République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr.Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences -Département de Mathématiques & Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention

du

Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Recherche Opérationnelle

Par

DRIS MOHAMED EL AMINE

Thème :

Etude sur le nombre de [1,k]-domination

Devant le jury composé de :

Mr.	A.BENKACI	Maître assistant	UYF Médéa	Président
Mr.	M.ZEMIR	Maître assistant	UYF Médéa	Examinateur
Mr.	A.BOUCHOU	Maître de conférence	UYF Médéa	Promoteur

Soutenue le 21/06/2022

DÉDICACE

À mes chers parents qui m'ont fait vivre, avec leurs simples moyens, la vie d'un prince.

A mes parents, mes soeurs.

A toute ma famille.

A tous mes amis.

DRIS MOHAMED EL AMINE

RÉSUMÉ

Soit $G = (V, E)$ un graphe, et soit k un entier tel que $k \geq 1$. Un sous ensemble S de V est un $[1, k]$-*ensemble* de G si pour tout sommet v de $V - S$, $1 \leq |N(v) \cap S| \leq k$, c-à-d que chaque sommet de $V - S$ est adjacent à au moins 1 sommet, mais pas plus que k sommets dans S. L'ordre minimum d'un $[1, k]$-ensemble d'un graphe G est appelé le *nombre de* $[1, k]$-*domination* et noté $\gamma_{[1,k]}(G)$. Un $[1, k]$-ensemble dont le cardinal est $\gamma_{[1,k]}(G)$ est appelé un $\gamma_{[1,k]}(G)$-*ensemble*.

D'abord, nous donnons quelques propriétés des $[1, k]$-ensembles, particulièrement lorsque ces ensembles sont disjoints, en second lieu nous donnons principalement quelques conditions suffisantes pour que $\gamma_{[1,k]}(G) < n$ pour tout graphes G d'ordre n. puis nous présentons un exemple de graphe scindé avec $\gamma_{[1,k]}(G) = n$. En suite, nous donnons une borne sur $\gamma_{[1,k]}(G)$ en fonction de n, δ et k, et des bornes sur $\gamma_{[1,k]}$ en fonction de l'ordre n de G, pour $k \in \{\Delta, \Delta - 1\}$. En plus, nous caractérisons les graphes G atteignant ces bornes. Finalement, nous donnons des relations de type nordhaus-gaddum sur $\gamma_{[1,k]}(G)$.

ABSTRACT

Let $G = (V, E)$ be a graph, and let k be an integer such that $k \geq 1$. A subset S of V is a $[1, k]$-set of G if for any vertex v of $V - S$, $1 \leq |N(v) \cap S| \leq k$, i.e. each vertex of $V - S$ is adjacent at least 1 vertex, but no more than k vertices in S. The minimum order of a $[1, k]$-set of a graph G is called the $[1, k]$-domination number and denoted $\gamma_{[1,k]}(G)$. A $[1, k]$-set with cardinality $\gamma_{[1,k]}(G)$ is called a $\gamma_{[1,k]}(G)$-set.

First, we give some properties of $[1, k]$-sets, especially when these sets are disjoint, secondly we mainly give some sufficient conditions for $\gamma_{[1,k]}(G) < n$ for any graphs G, of order n. Then we present an example of a split graph with $\gamma_{[1,k]}(G) = n$. Next, we give a bound on $\gamma_{[1,k]}(G)$ in term of n, δ and k, and bounds on $\gamma_{[1,k]}(G)$ in term of the order n of G, for $k \in \{\Delta, \Delta - 1\}$. In addition, we characterize the graphs G reaching these bounds. Finally, we give nordhaus-gaddum relations type on $\gamma_{[1,k]}(G)$.

REMERCIEMENTS

Louange a Allah le Seigneur des mondes.

Je rends Allah le tout puissant de m'avoir donné le courage et la volonté ainsi que la patience pour bien mener ce travail.

Je tiens, avant tout, à remercier chaleureusement mon promoteur Monsieur **Ahmed BOUCHOU**, Maître de conférences à l'université **Dr. YAHIA FARES** de Médéa, pour avoir accepté de m'encadrer. Ainsi de m'avoir orienté, aidé et conseillé.

Je remercie également Monsieur **Azzedine BENKACI**, Maître assistant à l'université **YAHIA FARES** de Médéa, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie également Monsieur **Mohamed ZEMIR**, Maître assistant à l'université **YAHIA FARES** de Médéa, pour avoir accepté de juger mon travail.

Je tiens également à exprimer ma gratitude à l'ensemble des enseignants du département **M.I** de l'université **Dr. YAHIA FARES de Médéa**.

Enfin, il est important pour moi de remercier mes parents d'avoir fait de leur mieux pour que je puisse accomplir ce mémoire dans les meilleures conditions.

Je remercie mes soeurs sans oublier mes chers amis qui étaient toujours présents.

