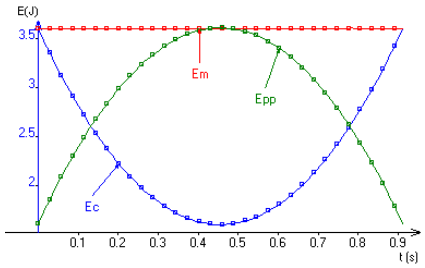


Fig.I.1 : En rouge l'énergie mécanique totale, en bleu l'énergie cinétique, en vert l'énergie potentielle.

Dr M. AHMED L.MAR

Exercice 1.1 :

Déterminer le nombre de degrés de liberté des systèmes suivants :

1- une particule (point matériel) qui se déplace :

a- librement dans l'espace

b - sur le plan xoy

c - sur la surface d'une sphère de rayon R

d - sur un cercle de rayon R (exemple : pendule simple)

e - sur une droite

2- deux particules se déplaçant librement dans l'espace :

a- elles ne sont pas reliées l'une à l'autre

b - elles sont reliées l'une à l'autre par une tige rigide

c - elles sont reliées l'une à l'autre par un ressort de constante de raideur K

3- une bille de rayon R qui se déplace :

a - librement dans l'espace

b - sur le plan xoy (roule sans glisser)

c - sur une droite (roule sans glisser)

Dr M. AHMED AMMAR

Exercice 1.2 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1- $a\ddot{x} + bx = 0$ où $a, b \in R^*$

Pour les équations suivantes on prend $a, b, c \in R^+ \; et \; f \in R^*$

2- $a\ddot{x} + bx = f.Cos(\Omega t)$

3- $a\ddot{x} + bx = f.e^{i\Omega t}$

4- $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$

5- $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f.Sin(\Omega t)$

6- $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f.e^{i\Omega t}$

Exercice 1.3 :

Exprimer les nombres complexes suivants sous la forme exponentielle $Z = |Z|e^{j\theta}$ où $j^2 = -1$:

1- $Z_1 = 1+2j$, $Z_2 = j$, $Z_3 = 1$, $Z_4 = \dfrac{3+4j}{1+2j}$, $Z_5 = \dfrac{3}{1+2j}$, $Z_6 = \dfrac{4j}{1+2j}$,

$Z_7 = (1+2j)(3+4j)$, $Z_8 = (1+2j)^2$, $Z_9 = (1+2j)(1-2j)$

Exercice 1.4 :

1- Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants puis les exprimer sous leur forme trigonométrique (sachant que $j^2 = -1$).

$Z_1 = 3+3j$, $Z_2 = -1-j\sqrt{3}$, $Z_3 = \dfrac{-3}{4}j$, $Z_4 = \sqrt{3}+j$, $Z_2 = \dfrac{1+j\sqrt{3}}{\sqrt{3}+j}$,

$Z_6 = 1+e^{j\theta}$, $\theta \in]-\pi, +\pi[$, pour ce dernier factoriser par $e^{j\frac{\theta}{2}}$.

$Z_7 = 1-e^{j\theta}$, $\theta \in]0, +2\pi[$, pour ce dernier factoriser par $e^{j\frac{\theta}{2}}$.

2- Justifier les deux formules $Cos\theta = \dfrac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})$ et $Sin\theta = \dfrac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta})$.

Vérifier que :

a. $Sin^2\theta + Cos^2\theta = 1$

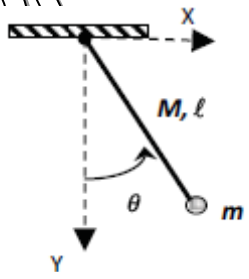
b. $Cos^2\theta - Sin^2\theta = Cos2\theta$

c. $2Sin\theta Cos\theta = Sin2\theta$

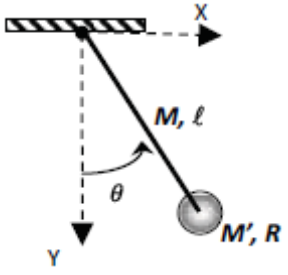
Pr M. AHMED AMMAR

Exercice 1.5 :

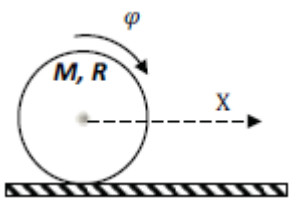
Déterminer l'énergie cinétique et potentielle des systèmes mécanique suivants :

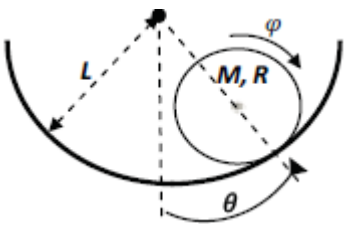


Une tige (M,l) portant une masse ponctuelle m.

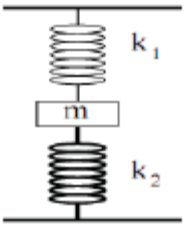


Une tige (M,l) portant un disque(M',l).



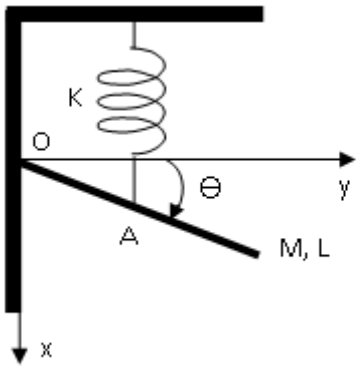


Un disque sur une droite



Pendule oscillant à deux ressorts

Un disque sur une demi-cercle de rayon L



Tige plus un ressort

Dr M. AHMED AMMAR

Solutions des Exercices du Chapitre I

Solution 1.1 :

1- une particule (point matériel) qui se déplace $N_p = 1$:

a - librement dans l'espace : $\begin{cases} N_p = 1 \\ N_c = 0 \\ N_d = 3 \end{cases}$

b - sur le plan xoy : $\begin{cases} N_p = 1 \\ N_c = 1 \left\{ z = C^{te} \right\} \\ N_d = 2 \end{cases}$

c - sur la surface d'une sphère de rayon R : $\begin{cases} N_p = 1 \\ N_c = 1 \left\{ x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \right\} \\ N_d = 2 \end{cases}$

d - sur un cercle de rayon R (pendule simple) : $\begin{cases} N_p = 1 \\ N_c = 2 \left\{ x^2 + y^2 = l^2, z = C^{te} \right\} \\ N_d = 1 \end{cases}$

e - sur une droite (l'axe ox) : $\begin{cases} N_p = 1 \\ N_c = 2 \left\{ y = C^{te} \text{ et } z = C^{te} \right\} \\ N_d = 1 \end{cases}$

2- Deux particules (points matériels) se déplaçant librement dans l'espace $N_p = 2$:

a - elles ne sont pas reliées l'une à l'autre : $\begin{cases} N_p = 2 \\ N_c = 0 \\ N_d = 6 \end{cases}$

b- elles sont reliées l'une à l'autre par une tige rigide :

$$\begin{cases} N_p = 2 \\ N_c = 1 \left\{ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = l^2 = C^{te} \right\} \\ N_d = 5 \end{cases}$$

c - elles sont reliées l'une à l'autre par un ressort de constante de raideur K : $\begin{cases} N_p = 2 \\ N_c = 0 \\ N_d = 6 \end{cases}$

Dr M. AHMED AMMAR

3- une bille de rayon R qui se déplace $N_s = 1$:

a - librement dans l'espace : $\begin{cases} N_s = 1 \\ N_c = 0 \\ N_d = 6 \end{cases}$

b - sur le plan xoy (roule sans glisser) : $\begin{cases} N_s = 1 \\ N_c = 2 \ \{ \ z = C^{te} \ et \ \theta_z = f(\theta_x, \theta_y) \ \} \\ N_d = 4 \end{cases}$

c - sur une droite (roule sans glisser) :

$$\begin{cases} N_s = 1 \\ N_c = 5 \ \{ \ y = C^{te}, z = C^{te}, \theta_x = C^{te}, \theta_z = C^{te} \ et \ x = R\theta_y \ \} \\ N_d = 1 \end{cases}$$

Solution 1.2 :

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1- $a\ddot{x} + bx = 0$ où $a, b \in R^*$

- si $a.b > 0$: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ où $\omega^2 = b/c$ dans ce cas la solution est l'une des fonctions suivantes :

$x(t) = A.Cos(\omega t + \varphi)$ ou $x(t) = A.Sin(\omega t + \varphi)$ ou $x(t) = A.e^{j(\omega t + \varphi)}$ avec $j^2 = -1$.

- si $a.b < 0$: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ où $\omega^2 = |b/c|$ dans ce cas la solution est l'une des fonctions suivantes :

$x(t) = A.Cosh(\omega t + \varphi)$ ou $x(t) = A.Sinh(\omega t + \varphi)$ ou $x(t) = A.e^{(\omega t + \varphi)}$

Pour les équations suivantes on prend $a, b, c \in R^+ \ et \ f \in R^*$

2- $a\ddot{x} + bx = f.Cos(\Omega t)$ la solution est :

$x(t) = A.Cos(\omega t + \varphi) + B.Cos(\Omega t)$

3- $a\ddot{x} + bx = f.e^{j(\Omega t)}$ la solution est :

$x(t) = A.e^{j(\omega t + \varphi)} + B.e^{j(\Omega t)}$

4- $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$ cette équation réécrit sous la forme (I.3):

$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ où $\delta = b/2a \ et \ \omega_0^2 = c/a$

-si $\delta < \omega$ la solution est :

$x(t) = A.e^{-\delta t}Cos(\omega t + \varphi)$ ou $x(t) = A.e^{-\delta t}Sin(\omega t + \varphi)$ ou $x(t) = A.e^{-\delta t}e^{j(\omega t + \varphi)}$

Dr M. AHMED AMMAR

-si $\delta = \omega$ la solution est :

$x(t) = A.e^{-\delta t}(At + B)$

-si $\delta > \omega$ la solution est :

$x(t) = A.e^{-\delta t}Cosh(\omega t + \varphi)$

5- $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f.Sin(\Omega t)$ la solution est :

$x(t) = A.e^{-\delta t}Sin(\omega t + \varphi) + B.Sin(\Omega t + \Psi)$

6- $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f.e^{i\Omega t}$ la solution est :

$x(t) = A.e^{-\delta t}e^{j(\omega t + \varphi)} + B.e^{j(\Omega t + \Psi)}$

Solution 1.3 :

Exprimer les nombres complexes suivants sous la forme exponentielle $Z = |Z|e^{j\theta}$ où $j^2 = -1$:

$Z_1 = 1 + 2j = \sqrt{5}e^{j1.11}$.

$Z = j = 1.e^{j\frac{\pi}{2}}$ (Avec $Arc\tan\infty = \frac{\pi}{2}$).

$Z_3 = 1 = 1.e^{j0}$ ainsi que, si $Z_3 = -1 = 1.e^{j\pi}$.

$Z_4 = \frac{3+4j}{1+2j} = \sqrt{5}e^{-j0.18}$

$Z_5 = \frac{3}{1+2j} = \frac{3}{\sqrt{5}}e^{-j1.11}$.

$Z_6 = \frac{4j}{1+2j} = \frac{4}{\sqrt{5}}e^{j0.46}$.

$Z_7 = (1+2j)(3+4j) = 5\sqrt{5}e^{j2.03}$.

$Z_8 = (1+2j)^2 = 5e^{2.22}$.

$Z_9 = (1+2j)(1-2j) = 5e^{j0}$

Solution 1.4 :

1- Le module et l'argument des nombres complexes suivants puis les exprimer sousleur forme trigonométrique :

$|Z_1| = \sqrt{18}$, $\theta_1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow Z_1 = \sqrt{18}(Cos\frac{\pi}{4} + jSin\frac{\pi}{4})$.

DR M. AHMED AMMAR

$|Z_2| = 2,\ \theta_2 = \frac{\pi}{3} \Rightarrow Z_2 = -2(Cos\frac{\pi}{3} + jSin\frac{\pi}{3})$.

$|Z_3| = \frac{3}{4},\ \theta_3 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow Z_3 = \frac{3}{4}(Cos\frac{\pi}{2} - jSin\frac{\pi}{2})$.

$|Z_4| = 2,\ \theta_4 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow Z_4 = 2(Cos\frac{\pi}{6} + jSin\frac{\pi}{6})$.

$|Z_5| = 1,\ \theta_5 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow Z_5 = (Cos\frac{\pi}{6} + jSin\frac{\pi}{6})$.

$Z_6 = 1 + e^{j\theta}$

On factorise $Z_6 = 1 + e^{j\theta} = e^{\frac{j\theta}{2}}(e^{\frac{j\theta}{2}} + e^{-\frac{j\theta}{2}})$

$Z_6 = 1 + e^{j\theta} = 2Cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{j\theta}{2}},\ \theta \in]-\pi, +\pi[$

- La norme : $|1 + e^{j\theta}| = 2\left|Cos\frac{\theta}{2}\right|$

- L'argument : si $\theta \in]-\pi, +\pi[$, $Arg(1 + e^{j\theta}) \equiv \frac{\theta}{2}[2\pi]$

$Z_7 = 1 - e^{j\theta}$

On factorise $Z_7 = 1 - e^{j\theta} = -e^{\frac{j\theta}{2}}(e^{\frac{j\theta}{2}} - e^{-\frac{j\theta}{2}})$

$Z_7 = 1 - e^{j\theta} = -2iSin\frac{\theta}{2}e^{\frac{j\theta}{2}},\ \theta \in]0, +2\pi[$

- La norme : $|1 - e^{j\theta}| = 2\left|Sin\frac{\theta}{2}\right|$

- L'argument : si $\theta \in]0, +2\pi[$, $Arg(1 - e^{j\theta}) \equiv \frac{\theta}{2} - \frac{\theta}{2}[2\pi]$

2- Justifier les deux formules $Cos\theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})$ et $Sin\theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} - e^{-j\theta})$.

$$Cos\theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) = \frac{1}{2}(Cos\theta + jSin\theta + Cos\theta - jSin\theta)$$
$$= Cos\theta$$

$$Sin\theta = \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta}) = \frac{1}{2}(Cos\theta + jSin\theta - Cos\theta - (-jSin\theta))$$
$$= Sin\theta$$

Dr M.AHMED AMMAR

Vérifier que :

a. $Sin^2\theta + Cos^2\theta = 1 \Rightarrow \frac{-1}{4}(e^{j\theta} - e^{-j\theta})^2 + \frac{1}{4}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})^2 = 1$

b. $Cos^2\theta - Sin^2\theta = Cos2\theta \Rightarrow \frac{1}{4}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})^2 - \frac{-1}{4}(e^{j\theta} - e^{-j\theta})^2 = 2Cos^2\theta - 1$

$= Cos2\theta$

c. $2Sin\theta Cos\theta = Sin(2\theta)$:

$$Sin\theta Cos\theta = \frac{1}{2}(Sin(\theta+\theta) + Sin(\theta-\theta))$$

$$= \frac{1}{2}Sin(2\theta) \qquad \Rightarrow 2Sin\theta Cos\theta = Sin2\theta$$

Solution 1.5 :

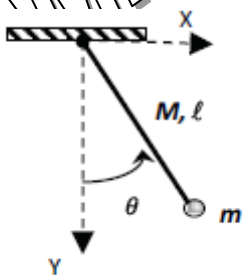
1- Le premier système nous avons une tige (M, l) portant une masse ponctuelle m :

a- Masse ponctuelle :

Le vecteur de position $\vec{r}$:

$$\vec{r}\begin{pmatrix} x = l\sin(\theta) \\ y = -l\cos(\theta) \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{V}\begin{pmatrix} \dot{x} = l\dot{\theta}\cos(\theta) \\ \dot{y} = -l\dot{\theta}\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left|\vec{V}\right|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (l\dot{\theta})^2$$



Une tige (M,l) portant une masse ponctuelle m.

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2, U_m = -mgl\cos\theta + C^{te}$$

b- La tige :

$$T = \frac{1}{2}\frac{1}{3}Ml^2\dot{\theta}^2,\ U_m = -Mg\frac{l}{2}\cos\theta + C^{te}$$

c- Masse ponctuelle + Tige :

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{3}Ml^2\dot{\theta}^2,$$

$$U_m = -mgl\cos\theta - Mg\frac{l}{2}\cos\theta + C^{te}$$

2- Le deuxième système nous avons une tige (M, l) portant un disque (M', l) :

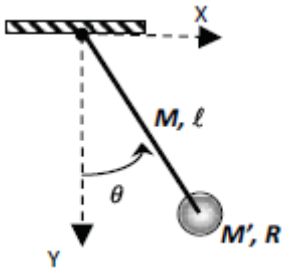
Dr M. AHMED AMMAR

a- Un fil portant un disque attaché au centre :

$$T = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}M'R^2 + M'l^2]\dot{\theta}^2$$

,

$$U_m = -M'gl\cos\theta + C^{te}$$



Une tige (M,l) portant un disque(M',l).

b- Disque + Tige :

$$T = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}M'R^2 + M'l^2 + \frac{1}{3}Ml^2]\dot{\theta}^2,$$

$$U_m = -gl(M' + \frac{M}{2})\cos\theta + C^{te}$$

3- Le troisième système nous avons un disque (M, R) sur une droite:

a- Un disque (M, R) tournant sur son centre de gravité :

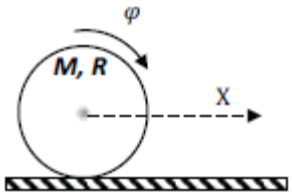
$$T = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}MR^2]\dot{\varphi}^2,\ U_m = C^{te}$$

b- Un disque (M, R) qui glisse sans rouler :

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2,\ U_m = C^{te}$$

c- Un disque (M, R) qui roule sans glisser :

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\frac{3}{2}MR^2\dot{\varphi}^2, U_m = C^{te}$$



Un disque (M, R) sur une droite

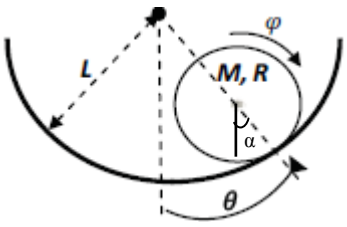
Dr M. AHMED AMMAR

4- Le quatrième système nous avons un disque (M, R) sur une demi-cercle de rayon L:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\dot{\alpha}^2$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (L-R)\dot{\alpha} \\ \dot{\alpha} = \dot{\varphi} - \dot{\theta} \\ (L-R)\theta = R\varphi \end{cases}$$

$$U_m = -Mg(L-R)\cos\theta + C^{te}$$



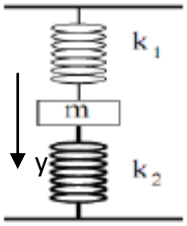
Un disque sur une demi-cercle de rayon L

5- Le cinquième système nous avons un disque (M, R) sur une demi-cercle de rayon L:

a- Pendule oscillant :

$$T=\frac{1}{2}m\dot{y}^2,\ U=\frac{1}{2}k(y+\Delta l)^2-mgy+C^{te}$$

Avec la condition d'équilibre : $\left.\frac{dU}{dy}\right|_{y=0}=0\Rightarrow\Delta l=\frac{mg}{k}\Rightarrow U=\frac{1}{2}ky^2+C^{te}$



b- Pendule oscillant à deux ressorts :

$$T=\frac{1}{2}m\dot{y}^2,\ U=\frac{1}{2}(k_1+k_2)(y+\Delta l)^2-mgy+C^{te}$$

Avec la condition d'équilibre :

$$\left.\frac{dU}{dy}\right|_{y=0}=0\Rightarrow\Delta l=\frac{mg}{k_1+k_2}\Rightarrow U=\frac{1}{2}(k_1+k_2)y^2+C^{te}$$

Pendule oscillant à deux ressorts

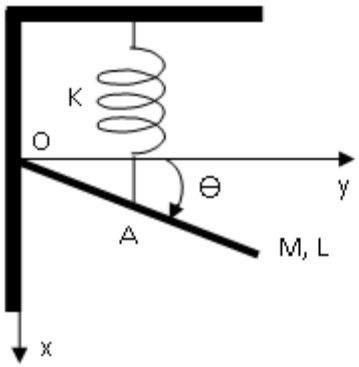
6- Le sixième système nous avons une Tige homogène (M, L) + un ressort (k):

$$T=\frac{1}{2}\frac{1}{3}ML^2\dot{\theta}^2,$$

$$U=\frac{1}{2}k(a\sin\theta+\Delta l)^2-\frac{1}{2}mgL\sin\theta+C^{te}$$

Avec la condition d'équilibre :

$$\left.\frac{dU}{dy}\right|_{y=0}=0\Rightarrow\Delta l=\frac{mgL}{2ka}\Rightarrow U=\frac{1}{2}ka^2\theta^2+C^{te}$$



Tige plus un ressort

Dr M. AHMED AMMAR

Chapitre II
Oscillations libres des systèmes à un degré de liberté

II.1- Méthode de Lagrange :

II.1.1- Définition d'une oscillation :

Dans cette partie, nous étudierons deux phénomènes physiques, l'un d'équilibre et l'autre de stabilité. Pour qu'une solution d'équilibre soit physiquement réalisable, il faut qu'elle soit stable. En effet, si l'on déplace légèrement la particule relativement à sa position d'équilibre et que l'on regarde son évolution, divers scénario peuvent se présenter. Premièrement, la particule s'éloigne encore plus du point d'équilibre. Le point d'équilibre est donc instable. Deuxièmement, la particule retourne au point d'équilibre et cet équilibre est donc stable et physiquement acceptable.

a- Condition d'équilibre $\left.\frac{\partial U_{tot}}{\partial q}\right|_{q=0} = 0$

b- Condition de stabilité $\left.\frac{\partial^2 U_{tot}}{\partial q^2}\right|_{q=0} > 0$

Dr M. AHMED AMMAR

II.1.2- Cas d'un système conservatif

Pans un système conservatif, la force appliquée au système dérive d'un potentiel U et elle s'écrit :

$$F_q = -\frac{\partial U}{\partial q} \qquad \text{(II.1)}$$

Dans ce cas, l'équation du mouvement pour un système conservatif peut être déterminée par les méthodes suivantes :

1- Méthode de la conservation d'énergie totale :

$$E_T = T + U = Constante \Rightarrow \frac{dE_T}{dt} = 0 \qquad \text{(II.2)}$$

Tel que E_T l'énergie totale du système.

2- Méthode de Newton :

$$\sum_{i>1} \vec{F}_i = m_i \vec{a}_i \qquad \text{(II.3)}$$

Tel que $\vec{a}_i$ l'accélération des composantes du système.

3- Méthode de Lagrange :

$$L = T_{tot} - U_{tot} = Constante \qquad \text{(II.4)}$$

Tel que *L* le Lagrangien du système. Dans ce cas les forces dérivent d'un potentiel et le mouvement du système est conservatif.

Dans les phénomènes vibratoires traités dans ce manuscrit, nous nous sommes intéressés à la méthode de Lagrange, où la fonction de Lagrange est la différence de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle.