Table des matières

RÉSUMÉ i

ABSTRACT ii

REMERCIEMENTS iii

INTRODUCTION 1

1 Notions générales sur les graphes 3

1.1 Concepts fondamentaux 3

1.1.1 Définitions 3

1.1.2 Quelques graphes particuliers 4

1.1.3 Quelques opérations sur les graphes 9

1.1.4 Connexité 11

1.1.5 Quelques paramètres structurels d'un graphe 11

1.1.6 Invariants de graphes 12

1.2 Apperçu sur la domination 12

2 Quelques résultats sur les $[1,2]$-ensembles 15

2.1 Définitions et propriétés 15

2.2 Les $[1,k]$-ensembles dans les graphes 16

2.2.1 Bornes sur le paramètre $\gamma_{[1,2]}(G)$ 19

2.2.2 Graphes tels que $\gamma_{[1,2]}(G) < n$ 20

2.2.3 Inégalités de type Nordhaus-Gaddum 22

3 Quelques résultats sur les $[1, k]$-ensembles **23**

3.1 Propriétés des $[1, k]$-ensembles 23

3.2 Graphes G d'ordre n avec $\gamma_{[1,k]}(G) = n$ 25

3.3 Borne sur $\gamma_{[1,k]}(G)$ 27

3.4 Graphes G d'ordre n avec $\gamma_{[1,k]}(G) < n$ 29

3.5 Relatios de type Nordhaus–Gaddum 31

Conclusion **33**

Bibliographie **34**

Table des figures

1.1 H est sous-graphe induit de G. 5

1.2 H est un graphe partiel de G. 5

1.3 Un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$ 5

1.4 Le graphe complet (K_4) et le graphe discret $(\overline{K_4})$. 6

1.5 Le graphe biparti complet $K_{2,3}$ 6

1.6 Un graphe biparti 2-semi-régulier. 6

1.7 la chaîne P_5 7

1.8 Un exemple d'un arbre T 7

1.9 L'étoile $K_{1,n}$ 7

1.10 Double étoile $S_{r,s}$ 8

1.11 La chenille $c(2,0,1)$ 8

1.12 Un graphe 3-régulier d'ordre 6. 8

1.13 Le cycle C_4 9

1.14 Un graphe scindé 9

1.15 La couronne d'un C_4 9

1.16 Le graphe joint de G_1 et G_2. 10

1.17 La grille 10

1.18 L'étoile subdivisée $S_{1,q}$. 11

1.19 Exemple d'un graphe connexe et d'un graphe non connexe 11

1.20 un échiquier 5×5 et un échiquier 8×8 13

1.21 Exemple d'un graphe G tel que $\gamma(G) = 2$ 14

2.1 Exemple d'un arbre T tel que $\gamma(T) = i(T) < \gamma_{[1,2]}(T)$ 17

2.2 Exemple d'un arbre T tel que $\gamma(T) = \gamma_{[1,2]}(T) < i(T)$ 18

2.3 Exemple d'une maille tel que $g = 3$ 19

2.4 Le graphe G_5 19

3.1 Exemple d'un graphe G tel que $\gamma_{[1,1]}(G) = n - p = 6 - 3 = 3$ 30

3.2 Exemple d'un arbre T tel que $\gamma_{[1,k]}(G) = 2 < n = 7$ 31

3.3 Un exemple d'un graphe G tel que $\gamma_{[1,k]}(G) + \gamma_{[1,k]}(\overline{G}) = 3$ 32

INTRODUCTION

L'histoire de la théorie des graphes débute peut-être avec les travaux d'Euler au XVIIIe siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Konigsberg. En effet les habitants de Konigsberg se demandaient s'il etait possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir à leur point de départ. Par exemple la marche du cavalier sur l'échiquier, les problèmes de coloriage de la carte géographie. La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales,réseau de communication, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales,circuits electriques, ...

La théorie des graphes représente une classe très importante de la recherche opérationnelle, elle est devenue aujourd'hui une des branche les plus florissantes de l'algèbre moderne. Elle regroupe généralement des problèmes assez variés qui ont tous comme caractéristique commune de pouvoir être représenté par un schéma. Ce schéma appelé graphe est constitué par un ensemble de points (sommets) noté par V représentant des individus, des objets, des situations, etc,... et qui sont relies par des lignes (arêtes) noté par $G = (V, E)$ (où E représente l'ensemble des arêtes de G) symbolisant les relations existant entre eux.

Parmi les problèmes dans la théorie des graphes, le problème de $[1, k]$-domination dans les graphes.

L'idée générale de la $[1, k]$-*domination* est de trouver dans un graphe G un sous ensemble D de V (appelé $[1, k]$-*dominant*) tel que tout sommet extérieur au sous ensembles D ait au moins un voisins dans D, mais ne pas plus que k sommets dans D.

Ce Mémoire est une contribution à l'étude de la $[1, k]$-domination dans les graphes. Le problème

qui se pose d'une manière naturelle est la détermination de la valeur de ce paramètre, mais comme en général ce problème est $\mathcal{NP}$-complet, nous nous penchons vers ou bien la détermination de bornes qui l'encadrent le plus étroitement possible, ou bien les déterminer exactement dans des classes particulières de graphes. Aussi nous intéressons aux graphes extrémaux pour les bornes élaborées.

Ce document est composé de trois chapitres :

1. Notions générales sur les graphes : Nous rappelons d'abord les déffinitions de base liés à la théorie des graphes et nécessaires à la compréhension de ce méoire. Ensuite nous rappelons brièvement la notion de la domination dans les graphes.

2. Quelques résultats sur les $[1,2]$-ensembles : Nous abordons le thème étudié et nous donnons un aperçu sur les $[1,2]$-ensembles. Nous donnons un recueil des principaux résultats de la littérature liés à ces notions.

3. Quelques résultats sur les $[1,k]$-ensembles : Dans ce chapitre nous présentons, d'abord, quelques propriétés des $[1,k]$-ensembles, puit nous donnons principalement quelques conditions suffisantes pour que $\gamma_{[1,k]}(G) < n$. Ensuite nous donnons des conditions nécessaires pour qu'un graphe G vérifie $\gamma_{[1,k]}(G) = n$, en plus un exemple de graphe scindé tel que $\gamma_{[1,k]}(G) = n$. Enfin nous donnons des bornes sur$\gamma_{[1,k]}(G)$, aussi des relations de type Nordhaus–Gaddum sur $\gamma_{[1,k]}(G)$.

Chapitre 1

Notions générales sur les graphes

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions et la terminologie utilisées dans l'ensemble de ce document. Dans la premiére partie, nous rappelons quelques définitions de base de la théorie des graphes, et nous donnons un petit aperçu sur les paramètres structurels d'un graphe, ensuite nous citons quelques invariants de graphes, les notions propres à un chapitre seront données et définies dans le chapitre en question. Enfin, nous rappelons brièvement la notion de la domination dans les graphes.

Pour plus de détails sur la terminologie utilisée dans ce mémoire, nous invitons le lecteur à se référer aux ouvrages de Berge *[1]*, Haynes, Hedetniemi et Slater *[12]* et de Chellali, Favaron, Hansberg et Volkmann *[2]*.

1.1 Concepts fondamentaux

1.1.1 Définitions

Graphe

Un *graphe* $G = (V, E)$ est la donnée de deux ensembles finis, un ensemble de *sommets* V et un ensemble d'*arêtes* E. Le cardinal de V est appelé l'*ordre* de G, noté par $n(G)$. Une arête $e \in E$ est une paire de sommets (u, v) notée par $e = uv$, où u et v sont les *extrémités* de e. On dira dans ce

cas que u et v sont *adjacent* et que e est *incidente* à u et v. Une *boucle* est une arête dont les deux extrémités sont confondues. Un graphe est dit simple s'il est sans boucles et sans arêtes multiples. Tous les graphes considérés dans ce mémoire sont simples et finis.

Voisinage

Le voisinage ouvert d'un sommet v est $N_G(v) = \{u \in V : uv \in E\}$ et le voisinage fermé de v est $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Pour un sous-ensemble $S \subseteq V$, le voisinage ouvert est $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$ et le voisinage fermé $N_G[S] = \bigcup_{v \in S} N(v) \cup S$.

Degré

Le degré d'un sommet $x \in S$, noté $d_G(x)$ est égal au cardinal de son voisinage ouvert c-à-d $d_S(x) = |N_S(x)|$. On notera par $\Delta(G)$ et $\delta(G)$, respectivement, le *degré maximum* et le *degré minimum* dans G.

Sommets particuliers

Un sommet de degré nul sera dit un sommet *isolé* et, un sommet de degré égal à un sera dit sommet *pendant* et un sommet adjacent à un sommet pendant sera dit sommet *support*.

1.1.2 Quelques graphes particuliers

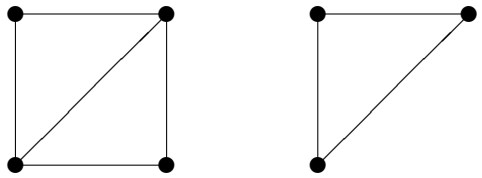
Sous-graphe et sous-graphe induit

Le graphe H est dit sous-graphe d'un graphe G lorsque $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$.

Un sous-graphe H de G est dit induit si $E(H)$ contient toutes les arêtes de G dont les deux extrémités sont dans $V(H)$. Pour définir un sous-graphe induit de G il suffit de considérer un sous-ensemble A de V, le sous-graphe induit sera désigné par $G[A]$ (voir Figure 1.1). Soit v un sommet de V. On notera $G - v$ le sous-graphe $G[V - \{v\}]$.

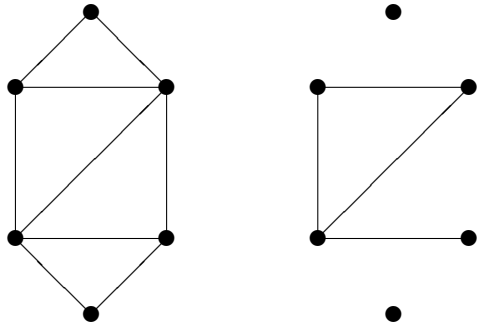
Graphe partiel

On appelle graphe partiel de $G = (V, E)$ tout graphe $H = (V, E')$ tel que $E' \subseteq E$. Un sous-graphe d'un graphe partiel de G est appelé sous-graphe partiel de G (voir Figure 1.2).



$G = (V, E)$ $H = (V(H), E(H))$

FIG. 1.1 – H est sous-graphe induit de G.



$G = (V, E)$ $H = (V, E(H))$

FIG. 1.2 – H est un graphe partiel de G.

Graphe complémentaire d'un graphe

Le graphe *complémentaire* du graphe G noté $\overline{G}$ est un graphe ayant le même ensemble de sommets que G et une arête est dans $\overline{G}$ si elle n'est pas dans G (voir Figure 1.3).

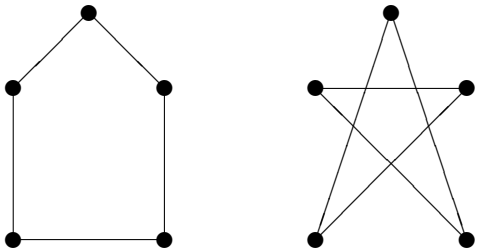


FIG. 1.3 – Un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$

Graphe complet

Un graphe *complet* est un graphe où chaque sommet est adjacent a tous les autres sommets. Le graphe complet d'ordre n est noté K_n. Dans ce graphe chaque sommet est de degré $n - 1$ (voir Figure 1.4).

Graphe discret

On dit qu'un graphe G est *discret* ou nul s'il ne contient aucune arête, c'est- a-dire que $E = \varnothing$ et

noté $\overline{Kn}$ (voir Figure 1.4).

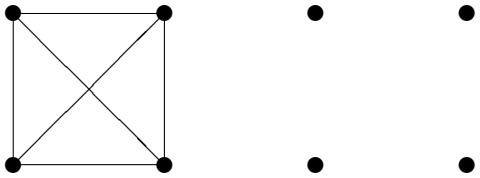


FIG. 1.4 – Le graphe complet (K_4) et le graphe discret ($\overline{K_4}$).

Graphe biparti

Un graphe *biparti* G est un graphe d'ordre $n \geq 2$, dont l'ensemble des sommets est partitionné en deux stables X et Y. Un graphe biparti complet est un graphe biparti maximal en terme de nombre d'arêtes, alors $|E| = |X|.|Y|$, et il est noté $K_{p,q}$ avec $p = |X|$ et $q = |Y|$ (voir Figure 1.5).

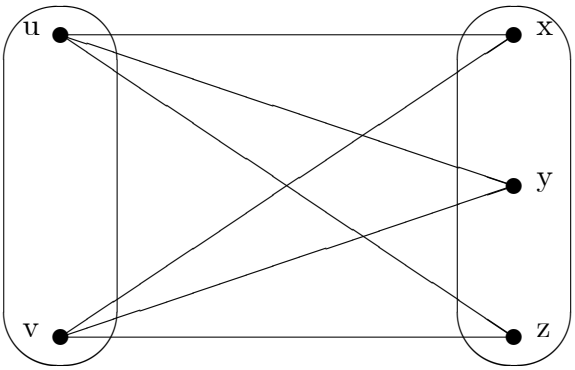


FIG. 1.5 – Le graphe biparti complet $K_{2,3}$

Graphe biparti k-semi-régulier

Un graphe biparti k-semi-régulier est un graphe G d'ordre $n \geq 2$, dont l'ensemble des sommets est partitionné en deux stables X et Y , avec chaque sommet de l'une de deux parties est de degré k (voir Figure 1.6).