II.1.3- Formalisme lagrangien (1 degré de liberté)

$$U_{tot} = \sum (U_{mi} + U_{ki}) \qquad \text{(II.5)}$$

a- Énergie gravitationnelle $U_m = mg\Delta h$

b- Énergie gravitationnelle $U_k = \frac{1}{2}k(x_k + \Delta l)^2$

$$T_{tot} = \sum T_{mi} \qquad \text{(II.6)}$$

Avec $T_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}I_\Delta\dot{\theta}^2$; On obtient l'équation de Lagrange (II.4).

II.1.4- L'équation générale du mouvement

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = F_q(t) \qquad \text{(II.7)}$$

Tel que : D est fonction de dissipation et $F_q(t)$ la force généralisée.

Dr M. AHMED AMMAR

II-2 Oscillations libres non amorties $F_q(t) = 0$ et $\mathcal{D} = 0$:

Un système oscillant à un degré de liberté est habituellement repéré à l'aide d'une coordonnée généralisée q qui est l'écart par rapport à la position d'équilibre stable.

L'équation du mouvement pour un système libre non amortie peut être déterminée comme suit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \qquad \text{(II.8)}$$

II-3 Oscillations libres amorties $F_q(t)=0$ et $\mathcal{D}\neq 0$:

Dans cette partie, nous considérons des pertes d'énergie mécanique du système dues à des frottements visqueux pour lesquels les forces de frottement, qui s'opposent au mouvement, sont proportionnelles à la vitesse.

Sous l'effet d'une force de frottement fluide $\vec{f}=h\vec{V}$, l'équation du mouvement de l'oscillateur est $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}})+\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=0$, ce qui donne:

$$\ddot{x}+2\alpha\dot{x}+\omega_0^2 x=0 \qquad \text{(II-9)}$$

avec $2\alpha=\frac{h}{m}=\frac{\omega_0}{Q}$, $Q=\frac{\omega_0}{B}$ est le facteur de qualité de l'oscillateur et B la largeur de bande.

L'équation (II-9) est une équation différentielle de 2ème ordre la solution de cette équation dépend de la valeur de $\Delta'=\lambda^2-\omega_0^2$ par rapport à ω_0, avec λ facteur d'amortissement.

- Si $\Delta'>0\Rightarrow\lambda>\omega_0$ (Régime apériodique).

La solution de l'équation différentielle s'écrit dans ce cas :

$$q(t)=e^{-\lambda t}(Ae^{\omega' t}+Be^{-\omega' t}) \qquad \text{(II-10)}$$

A et B sont des constantes d'intégration définies par les conditions initiales. La figure ci-dessous représente q en fonction du temps dans le cas particulier où $q(0)=q_0$ et $\dot{q}(0)=0$. $q(t)$ est une fonction qui tend exponentiellement (sans oscillation) vers zéro. Dans ce cas on dit que le système a un mouvement apériodique.

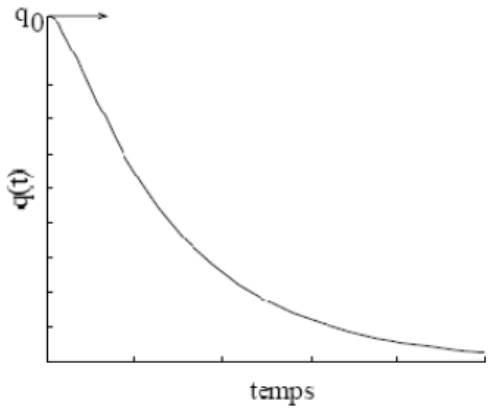


Fig.II.1 : Régime fortement amorti (Régime apériodique).

Dr M. AHMED AMMAR

- Si $\Delta' = 0 \Rightarrow \lambda = \omega_0$ **(Régime critique).**

La solution de l'équation différentielle s'écrit dans ce cas :

$$q(t) = e^{-\lambda t}(a.t + b) \qquad \text{(II-11)}$$

a et *b* sont des constantes d'intégration définies par les conditions initiales. La figure ci-dessous représente q en fonction du temps dans le cas particulier où $q(0) = q_0$ et $\dot{q}(0) = 0$. $q(t)$ est une fonction qui tend exponentiellement (sans oscillation) vers zéro. Dans ce cas on dit que le système a un mouvement critique.

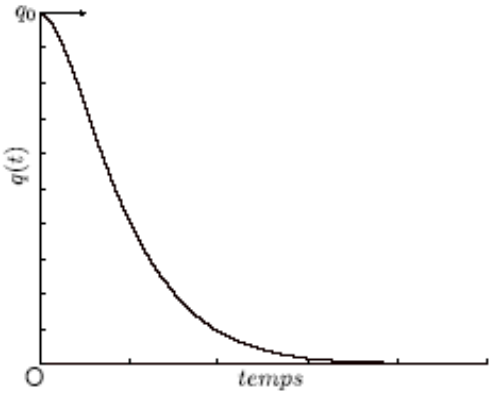


Fig.II.2 : Régime critique.

- Si $\Delta' < 0 \Rightarrow \lambda < \omega_0$ **(Régime pseudo périodique).**

La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}Cos(\omega' t + \varphi) \qquad \text{(II-12)}$$

Avec le pseudo-période $T_A = \frac{2\pi}{\omega}$ et la pseudo-pulsation $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$. *A* et φ sont deux constantes d'intégration déterminées à partir des conditions initiales. Dans le cas particulier où $q(0) = q_0$ et $\dot{q}(0) = 0$, on obtient :

$$A = \frac{\omega_0}{\omega'} q_0 \text{ et } \varphi = -Arc\tan(\frac{\lambda}{\omega'}) \qquad \text{(II-13)}$$

La figure ci-dessous représente q en fonction du temps :

Dr M. AHMAR

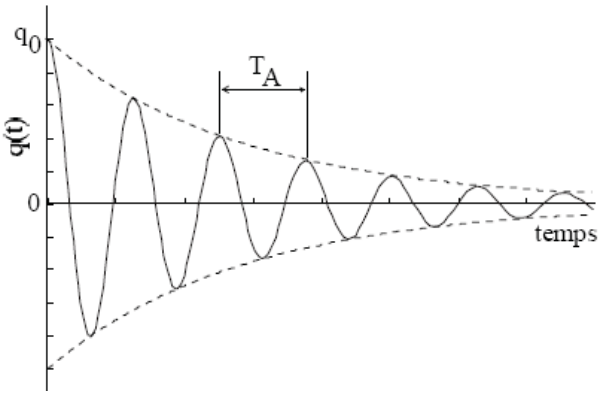


Fig.II.3 : Régime faiblement amorti (Régime pseudo périodique).

II-4 Analogies entre les systèmes électriques et mécaniques(Oscillations libres) :

Dans cette partie, on donne une analogie entre le système mécanique masse-ressort et le système électrique RLC. La figure ci-dessous représente le circuit RLC:

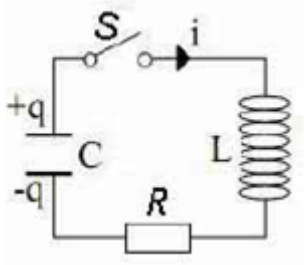


Fig.II.4 : Circuit RLC

Dr M. AMMAR

D'après la loi de Kirchhoff :

$$\sum V_i = 0 \Rightarrow V_L + V_C + V_R = 0 \qquad \text{(II-14)}$$

Alors :

$$L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)dt + Ri = 0 \Rightarrow L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0 \qquad \text{(II-15)}$$

Ce qui donne :

$$\ddot{q} + \frac{R}{C}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0 \qquad \text{(II-16)}$$

On peut donc établir l'analogie électromécanique:

$$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \qquad \text{(II-17)}$$

Le tableau ci-dessous résume les analogies électromécaniques masse-ressort et le système électrique RLC :

Mécanique	Electricité
Déplacement : x	Charge : q
Vitesse : $\dot{x}$	Courant : i
Accélération : $\ddot{x}$	Variation de courant : $\ddot{q}$
Force : F	Différence de Potentiel : V
Masse : m	Inductance : L
Amortisseur : α	Résistance : R
Constante de raideur : k	Inverse de la capacité: $\frac{1}{C}$
Energie potentiel : $U = \frac{1}{2}kx^2$	Energie électrostatique : $U_E = \frac{1}{2C}q^2$
Energie Cinétique : $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$	Energie magnétique : $U_M = \frac{1}{2}L\dot{q}^2$

Dr M. AHMED AMMAR

A- Oscillations libres non amorties $F_q(t) = 0$ et $D = 0$:

Exercice 2.1 :

La figure ci-dessous représente un système mécanique constitué d'une tige homogène de masse M et de longueur L qui oscille dans le plan xOy. A une distance OA = a de la tige on attache un ressort de constante de raideur k.

À l'équilibre la tige est à la verticale ($\theta = 0$). On donne les caractéristiques de vibration : g = 10m/s^2, k = 100N/m, M = 0.2Kg, L = 60cm et a = 10cm.

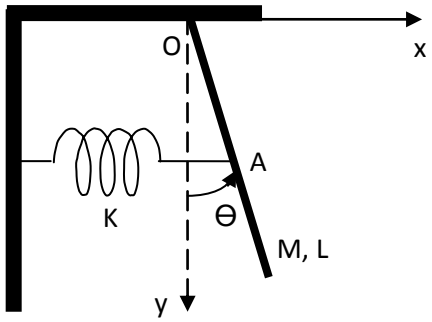


Figure : 2-1-a

1- Déterminer l'énergie cinétique du système.

2- Déterminer l'énergie potentielle du système et vérifier les conditions d'équilibre et de stabilité.

3- Déduire l'équation différentielle du mouvement ainsi que la période propre T_0.

4- Résoudre cette équation avec les conditions initiales $\theta(0)=\theta_0$, $\dot{\theta}(0)=\dot{\theta}_0$.

5- Vérifier que l'énergie totale du système est constante.

(*)- Répondre aux mêmes questions pour les systèmes représentés par les figures (2-1-b) et (2-1-c), et discuter les résultats. On donne g=10m/s², k=100N/m, M=0,2 Kg, L= 60 cm et OA= 10 cm.

Dr M. AHMED AMMAR

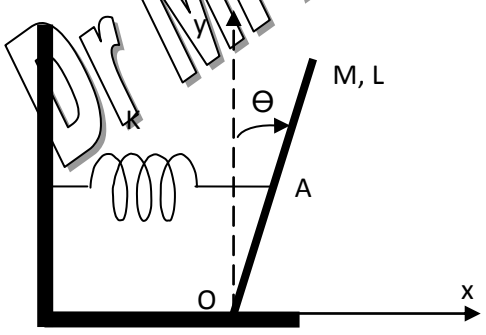


Figure : 2-1-b

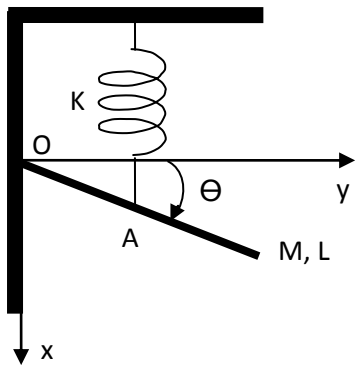


Figure : 2-1-c

Exercice 2.2:

Un métronome est schématisé sur la figure (2-2). La masse M est soudée à l'extrémité de la tige. La position de la masse m sur la tige peut être réglée. La tige est supposée de masse négligeable; elle est mobile sans frottements autour de O. La masse M étant en bas.

1- Quelle condition doit satisfaire le système pour qu'il puisse osciller ?

2- Déterminer l'expression de la période pour des oscillations de faibles amplitudes.

3- Sachant que M= 80g, m = 20g et L=4cm, g = 10m/s2, déterminer la distance l pour que la période du métronome soit égale à 2s.

4- On veut augmenter la période d'oscillation du métronome. Faut-il rapprocher ou éloigner la masse m du point O ?

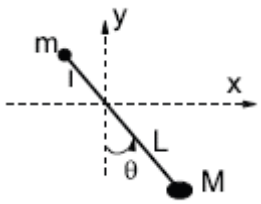


Figure : 2-2

Exercice 2.3 :

Un disque homogène de masse M et de rayon R est attaché par son axe à l'extrémité d'un ressort de raideur k. Une tige rigide, de longueur l, de masse négligeable, est solidaire du disque qui peut rouler sans glisser sur un plan horizontal.

1- Déterminer la pulsation propre du système.

2- Sachant qu'à t=0, la tige est écartée d'un angle petit θ_0 par rapport à la verticale et lâchée sansvitesse initiale, déterminer l'expression de $\theta(t)$.

3- Donner l'expression de la vitesse de la masse m quand la tige passe par la verticale.

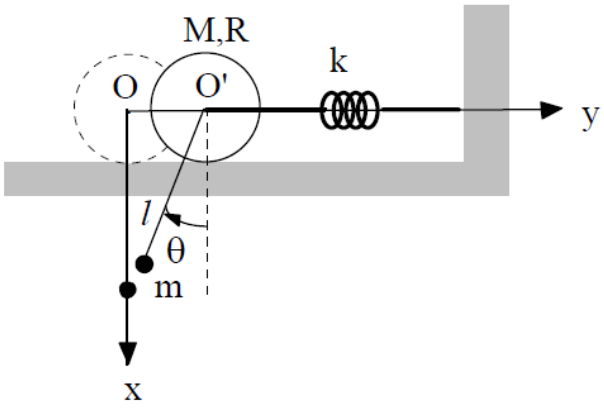


Figure : 2-3

Dr M. AHMED AMMAR

Exercice 2.4:

On considère deux masses ponctuelles m_1 et m_2 suspendues par un fil inextensible et de masse négligeable, de part et d'autre d'une poulie (M, R) de moment d'inertie $I_0 = \frac{1}{2}MR^2$. Un ressort de constante de raideur *k* est relié à la masse m_1. Tout le système peut osciller (faibles oscillations) sans frottement autour d'un axe passant par o. On suppose que le fil ne glisse pas par rapport à la poulie, et à l'équilibre θ=0 le ressort est déformé par $\Delta\ell$.

1- Déterminer l'énergie cinétique du système.

2- Trouver l'allongement du ressort $\Delta\ell$ à partir de la condition d'équilibre.

3- Donner l'énergie potentielle du système.

4- Trouver l'équation différentielle du mouvement, et donner l'expression de la solution générale.

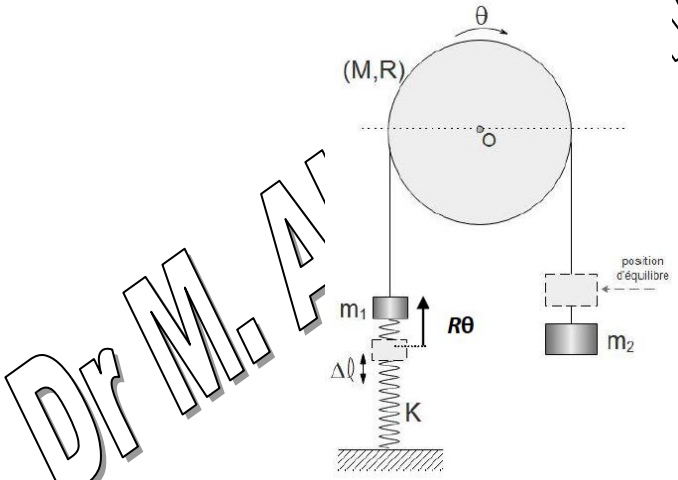


Figure : 2-4

B- Oscillations libres amorties $F_q(t) = 0$ et $\mathcal{D} \neq 0$:

Exercice 2.5:

On définit un oscillateur amorti constitué d'une masse ***m (kg)***, d'un amortisseur de coefficient de frottement ***α (kg/s),*** et d'un ressort de constante de raideur ***k= 3.75 N/m*** , régi par l'équation différentielle suivante : $0.6\ddot{x} + 2.4\dot{x} + 15x = 0$.

1- Calculer la période propre du mouvement **T**.

2- Trouver la valeur du facteur d'amortissement **λ**.

3- Calculer la pseudo-période du mouvement $\mathbf{T}^{\backslash}$.

Dr M. A MMAR

4- Montrer que la masse ***m*** est animée d'un mouvement oscillatoire amorti, puis résoudre l'équation différentielle pour les conditions initiales suivantes :

à t=0 : $\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v(0) = 0.25 m/s \end{cases}$

5- Calculer les valeurs de ***m*** et ***α.***

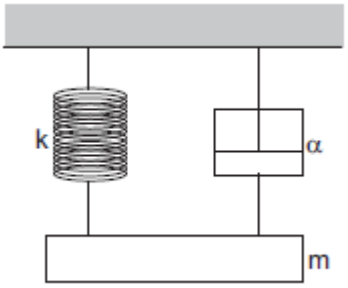


Figure : 2-5

Dr M. AHMED AMMAR

Exercice 2.6:

On considère un disque de rayon R=10cm et de masse M=10kg, roulant sans glissement, est attaché en son centre un amortisseur de coefficient α=480N s/m. À un piot de son centre de circonférence est relié un ressort de constante de raideur K= 2.10^4 N/m. À l'instant t=0, le disque passe par sa position d'équilibre à la vitesse de 2m/s.

1- Donner les énergies cinétique, potentielle et la fonction de dissipation du système.

2- Etablir l'équation du mouvement, en déduire sa fréquence.

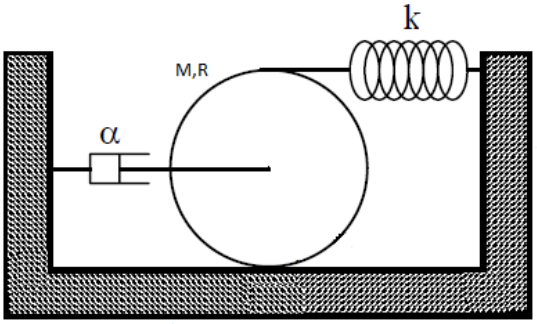


Figure : 2-6

Exercice 2.7:

Une masse m posée sur une table horizontale est reliée à un bâti fixe par l'intermédiaire d'un ressort de constante de raideur k et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α. On suppose qu'il n'y a pas d'autres frottements. On écarte la masse de sa position d'équilibre puis on la lâche sans vitesse initiale.

1- Déterminer les énergies cinétique et potentielle ainsi que la fonction de dissipation du système.

2- Écrire l'équation différentielle du mouvement.

3- Quelle condition doit-on imposer à α pour avoir des oscillations ?

4- Quelle est dans ce cas la forme de la solution x(t) ?

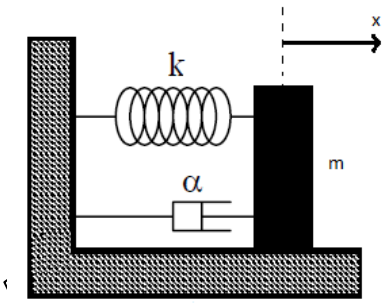


Figure : 2-7

Exercice 2.8 :

Un pendule simple est constitué d'une tige de longueur *l* de masse négligeable accroché à un point fixe *O* et à son extrémité libre on y accroche une masse ponctuelle *m*. On lui accroche ensuite un ressort (*OA=a)* et un amortisseur (figure 2-8).

1- Déterminer les énergies cinétique et potentielle ainsi que la fonction dedissipation du système.

2- Écrire l'équation différentielle du mouvement

3- Quelle est la valeur critique de α ? Dans quel cas le système oscille ?

4- Lorsque la tige est écartée de sa position d'équilibre d'un angle θ_0 puis lâchée sans vitesse initiale, elle prend un mouvement oscillatoire amorti de pseudo période *1s*. On constate qu'au bout de *5* pseudo-périodes, l'amplitude est égale à

Dr M. Amir MMAR

20 % de l'amplitude initiale. En déduire la valeur numérique de α puis celle de *k*. On donne *m= 0.5 Kg*, *l= 50 cm* et *a=10 cm.*

5- Donner dans ce cas l'expression de $\theta(t)$.

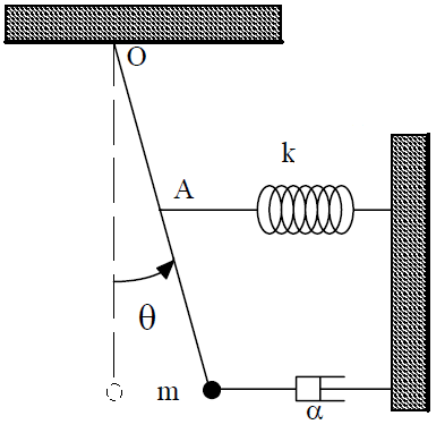


Figure : 2-8

Exercice 2.9:

La figure 2-9 représente un circuit RLC en série. Initialement, le condensateur était chargé, puis on ferme l'interrupteur *S*.

1- En utilisant la loi des mailles, écrire l'équation différentielle qui décrit le circuit en fonction de la charge q(t).

2- Donner les expressions de q(t) dans les trois régimes suivant la valeur de la résistance R. On donne L = 0.01 H et C = 1 μF.

3- Tracer qualitativement l'allure de q(t) pour $R = 10\Omega$ et $R = 1k\Omega$.

Dr M. AHMED AMMAR

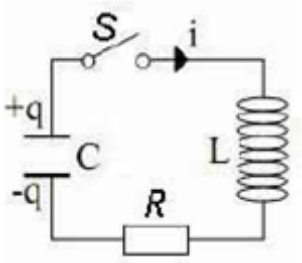


Figure : 2-9

Exercice 2.10:

Un cylindre de masse M et de rayon R roule sans glisser sur une table horizontale. En relie à son centre de gravité de part et d'autre un amortisseur et un ressort (figure 2-10).

1- Écrire l'équation différentielle du mouvement.

2- Déduire la pseudo période du système.

3- Sachant que la période des oscillations amorties est de 1 s et que l'amplitude des oscillations chute de moitié après 10 oscillations, calculer α et k. On donne M= 1 Kg.

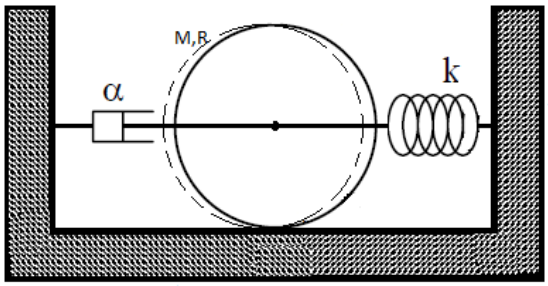


Figure : 2-10

Exercice 2.11:

Sur une poulie de masse m et de rayon R est soudée une tige de masse M et de longueur l, comme le montre la figure 2 -11.

La poulie est suspendue par un fils inextensible a un bâti fixe et reliée au sol à travers un ressort et un amortisseur.

1- Déterminer les énergies cinétique et potentielle ainsi que la fonction de dissipation du système.