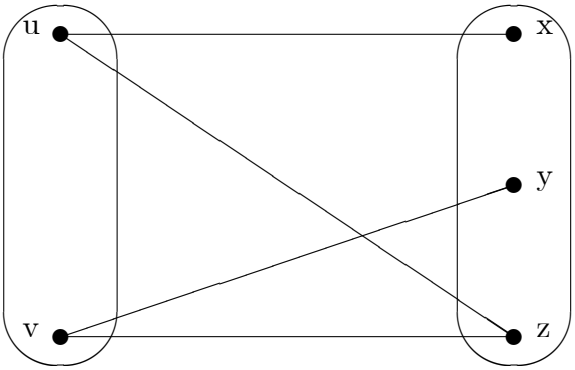


FIG. 1.6 – Un graphe biparti 2-semi-régulier.

Chaînes

Une *chaîne* est une suite alternée des sommets et d'arêtes de la forme $(v_1, v_2, ..., v_k)$ où k est un entier positif. L'entier $k-1$ est la longueur de la chaîne (voir Figure 1.7).



FIG. 1.7 – la chaîne P_5

Arbres

Un *arbre* est un graphe connexe ayant exactement $n-1$ arêtes (voir Figure 1.8).

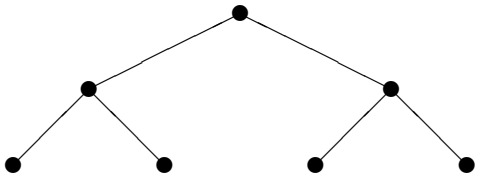


FIG. 1.8 – Un exemple d'un arbre T

Etoiles

On appelle *étoile*, et on note par $K_{1,n}$, l'arbre d'ordre $n+1$ ayant n sommets pondants.

le sommet de degré n est appelé centre (voir Figure 1.9).

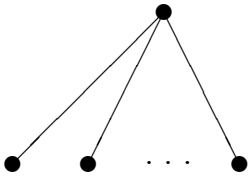


FIG. 1.9 – L'étoile $K_{1,n}$

Double étoile

Une *double étoile* est un graphe obtenu par deux étoiles $K_{1,r}$ et $K_{1,s}$ en ajoutant une arête reliant les deux centres, notée $S_{r,s}$ (voir Figure 1.10).

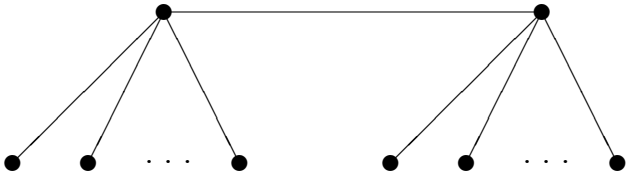


FIG. 1.10 – Double étoile $S_{r,s}$

Chenille

Une *chenille* est un arbre dont la supression de ses sommets pendants produit une chaîne qui est appelé la *colonne vertébrale* de la chenille. Elle est noté $C(t_1, t_2, ..., t_s)$ tel que la séquence des entiers positifs $(t_1, t_2, ..., t_s)$ est le nombre de sommets pondants adjacents à chaque sommet de la colonne vertébrale (voir Figure 1.11).

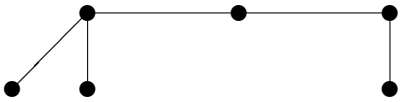


FIG. 1.11 – La chenille $c(2, 0, 1)$

Graphes r-régulier

Un graphe dont tous les sommets sont de même degré r est appelé un graphe *r-régulier*, c-à-d $d_G(x) = r$ pour tout $x \in V$ (voir Figure 1.12).

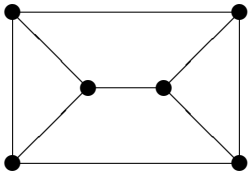


FIG. 1.12 – Un graphe 3-régulier d'ordre 6.

Cycles

Le *cycle* de longueur n, noté C_n, est le seul graphe 2-régulier connexe à n sommets. On peut désigner le cycle par la suite de ses sommets $(v_1, v_2, v_3, ..., v_n)$, ses arêtes étant $v_i v_{i+1} \in E(C_n)$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$ et l'arête $v_n v_1 \in E(C_n)$ (voir Figure 1.13).

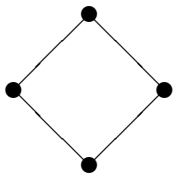


FIG. 1.13 – Le cycle C_4

Graphe scindé

Un graphe G est un graphe *scindé* si son ensemble de sommets peut être partitionné en deux ensembles, dont l'un est un ensemble indépendant S et l'autre est une clique K (voir Figure 1.14).

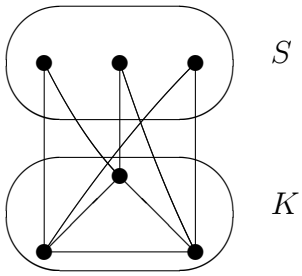


FIG. 1.14 – Un graphe scindé

1.1.3 Quelques opérations sur les graphes

Couronne d'un graphe

Etant donné deux graphes $G = (V, E)$ et $H = (V', E')$ avec $V \cap V' = \emptyset$.

La H-*couronne* de G, c'est le graphe $G \circ H$ obtenu d'une copie de G et $|V|$ copies de H où le $i^{ième}$ sommet de G est adjacent à tous les sommets de la $i^{ième}$ copie de H. Lorsque H est la clique K_1, $G \circ K_1$ est appelé la *couronne* du graphe G. Il est à noter que l'ordre de $G \circ K_1$ est $2\,|V|$ (voir Figure 1.15).

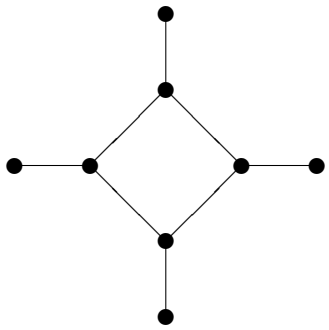


FIG. 1.15 – La couronne d'un C_4

Union de deux graphes

L'union des graphes G_1 et G_2 est le graphe $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.

Joint de deux graphes

Le joint des graphes G_1 et G_2 est le graphe $G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup E_{1,2})$ où $E_{1,2} = \{xy : x \in V_1, y \in V_2\}$(voir Figure 1.16).

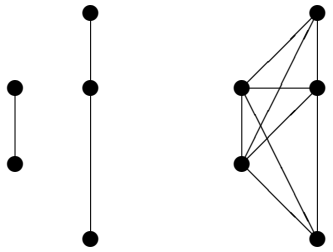


FIG. 1.16 – Le graphe joint de G_1 et G_2.