2- Écrire l'équation différentielle du mouvement

3- Déterminer la période d'oscillation du système

Dr M. AHMED AMMAR

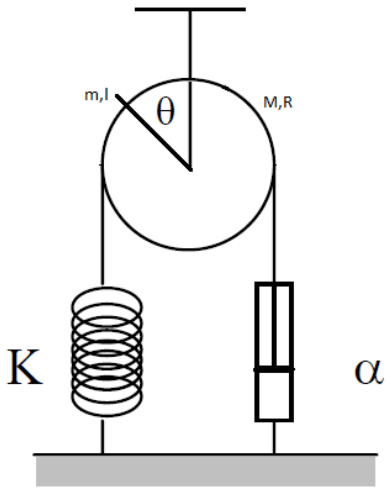


Figure : 2-11

Exercice 2.12:

On étudie les oscillations de faibles amplitudes du système représenté par la figure (2-12), deux pendules simples constitué chacun par une tige de masse négligeable portant une masse ponctuelle. Les deux tiges sont soudées l'une à l'autre et tournent autour de l'axe (Δ) d'un même angle θ. On attache ensuite à la masse M un ressort de constante de raideur k et à la masse m un amortisseur de coefficient de frottement α. On donne : ℓ= 0,5 m, g = 10m/s^2 , m= 0,1Kg, L=2ℓ, et M= 2m.

1- Déterminer les énergies cinétique, potentielle ainsi que la fonction de dissipation du système en fonction de θ, sachant qu'à l'équilibre θ = 0.

2- Déterminer l'équation différentielle du mouvement et donner l'expression de la solution oscillatoire.

3- Déterminer l'expression de la pseudo pulsation ω_a. Calculer sa valeur.

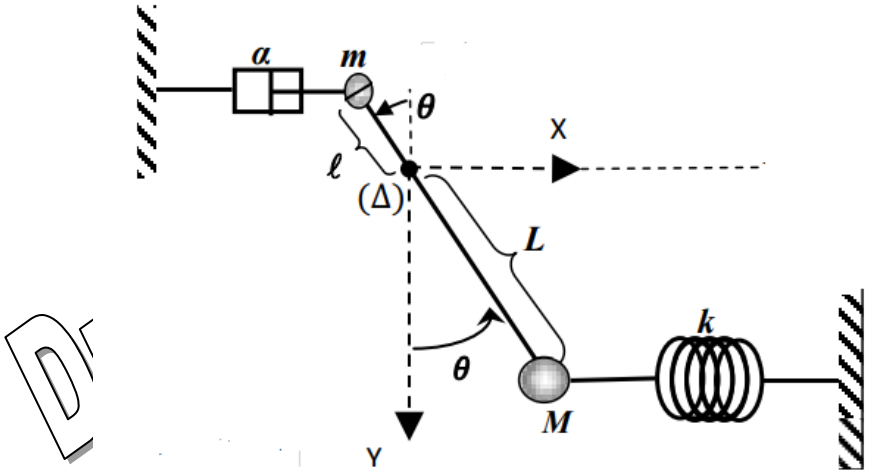


Figure : 2-12

Solutions des Exercices du Chapitre II

A- Oscillations libres non amorties $F_q(t)=0$ et $D=0$:

Solution 2.1 :

La figure ci-dessous représente un système mécanique constitué d'une tige homogène de masse M et de longueur L qui oscille dans le plan xOy.

Avec : g = 10m/s, k = 100N/m, M = 0.2Kg, L = 60cm et a = 10cm.

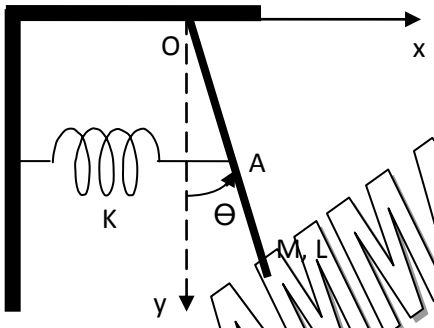


Figure : 2-1-a

Dr M.AHMED AMMAR

À l'équilibre la tige est verticale $\theta = 0$

1- L'énergie cinétique du système :

$$T=\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}(ML^2+M(\frac{L}{2})^2)\dot{\theta}^2=\frac{1}{6}ML^2\dot{\theta}^2=\frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 \text{ avec } A=\frac{1}{3}ML^2$$

2- L'énergie potentielle du système :

$$U=U_m+U_k$$

$$U_m=Mg(\frac{L}{2}-\frac{L}{2}Cos\theta)=-Mg\frac{L}{2}Cos\theta+C^{te}$$

$$U_k=\frac{1}{2}k(x_k+\Delta l)^2 \text{ où } x_k=a.Sin\theta$$

Approximation des faibles amplitudes d'oscillations pour l'énergie potentielle.

$$Cos\theta\approx 1-\frac{\theta^2}{2} \text{ et } Sin\theta\approx\theta$$

$$U=\frac{1}{2}(ka^2+Mg\frac{L}{2})\theta^2+(ka\Delta l)\theta+\frac{1}{2}k\Delta l^2-Mg\frac{L}{2}$$

- Condition d'équilibre $\frac{\partial U_\theta}{\partial\theta}\Big|_{\theta=0}=0\Rightarrow ka\Delta l=0\Rightarrow\Delta l=0$

- Condition de stabilité $\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=0} > 0 \Rightarrow ka^2 + Mg\frac{L}{2} > 0$ est toujours vérifiée.

L'énergie potentielle devient:

$$U = \frac{1}{2}(ka^2 + Mg\frac{L}{2})\theta^2 + C^{te} = \frac{1}{2}B\theta^2 + C^{te}$$

Où $B = ka^2 + Mg\frac{L}{2}$

3- Déduire l'équation différentielle du mouvement ainsi que la période propre T_0.

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}B\theta^2$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow A\ddot{\theta} + B\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{B}{A}\theta = 0$$

On pose :

$$\omega = \sqrt{\frac{B}{A}} = \sqrt{\frac{ka^2 + Mg\frac{L}{2}}{\frac{1}{3}ML^2}}$$

La période propre T_0 :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 0.77s$$

Dr M. AHMED AMMAR

4- Résoudre cette équation $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$:

$$\theta(t) = C.Cos(\omega_0 t + \varphi)$$

les conditions initiales $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$.

$$\theta(0) = \theta_0 = C.Cos(\varphi) \Rightarrow C = \frac{\theta_0}{Cos(\varphi)} \Rightarrow Cos^2(\varphi) = \frac{\theta_0^2}{C^2} \quad (1)$$

$$\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 = -C\omega_0.Sin(\varphi) \Rightarrow C = \frac{-\dot{\theta}_0}{\omega_0.Sin(\varphi)} \Rightarrow Sin^2(\varphi) = \frac{-\dot{\theta}_0^2}{C^2\omega_0^2} \quad (2)$$

(1) et (2) $\Rightarrow C = \sqrt{\theta_0^2 + (\frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0})^2}$

L'argument φ :

$$Tan(\varphi) = -\left(\frac{\dot{\theta}_0}{\theta_0\omega_0}\right) \Rightarrow \varphi = -Arc\tan\left(\frac{\dot{\theta}_0}{\theta_0\omega_0}\right)$$

5- Vérifier que l'énergie totale du système est constante :

$\mathrm{E}_{\mathrm{Tot}} = T + U = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}B\theta^2$ avec $\theta(t) = C.Cos(\omega_0 t + \varphi)$ (On néglige la constante dans l'énergie potentielle).

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_{\mathrm{Tot}} &= \frac{1}{2}A\omega_0^2C^2.Sin^2(\omega_0 t+\varphi) + \frac{1}{2}BC^2.Cos^2(\omega_0 t+\varphi) \quad avec\ \omega_0^2 = \frac{B}{A} \\ &= \frac{1}{2}BC^2.Sin^2(\omega_0 t+\varphi) + \frac{1}{2}BC^2.Cos^2(\omega_0 t+\varphi) \\ &= \frac{1}{2}BC^2 \\ &= C^{te}\end{aligned}$$

Donc l'énergie totale est constante.

Solution 2.2:

Un métronome est schématisé sur la figure 2-2 :

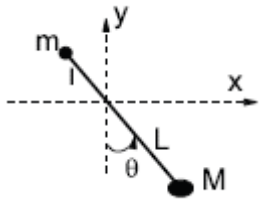


Figure : 2-2

Dr M. AHMED AMMAR

1- La condition d'oscillation pour un système libre non amortie : c'est la condition de stabilité.

$U = mglCos\theta - MgLCos\theta$, Tel que la référence de l'énergie potentielle $U_g = 0$ sur l'axe *ox*.

Pour des faibles oscillations : $Cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

L'énergie potentielle devient :

$$U = mgl(1-\frac{\theta^2}{2}) - MgL(1-\frac{\theta^2}{2}) \quad \Rightarrow \quad U = \frac{1}{2}B\theta^2 + C^{te} \text{ avec } B = (ML-ml)g$$
$$= \frac{1}{2}(ML-ml)g\theta^2 + C^{te}$$

- Condition d'équilibre $\frac{\partial U}{\partial \theta}\Big|_{\theta=0} = 0 \Rightarrow \theta = 0$

- Condition de stabilité $\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\Big|_{\theta=0} > 0 \Rightarrow ML - ml > 0$.

2- L'expression de la période pour des oscillations de faibles amplitudes :

$$T = T_m + T_M = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2$$
$$= \frac{1}{2}(ml^2 + ML^2)\dot{\theta}^2 \qquad \text{avec } A = ml^2 + ML^2$$
$$= \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2$$

L'équation différentielle du mouvement :

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}B\theta^2$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow A\ddot{\theta} + B\theta = 0$$

$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ Avec $\omega_0^2 = \frac{B}{A}$

Alors, la pulsation est égale :

$$\omega = \sqrt{\frac{B}{A}} = \sqrt{\frac{(ML-ml)g}{ml^2+ML^2}}$$

La période propre T_0 :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2+ML^2}{(ML-ml)g}}$$

3- Sachant que *M= 80g*, *m = 20g* et *L=4cm*, déterminer la distance *l* pour que la période du métronome soit égale à *2s*.

$$T_0 = 2s \Rightarrow 2s = 2*3.14\sqrt{\frac{0.02*l^2 + 0.08(0.04)^2}{(0.08*0.04 - 0.02*l)*10}}$$

$$\Rightarrow 0.0122952 - 0.08l - 0.07887681^2 = 0$$
$$\Rightarrow l = -1.149m \ (refuser) \ \ ou \ \ l = 0.135m$$

Dr M. AHMED AMMAR

4- On veut augmenter la période d'oscillation du métronome. Faut-il rapprocher ou éloigner la masse *m* du point *O* ?

$$0 \le l < \frac{ML}{m} \Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \le T_0 < \infty$$

Donc la valeur de l augmente $\Rightarrow$La valeur de T_0 augmente.

Solution 2.3 :

Un disque homogène de masse *M* et de rayon *R* est attaché par son axe à l'extrémité d'un ressort de raideur *k*. Une tige rigide, de longueur *l*, de masse négligeable, est solidaire du disque qui peut rouler sans glisser sur un plan horizontal.

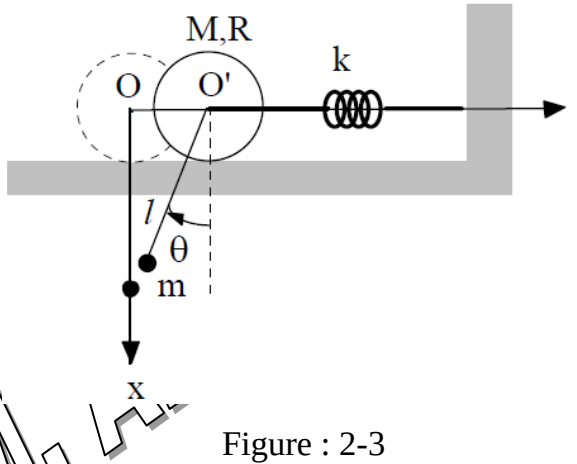


Figure : 2-3

1- La pulsation propre du système :

L'énergie cinétique T :

$$T = T_M + T_m$$

$$T_M = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{3}{2}MR^2\dot{\theta}^2$$

$$T_m = ?$$

$$\vec{om} = \vec{oo'} + \vec{o'm}$$

Lorsque le disque avance d'une distance $y = R\theta$ sur la table il balance la boule en arrière d'une distance $l\sin\theta$.

Pour l'énergie cinétique on pose $\cos\theta \approx 1$ et $\sin\theta \approx \theta$ Pour faciliter le calcul.

$$\overrightarrow{oo'}\begin{cases} x=0 \\ y=R\theta \end{cases} \text{et} \overrightarrow{o'm}\begin{cases} x=l\cos\theta \\ y=-l\sin\theta \end{cases} \text{ donc : } \overrightarrow{om}\begin{cases} x=l\cos\theta\approx l \\ y=R\theta-l\sin\theta\approx R\theta-l\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} \dot{x}\approx 0 \\ \dot{y}\approx (R-l)\dot{\theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T_m=\frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow T_m=\frac{1}{2}m(R-l)^2\dot{\theta}^2$$

L'énergie cinétique totale :

$$T=T_M+T_m$$
$$=\frac{1}{2}\frac{3}{2}MR^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m(R-l)^2\dot{\theta}^2 \text{ Avec } A=\frac{3}{2}MR^2+m(R-l)^2$$
$$=\frac{1}{2}A\dot{\theta}^2$$

L'énergie potentielle U :

$$U=U_k+U_m+U_M$$

$$U_k=\frac{1}{2}k(y+\Delta l)^2$$
$$=\frac{1}{2}k(R\theta+\Delta l)^2$$

$$U_M=0$$

$$U_m=mgl(1-\cos\theta)$$
$$=-mgl\cos\theta+mgl$$

Pour des faibles amplitudes $\cos\theta\approx 1-\frac{\theta^2}{2}$.

$$U_m=-mgl(1-\frac{\theta^2}{2})+mgl$$
$$=\frac{1}{2}mgl\theta^2$$

$$U=\frac{1}{2}k(R\theta+\Delta l)^2+\frac{1}{2}mgl\theta^2$$

- Condition d'équilibre $\frac{\partial U}{\partial\theta}\Big|_{\theta=0}=0\Rightarrow kR(R\theta+\Delta l)+mgl\theta\Big|_{\theta=0}=0$

$$\Rightarrow \Delta l=0$$

Dr M. AHMED AMMAR

- Condition de stabilité $\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=0} > 0 \Rightarrow kR^2 + mgl > 0$.

L'énergie potentielle U devient:

$$U = \frac{1}{2}kR^2\theta^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2$$

$$= \frac{1}{2}(kR^2 + mgl)\theta^2 \quad \text{Avec } B = kR^2 + mgl$$

$$= \frac{1}{2}B\theta^2$$

L'équation différentielle du mouvement :

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}B\theta^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow A\ddot{\theta} + B\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \text{ Avec } \omega_0^2 = \frac{B}{A}$$

Alors, la pulsation est égale :

$$\omega = \sqrt{\frac{B}{A}} = \sqrt{\frac{kR^2 + mgl}{\frac{3}{2}MR^2 + m(R-l)^2}}$$

2- Sachant qu'à *t=0*, la tige est écartée d'un angle petit θ_0 par rapport à la verticale et lâchée sansvitesse initiale, déterminer l'expression de $\theta(t)$.

L'équation $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ est une équation différentielle de 2ème ordre la solution est de la forme : $\theta(t) = C\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

Les conditions initiales : à t=0 $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = 0$.

$$\begin{aligned} &\theta(0) = \theta_0 \\ &\dot{\theta}(0) = -C\omega_0.\sin(\varphi) = 0 \end{aligned} \Rightarrow \quad C = \theta_0 \ \ et \ \ \varphi = 0$$

L'expression $\theta(t)$ devient :

$$\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t)$$

3- L'expression de la vitesse de la masse *m* quand la tige passe par la verticale :

$$\dot{\theta}(t) = Max \Rightarrow \sin(\omega_0 t) = 1 \Rightarrow \dot{\theta} = -C\omega_0$$

Dr M. AHMED AMMAR

Solution 2.4:

On considère deux masses ponctuelles m_1 et m_2 suspendues par un fil inextensible et de masse négligeable, de part et d'autre d'une poulie (M, R) de moment d'inertie $I_0 = \frac{1}{2}MR^2$. Un ressort de constante de raideur *k* est relié à la masse m_1. Tout le système peut osciller (faibles oscillations) sans frottement autour d'un axe passant par o. On suppose que le fil ne glisse pas par rapport à la poulie, et à l'équilibre θ=0 le ressort est déformé par Δℓ.

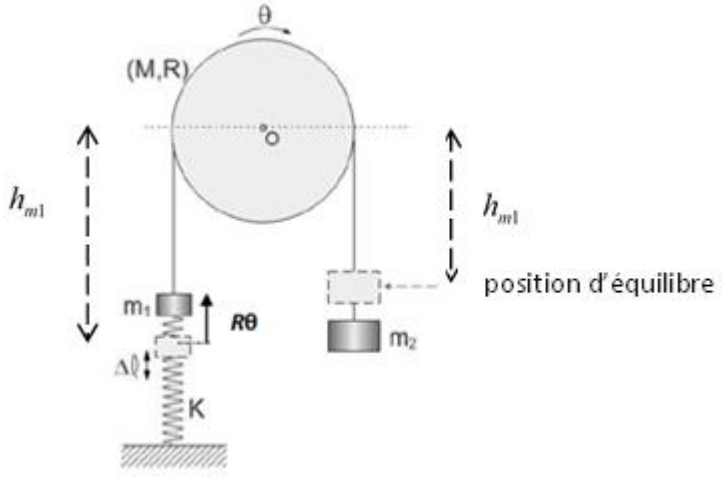


Figure : 2-4

1- L'énergie cinétique du système :

$T = T_{m1} + T_{m2} + T_M = \frac{1}{2}m_1R^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2R^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2$ avec

$A = [m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M]R^2$

2- L'allongement du ressort Δℓ à partir de la condition d'équilibre :

$V = V_{m1} + V_{m2} + V_M + V_k$

$V_{m1} = -m_1g(h_{m1} - R\theta) = m_1gR\theta + C_1$

$V_{m2} = -m_2g(h_{m2} + R\theta) = -m_2gR\theta + C_2$

$V_k = \frac{1}{2}k(x + \Delta l)^2 = \frac{1}{2}k(R\theta + \Delta l)^2$

$$V = m_1 gR\theta - m_2 gR\theta + 0 + \frac{1}{2}k(R\theta + \Delta l)^2 + C$$

$$V = \frac{1}{2}kR^2\theta^2 + [m_1 gR - m_2 gR + kR\Delta l]\theta + C$$

Condition d'équilibre :

$$\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta}\Big|_{\theta=0} = 0 \Rightarrow kR^2\theta + [m_1 gR - m_2 gR + kR\Delta l]\Big|_{\theta=0} = 0$$

$$\Delta l = \frac{(m_2 - m_1)g}{k}$$

3- L'énergie potentielle :

$$V = \frac{1}{2}B\theta^2 + C^{te} \text{ avec } B = kR^2$$

4- L'équation différentielle du mouvement :

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}B\theta^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow A\ddot{\theta} + B\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{B}{A}\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

Où $\omega_0 = \sqrt{\frac{B}{A}} = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M}}$

Dr M. AHMED AMMAR

L'expression de la solution générale :

$$\theta(t) = \theta_0 \, Cos(\omega_0 t + \varphi)$$

B- Oscillations libres amorties $F_q(t) = 0$ et $\mathcal{D} \neq 0$:

Solution 2.5:

On définit un oscillateur amorti constitué d'une masse ***m (kg)***, d'un amortisseur de coefficient de frottement ***α (kg/s),*** et d'un ressort de constante de raideur ***k= 3.75 N/m*** , régi par l'équation différentielle suivante : $0.6\ddot{x} + 2.4\dot{x} + 15x = 0$.

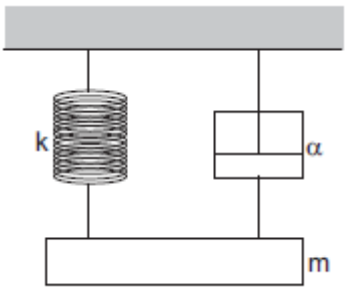


Figure : 2-5

Rappel :

$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$, $U=\frac{1}{2}kx^2$, $\mathcal{D}=\frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$

L'équation différentielle s'écrit

$\ddot{x}+\frac{\alpha}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=0$ on pose $2\lambda=\frac{\alpha}{m}$, $\omega_0^2=\frac{k}{m}$

Notre équation devient : $\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2 x=0$.

La solution de cette équation :

$\Delta'=\lambda^2-\omega_0^2$

- Si $\Delta'>0\Rightarrow\lambda>\omega_0\Rightarrow x(t)=e^{-\lambda t}(Ae^{\omega' t}+Be^{-\omega' t})$ (Régime apériodique).

- Si $\Delta'=0\Rightarrow\lambda=\omega_0\Rightarrow x(t)=e^{-\lambda t}(a.t+b)$ (Régime critique).

- Si $\Delta<0\Rightarrow\lambda<\omega_0\Rightarrow x(t)=Ae^{-\lambda t}Cos(\omega' t+\varphi)$ (Régime pseudo périodique).

Dr M. AHMED AMMAR

1- La période propre du mouvement **T**.

D'après l'équation $0.6\ddot{x}+2.4\dot{x}+15x=0$ on obtient l'équation compatible

$\ddot{x}+\frac{2.4}{0.6}\dot{x}+\frac{15}{0.6}x=0\Rightarrow\ddot{x}+4\dot{x}+25x=0$

$T=\frac{2\pi}{\omega_0}$ avec $\omega_0^2=25\Rightarrow\omega_0=\sqrt{25}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{\sqrt{25}}=1.256\ s$

2- Facteur d'amortissement **λ**.

$2\lambda=4\Rightarrow\lambda=2$

3- La pseudo-période du mouvement **T'**.

$T'=\frac{2\pi}{\omega'}$

$$\omega'^2 = \omega_0^2 - \lambda^2 \Rightarrow \omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \Rightarrow T' = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \Rightarrow T' = \frac{2\pi}{\sqrt{25-4}} = 1.37\,s$$

4- La masse ***m*** est animée d'un mouvement oscillatoire amorti :

$\lambda < \omega_0 \Rightarrow$ Régime pseudo périodique.

La solution est :

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}Cos(\omega' t + \varphi) \Rightarrow \dot{x}(t) = -\lambda Ae^{-\lambda t}Cos(\omega' t + \varphi) - A\omega' e^{-\lambda t}Sin(\omega' t + \varphi)$$

à t=0 : $\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v(0) = 0.25m/s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ACos(\varphi) = 0 \\ -\lambda ACos(\varphi) - A\omega' Sin(\varphi) = 0.25 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi = \dfrac{\pi}{2} \\ A = -\dfrac{0.25}{4.58} = -0.05m \end{cases}$$

5- Les valeurs de ***m*** et ***α.***

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow m = \frac{k}{\omega_0^2} = \frac{3.75}{25} = 0.15kg$$

$$2\lambda = \frac{\alpha}{m} \Rightarrow \alpha = 2m\lambda = 0.6$$

Solution 2.6:

On considère un disque de rayon R=10cm et de masse M=10kg, roulant sans glissement, est attaché en son centre un amortisseur de coefficient α=480N s/m. À un piot de son centre de circonférence est relié un ressort de constante de raideur K= 2.10^4 N/m. À l'instant t=0, le disque passe par sa position d'équilibre à la vitesse de 2m/s.