Produit cartésien de deux graphes

Le produit cartésien des graphes G_1 et G_2 est le graphe $G = (V, E)$, noté $G_1 \square G_2$ tel que $V = \{(u, v) : u \in V_1 \text{ et } v \in V_2\}$ et deux sommets (u_1, u_2) et (v_1, v_2) sont adjacents si $u_1 = v_1$ et $u_2v_2 \in E(G_2)$ ou $u_2 = v_2$ et $u_1v_1 \in E(G_2)$.

Grille

Soient P_r et P_c deux chaines d'ordre, respectivement, r et c. Le produit cartésien de P_r et P_c est appelé grille, noté $P_r \boxdot P_c$ (voir Figure 1.17).

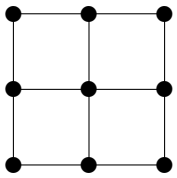


FIG. 1.17 – La grille

Subdivision

Une *subdivision* $S(G)$ d'un graphe G est le graphe obtenu en remplaçant chaque arête uv de G par un sommet w et les deux arêtes uw et wv (voir Figure 1.18).

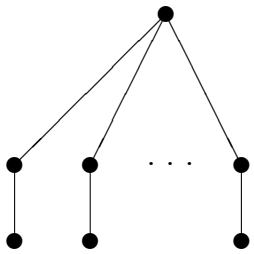


FIG. 1.18 – L'étoile subdivisée $S_{1,q}$.

1.1.4 Connexité

La relation $\sim$ entre les sommets d'un graphe G est définie comme suit : $u \sim v$ si et seulement s'il existe dans G une chaîne reliant u à v. La relation $\sim$ est une relation d'équivalence. Les sous-graphes induits par les classes d'équivalence de $\sim$ sont appelés composantes connexes de G. Le graphe G est dit connexe s'il possède une seule composante connexe.

Si G est connexe, alors $\overline{G}$ est dit co-connexe. Les complémentaires des composantes connexes de $\overline{G}$ sont appelées composantes co-connexes de G. Il est bien connu que pour tout graphe G, l'un de G ou $\overline{G}$ est connexe (voir Figure 1.19).



G H

FIG. 1.19 – Exemple d'un graphe connexe et d'un graphe non connexe

1.1.5 Quelques paramètres structurels d'un graphe

On dit qu'un sous-ensemble A de V est *minimal* (resp. *maximal*) par rapport à une propriété $\mathcal{P}$ s'il n'existe pas un sous-ensemble $B \subseteq A$ (respectivement, $B \supseteq A$) tel que le sous graphe $G[B]$ induit par B vérifie propriété $\mathcal{P}$.

On dit qu'un sous-ensemble A de V est *minimum* ou de *taille minimale* (respectivement, *maximum* ou de *taille maximale*) par rapport à une propriété $\mathcal{P}$ s'il n'existe pas un sous-ensemble $B \subseteq V$ tel que le sous graphe $G[B]$ induit par B vérifie propriété $\mathcal{P}$ et $|B| < |A|$ (respectivement, $|A| < |B|$)

où $|A|$ est le cardinal de l'ensemble A, c'est-à-dire le nombre de ses éléments.

1.1.6 Invariants de graphes

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre n. Nous définissons ci-après quelques invariants de graphes intervenant dans ce mémoire.

Un *couplage* dans un graphe G est un sous-ensemble d'arêtes non-adjacentes deux à deux. On notera par $\alpha_0(G)$ la taille maximale d'un couplage dans G. Le couplage est dit *parfait* dans G si $\alpha_0(G) = \frac{n}{2}$. Il est à noter que $\alpha_0(G)$ peut être déterminé en un temps polynômial pour tout graphe G.

Un *stable* de G, noté S, est un ensemble de sommets deux-à-deux non-adjacents. La taille d'un stable est égale au nombre de ses sommets. Un stable de G est maximum s'il est de taille maximale dans G.

Une *clique* de G, est un ensemble de sommets adjacents deux-à-deux. La taille d'une clique est égale au nombre de ses sommets. Une clique de G est maximum si elle est de taille maximale dans G.

Deux graphes sont dits *isomorphes* s'il existe une fonction bijective entre les ensembles des sommets des deux graphes telle que deux sommets sont adjacents dans l'un des graphes si et seulement si leurs sommets correspondants par la fonction bijective sont adjacents dans l'autre graphe. Si deux graphes sont isomorphes alors ils ont des propriétés communes. Ces propriétés communes sont appelées *invariants* de graphes, en d'autres termes un invariant est une propriéte stable par isomorphsime. Le nombre de sommets et d'arêtes sont deux invariants de base d'un graphe.

1.2 Apperçu sur la domination

Le concept de domination trouve son origine dans le jeu d'échec. Le principe est de couvrir (dominer) l'ensemble des cases par certaines pièces du jeu. L'idée semble remonter au $16^{éme}$ siecle en Inde (Voir *[14]*). En 1862 De Jaenisch *[15]* posa le problème suivant : Déterminer le nombre

minimum de reines à placer sur l'échiquier de telle manière que chaque case soit occupée par une reine ou bien peut être occupée en un seul mouvement par l'une des reines. Pour un échiquier 5×5 le nombre minimum est 3 et pour un échiquier 8×8 le nombre minimum est 5. Le nombre minimum dans un échiquier $n \times n$ reste indéterminé jusqu'à présent. Pour plus de détails voir *[10]*.

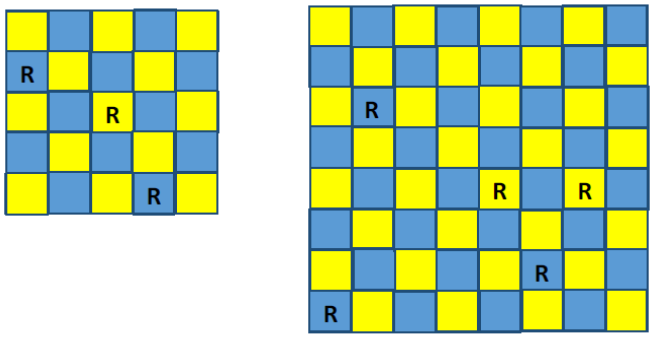


FIG. 1.20 – un échiquier 5×5 et un échiquier 8×8

En 1958, Claude Berge *[1]* donna une formulation de la domination dans les graphes orientés. Le nombre de domination s'appelait coefficient de stabilité externe.