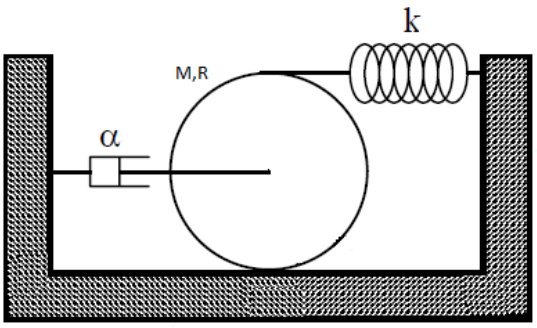


Figure : 2-6

Dr M. AHMED AMMAR

1- Les énergies cinétique, potentielle et la fonction de dissipation du système :

L'énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}(\frac{mR^2}{2})(\frac{\dot{x}}{R})^2 = \frac{1}{2}(\frac{3m}{2})\dot{x}^2$$

L'énergie potentielle :

$$U = U_k = \frac{1}{2}k(2x)^2 = \frac{1}{2}(4k)x^2$$

Fonction de dissipation :

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha\,\dot{x}^2$$

2- L'équation du mouvement :

$$(\frac{3m}{2})\ddot{x} + \alpha\,\dot{x} + (4k)x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + 2\delta\,\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

En déduire sa fréquence :

On pose : $A = \frac{3m}{2}$ *et* $B = 4k$

$$\omega = \sqrt{\frac{B}{A}} = \sqrt{\frac{8k}{3m}}$$

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{8k}{3m}}$$

Solution 2.7:

Une masse *m* posée sur une table horizontale est reliée à un bâti fixe par l'intermédiaire d'un ressort de constante de raideur *k* et un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α. On suppose qu'il n'y a pas d'autres frottements.

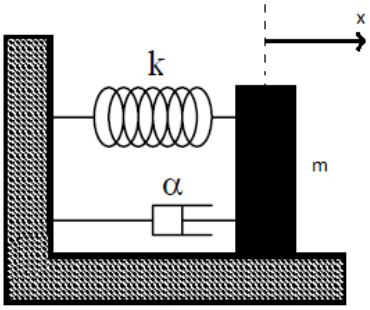


Figure : 2-7

Dr M. AHMED AMMAR

On écarte la masse de sa position d'équilibre puis on la lâche sans vitesse initiale.

1- Les énergies cinétique et potentielle ainsi que la fonction de dissipation du système :

L'énergie cinétique :

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2 \Rightarrow T=\frac{1}{2}A\dot{x}^2 \text{ Avec } A=m$$

L'énergie potentielle :

$$U=U_k=\frac{1}{2}k(x+\Delta l)^2$$

- Condition d'équilibre $\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=0}=0\Rightarrow \Delta l=0$

$$U=U_k=\frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow U=\frac{1}{2}Bx^2 \qquad \text{Avec } B=k$$

Fonction de dissipation :

$$\mathcal{D}=\frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2 \Rightarrow \mathcal{D}=\frac{1}{2}C\dot{x}^2 \text{ Avec } C=\alpha$$

2- L'équation différentielle du mouvement :

$$\mathcal{L}=T-U=\frac{1}{2}A\dot{x}^2-\frac{1}{2}Bx^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}+\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{x}}=0\Rightarrow A\ddot{x}+C\dot{x}+Bx=0$$

$$\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2x=0 \text{ Avec } \omega_0^2=\frac{B}{A} \quad et \quad \delta=\frac{C}{2A}$$

δ : Facteur d'amortissement $[\frac{1}{s}]$

3- La condition imposer à α pour avoir des oscillations :

$\Rightarrow$ Le régime pseudo-périodique $\Delta'<0$

L'amortissement est caractérisé par $\delta<\omega_0$:

$$\delta<\omega_0 \Rightarrow \frac{\alpha}{2m}<\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow \alpha<2\sqrt{k.m}$$

Dans ce cas on définit la pseudo pulsation ω_a :

Dr M. AHMED AMMAR

$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

4- La solution de l'équation du mouvement ($\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$) est de la forme :

$x(t) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega_a t + \varphi)$

$x(t)$ est une fonction périodique de pulsation ω_a, de phase initiale φ et d'amplitude $Ae^{-\delta t}$, où A et φ dépendent des condition initiales.

Où : $A = \omega_0\sqrt{1+\frac{\delta^2}{\omega_a^2}}$ et $\varphi = -Arc\tan(\frac{\delta}{\omega_a})$

Solution 2.8 :

Un pendule simple est constitué d'une tige de longueur *l* de masse négligeable accroché à un point fixe *O* et à son extrémité libre on y accroche une masse ponctuelle *m*. On lui accroche ensuite un ressort ($OA = a$) et un amortisseur (figure 2-8).

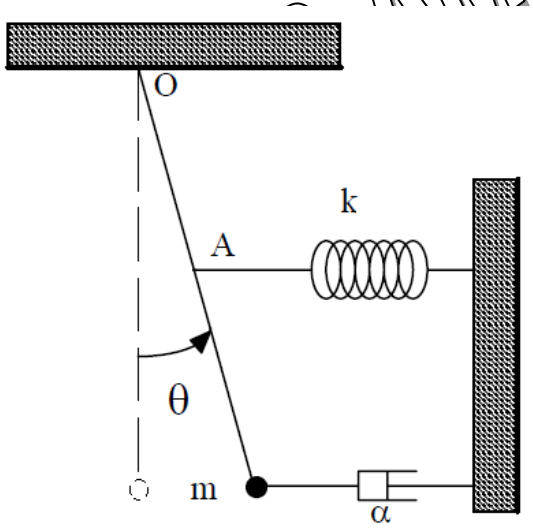


Figure : 2-8

1- Les énergies cinétique et potentielle ainsi que la fonction de dissipation du système :

L'énergie cinétique :

$T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}ml^2 = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2$ avec $A = ml^2$

L'énergie potentielle :

$U = U_m + U_k$

$U_m = mgl(1 - Cos\theta)$

Dr M AMMAR

$U_k = \frac{1}{2}k(x_k + \Delta l)^2$ où $x_k = a.Sin\theta$

Approximation des faibles amplitudes d'oscillations pour l'énergie potentielle.

$Cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ et $Sin\theta \approx \theta$

$U = \frac{1}{2}mgl\theta^2 + \frac{1}{2}k(a\theta + \Delta l)^2$

- Condition d'équilibre $\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta}\Big|_{\theta=0} = 0 \Rightarrow \Delta l = 0$

- Condition de stabilité $\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\Big|_{\theta=0} > 0 \Rightarrow mgl + ka^2 > 0$ est toujours vérifiée.

L'énergie potentielle devient:

$U = \frac{1}{2}(mgl + ka^2)\theta^2 = \frac{1}{2}B\theta^2$

Où $B = mgl + ka^2$.

La fonction de dissipation :

$\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\alpha(l\dot{\theta})^2 \Rightarrow \mathcal{D} = \frac{1}{2}C\dot{\theta}^2$

Où $C = \alpha l^2$.

3- L'équation différentielle du mouvement ainsi que la période propre T_0.

$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}B\theta^2$

$\frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}} = 0 \Rightarrow A\ddot{\theta} + B\theta + C\dot{\theta} = 0$

$\ddot{\theta} + \frac{C}{A}\dot{\theta} + \frac{B}{A}\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$

Où $\delta = \frac{C}{2A}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{B}{A}}$.

3- La valeur critique de α :

$\delta = \omega_0 \Rightarrow \frac{C}{2A} = \sqrt{\frac{B}{A}} \Rightarrow \frac{\alpha l^2}{2A} = \sqrt{\frac{B}{A}} \Rightarrow \alpha = 2m\sqrt{\frac{mgl + ak^2}{ml^2}}$

Le système oscille dans le cas où :

Dr M. AHMED AMMAR

$$\delta < \omega_0 \Rightarrow \alpha < 2m\sqrt{\frac{mgl + ak^2}{ml^2}}$$

4- Lorsque la tige est écartée de sa position d'équilibre d'un angle θ_0 puis lâchée sans vitesse initiale, elle prend un mouvement oscillatoire amorti de pseudo période *1s*. On constate qu'au bout de *5* pseudo-périodes, l'amplitude est égale à *20 %* de l'amplitude initiale.

En déduire la valeur numérique de α. On donne *m= 0.5 Kg*, *l= 50 cm* et *a=10 cm.*

On définit le décrément logarithmique D_{Ln} comme suit:

$$D_{Ln} = \frac{1}{n} Ln \frac{\theta_0}{\theta_n} = \frac{1}{5} Ln(5) = 0.32$$

$$D_{Ln} = T_a \delta \Rightarrow \delta = \frac{D_{Ln}}{T_a} = \frac{0.32}{1} \Rightarrow \delta = 0.32$$

$$\delta = \frac{C}{2A} = \frac{\alpha l^2}{2ml^2} \Rightarrow \alpha = 2m\delta \Rightarrow \alpha = 0.32 kg/s$$

En déduire la valeur numérique de *k* :

$\omega_a^2 = \omega_0^2 - \delta^2 \approx \omega_0^2$ *parceque* $\delta^2 << \omega_a^2$

$$\omega_a^2 = \omega_0^2 = \frac{B}{A} = \frac{mg + \frac{kl}{4}}{ml}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_a} = 2\pi \Rightarrow \sqrt{\frac{mg + \frac{kl}{4}}{ml}} = 2\pi \Rightarrow k = \frac{4(4ml\pi^2 - mg)}{l}$$

A.N : $k = 9.89 N/m$

5- L'expression de $\theta(t)$:

$\delta < \omega_a$ régime pseudo-périodique:

$$\theta(t) = Ae^{-\delta t} Cos(\omega_a t + \varphi)$$

Solution 2.9:

La figure ci-dessous représente un circuit RLC en série. Initialement, le condensateur était chargé, puis on ferme l'interrupteur *S*.

Dr M. AHMED AMMAR

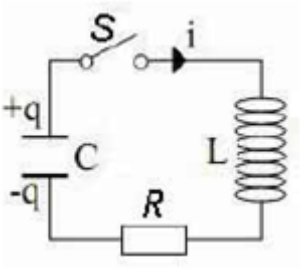


Figure : 2-9

Pour décrire l'équation différentielle de ce système, i

1- En utilisant la loi des mailles, l'équation différentielle qui décrit le circuit en fonction de la charge q(t).

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{c}q = 0$$

Par analogies entre les systèmes électriques et mécaniques, on trouve:

$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$ avec $2\delta = \frac{R}{L}$ *et* $\omega_0^2 = \frac{1}{Lc}$ et la pseudo pulsation $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

2- Les expressions de q(t) dans les trois régimes suivant la valeur de la résistance R.

L = 0.01 H et C = 1 μF $\Rightarrow \delta = \omega_0$

La résistance critique :

$$R_c = 2\sqrt{\frac{L}{c}} = 200\Omega$$

a- Régime critique :

$\delta = \omega_0 \Rightarrow R = R_c$

$q(t) = e^{-\delta t}(a.t + b)$

b- Régime apériodique :

$\delta > \omega_0 \Rightarrow R > R_c$

$q(t) = e^{-\delta t}(Ae^{\omega_a t} + Be^{-\omega_a t})$

c- Régime pseudo périodique :

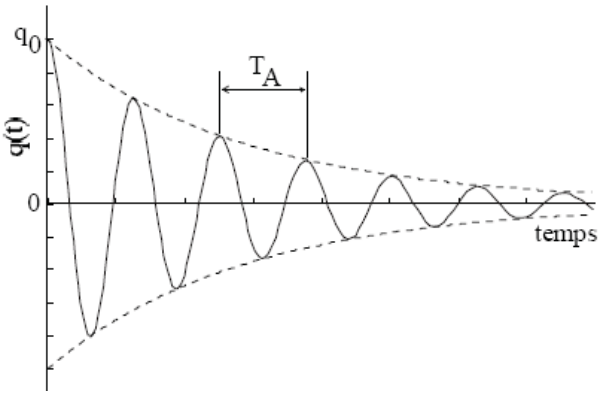
$\delta < \omega_0 \Rightarrow R < R_c$

$q(t) = Ae^{-\delta t}Cos(\omega_a t + \varphi)$

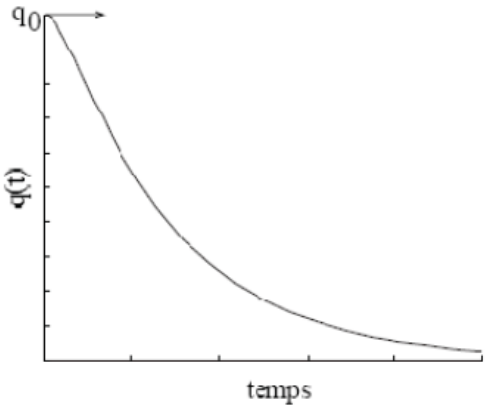
3- Tracer qualitativement l'allure de q(t) :

pour $R = 10\Omega < R_c$:

Dr M. AHMED AMMAR



pour $R = 1k\Omega > R_c$:



Solution 2.10:

Un cylindre de masse M et de rayon R roule sans glisser sur une table horizontale. En relie à son centre de gravité de part et d'autre un amortisseur et un ressort (figure 2 -9).

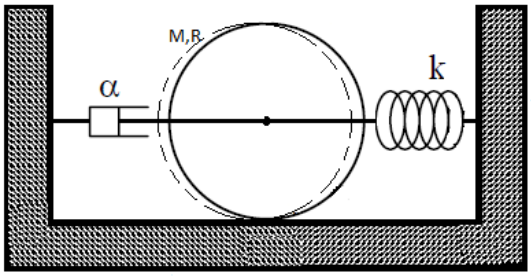


Figure : 2-10

1- L'équation différentielle du mouvement.

L'énergie cinétique :

$T = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} A\dot{\theta}^2$ avec $x = R\theta$, $I_0 = \frac{1}{2} MR^2$ *et* $A = \frac{3}{2} MR^2$

L'énergie potentielle :

Approximation des faibles amplitudes d'oscillations pour l'énergie potentielle.

$Sin\theta \approx \theta$

$U = \frac{1}{2} k(x + \Delta l)^2 = \frac{1}{2} k(R\theta + \Delta l)^2$

- Condition d'équilibre $\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta}\Big|_{\theta=0} = 0 \Rightarrow \Delta l = 0$

L'énergie potentielle devient:

$U = \frac{1}{2} kR^2\theta^2 = \frac{1}{2} B\theta^2$ *avec* $B = kR^2$

La fonction de dissipation :

$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2 = \frac{1}{2} C\dot{\theta}^2$ *avec* $C = \alpha R^2$

L'équation différentielle du mouvement :

$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} A\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} B\theta^2$

$\frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}} = 0 \Rightarrow A\ddot{\theta} + B\theta + C\dot{\theta} = 0$

$\ddot{\theta} + \frac{C}{A}\dot{\theta} + \frac{B}{A}\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$

où $\delta = \frac{C}{2A}$ *et* $\omega_0 = \sqrt{\frac{B}{A}}$.

2- La pseudo période du système :

$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a}$ *et* $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

3- Sachant que la période des oscillations amorties est de T_a=1s et que l'amplitude des oscillations chute de moitié après 10 oscillations, calculer α et k. On donne M= 1 Kg.

Le décrément logarithmique :

$D_{Ln} = \frac{1}{n} Ln\frac{\theta_0}{\theta_n} = \frac{1}{10} Ln(\frac{1}{0.5}) = 0.07$

DR M. AHMED AMMAR

$$D_{Ln} = T_a\delta \Rightarrow \delta = \frac{D_{Ln}}{T_a} = \frac{0.07}{1} \Rightarrow \delta = 0.07$$

$$\delta = \frac{C}{2A} = \frac{\alpha R^2}{2\frac{3}{2}MR^2} \Rightarrow \alpha = 3M\delta \Rightarrow \alpha = 0.21 kg/s$$

En déduire la valeur numérique de *k* :

$\omega_a^2 = \omega_0^2 - \delta^2 \approx \omega_0^2$ parce que $\delta^2 << \omega_a^2$

$$\omega_a^2 = \omega_0^2 = \frac{B}{A} = \frac{2k}{3M}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_a} = 2\pi \Rightarrow k = \frac{3(2\pi)^2 M}{2}$$

A.N : $k = \frac{3(2\pi)^2}{2} = 59.15\, N/m$.

Solution 2.11:

Sur une poulie de masse m et de rayon R est soudée une tige de masse M et de longueur l, comme le montre la figure ci-dessous.

La poulie est suspendue par un fils inextensible a un bâti fixe et reliée au sol à travers un ressort et un amortisseur.

Dr M. AHMED AMMAR

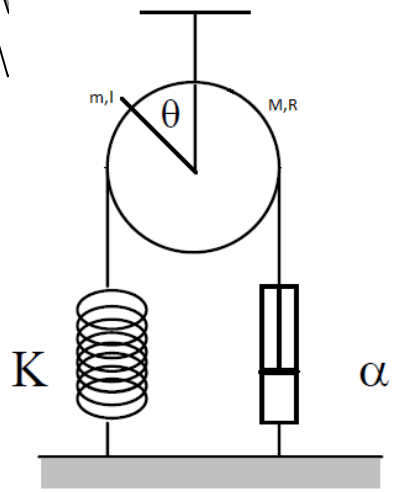


Figure : 2-11

1- Les énergies cinétique et potentielle ainsi que la fonction de dissipation du système.

L'énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}mL^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 \text{ avec } A = \frac{1}{3}mL^2 + \frac{1}{2}MR^2$$

L'énergie potentielle :

$$U = \frac{l}{2}mgCos\theta + \frac{1}{2}kx^2, \text{ où } x = RSin\theta$$

Approximation des faibles amplitudes d'oscillations pour l'énergie potentielle.

$$Sin\theta \approx \theta \text{ et } Cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

L'énergie potentielle devient :

$$U = \frac{l}{2}mg(1 - \frac{\theta^2}{2}) + \frac{1}{2}k(R\theta + \Delta l)^2 = \frac{1}{2}(-\frac{l}{2}mg)\theta^2 + \frac{1}{2}k(R^2\theta^2 + 2R\theta\Delta l + \Delta l^2) + \frac{l}{2}mg$$

$$= \frac{1}{2}(-\frac{l}{2}mg + kR^2)\theta^2 + kR\theta\Delta l + \frac{1}{2}k\Delta l^2 + \frac{l}{2}mg$$

- Condition d'équilibre $\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta}\Big|_{\theta=0} = 0 \Rightarrow (-\frac{l}{2}mg + kR^2)\theta + kR\Delta l\Big|_{\theta=0} = 0 \Rightarrow \Delta l = 0$

- Condition de stabilité $\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\Big|_{\theta=0} > 0 \Rightarrow -\frac{l}{2}mg + kR^2 > 0$

Pour le système puisse osciller il faut que $-\frac{l}{2}mg + kR^2 > 0$

L'énergie potentielle devient :

$$U = \frac{1}{2}B\theta^2 \text{ avec } B = -\frac{l}{2}mg + kR^2$$ avec B positif

La fonction de dissipation :

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\alpha(R\dot{\theta})^2 \Rightarrow \mathcal{D} = \frac{1}{2}C\dot{\theta}^2 \text{ où } C = \alpha R^2.$$

2- L'équation différentielle du mouvement :

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}B\theta^2$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}} = 0 \Rightarrow A\ddot{\theta} + B\theta + C\dot{\theta} = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{C}{A}\dot{\theta} + \frac{B}{A}\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

Où $\delta = \frac{C}{2A}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{B}{A}}$

Dr M. AHMED AMMAR

3- Déterminer la période d'oscillation du système

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} \quad et \quad \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Solution 2.12:

On étudie les oscillations de faibles amplitudes du système représenté par la figure (2-12), deux pendules simples constitué chacun par une tige de masse négligeable portant une masse ponctuelle. Les deux tiges sont soudées l'une à l'autre et tournent autour de l'axe (Δ) d'un même angle θ. On attache ensuite à la masse M un ressort de constante de raideur k et à la masse m un amortisseur de coefficient de frottement α. On donne : ℓ= 0,5 m, g = 10m/s^2, m= 0,1Kg, L=2ℓ, et M= 2m.

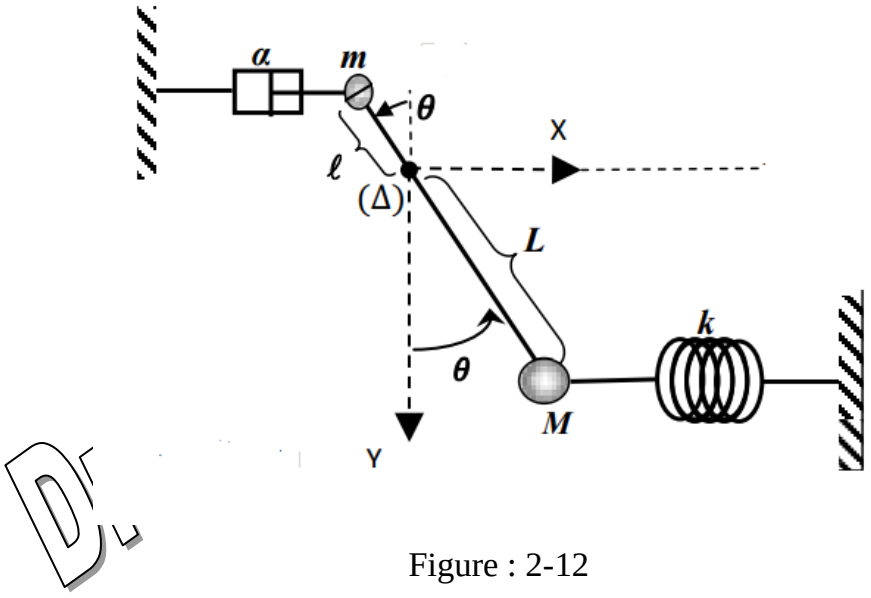


Figure : 2-12

1- Les énergies cinétique et potentielle ainsi que la fonction de dissipation du système.

L'énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 \text{ avec } A = ml^2 + ML^2$$

L'énergie potentielle :

$$U = \frac{1}{2}k(x_1 + \Delta l)^2 + MgL(1 - Cos\theta) - mgl(1 - Cos\theta) \text{ où } x_1 = LSin\theta$$

Approximation des faibles amplitudes d'oscillations pour l'énergie potentielle.

$Sin\theta \approx \theta$ *et* $Cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$$U = \frac{1}{2}k(L\theta + \Delta l)^2 + \frac{1}{2}(MgL - mgl)\theta^2 = \frac{1}{2}\left[kL^2 + MgL - mgl\right]\theta^2 + kL\Delta l\theta + \Delta l^2$$

- Condition d'équilibre $\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta}\Big|_{\theta=0} = 0 \Rightarrow \Delta l = 0$

$U = \frac{1}{2}B\theta^2$ avec $B = 4kl^2 + 3mgl$ tel que L=2ℓ et M= 2m

- Condition de stabilité $\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\Big|_{\theta=0} > 0 \Rightarrow B > 0$

La fonction de dissipation :

$\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha \dot{x}_2{}^2 = \frac{1}{2}\alpha l^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow \mathcal{D} = \frac{1}{2}C\dot{\theta}^2$ avec $x_2 = l\theta$ et $C = \alpha l^2$

2- L'équation différentielle du mouvement

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}B\theta^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}} = 0 \Rightarrow A\ddot{\theta} + B\theta + C\dot{\theta} = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{C}{A}\dot{\theta} + \frac{B}{A}\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

$\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha \dot{x}_2{}^2 = \frac{1}{2}\alpha l^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow \mathcal{D} = \frac{1}{2}C\dot{\theta}^2$ Où $\delta = \frac{C}{2A}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{B}{A}}$.

L'expression de la solution oscillatoire

$\theta(t) = Ae^{-\delta t}Cos(\omega_a t + \varphi)$

3- La pseudo pulsation ω_a

$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

Pour le système oscille, il faut que les conditions d'équilibre et de stabilité soit vérifiées en plus de la condition $\delta < \omega_0$.

Dr M. AHMED AMMAR

Chapitre III
Oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté

III-1 Introduction :

Une oscillation forcée des systèmes à un degré de liberté est soumis à une force excitatrice s'appelle « la force généralisée $F_{q(t)}$ », d'où l'équation différentielle s'écrit sous la forme générale de l'équation de Lagrange pour les systèmes à un degré de liberté :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}} = F_{q(t)} \qquad \text{(III-1)}$$

Où $F_{q(t)}$ est la force généralisée et $\mathcal{D}$ la fonction dissipation tel que $\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha \dot{q}^2$.

III-2 Oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté $F_q(t) \neq 0$ et $\mathcal{D} \neq 0$:

Si $F_q(t) = F_0.\mathrm{Sin}(\omega t)$ est une fonction sinusoïdale (appliquée à la masse m) de pulsation ω, alors la solution de équation différentielle (III-1) est égale à la somme de la solution homogène $x_H(t)$ sans second membre et d'une solution particulière avec second membre $x_P(t)$ tel que :

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t) \qquad \text{(III-2)}$$

III-2-a Solution homogène :

Pour la solution homogène $x_H(t)$, on résoudre l'équation différentielle d'un système libre amorti :

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \text{(III-3)}$$

On utilise le cas des oscillations faiblement amorties $\lambda < \omega_0$. La solution s'écrit :

$$x_H(t) = Ae^{-\lambda t}\,\mathrm{Sin}(\omega_a t + \varphi) \qquad \text{(III-4)}$$

Avec $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

Dr M. AHMED AMMAR

III-2-a Solution particulière :

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}.\mathrm{Sin}(\omega t) \qquad \text{(III-5)}$$

La solution $x_p(t)$ prend la même forme que la force extérieure, donc :

$$x_p(t) = A.\mathrm{Sin}(\omega.t + \varphi) \qquad \text{(III-6)}$$

Pour des raisons pratiques, il est commode d'utiliser la notation complexe. La grandeur complexe associé à $x_{(t)}$ s'écrit :

$$x_p(t) = Ae^{j(\omega t + \varphi)} \text{ et } F_p(t) = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t} \qquad \text{(III-7)}$$

Pour déterminer A et φ on peut utiliser les grandeurs complexes associées à $x_p(t)$ et $F_{p(t)}$.

L'équation différentielle devient :

$$\ddot{x}_p + 2\lambda \dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = \frac{F_0}{m}.e^{j\omega t} \qquad \text{(III-8)}$$

Ce qui donne :

$$-A\omega^2 e^{j(\omega t+\varphi)} + j2\lambda A\omega e^{j(\omega t+\varphi)} + \omega_0^2 Ae^{j(\omega t+\varphi)} = \frac{F_0}{m}.e^{j\omega t} \qquad \text{(III-9)}$$

$$-A\omega^2 e^{j\varphi} + j2\lambda A\omega e^{j\varphi} + \omega_0^2 Ae^{j\varphi} = \frac{F_0}{m} \qquad \text{(III-10)}$$

$$Ae^{j\varphi}\left[-\omega^2 + j2\lambda\omega + \omega_0^2\right] = \frac{F_0}{m} \qquad \text{(III-11)}$$

$$\Rightarrow A\left[(\omega_0^2 - \omega^2) + j2\lambda\omega\right] = \frac{F_0}{m} e^{-j\varphi} \qquad \text{(III-12)}$$

Le conjugue de cette dernière équation est donnée par :

$$A\left[(\omega_0^2 - \omega^2) - j2\lambda\omega\right] = \frac{F_0}{m} e^{j\varphi} \qquad \text{(III-13)}$$

La multiplication des deux dernières équations membre à membre permet d'écrire :

$$A^2\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\lambda\omega)^2\right] = \left(\frac{F_0}{m}\right)^2 \qquad \text{(III-14)}$$

On obtient :

Dr M. AHMED AMMAR

$$A = \frac{\left(\frac{F_0}{m}\right)}{\sqrt{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\lambda\omega)^2\right]}} \qquad \text{(III-15)}$$

D'après l'équation (III-12), on peut écrire

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) = \frac{F_0}{m} Cos(\varphi) \quad \text{et} \quad A2\lambda\omega = -\frac{F_0}{m} Sin(\varphi) \qquad \text{(III-16)}$$

Ce qui donne :

$$Tg(\varphi) = \frac{-2\lambda\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \Rightarrow \varphi = -Arc\tan\left(\frac{-2\lambda\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \qquad \text{(III-17)}$$

III-3 Pulsation de résonnance :

Pour calculer la pulsation de résonnance, il faut d'abord dériver l'amplitude A (ou θ_0) de l'équation (III-15) de telle sorte que le maximum de l'amplitude est obtenu pour la valeur de ω qui annule :

$$\frac{dA}{d\omega} = 0 \qquad \text{(III-18)}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \omega_1 = 0 \\ \omega_2 = \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} \end{cases} \qquad \text{(III-19)}$$

Avec : ω_R la pulsation de résonnance.

Il existe un maximum à la pulsation $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$ seulement si l'amortissement est suffisamment faible pour que $\lambda < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$. A cette pulsation, appelée pulsation de résonance, on dit que le système entre en résonance et l'amplitude A_{Max} est maximale, ainsi le déphasage φ (voir Fig.III.1). En remplaçant ω_R dans l'amplitude, on obtient :

$$A_{Max} = A(\omega_R) = \frac{\left(\frac{F_0}{m}\right)}{2\lambda\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \qquad \text{(III-20)}$$

Pour les faibles amortissements :

$$A(\omega_R) = \frac{\left(\frac{F_0}{m}\right)}{2\lambda\omega_0} \qquad \text{(III-21)}$$

Dr M. AHMED AMMAR

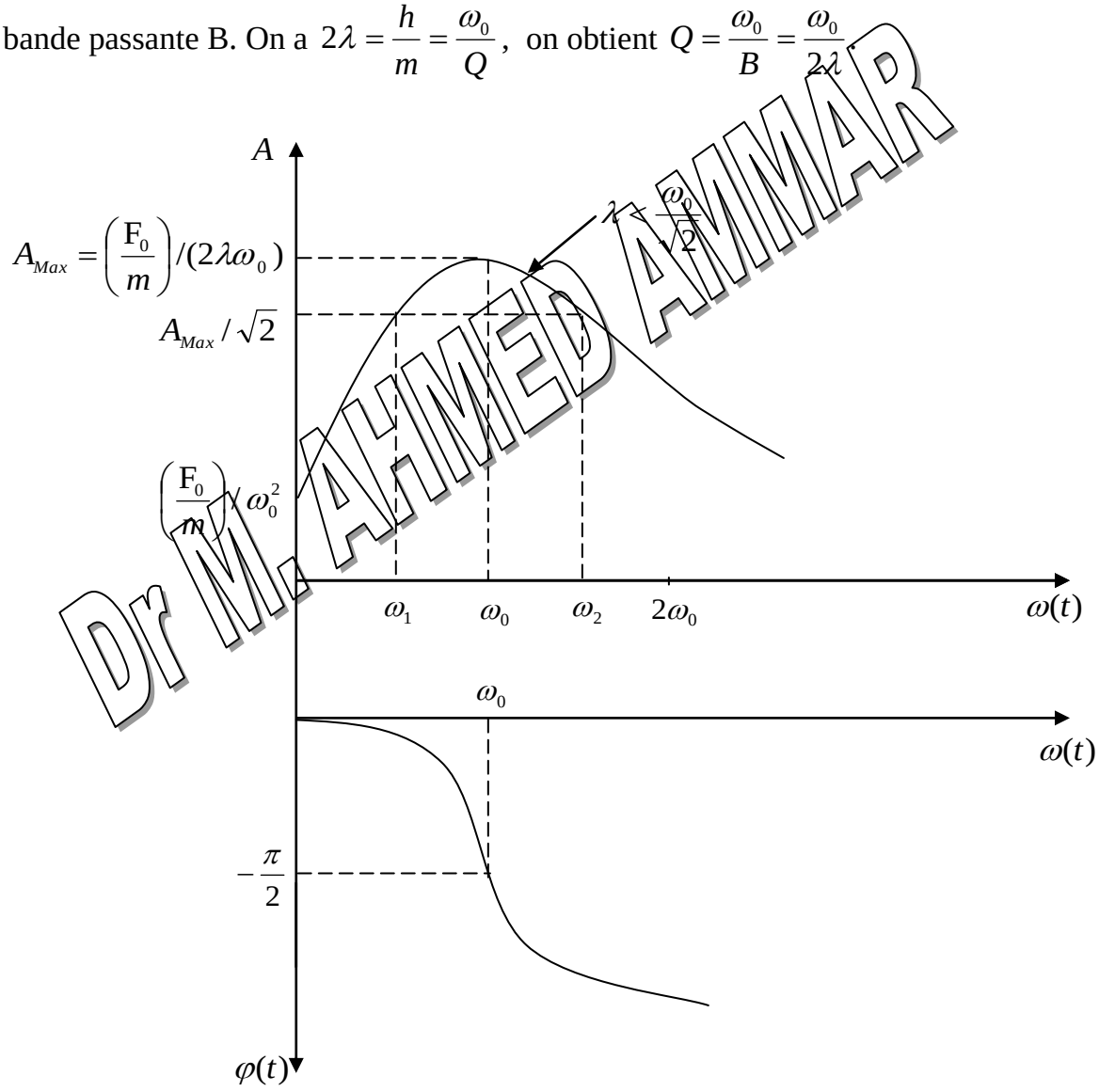
III-4- Bande Passante :

On définit bande passante, la bande de pulsation pour le quelle l'amplitude est égale à $\frac{A(\omega_R)}{\sqrt{2}}$. Elle est donnée à partir de l'équation (III-19) comme:

$$B = \omega_2 - \omega_1 = 2\lambda \qquad \text{(III-22)}$$

III-5- Coefficient de Qualité :

Il est définit par le rapport de la pulsation propre ω_0 à la largeur de la bande passante B. On a $2\lambda = \frac{h}{m} = \frac{\omega_0}{Q}$, on obtient $Q = \frac{\omega_0}{B} = \frac{\omega_0}{2\lambda}$.



Dr M. AHMED AMMAR

Fig.III.1 : Amplitude A et le déphasage en fonction de φ.

Exercice 3.1:

Dans le système représenté sur la figure (3-1) le ressort et l'amortisseur sont attachés à un disque (M, R) aux points A et A' respectivement tel que OA=OA'=a. On applique une force $F(t) = F_0 Cos(\Omega t)$ agissant horizontalement sur le point O (le centre du disque).

1- Montrer que le Lagrangien $\mathcal{L}$ et la fonction de dissipation $\mathcal{D}$ du système s'écrivent : $\mathcal{L} = T - U = \frac{3}{4} MR^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k(R+a)^2 \theta^2$ et $\mathcal{D} = \frac{1}{2} \alpha (R-a)^2 \dot{\theta}^2$.

2- Déterminer la force généralisée $F_\theta(t)$ puis écrire l'équation différentielle du mouvement.

3- Montrer, en utilisant la représentation complexe $F(t) = F_0 e^{j\Omega t}$, que la solution en régime permanant est $\theta(t) = \theta_0 Cos(\Omega t + \Psi)$ où θ_0 et Ψ sont des fonctions dépendant de la pulsation Ω.

4- Tracer l'allure de la valeur absolue de l'amplitude θ_0 en fonction de Ω et déterminer la pulsation de résonance ω_R. Quelle condition doit-on imposer à δ pour avoir un phénomène de résonance ?

5- Dans le cas des faibles amortissements $\delta << \omega_0$ la pulsation de résonance $\omega_R \approx \omega_0$. Déterminer dans ce casla valeur de la phase ψ à la résonance puis tracer son allure en fonction de Ω.

6- Montrer sur les deux graphes la bande passante $b = \omega_2 - \omega_1 = 2\delta$ où ω_2 et ω_1 sont les pulsations de coupure.

Dr M. AHMED AMMAR

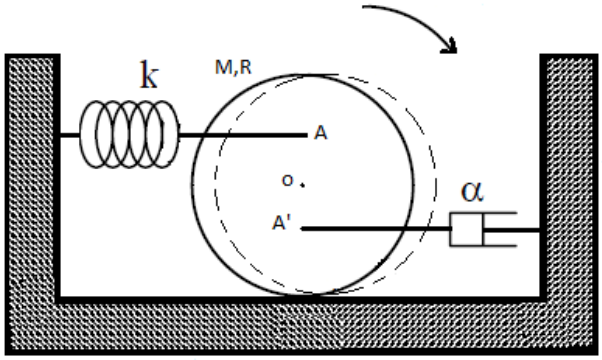


Figure : 3-1

Exercice 3.2 :

Dans la figure (3-2), la masse m est soudée à l'extrémité de la tige de longueur l de masse négligeable. Cette masse est soumise à une force $F(t) = F_0 \sin(\Omega t)$ perpendiculaire à la tige. L'autre extrémité de la tige est articulée au point fixe O. La tige est reliée au point A tel que OA=l/2.

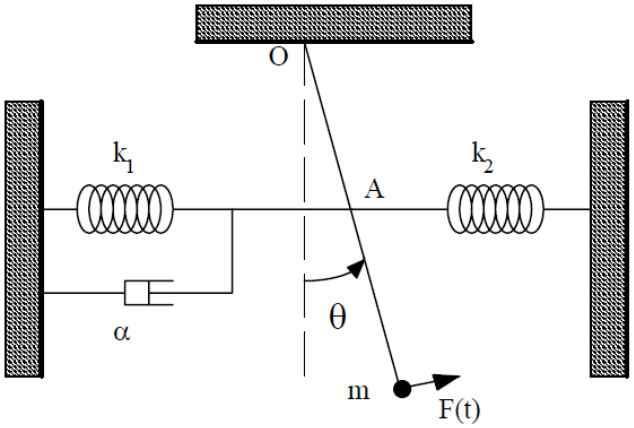


Figure : 3-2

1- Déterminer la force généralisée $F_\theta(t)$, puis écrire l'équation différentielle du mouvement.

2- Donner l'expression de l'amplitude des oscillations en fonction des données du problème.

3- Déduire la pulsation de résonance ω_R.

Exercice 3.3 :

Le système ci-dessous (figure 3-3), est constitué de deux tiges perpendiculaires et de masses négligeables. m_1, m_2, et m_3 sont des masses ponctuelles, m_1 est reliée à m_2 par la tige de langueur L, m_3 est fixée à l'une des extrémités de la tige de langueur ℓ. Tout le système peut osciller (faibles oscillations) sans frottement autour d'un axe fixe passant par O. Un ressort de constante de raideur *k* est attaché à la masse m_1. À l'équilibre $\theta=0$, le ressort est déformé par $\Delta\ell$.

On applique une force $F(t) = F_0 Cos(\Omega t)$ à la masse m_3 perpendiculaire à la tige.

Dr M. AHMED AMMAR

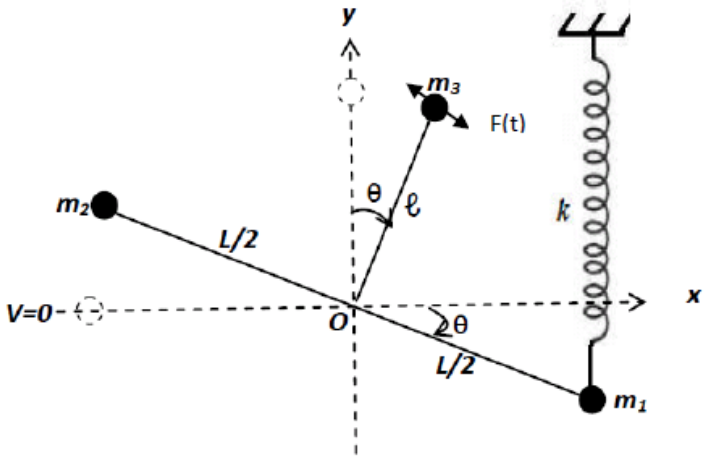


Figure : 3-3

1- Déterminer la condition d'équilibre et la condition de stabilité à partir de l'énergie potentielle.

2- Utiliser la condition d'équilibre pour donner une expression simplifiée de l'énergie potentielle.

3- Donner l'expression de l'énergie cinétique du système.

4- Déterminer la force généralisée.

5- Établir l'équation différentielle du mouvement.

Exercice 3.4 :

Un disque homogène de masse M et de rayon R, peut osciller (faibles oscillations) autour d'un axe fixe passant par son centre O. Une tige de langueur ℓ et de masse négligeable est solidaire du disque, portant une masse ponctuelle m. Un ressort de constante de raideur k et un amortisseur α sont reliés au disque comme l'indique la figure (3-4). La position d'équilibre correspond à $\theta=0$.

Dr M. AHMED AMMAR

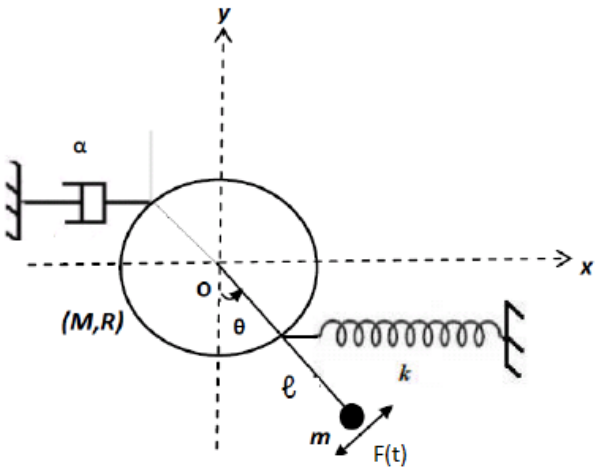


Figure : 3-4

I. Oscillations libres amorties *F=0*

1- Déterminer les énergies cinétique et potentielle, ainsi que la fonction de dissipation.

2- Etablir l'équation différentielle du mouvement.

3- Quelle est la condition pour qu'il y ait un mouvement oscillatoire.

4- Donner la solution dans ce cas.

II. Oscillations forcées $F(t) = F_0 Cos(\Omega t)$

On applique à la masse *m* une force sinusoïdale $F(t) = F_0 Cos(\Omega t)$ perpendiculaire à la tige.

1- Déterminer la force généralisée.

2- Déduire l'équation différentielle du mouvement.

Dr M. AHMED AMMAR

Solutions des Exercices du Chapitre III

Solution 3.1:

Considérons l'exemple mécanique de la figure ci-dessous soumis à une force extérieure $F(t) = F_0 Cos(\Omega t)$ appliquée horizontalement sur le centre du disque.

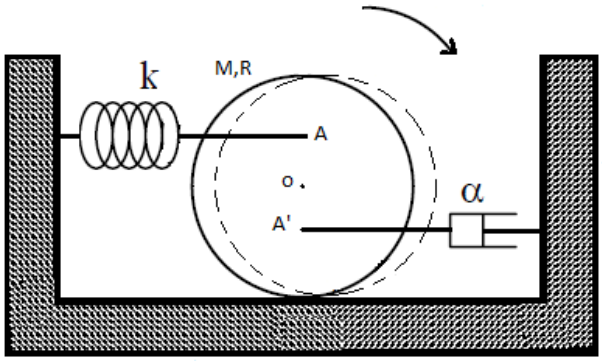


Figure : 3-1

1- Montrer que le Lagrangien $\mathcal{L}$ et la fonction de dissipation $\mathcal{D}$ du système s'écrivent : $\mathcal{L} = T - U = \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(R+a)^2\theta^2$ et $\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha(R-a)^2\dot{\theta}^2$.