L'appelation actuelle du nombre de domination est due à Ore *[19]* en 1962. La domination n'a connue sa veritable expansion qu'après la parution de l'article de Cockayne et Hedetniemi *[6]* en 1977.

Depuis, l'étude de la domination dans les graphes avec des propriétés additionnelles a donné naissance à plusieurs paramètres de domination dont la résolution est NP-Complet (Voir *[5, 16, 17]*). Ainsi beaucoup de voies de recherche sont à explorer, par exemple : la recherche d'algorithmes polynomiaux, détermination des bornes supérieures et inférieures, etc....

Pour un aperçu détaillé, le lecteur peut consulter les deux livres remarquables de Haynes, Hedetniemi et Slater (*[12, 13]*).

Commençons par donner la définition des ensembles dominants dans les graphes.

Définitions : Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.

– Un sous ensemble de sommets $D \subseteq V$ de G est dit ensemble *dominant* si tout sommet $v \in V - D$ est adjacent à au moins un sommet $u \in D$.

– Un ensemble dominant D est dit *dominant minimal* si aucun sous ensemble propre de D n'est un ensemble dominant.
– le *nombre de domination inférieur* (appelé *nombre de domination*), noté $\gamma(G)$, d'un graphe G représente la cardinalité minimum d'un ensemble dominant de G.
– Un ensemble *dominant minimum* avec une telle cardinalité est appelé $\gamma(G)$-*ensemble*, on note qu'un graphe G peut avoir plusieurs $\gamma(G)$-ensembles.

Dans la litérature, il existe d'autres définitions équivalentes aux ensembles dominants dans les graphes. En voici des exemples :

– Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant si pour tout $v \in V$, $|N[v] \cap D| \geq 1$,
– Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant si pour tout $v \in V - D$, $|N(v) \cap D| \geq 1$,
– Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant si $N[D] = V$.

Par exemple dans le graphe $K_{2,3}$ de la Figure 1.21, $\gamma(G) = 2$, et $\{u, v\}$, $\{u, x\}$ et $\{v, z\}$ sont des $\gamma(G)$-ensembles.

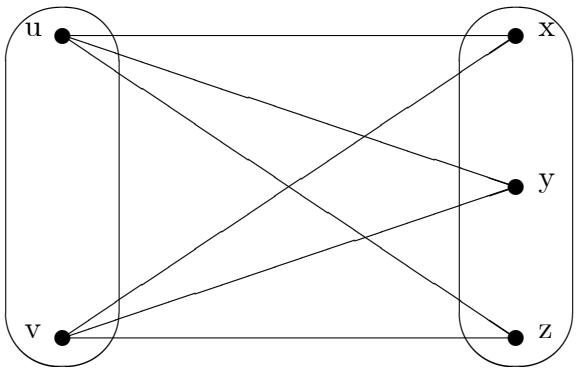


FIG. 1.21 – Exemple d'un graphe G tel que $\gamma(G) = 2$

Chapitre 2

Quelques résultats sur les $[1, 2]$-ensembles

En 2013, Chellali et al. ont introduit une généralisation de la notion de domination dans les graphes ; la $[j, k]$-ensemble. Le papier contient des définitions, des propriétés et des résultats sur le $[1, 2]$-ensemble. A notré qu'il y a quelques papiers qui sont apparus sur $[1, k]$-ensemble *[3, 8, 20]*, *[4, 11, 18] [9]*.

2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1.1 *Soit $G = (V, E)$ un graphe, et soit j et k des entiers positifs tels que $1 \leq j \leq k$. Un sous ensemble S de V est un* $[j, k]$-ensemble *de G si pour tout sommet v de $V - S$, $j \leq |N(v) \cap S| \leq k$, c-à-d que chaque sommet de $V - S$ est adjacent à au moins j sommets, mais pas plus que k sommets dans S.*

L'ordre minimum d'un $[j, k]$-ensemble d'un graphe G est appelé le nombre de $[j, k]$-domination *et noté $\gamma_{[j,k]}(G)$.*

Un $[j, k]$-ensemble dont le cardinal est $\gamma_{[j,k]}(G)$ est appelé un $\gamma_{[j,k]}(G)$-ensemble.

Pour $k = \Delta$, on retrouve le nombre de *domination* $\gamma(G) = \gamma_{[1,\Delta]}(G)$, et pour $k = 1$, on retrouve le nombre de *domination* parfaite $\gamma_p(G) = \gamma_{[1,1]}(G)$.

De ce qui précède, nous avons les propriétés suivantes.

1. Tout $[j,k]$-ensemble contient au moins j sommets, d'où $\gamma_{[j,k]}(G) \geq j$ pour tout graphe G.
2. Tout $[j,k]$-ensemble contient tout les sommets de degré inférieures ou égale à $j-1$.
3. Tout $[j+1,k]$-ensemble et aussi un $[j,k]$-ensemble, et donc

$$\gamma_{[1,k]}(G) \leq \gamma_{[2,k]}(G) \leq ... \leq \gamma_{[k-1,k]}(G) \leq \gamma_{[k,k]}(G) = \gamma_{kp}(G).$$

4. Tout $[j,k]$-ensemble et aussi un $[j,k+1]$-ensemble, et donc

$$\gamma_{j}(G) = \gamma_{[j,\Delta]}(G) \leq \gamma_{[j,\Delta-1]}(G) \leq ... \leq \gamma_{[j,j+1]}(G) \leq \gamma_{[j,j]}(G) = \gamma_{jp}(G).$$

Il est à noter que les inégalités des séquences précédentes peuvent être strictes. Pour ce la, *Il suffit de prendre la clique* K_n pour la première séquence, tel que $\gamma_{[j,k]}(K_n) = j$ *pour tous* j *et* k avec $1 \leq j \leq k$. Pour la deuxième séquence *pour tous* j *et* k avec $2 \leq j \leq k$ et $k = 2j-2$, considérons le graphe biparti $G = (X \cup Y, E)$, tel que $X = \{x_1, x_2, ..., x_{j-1}\}$, $Y = \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ et $E = \{x_1y_i : i \in \{1,2,...,k\}\} \cup \{x_2y_i : i \in \{1,2,...,k-1\}\} \cup ... \cup \{x_{j-1}y_i : i \in \{1,2,...,k-j+2\}\}$. Alors $k = \gamma_{[j,\Delta]}(G) < \gamma_{[j,\Delta-1]}(G) < ... < \gamma_{[j,j+1]}(G) < \gamma_{[j,j]}(G) = n-1$.