- L'énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M(R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}(MR^2)\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 \text{ avec}$$

$$A = \frac{3}{2}MR^2$$

- L'énergie potentielle:

$$\begin{cases} U = U_k = \frac{1}{2}k(x+\Delta l)^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2}k(R+a)^2\theta^2 \Rightarrow U = \frac{1}{2}B\theta^2 \\ x = R\theta \ et \ \Delta l = a\theta \end{cases} \text{ avec } B = k(R+a)^2$$

- Le Lagrangien $\mathcal{L}$ s'écrit alors :

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{3}{4}MR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(R+a)^2\theta^2$$

- La fonction de dissipation $\mathcal{D}$ s'écrit :

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\alpha(R-a)^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow \mathcal{D} = \frac{1}{2}C\dot{x}^2 \text{ avec } C = \alpha(R-a)^2$$

Dr M. AHMED AMMAR

2- La force généralisée $F_\theta(t)$:

La relation entre $F_\theta(t)$ et $F(t)$ s'écrit :

$$F_\theta(t) = F(t)\frac{d\vec{r}}{d\theta}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} = R\theta\vec{i} \quad \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{d\theta} = R\vec{i}$$

$$F_\theta(t) = RF(t) = RF_0\cos\Omega t$$

L'équation différentielle du mouvement :

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}} = \mathrm{F}_{\theta(t)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = A\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d}{dt}(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}) = A\ddot{\theta} \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -B\theta \\ \dfrac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}} = C\dot{\theta} \end{cases}$$

L'équation s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \frac{C}{A}\dot{\theta} + \frac{B}{A}\theta = \frac{R}{A}F(t)$$

On pose : $2\delta = \dfrac{C}{A} \Rightarrow \delta = \dfrac{\alpha(R-a)^2}{3MR^2}$

$$\omega_0^2 = \frac{B}{A} = \frac{2k(R+a)^2}{3MR^2}$$

L'équation devient :

$$\ddot{\theta} + \frac{2\alpha(R-a)^2}{3MR^2}\dot{\theta} + \frac{2k(R+a)^2}{3MR^2}\theta = \frac{2}{3MR}F(t) \qquad (*)$$

3- Montrer, en utilisant la représentation complexe $F(t) = F_0 e^{j\Omega t}$, que la solution en régime permanant est $\theta(t) = \theta_0 Cos(\Omega t + \Psi)$ où θ_0 et Ψ sont des fonctions dépendant de la pulsation Ω.

$$F(t) = F_0 e^{j\Omega t} = F_0 Cos(\Omega t)$$

et $\theta(t) = \theta_0 Cos(\Omega t + \psi) = \theta_0 e^{j(\Omega t + \psi)}$

$$\dot{\theta}(t) = j\Omega\theta_0 e^{j(\Omega t + \psi)}$$

Dr M. AHMED AMMAR

$$\ddot{\theta}(t) = -\Omega^2 \theta_0 e^{j(\Omega t+\psi)}$$

On remplace $\theta(t), \dot{\theta}(t) et \ddot{\theta}(t)$ dans l'équation (*)

$$\underbrace{(\omega_0^2 - \Omega^2)}_{\Im} \theta_0 e^{j\psi} + \underbrace{2\delta\Omega}_{\Re} \theta_0 j e^{j\psi} = \underbrace{\frac{R}{A} F_0}_{\Re}$$

On cherche : $\theta_0 = f(\Omega)$ et $\psi = f(\Omega)$

$$\Im \theta_0 e^{j\psi} + j\Re\theta_0 j e^{j\psi} = \Re$$

$$\Im[Cos(\psi) + jSin(\psi)]\theta_0 + j\Re[Cos(\psi) + jSin(\psi)]\theta_0 = \Re$$

$$[\Im Cos(\psi) - \Re Sin(\psi)]\theta_0 + j[\Im Sin(\psi) + \Re Cos(\psi)]\theta_0 = \Re$$

Par identification :

$$[\Im Cos(\psi) - \Re Sin(\psi)]\theta_0 = \Re \quad \text{et} \quad [\Im Sin(\psi) + \Re Cos(\psi)]\theta_0 = 0$$

$$\Im Sin(\psi) + \Re Cos(\psi) = 0 \quad \Rightarrow \quad tg(\Psi) = -\frac{\Re}{\Im} \quad \Rightarrow \quad \Psi = -Arctg(\frac{\Re}{\Im})$$

Ce qui donne $\Psi = -Arctg(\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2})$

L'amplitude :

$$\theta_0 = \frac{\Re}{\Im Cos(\psi) - \Re Sin(\psi)}$$

- On cherche : $Sin(\psi) = f(\Omega)$:

$$Cos^2(\psi) + Sin^2(\psi) = 1$$

$$\frac{Cos^2(\psi)}{Sin^2(\psi)} + \frac{Sin^2(\psi)}{Sin^2(\psi)} = \frac{1}{Sin^2(\psi)} = \frac{1}{tg^2(\psi)} + 1$$

$$Sin^2(\psi) = \frac{tg^2(\psi)}{1 + tg^2(\psi)} \Rightarrow Sin(\psi) = \frac{tg(\psi)}{\sqrt{1 + tg^2(\psi)}} = \frac{-\Re/\Im}{\sqrt{1 + \frac{\Re^2}{\Im^2}}}$$

$$Sin(\psi) = \frac{-\Re}{\sqrt{\Im^2 + \Re^2}}$$

- On cherche : $Cos(\psi) = f(\Omega)$:

$$Cos^2(\psi) + Sin^2(\psi) = 1$$

DR M. AHMED AMMAR

$$\frac{Cos^2(\psi)}{Cos^2(\psi)}+\frac{Sin^2(\psi)}{Cos^2(\psi)}=\frac{1}{Cos^2(\psi)}$$

$$1+tg^2(\psi)=\frac{1}{Cos^2(\psi)}\Rightarrow Cos(\psi)=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2(\psi)}}$$

$$Cos(\psi)=\frac{\mathcal{Z}}{\sqrt{\mathcal{Z}^2+\mathcal{X}^2}}$$

$$\theta_0=\frac{\mathcal{M}}{\frac{Z^2}{\sqrt{\mathcal{Z}^2+\mathcal{X}^2}}-\frac{\mathcal{X}(-\mathcal{X})}{\sqrt{\mathcal{Z}^2+\mathcal{X}^2}}}=\frac{\mathcal{M}}{\frac{\mathcal{Z}^2+\mathcal{X}^2}{\sqrt{\mathcal{Z}^2+\mathcal{X}^2}}}=\frac{\mathcal{M}}{\sqrt{\mathcal{Z}^2+\mathcal{X}^2}}$$

Finalement :

$$\theta_0==\frac{\frac{2F_0}{3MR}}{\sqrt{(2\delta\Omega)^2+(\omega_0^2-\Omega^2)^2}}$$

4-1 L'allure de la valeur absolue de l'amplitude θ_0 en fonction de Ω : $\theta_0(\Omega)$

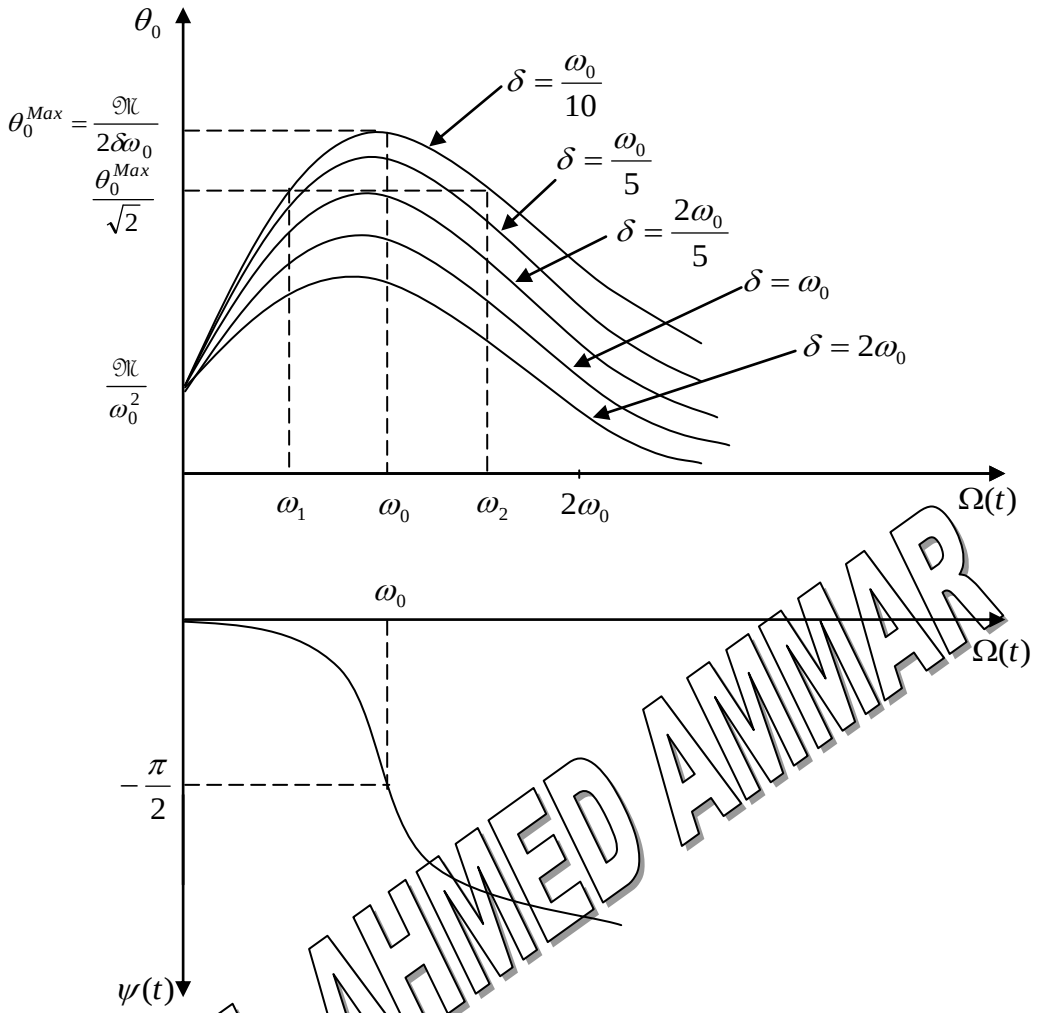
$$\Omega=0\Rightarrow\theta_0(0)=\frac{\mathcal{M}}{\omega_0^2}$$

$$\Omega=\omega_0\Rightarrow\theta_0^{Max}(\omega_0)=\frac{\mathcal{M}}{2\delta\omega_0}$$

$$\theta_0(\infty)=0$$

δ	$\frac{\omega_0}{10}$	$\frac{\omega_0}{5}$	ω_0	$2\omega_0$
θ_0^{Max}	$\frac{5\mathcal{M}}{\omega_0^2}$	$\frac{5}{2}\frac{\mathcal{M}}{\omega_0^2}$	$\frac{1}{2}\frac{\mathcal{M}}{\omega_0^2}$	$\frac{1}{4}\frac{\mathcal{M}}{\omega_0^2}$

Dr M. AHMED AMMAR



Courbe : 3-1

Dr M. AHMED AMMAR

4-2 La pulsation de résonance Ω_R :

Le maximum de l'amplitude est obtenu pour la valeur de Ω qui annule $\frac{d\theta_0}{d\Omega} = 0$

$\frac{d\theta_0}{d\Omega} = 0$ pour $(\Omega = \Omega_R)$

$$\frac{d\theta_0}{d\Omega} = \mathcal{M}\frac{d}{d\Omega}\left[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2\right]^{-1/2}$$

$$= \mathcal{M}\frac{-\frac{1}{2}\left[2(-2\Omega)(\omega_0^2-\Omega^2)+8\delta^2\Omega\right]}{\left[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2\right]\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2}}$$

$$= \mathcal{M}\frac{(2\Omega)(\omega_0^2-\Omega^2)-4\delta^2\Omega}{\left[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2\right]^{3/2}} \qquad \Rightarrow \begin{cases}\Omega=0\\ \omega_0^2-\Omega^2-2\delta^2=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \Omega = \sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}$$

$$= \mathcal{M}\frac{(2\Omega)(\omega_0^2-\Omega^2-2\delta^2)}{\left[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\delta\Omega)^2\right]^{3/2}}$$

$$= 0$$

Il existe un maximum à la pulsation $\Omega = \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$

4-3 La condition qu'elle doit être imposer à δ pour avoir le phénomène de résonance est :

$$\Omega_R > 0 \Rightarrow \omega_0^2 - 2\delta^2 > 0$$

$$\Rightarrow \omega_0^2 > 2\delta^2$$

$$\Rightarrow \delta^2 < \frac{\omega_0^2}{2}$$

$$\Rightarrow \delta < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$$

5- Dans le cas des faibles amortissements $\delta << \omega_0$ la pulsation de résonance $\omega_R \approx \omega_0$.

$\psi = -Arctg\frac{2\delta\Omega_R}{\omega_0^2-\Omega_R^2}$ tel que $\Omega_R \approx \omega_0$

$$\psi = -Arctg\infty = -\frac{\pi}{2}$$

$$\psi = -Arctg\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}$$

$$\Omega = 0 \rightarrow \psi = 0$$

$$\Omega = \omega_0 = \Omega_R \rightarrow \psi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Omega \rightarrow \infty \rightarrow \psi$$

L'allure de ψ en fonction de Ω (voir courbe (3-1))

Dr M. AHMED AMMAR

6- Sur les deux graphes, on voit clairement la bande de coupure passante par $b = \omega_2 - \omega_1 = 2\delta$ où ω_2 et ω_1 sont les pulsations de coupure.

Solution 3.2:

Dans la figure (3-2), la masse ***m*** est soudée à l'extrémité de la tige de longueur ***l*** de masse négligeable.

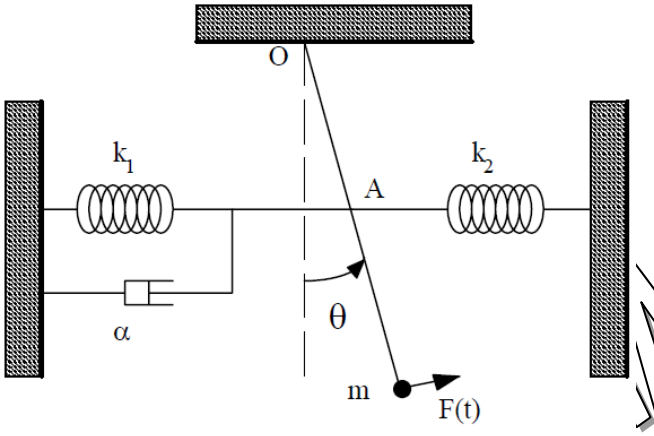


Figure : 3-2

1- La force généralisée $F_\theta(t)$ puis l'équation différentielle du mouvement:

La relation entre $F_\theta(t)$ et $F(t)$ s'écrit :

$$F_\theta(t) = F(t)\frac{d\vec{r}}{d\theta}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} = l\theta\vec{i} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{r}}{d\theta} = l\vec{i}$$

$$F_\theta(t) = l.F(t) = l.F_0 \sin\Omega t$$

L'énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

L'énergie potentielle:

$$U = U_{k1} + U_{k2} + U_m$$

$$U_{k1} = \frac{1}{2}k_1(x+\Delta l)^2 \text{ et } U_{k2} = \frac{1}{2}k_2(x+\Delta l)^2 \text{ avec } x = \frac{l}{2}\sin\theta$$

$$U_m = mgl(1-\cos\theta)$$

Dr M. AHMED AMMAR

Pour des faibles amplitudes $\sin\theta \approx \theta$ et $\cos\theta \approx 1-\frac{\theta^2}{2}$

$U_{k1} = \frac{1}{2}k_1(\frac{l}{2}\theta + \Delta l)^2$ et $U_{k2} = \frac{1}{2}k_2(\frac{l}{2}\theta + \Delta l)^2$

$U_m = mgl\frac{\theta^2}{2}$

L'énergie potentielle s'écrit :

$$U = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)(\frac{l}{2}\theta + \Delta l)^2 + mgl\frac{\theta^2}{2}$$

D'après la condition d'équilibre, on obtient $\Delta l = 0$.

L'énergie potentielle devient :

$$U = \frac{1}{2}\left[(k_1 + k_2)\frac{l^2}{4} + mgl\right]\theta^2$$

Fonction de dissipation :

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{4}l^2\dot{\theta}^2$$

L'équation différentielle :

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}} = l.\mathrm{F}_{(t)}$$

$$ml^2\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{4}l^2\dot{\theta} + \left[(k_1 + k_2)\frac{l^2}{4} + mgl\right]\theta = l.\mathrm{F}_{(t)}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{4m}\dot{\theta} + \left[\frac{k_1 + k_2}{4m} + \frac{g}{l}\right]\theta = \frac{\mathrm{F}_{(t)}}{ml}$$

On pose : $\delta = \frac{\alpha}{8m}$; $\omega_0^2 = \frac{k_1 + k_2}{4m} + \frac{g}{l}$

L'équation devient :

$$\ddot{\theta} + 2\delta\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = \frac{\mathrm{F}_{(t)}}{ml}$$

La solution en régime permanant est :

$$\theta(t) = \theta_0 Cos(\Omega t + \Psi)$$

2- L'expression de l'amplitude des oscillations en fonction des données du problème.

Dr M. AHMED AMMAR

$$\theta_0 == \frac{\frac{F_0}{ml}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\delta.\Omega)^2}}$$

3- Déduire la pulsation de résonance ω_R.

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

Solution 3.3 :

Le système ci-dessous (Figure 3.3), est constitué de deux tiges perpendiculaires et de masses négligeables. m_1, m_2, et m_3 sont des masses ponctuelles, m_1 est reliée à m_2 par la tige de langueur L, m_3 est fixée à l'une des extrémités de la tige de langueur ℓ. Tout le système peut osciller (faibles oscillations) sans frottement autour d'un axe fixe passant par O. Un ressort de constante de raideur *k* est attaché à la masse m_1. À l'équilibre $\theta=0$, le ressort est déformé par $\Delta\ell$.

On applique une force $F(t) = F_0 Cos(\Omega t)$ à la masse m_3 perpendiculaire à la tige.

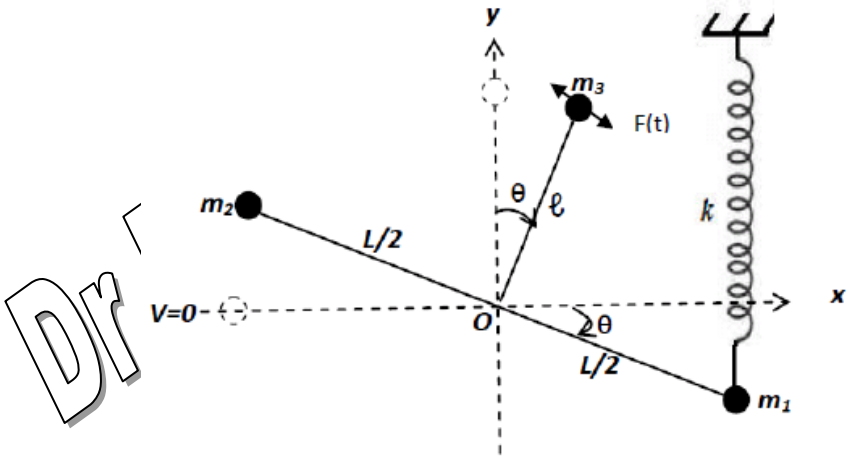


Figure : 3-3

1- Déterminer la condition d'équilibre et la condition de stabilité à partir de l'énergie potentielle.

L'énergie potentielle :

$$U = U_{m1} + U_{m2} + U_{m3} + U_k = -m_1 g \frac{L}{2} Sin\theta + m_2 g \frac{L}{2} Sin\theta + m_3 g l Cos\theta + \frac{1}{2} k(x + \Delta l)^2$$

Approximation des faibles amplitudes d'oscillations pour l'énergie potentielle.

Dr AMMAR

$Sin\theta \approx \theta \ \ et \ \ Cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$$U = -m_1 g\frac{L}{2}\theta + m_2 g\frac{L}{2}\theta - m_3 gl\frac{\theta^2}{2} + \frac{1}{2}k(\frac{L}{2}\theta + \Delta l)^2 + m_3 gl$$

$$U == \frac{1}{2}\left[k\frac{L^2}{4} - m_3 gl\right]\theta^2 + \frac{1}{2}\left[m_2 gL + kL\Delta l - m_1 gL\right]\theta + C^{te}$$

- Condition d'équilibre $\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta}\Big|_{\theta=0} = 0 \Rightarrow m_2 gL + kL\Delta l - m_1 gL = 0$

- Condition de stabilité $\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=0} > 0 \Rightarrow k\frac{L^2}{4} - m_3 gl > 0$

2- L'expression simplifiée de l'énergie potentielle s'écrit:

$$U == \frac{1}{2}\left[k\frac{L^2}{4} - m_3 gl\right]\theta^2 + C^{te}$$

3- L'énergie cinétique du système :

$$T = T_{m1} + T_{m2} + T_{m3} = \frac{1}{2}m_1(\frac{L}{2})^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2(\frac{L}{2})^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_3 l^2\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2}\left[m_1(\frac{L}{2})^2 + m_2(\frac{L}{2})^2 + m_3 l^2\right]\dot{\theta}^2$$

4- La force généralisée :

$$F_\theta(t) = F(t)\frac{d\vec{r}}{d\theta}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} = l\theta\vec{i} \quad \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{d\theta} = l\vec{i}$$

$$F_\theta(t) = l.F(t) = l.F_0 Cos\Omega t$$

5- L'équation différentielle du mouvement :

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \dot{\theta}} = l.\mathrm{F}_{(t)}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \left[\frac{\frac{kL^2}{4} - m_3 gl}{m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_3 l^2}\right]\theta = \frac{l.F_0 Cos\Omega t}{m_1\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m_3 l^2}$$

Dr M. AHMED AMMAR

Solution 3.4 :

Un disque homogène de masse *M* et de rayon *R*, peut osciller (faibles oscillations) autour d'un axe fixe passant par son centre O. Une tige de langueur ℓ et de masse négligeable est solidaire du disque, portant une masse ponctuelle *m*. Un ressort de constante de raideur *k* et un amortisseur α sont reliés au disque comme l'indique la figure (3-4). La position d'équilibre correspond à $\theta=0$.

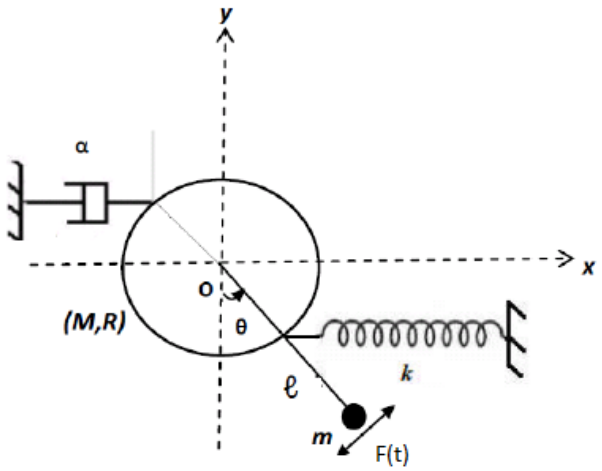


Figure : 3-4

Dr M. AHMIL AR

I. Oscillations libres amorties *F=0*

1- Les énergies cinétique et potentielle, ainsi que la fonction de dissipation :

$$T = T_M + T_m = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2 + ml^2)\dot{\theta}^2$$

$$U == -mglCos(\theta) + \frac{1}{2}k(R\theta)^2$$

Pour des faibles oscillations $Cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$$U == \frac{1}{2}(mgl + kR^2)\theta^2 + C^{te}$$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}\alpha R^2 \dot{\theta}^2$$

2- L'équation différentielle du mouvement.

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}})-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}+\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}}=0 \Rightarrow \ddot{\theta}+\frac{\alpha R^2}{\frac{1}{2}MR^2+ml^2}\dot{\theta}+\frac{kR^2+mgl}{\frac{1}{2}MR^2+ml^2}\theta=0$$

On pose : $2\lambda=\frac{\alpha R^2}{\frac{1}{2}MR^2+ml^2}$; $\omega_0^2=\frac{kR^2+mgl}{\frac{1}{2}MR^2+ml^2}$

L'équation devient :

$$\ddot{\theta}+2\lambda\dot{\theta}+\omega_0^2\theta=0$$

3- La condition pour qu'il y ait un mouvement oscillatoire :

$$\Delta'=\lambda^2-\omega_0^2<0$$

4- La solution dans ce cas oscillatoire :

$\theta(t)=Ae^{-\lambda t}Cos(\omega' t+\varphi)$ avec $\omega'=\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}$

II. Oscillations forcées $F(t)=F_0Cos(\Omega t)$

On applique à la masse *m* une force sinusoïdale $F(t)=F_0Cos(\Omega t)$ perpendiculaire à la tige.

1- La force généralisée :

$$F_\theta(t)=F(t)\frac{d\vec{r}}{d\theta} \Rightarrow F_\theta(t)=l.F(t)=l.F_0Cos\Omega t$$

2- L'équation différentielle du mouvement.

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}})-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}+\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\theta}}=F_\theta(t) \Rightarrow \ddot{\theta}+\frac{\alpha R^2}{\frac{1}{2}MR^2+ml^2}\dot{\theta}+\frac{kR^2+mgl}{\frac{1}{2}MR^2+ml^2}\theta=\frac{l.F_0Cos\Omega t}{\frac{1}{2}MR^2+ml^2}$$

La solution:

$$\theta(t)=\theta_0Cos(\Omega t+\psi) \text{ avec } \theta_0=\frac{\frac{l.F_0Cos\Omega t}{\frac{1}{2}MR^2+ml^2}}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\lambda^2\Omega^2}} \text{ et } \psi=-Arct(\frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2-\lambda^2})$$

Dr M. AHMED AMMAR

Chapitre IV
Oscillations des systèmes mécaniques à deux degrés de liberté

Partie I : Oscillations libres

IV-I-a Introduction :

Les phénomènes étudiés dans ce cours sur les vibrations à deux dimensions concernent tous les domaines de la physique et de l'ingénierie (mécanique, d'acoustique, d'optique, d'électromagnétisme,…).

On définit un système à deux degrés de liberté par le système qui nécessite deux coordonnées indépendantes pour spécifier leurs positions sont appelés systèmes à deux degrés de liberté x_1 , x_2 ou y_1 , y_2 ou θ_1 , θ_2. Soit T et *U* respectivement l'énergie cinétique et l'énergie potentielle :

Le lagrangien du système s'écrit alors :

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{2} T_i - \sum_{i=1}^{2} U_i \qquad \text{(IV-1)}$$

IV-I-b Couplage entre les différents systèmes :

On peut définir le couplage entre deux systèmes à travers un ressort en mécanique (Fig.IV.1.a) et un condensateur en électricité (Fig.IV.1.b) ce qu'on appelle couplage par élasticité :

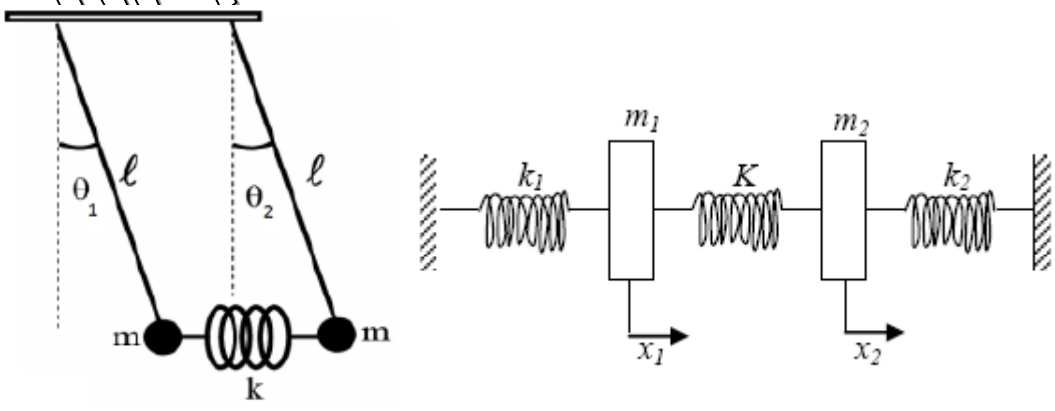


Fig.IV.1.a : Systèmes mécaniques couplés par un ressort

Pr M. AHMED AMMAR

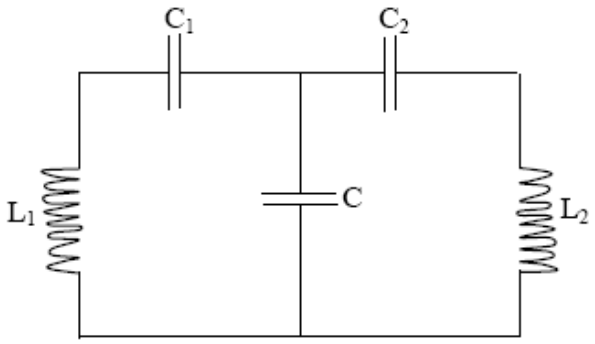
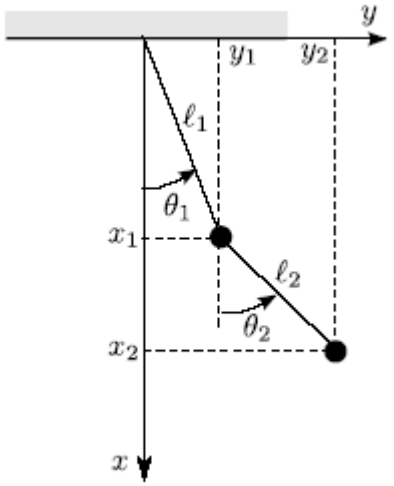


Fig.IV.1.b : Systèmes électriques couplés par un condensateur

Il y a aussi le couplage entre deux systèmes à travers une masse en mécanique (Fig.IV.2.a) et une inductance mutuelle en électricité (Fig.IV.2.b) ce qu'on appelle couplage par inertie:



Dr M. A JMAR

Fig.IV.2.a : Systèmes mécaniques couplés par une masse

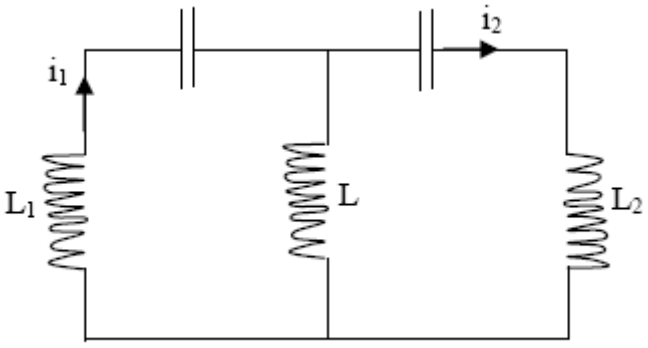


Fig.IV.2.b **:** Systèmes mécaniques couplés par une bobine

Le dernier couplage est la liaison par un frottement visqueux à travers un amortisseur en mécanique (Fig.IV.3.a) et une résistance en électricité (Fig.IV.3.b) ce qu'on appelle couplage par viscosité :

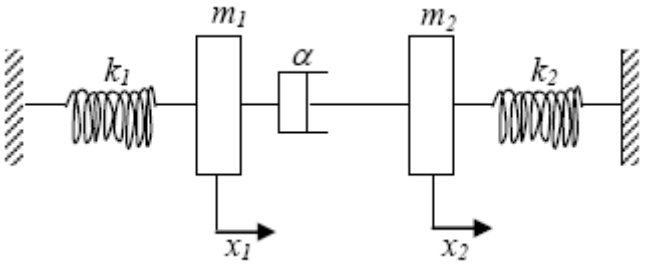


Fig.IV.3.a **:** Systèmes mécaniques couplés par un amortisseur

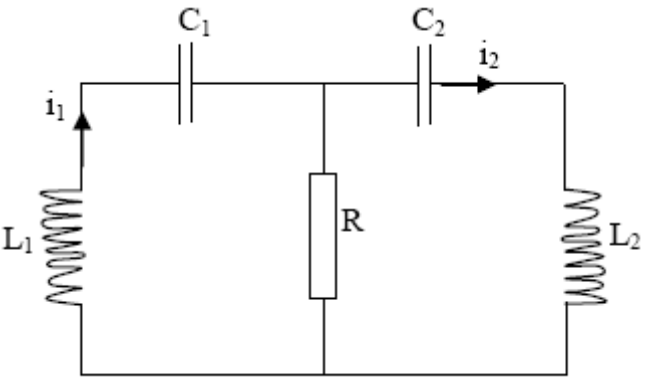


Fig.IV.3.b : Systèmes mécaniques couplés par une résistance

IV-I-c Equation du mouvement :

Pour l'étude des systèmes à deux degrés de liberté, il est nécessaire d'écrire deux équations différentielles du mouvement que l'on peut obtenir à partir des équations de Lagrange

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_1} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_2}\right) - \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_2} = 0 \end{cases} \qquad \text{(IV-2)}$$

Partie II : Oscillations forcées

IV-II-a Introduction :

On définit une oscillation forcées à deux degrés de liberté par le système qui nécessite deux coordonnées indépendantes pour spécifier leurs positions sont appelés systèmes à deux degrés de liberté x_1 , x_2 ou y_1 , y_2 ou θ_1 , θ_2 , et

soumis à des forces qui dérivent d'un potentiel, à des forces de frottement de viscosité et à des forces extérieures. Soit T et U respectivement l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. Le lagrangien du système s'écrit alors :

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{2} T_i - \sum_{i=1}^{2} U_i \qquad \text{(IV-3)}$$

IV-II-b Equation du mouvement :

Pour l'étude des oscillations forcées à deux degrés de liberté, il est nécessaire d'écrire deux équations différentielles du mouvement que l'on peut obtenir à partir des équations de Lagrange:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} + \dfrac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_1} = \mathrm{F}_{q_1}(t) \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} + \dfrac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_2} = \mathrm{F}_{q_2}(t) \end{cases} \qquad \text{(IV-4)}$$

Dans cette expression $\mathbf{F_{q1}(t)} = \left.\dfrac{\delta W_1}{\delta q_1}\right|_{\substack{\delta q_1 \neq 0 \\ \delta q_2 = 0}}$ et $\mathbf{F_{q2}(t)} = \left.\dfrac{\delta W_2}{\delta q_2}\right|_{\substack{\delta q_1 = 0 \\ \delta q_2 \neq 0}}$ sont les forces généralisées conjuguées des coordonnées généralisées respectives q_1 et q_2 avec δW_1 représente le travail des forces extérieures pour une variation δq_1 de la coordonnée q_1 lorsque $\delta q_2 = 0$ et δW_2 représente le travail des forces extérieures pour une variation δq_2 de la coordonnée q_2, lorsque $\delta q_1 = 0$.

DR M. AHMED AMMAR

IV-II-c Impédance mécanique

Considérons un système mécanique soumis à une force sinusoïdale $\mathrm{F}(t) = \mathrm{F}_0 \mathrm{Cos}(\Omega t)$. En régime permanent, le point d'application de cette force se déplace avec une vitesse $\mathrm{V}(t) = \mathrm{V}_0 \mathrm{Cos}(\Omega t + \phi)$. On appelle impédance mécanique d'entrée du système mécanique, le rapport des amplitudes complexes de la force F et de la vitesse V.

$$\mathrm{Z_e} = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{V}} \qquad \text{(IV-5)}$$

Exercice 4.1:

Considérons le système ci-dessous figure (4-1), constitué de deux masses m_1 et m_2 reliées respectivement par deux ressorts de raideur k_1 et k_2. On suppose qu'il n'y a pas d'autres frottements. On écarte la masse m_1 de sa position d'équilibre puis on la lâche sans vitesse initiale.

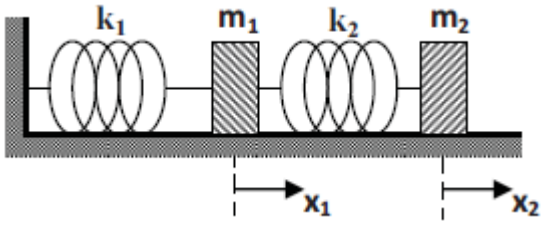


Figure : 4-1

1- Etablir le système d'équations différentielles du mouvement.

2- Déterminer les solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ de ce système.

Exercice 4.2:

La figure (4-2) représente deux pendules couplés effectuant des oscillations de faibles amplitudes. Chaque pendule est constitué par un disque de masse M = 1 kg accroché à une tige de longueur ℓ = 80 cm et de masse m = 0.1 kg. Ces pendules sont reliées par un ressort de constante de raideur k.

1- Déterminer les équations différentielles que doit vérifier ce système en fonction

des angles θ_1 et θ_2.

2- Déterminer l'équation caractéristique, puis déduire les pulsations propres.

3- Quelles conditions initiales doit-on imposer pour observer :

a. Le premier mode d'oscillation : $\omega_1^2 = \dfrac{(M+\frac{m}{2})gl}{I}$.

b. Le deuxième mode d'oscillation : $\omega_2^2 = \dfrac{(M+\frac{m}{2})gl + 2kl^2}{I}$.

Où *I* est le moment d'inertie total d'un pendule (tige+disque) et g= 10m/s²

Dr M. AHMED AMMAR

4- Le graphe ci-dessous représente la variation de l'amplitude x de l'une des masses en fonction du temps t.

a. Quelles conditions initiales ont été choisies pour obtenir le phénomène de battement.

b. Déterminer à partir du graphe la période d'oscillation T_{os} et la période de battement T_b.

c. Ecrire les pulsations d'oscillation ω_{os} et de battement ω_b en fonction des pulsations propres ω_1 et ω_2.

5- Déduire la valeur numérique du moment d'inertie *I* et de la constante de raideur *k*.

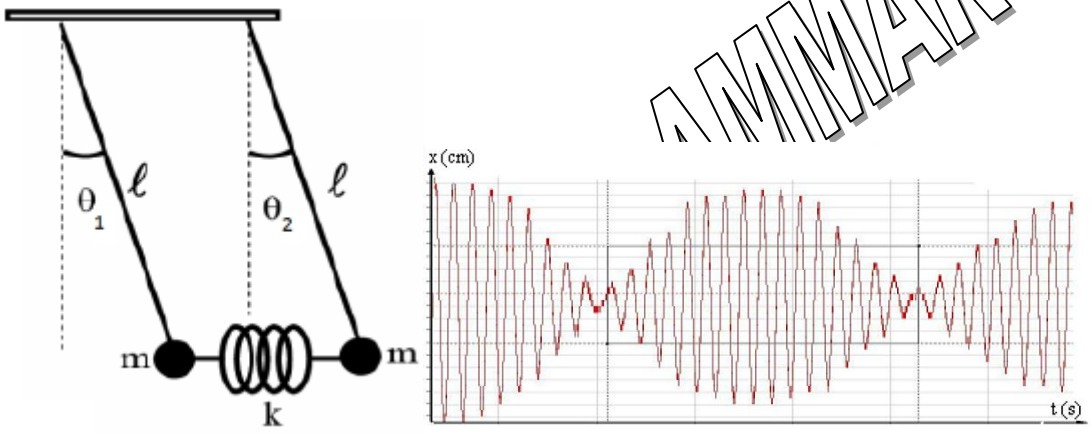


Figure : 4-2

Exercice 4.3:

On considère deux pendules simples couplés par un ressort k_3 et reliés aux murs par les ressorts k_1 et k_2 comme indiqué par la figure(4-3). Les tiges de longueurs ℓ ont des masses négligeables et les masses m_1 et m_2 portées à leurs extrémités sont ponctuelles

On donne : $\ell = 0.4m$, a = $\ell/4$, $k_1 = k_2 = k = 4N/m$, $k_3 = k/4$, $g = 10m/s^2$ et $m_1 = m_2 = m = 0.1kg$

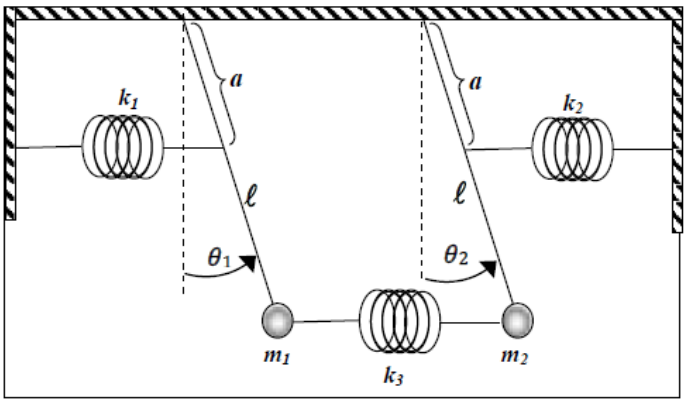


Figure : 4-3

1- Déterminer les énergies cinétique et potentielle du système en fonction de θ_1 et θ_2.

2- Ecrire les équations différentielles de θ_1 et θ_2.

3- Déterminer l'équation caractéristique, puis déduire les pulsations propres et calculer leurs valeurs.

4- Donner la forme générale des solutions en fonction des pulsations propres.

Exercice 4.4:

Considérons le système ci-dessous figure (4-4), constitué de deux masses m_1 et m_2 reliées respectivement par deux ressorts de raideur k_1 et k_2. On suppose qu'il n'y a pas d'autres frottements. On applique sur la première masse m_1 du système une force sinusoïdale $F(t)$ d'amplitude F_0 de pulsation Ω.

Dr M. AHMED AMMAR

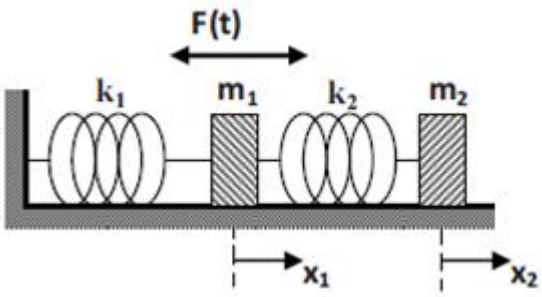


Figure : 4-4

1- Etablir le système d'équations différentielles du mouvement.

2- Déterminer les solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ de ce système.

3- Déduire l'impédance mécanique d'entré du système.

Exercice 4.5:

Considérons le système ci- dessous figure (4-5), constitué de deux masses m_1 et m_2 reliées respectivement par deux ressorts de raideur k_1 et k_3 à deux bâtis fixes. Les deux masses sont reliées par un ressort de raideur k_2. Ce ressort est appelé ressort de couplage. On suppose qu'il n'y a pas d'autres frottements. On applique sur la première masse m_1 du système une force sinusoïdale $F(t)$ d'amplitude F_0 de pulsation Ω.

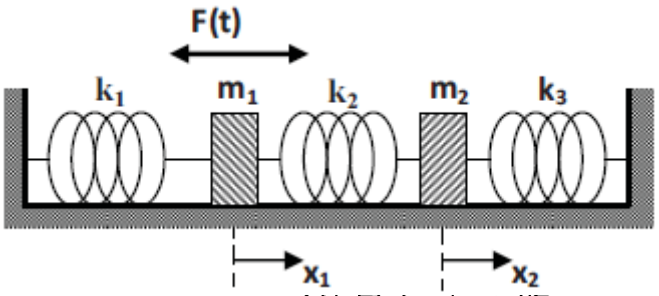


Figure : 4-5

1- Déterminer les énergies cinétique T et potentielle U du système.

2- Etablir les équations différentielles du mouvement pour x_1 et x_2.

3- Résoudre ce système d'équation et trouver les solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$. (on prend : $m_1 = m_2 = m$ et $k_1 = k_3 = k$).

Dr M. AHMED

Solutions des Exercices du Chapitre IV

Partie I : Oscillations libres

Solution 4.1:

Considérons le système ci-dessous figure (4-1), constitué de deux masses m_1 et m_2 reliées respectivement par deux ressorts de raideur k_1 et k_2. On suppose qu'il n'y a pas d'autres frottements. On écarte la masse m_1 de sa position d'équilibre puis on la lâche sans vitesse initiale.

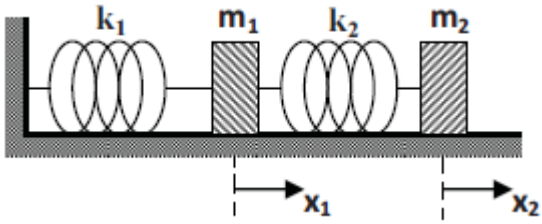


Figure : 4-1

Dr M. AHMED AMMAR

1- Les équations du mouvement pour ce système à deux degrés :

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

$$U = U_1 + U_2$$

$$U_1 = \frac{1}{2}k_1x_1^2$$

$$U_2 = \frac{1}{2}k_2(x_1 - x_2)^2$$

Le lagrangien $\mathcal{L} = T - U$ s'écrit alors :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_2(x_1 - x_2)^2$$

Les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \dfrac{k_1}{m_1}x_1 + \dfrac{k_2}{m_1}(x_1 - x_2) = 0 \\ \ddot{x}_2 + \dfrac{k_2}{m_2}(x_2 - x_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + (\dfrac{k_1}{m_1} + \dfrac{k_2}{m_1})x_1 - \dfrac{k_2}{m_1}x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \dfrac{k_2}{m_2}x_2 - \dfrac{k_2}{m_2}x_1 = 0 \end{cases}$$

2- Les solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ de ce système :

Recherchons une solution particulière de la forme :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 Cos(\omega t + \varphi) \\ x_2(t) = A_2 Cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

Où A_1, A_2 et φ sont des constantes et ω l'une des pulsations propres du système. La substitution de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ dans le système d'équations différentielles donne :

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + (\dfrac{k_1}{m_1} + \dfrac{k_2}{m_1})x_1 - \dfrac{k_2}{m_1}x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \dfrac{k_2}{m_2}x_2 - \dfrac{k_2}{m_2}x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\dfrac{k_1 + k_2}{m_1} - \omega^2\right]A_1 - \dfrac{k_2}{m_1}A_2 = 0 \\ -\dfrac{k_2}{m_2}A_1 + \left[\dfrac{k_2}{m_2} - \omega^2\right]A_2 = 0 \end{cases}$$

On peut écrire ces dernières équations sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{k_1 + k_2}{m_1} - \omega^2 & -\dfrac{k_2}{m_1} \\ -\dfrac{k_2}{m_2} & \dfrac{k_2}{m_2} - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow M(\omega).\vec{A} = \vec{0}$$

Ce système admet une solution non identiquement nulle seulement si le déterminant $\Delta(\omega)$ des coefficients de A_1 et A_2 est égal à zéro :

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} \dfrac{k_1 + k_2}{m_1} - \omega^2 & -\dfrac{k_2}{m_1} \\ -\dfrac{k_2}{m_2} & \dfrac{k_2}{m_2} - \omega^2 \end{vmatrix}$$

Dr M. AHMED AMMAR

Le déterminant $\Delta(\omega)$ est appelé déterminant caractéristique. L'équation $\Delta(\omega)=0$ est appelée l'équation caractéristique ou équation aux pulsations propres. Elle s'écrit :

$$\left(\frac{k_1+k_2}{m_1}-\omega^2\right)\left(\frac{k_2}{m_2}-\omega^2\right)-\left(\frac{k_2}{m_1}\right)\left(\frac{k_2}{m_2}\right)=0$$

Ou encore

$$\omega^4+\left[-\frac{k_1+k_2}{m_1}-\frac{k_2}{m_2}\right]\omega^2+\frac{k_2(k_1+k_2)}{m_1m_2}-\frac{k_2^2}{m_1m_2}=0$$

Cette équation est une équation quadratique en ω qui admet deux solutions réelles positives ω_1 et ω_2 appelées les pulsations propres du système. Pour résoudre cette équation, on pose :

$$\begin{cases} y=\omega^2 \\ \alpha=-\dfrac{k_1+k_2}{m_1}-\dfrac{k_2}{m_2} \\ \beta=\dfrac{k_2(k_1+k_2)}{m_1m_2}-\dfrac{k_2^2}{m_1m_2} \end{cases}$$

L'équation devient :

$$y^2+\alpha y+\beta=0$$

$$\Delta(y)=\alpha^2-4\beta \Rightarrow \begin{cases} y'=\dfrac{-\alpha-\sqrt{\Delta(y)}}{2} \\ y''=\dfrac{-\alpha+\sqrt{\Delta(y)}}{2} \end{cases}$$

La forme générale des solutions en fonction des pulsations propres ω_1 et ω_2 :

$$\begin{cases} \theta_1(t)=A_{11}Cos(\omega_1 t+\varphi_1)+A_{12}Cos(\omega_2 t+\varphi_2) \\ \theta_2(t)=A_{21}Cos(\omega_1 t+\varphi_1)+A_{22}Cos(\omega_2 t+\varphi_2) \end{cases}$$

Solution 4.2:

La figure (4-2) représente deux pendules couplés effectuant des oscillations de faibles amplitudes. Chaque pendule est constitué par un disque de masse M = 1

Dr M. AHMED AMMAR

kg accroché à une tige de longueur ℓ= 80 cm et de masse m = 0.1 kg. Ces pendules sont reliées par un ressort de constante de raideur k.