Dans *[8]*, les auteurs ont montré que la détermination du nombre $\gamma_{[1,2]}$ est $\mathcal{NP}$-complet pour un graphe biparti. Plus tard Bishnu et al. dans *[4]* ont montré que la détermination du nombre $\gamma_{[1,k]}$ est $\mathcal{NP}$-complet pour un graphe triangulé, et ont donné des algorithmes linéaires dans les arbres et dans les graphes scindés.

Il est remarquable que l'étude de $[j,k]$-ensembles dans le cas général reste ouverte, et seulement quelques cas particuliers ont été étudiés. Pour $[1,2]$-ensembles voir par exemple *[3, 8, 20]*. En plus, la version de $[j,k]$-ensemble indépendant a été étudié dans , *[4, 11, 18] [9]* pour $j = 1$.

2.2 Les $[1,k]$-ensembles dans les graphes

On commence cette section par la présentation des $[1,2]$-ensembles dans les graphes, qui peut être relier de nombreux d'autre concepts de domination, comme suit : $[0,1]$-ensembles, $[1,1]$-ensembles, $[0,2]$-ensembles, $[1,2]$-ensembles, Donnés dans *[8]*.

Tableau 1

Types d'ensembles $[0,1]$ et d'ensembles $[1,1]$.

Quels sommets	Bornes	Type d'ensemble
$\forall v \in V - S$	$0 \leq \lvert N(v) \cap S \rvert \leq 1$	Presque parfait
$\forall v \in V - S$	$1 \leq \lvert N(v) \cap S \rvert \leq 1$	Domination parfaite

Tableau 2

Types d'ensembles $[1,2]$ et d'ensembles $[0,2]$.

Quels sommets	Bornes	Type d'ensemble
$\forall v \in V - S$	$1 \leq \lvert N(v) \cap S \rvert \leq 2$	$[1,2]$-ensemble
S indépendant et $\forall v \in V - S$	$1 \leq \lvert N(v) \cap S \rvert \leq 2$	indépendant $[1,2]$-ensemble
$\forall v \in V - S$	$0 \leq \lvert N(v) \cap S \rvert \leq 2$	Presque 2-parfait
S indépendant et $\forall v \in V - S$	$0 \leq \lvert N[v] \cap S \rvert \leq 2$	Indépendant presque 2-parfait

1. Tout graphe G admet un $[1,2]$-ensemble.
2. Puisque tout $[1,2]$-ensemble est un ensemble dominant, et V satisfait les conditions de la définition d'un $[1,2]$-ensemble, alors pour tout graphe G d'ordre n, $\gamma(G) \leq \gamma_{[1,2]}(G) \leq n$, *avec égalité pour la borne superieure si et seulement si* $G = \overline{K_n}$.

Notons que $\gamma(G) \leq i(G)$ pour tout graphe G, en général, les paramètres $i(G)$ et $\gamma_{[1,2]}(G)$ ne sont pas comparables.

Par exemple, considérons l'arbre T construit à partir d'un sommet u de degré $p \geq 3$, tel que chaque voisin de u a exactement deux sommets pendants.

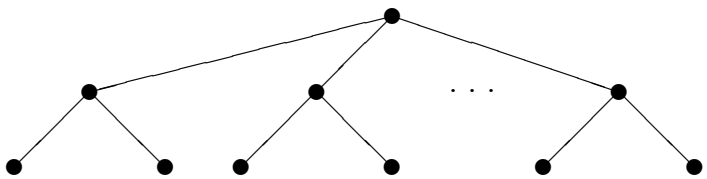


FIG. 2.1 – Exemple d'un arbre T tel que $\gamma(T) = i(T) < \gamma_{[1,2]}(T)$

Alors $\gamma(G) = i(G) = p < \gamma_{[1,2]}(G) = p + 1$.

Tandis que, pour la double étoile $S_{r,s}$ avec $r \leq s$,

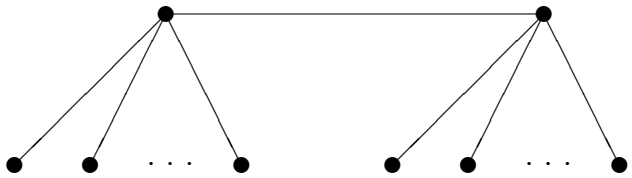


FIG. 2.2 – Exemple d'un arbre T tel que $\gamma(T) = \gamma_{[1,2]}(T) < i(T)$

$\gamma(T) = \gamma_{[1,2]}(T) = 2 < i(T) = r + 1$.

Observation 2.2.1 [8] *Si $\gamma(G) \leq 2$, alors $\gamma(G) = \gamma_{[1,2]}(G)$.*

Exemple 2.2.1 *Pour le graphe complet K_n, $\gamma(K_n) = \gamma_{[1,2]}(K_n) = 1$.*

Théorème 2.2.1 [8] *Si G est un graphe sans $K_{1,3}$ (sans griffe), alors $\gamma(G) = i(G) = \gamma_{[1,2]}(G)$.*

Corollaire 2.2.1 [8] *Si G est un graphe de degré maximum $\Delta(G) \leq 2$, alors $\gamma(G) = \gamma_{[1,2]}(G)$. En particulier si G est une chaîne P_n ou un cycle C_n,alors $\gamma(G) = \gamma_{[1,2]}(G)$.*

Proposition 2.2.1 [8] *Si chaque sommet v d'un graphe G d'ordre $n \geq 2$ est un support ou de degré au plus 2, alors $\gamma(G) = \gamma_{[1,2]}(G)$. En particulier si est une chenille ou une coronne $H \circ K_1$, alors $\gamma(G) = \gamma_{[1,2]}(G)$.*

Théorème 2.2.2 [8] *Si G est sans P_4, alors $\gamma(G) = \gamma_{[1,2]}(G)$.*

Proposition 2.2.2 [8] *Si G est un graphe non-trivial avec $\Delta(G) \geq n-3$, alors $\gamma(G) = \gamma_{[1,2]}(G)$.*