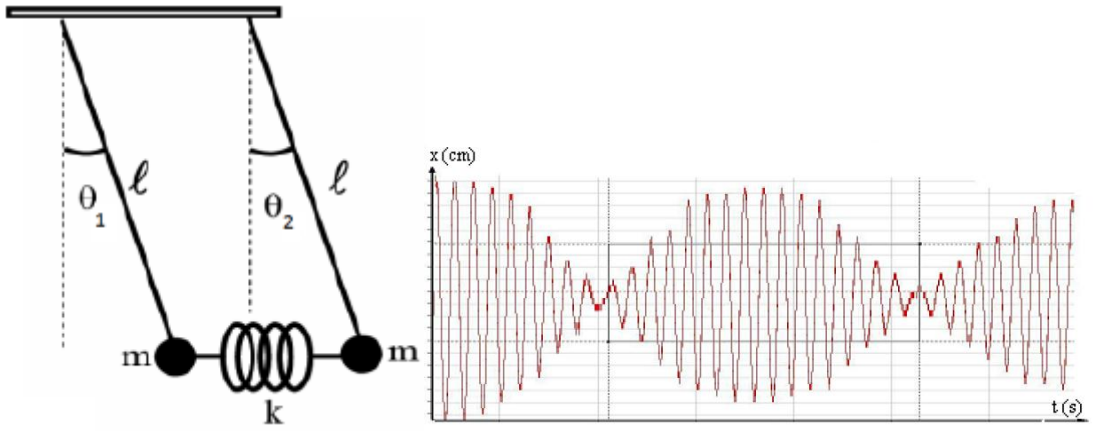


Figure : 4-2

1- Les équations différentielles que doit vérifier ce système en fonction des angles θ_1 et θ_2.

$$T = \frac{1}{2} I\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I\dot{\theta}_2^2$$

$$U = -Mgl(1-Cos\theta_1) - Mgl(1-Cos\theta_2) - \frac{1}{2}mgl(1-Cos\theta_1)$$

$$-\frac{1}{2}mgl(1-Cos\theta_2) + \frac{1}{2}k(lSin\theta_1 - lSin\theta_2)^2$$

Pour des faibles oscillations : $Cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ et $Sin\theta \approx \theta$

$$U = \frac{1}{2}gl(M+\frac{m}{2})\theta_1^2 + \frac{1}{2}gl(M+\frac{m}{2})\theta_2^2 + \frac{1}{2}kl^2(\theta_1-\theta_2)^2$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} I\ddot{\theta}_1 + gl(M+\frac{m}{2})\theta_1 + kl^2(\theta_1-\theta_2) = 0 \\ I\ddot{\theta}_2 + gl(M+\frac{m}{2})\theta_2 + kl^2(\theta_2-\theta_1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \dfrac{gl(M+\frac{m}{2})}{I}\theta_1 + \dfrac{kl^2}{I}\theta_1 = \dfrac{kl^2}{I}\theta_2 \\ \ddot{\theta}_2 + \dfrac{gl(M+\frac{m}{2})}{I}\theta_2 + \dfrac{kl^2}{I}\theta_2 = \dfrac{kl^2}{I}\theta_1 \end{cases} \qquad (*)$$

Dr M. AHMED AMMAR

2- a L'équation caractéristique :

Les solutions de l'équation (*) sont :

$$\begin{cases}\theta_1(t) = A_1 Cos(\omega t + \varphi) \\ \theta_2(t) = A_2 Cos(\omega t + \varphi)\end{cases}$$

Le système d'équations (*) devient :

$$\begin{cases}\left[\frac{kl^2 + gl(M + \frac{m}{2})}{I} - \omega^2\right] A_1 - \frac{kl^2}{I} A_2 = 0 \\ -\frac{kl^2}{I} A_1 + \left[\frac{kl^2 + gl(M + \frac{m}{2})}{I} - \omega^2\right] A_2 = 0\end{cases}$$

On peut écrire ces dernières équations sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{kl^2 + gl(M + \frac{m}{2})}{I} - \omega^2 & -\frac{kl^2}{I} \\ -\frac{kl^2}{I} & \frac{kl^2 + gl(M + \frac{m}{2})}{I} - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M(\omega).\vec{A} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{A} = \vec{0} \Rightarrow \textit{amplitude nulle} \Rightarrow \textit{pas d'oscillations} \\ Det[M(\omega)] = 0 \Rightarrow \left(\frac{kl^2 + gl(M + \frac{m}{2})}{I} - \omega^2\right)^2 - \left(-\frac{kl^2}{I}\right)^2 = 0 \end{cases}$$

Le déterminant $Det[M(\omega)]$ ou $\Delta(\omega)$ est appelé déterminant caractéristique. L'équation $Det[M(\omega)] = 0$ est appelée l'équation caractéristique ou équation aux pulsations propres. Elle s'écrit :

$$\left(\frac{kl^2 + gl(M + \frac{m}{2})}{I} - \omega^2\right)^2 - \left(-\frac{kl^2}{I}\right)^2 = 0$$

DR M. AHMED AMMAR

2-b Les pulsations propres sont :

$$\left(\frac{kl^2+gl(M+\frac{m}{2})}{I}-\omega^2-\frac{kl^2}{I}\right)\left(\frac{kl^2+gl(M+\frac{m}{2})}{I}-\omega^2+\frac{kl^2}{I}\right)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\omega_1=\sqrt{\dfrac{kl^2+gl(M+\frac{m}{2})}{I}-\dfrac{kl^2}{I}}=\sqrt{\dfrac{gl(M+\frac{m}{2})}{I}}\\ \omega_2=\sqrt{\dfrac{kl^2+gl(M+\frac{m}{2})}{I}+\dfrac{kl^2}{I}}=\sqrt{\dfrac{gl(M+\frac{m}{2})+2kl^2}{I}}\end{cases}$$

3- D'après l'équation (*) :

3- a. Pour avoir le premier mode d'oscillation : $\omega_1^2=\dfrac{(M+\frac{m}{2})gl}{I}$, on pose $\theta_1=\theta_2=\theta_0$

3- b. Pour avoir le deuxième mode d'oscillation : $\omega_2^2=\dfrac{(M+\frac{m}{2})gl+2kl^2}{I}$, on pose $\theta_1=-\theta_2$

4- Le graphe ci-dessus représente la variation de l'amplitude x de l'une des masses en fonction du temps t.

4- a. Pour obtenir le phénomène de battement, il faut choisir conditions initiales suivantes : $\theta_1=\theta_0$ et $\theta_2=0$

4- b. A partir du graphe la période d'oscillation T_{os} :

$$\begin{matrix}1cm\rightarrow 2s\\ 0.4cm\rightarrow T_{os}\end{matrix}\Rightarrow T_{os}=\overline{T}=0.8s$$

La période de battement T_b.

$$\begin{matrix}1cm\rightarrow 2s\\ 10.8cm\rightarrow T_b\end{matrix}\Rightarrow T_b=21.6s$$

4- c. **La pulsations d'oscillation ω_{os} :**

$$\omega_{os}=\overline{\omega}=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$$

DR M. AHMED AMMAR

La pulsations de battement ω_b :

$$\omega_b = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

5- La valeur numérique du moment d'inertie I :

$$\begin{cases} \overline{\omega} = \dfrac{2\pi}{\overline{T}} \\ \omega_b = \dfrac{2\pi}{T_b} \end{cases} \xrightarrow{La\ \ sommation} \omega_1 = \frac{\pi}{\overline{T}} + \frac{\pi}{T_b} \Rightarrow \frac{gl(M + \frac{m}{2})}{I} = (\frac{\pi}{\overline{T}} + \frac{\pi}{T_b})^2$$

$$\Rightarrow I = \frac{gl(M + \frac{m}{2})}{(\frac{\pi}{\overline{T}} + \frac{\pi}{T_b})^2} = 2.06\, kg.m^2$$

La constante de raideur *k* :

$$\begin{cases} \overline{\omega} = \dfrac{2\pi}{\overline{T}} \\ \omega_b = \dfrac{2\pi}{T_b} \end{cases} \xrightarrow{La\ \ Soustraction} \omega_2 = \frac{\pi}{\overline{T}} - \frac{\pi}{T_b} \Rightarrow \frac{(M + \frac{m}{2})gl + 2kl^2}{I} = (\frac{\pi}{\overline{T}} - \frac{\pi}{T_b})^2$$

$$\Rightarrow k = \frac{I}{2l^2}(\frac{\pi}{\overline{T}} - \frac{\pi}{T_b})^2 - \frac{g}{2l}(M + \frac{m}{2}) = 16.43\, N/m$$

Solution 4.3:

On considère deux pendules simples couplés par un ressort k_3 et reliés aux murs par les ressorts k_1 et k_2 comme indiqué par la figure(4-3). Les tiges de longueurs ℓ ont des masses négligeables et les masses m_1 et m_2 portées à leurs extrémités sont ponctuelles

On donne : $\ell = 0.4m$, a = $\ell/4$, $k_1 = k_2 = k = 4N/m$, $k_3 = k/4$, $g = 10m/s^2$ et $m_1 = m_2 = m = 0.1kg$

Dr M. AHMED AMMAR

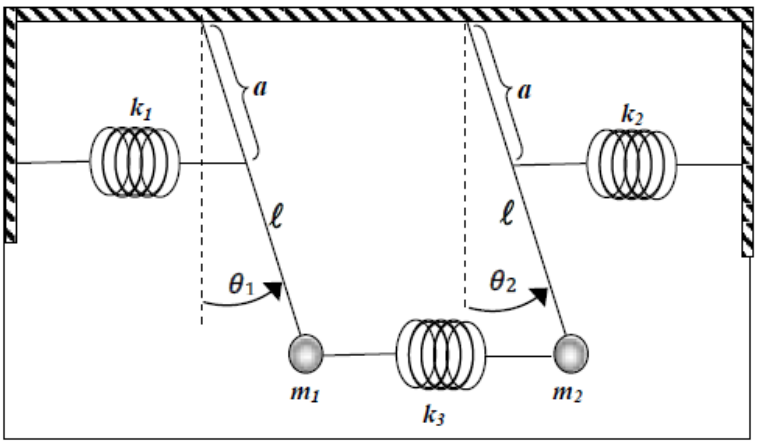


Figure : 4-3

1- Les énergies cinétique et potentielle du système en fonction de θ_1 et θ_2.

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}_2^2 = \frac{1}{2}I(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \text{ où } I = ml^2$$

$$U = \frac{1}{2}mgl\theta_1^2 + \frac{1}{2}mgl\theta_2^2 + \frac{1}{2}k_1a^2\theta_1^2 + \frac{1}{2}k_2a^2\theta_2^2 + \frac{1}{2}k_3l^2(\theta_1 - \theta_2)^2 + C^{te} \quad \text{avec :}$$

$k_1 = k_2 = k$, $Cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ et $Sin\theta \approx \theta$ pour des faibles oscillations.

$$U = \frac{1}{2}(mgl + ka^2 + k_3l^2)(\theta_1^2 + \theta_2^2) - k_3l^2\theta_1\theta_2 + C^{te}$$

avec :

$$= \frac{1}{2}B(\theta_1^2 + \theta_2^2) - \frac{1}{4}kl^2\theta_1\theta_2 + C^{te}$$

$k_3 = k/4$ et $B = mgl + ka^2 + k_3l^2$

2- Les équations différentielles de θ_1 et θ_2.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} I\ddot{\theta}_1 + \frac{B}{I}\theta_1 - \frac{kl^2}{4I}\theta_2 = 0 \\ I\ddot{\theta}_2 + \frac{B}{I}\theta_2 - \frac{kl^2}{4I}\theta_1 = 0 \end{cases}$$

3- L'équation caractéristique :

On pose : $\begin{cases} \theta_1(t) = A_1Cos(\omega t + \varphi) \\ \theta_2(t) = A_2Cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$, le système d'équations précédent devient:

Dr M. AHMED AMMAR

$$\begin{cases}\left(\frac{B}{I}-\omega^2\right)A_1-\frac{kl^2}{4I}A_2=0\\ -\frac{kl^2}{4I}A_1+\left(\frac{B}{I}-\omega^2\right)A_2=0\end{cases}$$

On peut écrire ces dernières équations sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix}\frac{B}{I}-\omega^2 & -\frac{kl^2}{4I}\\ -\frac{kl^2}{4I} & \frac{B}{I}-\omega^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1\\ \\ A_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \\ 0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow M(\omega).\vec{A}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\vec{A}=\vec{0} & \Rightarrow \textit{amplitude nulle} \Rightarrow \textit{pas d'oscillations}\\ Det\left[M(\omega)\right]=0 & \Rightarrow\left(\frac{B}{I}-\omega^2\right)^2-\left(-\frac{kl^2}{4I}\right)^2=0\end{cases}$$

Le déterminant $Det\left[M(\omega)\right]$ ou $\Delta(\omega)$ est appelé déterminant caractéristique. L'équation $Det\left[M(\omega)\right]=0$ est appelée l'équation caractéristique ou équation aux pulsations propres. Elle s'écrit :

$$\left(\frac{B}{I}-\omega^2\right)^2-\left(-\frac{kl^2}{4I}\right)^2=0$$

Les pulsations propres sont :

$$\left(\frac{B}{I}-\omega^2-\frac{kl^2}{4I}\right)\left(\frac{B}{I}-\omega^2+\frac{kl^2}{4I}\right)=0\Rightarrow\begin{cases}\omega_1=\sqrt{\frac{B}{I}-\frac{kl^2}{4I}}=5.24rad/s\\ \omega_2=\sqrt{\frac{B}{I}+\frac{kl^2}{4I}}=6.89rad/s\end{cases}$$

4- La forme générale des solutions en fonction des pulsations propres :

$$\begin{cases}\theta_1(t)=A_{11}Cos(\omega_1 t+\varphi_1)+A_{12}Cos(\omega_2 t+\varphi_2)\\ \theta_2(t)=A_{21}Cos(\omega_1 t+\varphi_1)+A_{22}Cos(\omega_2 t+\varphi_2)\end{cases}$$

Partie II : Oscillations forcées

Solution 4.4:

Considérons le système ci-dessous figure (4-4), constitué de deux masses m_1 et m_2 reliées respectivement par deux ressorts de raideur k_1 et k_2. On suppose

Dr M. AHMED AMMAR

qu'il n'y a pas d'autres frottements. On applique sur la première masse m_1 du système une force sinusoïdale $F(t)$ d'amplitude F_0 de pulsation Ω.

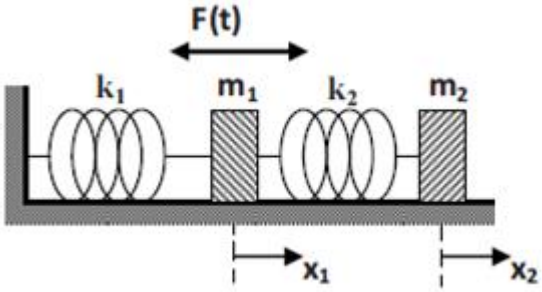


Figure : 4-4

1- Le système d'équations différentielles du mouvement

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

$$U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_1 - x_2)^2$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_2(x_1 - x_2)^2$$

Les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{k_1}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}(x_1 - x_2) = F(t) \\ \ddot{x}_2 + \frac{k_2}{m_2}(x_2 - x_1) = 0 \end{cases} \qquad (4\text{-}1)$$

2- Les équations différentielles du mouvement pour x_1 et x_2 :

On prend $F(t) = \mathrm{F}_0.\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega t}$, en régime forcé, les solutions sont du type sinusoïdal:

$$\begin{cases} x_1(x) = A_1e^{j\Omega t} \\ x_2(x) = A_2e^{j\Omega t} \end{cases}$$

On injecte les solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ dans l'équation (4-1) on obtient :

Dr M. AHMED AMMAR

$$\begin{cases}(-m_1\Omega^2+k_1+k_2)A_1-k_2A_2=F_0\\ -k_2A_1+(-m_2\Omega^2+k_2)A_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\dfrac{F_0k_2}{(-m_2\Omega^2+k_2)(-m_1\Omega^2+k_1+k_2)-k_2^2}\\ B=\dfrac{F_0(-m_2\Omega^2+k_2)}{(-m_2\Omega^2+k_2)(-m_1\Omega^2+k_1+k_2)-k_2^2}\end{cases}$$

La forme générale des solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ s'écrit:

$$\begin{cases}x_1(x)=ACos(\Omega t+\varphi_1)\\ x_2(x)=BCos(\Omega t+\varphi_2)\end{cases}$$

3- Impédance mécanique d'entrée du système :

$$Z_e=\frac{F(t)}{\dot{x}_1(x)}=\frac{F_0e^{j\Omega t}}{j\Omega Ae^{j\Omega t}}=\frac{-jF_0}{\Omega A}$$

Solution 4.5:

Considérons le système ci- dessous figure (4-5), constitué de deux masses m_1 et m_2 reliées respectivement par deux ressorts de raideur k_1 et k_3 à deux bâtis fixes. Les deux masses sont reliées par un ressort de raideur k_2. Ce ressort est appelé ressort de couplage. On suppose qu'il n'y a pas d'autres frottements. On applique sur la première masse m_1 du système une force sinusoïdale $F(t)$ d'amplitude F_0 de pulsation Ω.

Dr M. AHMED AMMAR

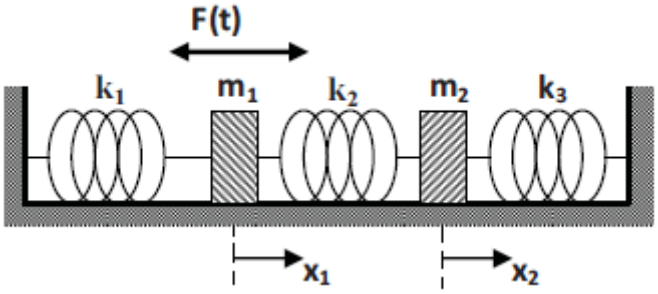


Figure : 4-5

1- Les énergies cinétique T et potentielle U du système :

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

$$U=\frac{1}{2}k_1x_1^2+\frac{1}{2}k_2(x_1-x_2)^2+\frac{1}{2}k_3x_2^2$$

2- Les équations différentielles du mouvement pour x_1 et x_2.

Le lagrangien $\mathcal{L} = T - U$ s'écrit alors :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_2(x_1 - x_2)^2 - \frac{1}{2}k_3x_2^2$$

Les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1}) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2}) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{k_1}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}(x_1 - x_2) = F(t) \\ \ddot{x}_2 + \frac{k_3x_2}{m_2} + \frac{k_2}{m_2}(x_2 - x_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + (\frac{k_1 + k_2}{m_1})x_1 - \frac{k_2}{m_1}x_2 = F(t) \\ \ddot{x}_2 + (\frac{k_2 + k_3}{m_2})x_2 - \frac{k_2}{m_2}x_1 = 0 \end{cases}$$

Avec :

$F(t) = \mathrm{F}_0.\mathrm{Cos}(\Omega t)$ ou $F(t) = \mathrm{F}_0.\mathrm{Sin}(\Omega t)$ ou $F(t) = \mathrm{F}_0.\mathrm{e}^{j\Omega t}$

3- Pour résoudre cette dernière équation :

On pose $x_1 = A.\mathrm{e}^{j\Omega t}$ et $x_2 = B.\mathrm{e}^{j\Omega t}$ avec $m_1 = m_2 = m$ et $k_1 = k_2 = k$.

Le système d'équations devient :

$$\begin{cases} (k + k_2 - m\Omega^2)A - k_2B = F_0 \\ -k_2A + (k + k_2 - m\Omega^2)B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{(k + k_2 - m\Omega^2)F_0}{(k + k_2 - m\Omega^2)^2 - k_2^2} \\ B = \frac{k_2F_0}{(k + k_2 - m\Omega^2)^2 - k_2^2} \end{cases}$$

La forme générale des solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ s'écrit:

$$\begin{cases} x_1(x) = ACos(\Omega t + \varphi_1) \\ x_2(x) = BCos(\Omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

Dr M. AHMED AMMAR

Bibliographie

[1] M. ROSEAU, Vibrations des systèmes mécaniques, Masson,1984, Paris.

[2] H. DJELOUAH, Vibrations et ondes mécaniques, cours et exercices, 2012, Université Houari Boumediene, Algérie.

[3] F. BOUKLI HACENE, Vibrations mécaniques, Editions A-Djazair, 2014.

[4] N. AKLOUCHE, Université Ferhat Abbas Sétif, Algérie, 2012.

[5] C. POTEL, P. GATIGNOL, Cours de mécanique - vibrations, 1ème année, Université du Maine France.

[6] N. DESTOUCHES, Physique des vibrations, Université Jean Monnet Saint-Etienne, France.

[7] J.M. BREBEC, Mécanique du solide, 2ème année, Cours avec Exercices corrigés, 1996.

[8] M. Bertin. J. P. Faroux. J. Renault, Mécanique du point, Dunod Université.

[9] S. Kadri, Vibrations et Ondes (F312) : Cours et Exercices Corrigés Partie I : Vibrations, Université Tahri Mohammed Bechar, 2014.

Dr M. AHMED AMMAR