Théorème 2.2.3 [8] *Pour tout grille G, $\gamma(G) = \gamma_{[1,3]}(G)$.*

Définition 2.2.1 *La maille d'un graphe G, notée g, est égale à la longueur minimale d'un cycle induit dans G.*

Exemple 2.2.2 *un graphe G et La maille g.*

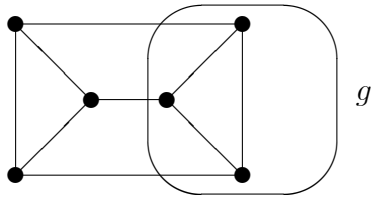


FIG. 2.3 – Exemple d'une maille tel que $g = 3$

Observation 2.2.2 [8]

1. Si G est un graphe 3-régulier d'ordre n et de maille g, alors $\gamma_{[1,2]}(G) \leq n - g$.
2. Si G est un graphe 4-régulier d'ordre n et de maille g, alors $\gamma_{[1,2]}(G) \leq n - g$.

2.2.1 Bornes sur le paramètre $\gamma_{[1,2]}(G)$

On a montionné dans la section précédente que l'ensemble de sommets V de tout graphe $G = (V, E)$ admet un $[1, 2]$-ensemble, donc pour tout graphe G d'ordre n, $\gamma_{[1,2]}(G) \leq n$. L'égalité est atteinte pour le graphe trivial $\overline{K_n}$. Ceci nous amène à poser la question suivante : "Existe-t-il des graphes G d'ordre $n \geq 2$ avec $\gamma_{[1,2]}(G) = n$?" Tels graphes semble-t-il difficile à caractériser. Dans *[8]*, les auteurs ont construit un graphe scindé G avec n sommet, vérifiant $\gamma_{[1,2]}(G) = n$.

Soit G_p un graphe obtenu d'un graphe complet K_p, avec $p \geq 5$, comme suite. Pour chaque sous-ensemble de trois sommets S de $V(K_p)$, on ajoute un nouveau sommet x_S et les arêtes $x_S u$ pour tout $u \in S$. Notons que le nombre total de sommet ajoutés est C_p^3 et le nombre total d'arêtes ajoutées est $3C_p^3$. Par exemple, le graphe G_5 est illustré dans la Figure 2.4.

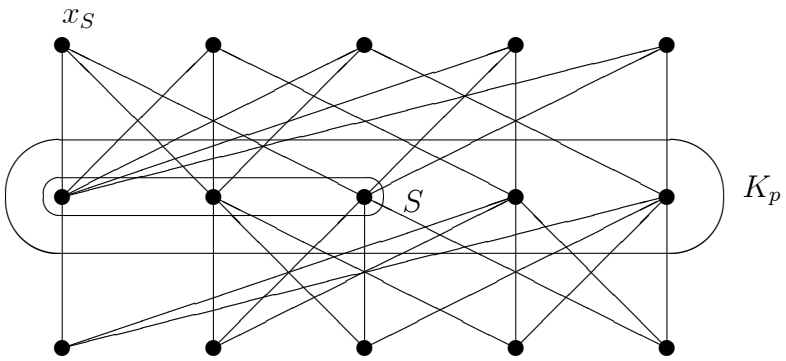


FIG. 2.4 – Le graphe G_5

Théorème 2.2.4 [8] *Pour tout graphe G_p, $p \geq 5$, d'ordre n, $\gamma_{[1,2]}(G_p) = n$.*

Plus tard, dans *[4]*, les auteurs ont donné une caractérisation des graphes scindés G d'ordre n pour lesquels $\gamma_{[1,k]}(G) = n$.

Théorème 2.2.5 [4] *Soit $G = (V, E)$ un graphe scindé (défini dans la page 9)tel que $V = K \cup S$ et $|K| = n_1$, $|S| = n_2$. Alors $\gamma_{[1,k]}(G) = n$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées.*

(i) *Il existe au moins un sommet v dans K tel que $d_G(v) \geq n_1 + k$.*

(ii) *Pour tout $i \in \{1, ...k-1]\}$ et pour tout sous clique $K_i = \{v_1, ..., v_i\}$ de K, il existe un sommet $v_t \in K - K_i$ tel que $d_{G[K \cup S_i]}(v_t) \geq n_1 + (k - i)$, où $S_i = S - N_G(K_i)$.*

(iii) *Pour tout sous clique K_k de K, $S \nsubseteq N_G(K_k)$.*

(iv) *Pour tout sommet $u \in S$, $d_G(u) \geq k + 1$.*

Les conditions *(i), (ii)* et *(iii)* forcent tout les sommets de K d'être dans D et la condition *(iv)* force tout les sommets de S d'être dans D. En utilisant ce type de graphe scindé, les auteurs ont construit un graphe G (non scindé) avec $\gamma_{[1,k]}(G) = n$.

Soit $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2), ..., G_p = (V_p, E_p)$ des p graphes scindés ayant les partitions $V_1 = K_1 \cup S_1, V_2 = K_2 \cup S_2, ..., V_p = K_p \cup S_p$. L'ensemble de sommets du graphe construit $G = (V, E)$ est donné par $V = \bigcup_{i=1}^{p} V_i$.

et l'ensemble d'arêtes est donné par $E = \bigcup_{i=1}^{p} E_i \cup E'$, où E' est un ensemble arbitraire d'arêtes entre les sommets de $K_1, K_2, ..., K_p$. On peut facilement vérifier que $\gamma_{[1,k]}(G) = n$.

2.2.2 Graphes tels que $\gamma_{[1,2]}(G) < n$

Le théorème *2.2.4* donne une famille infinie de graphes, dont le seul $[1, 2]$-ensemble est l'ensemble $V(G)$. D'autre part, les auteurs de *[8]* ont pu améliorer la borne supérieure de $|V(G)|$ pour $\gamma_{[1,2]}(G)$ pour plusieurs familles de graphes. Notons que, pour un graphe connexe G, l'ensemble $V - I$, où I est un ensemble indépendant constitué entièrement de sommets de degré 1 ou 2, est un $[1, 2]$-ensemble. Donc, on a l'observation suivante.

Observation 2.2.3 [8]*Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 2$.*

1. *Si $\delta(G) \leq 2$, alors $\gamma_{[1,2]}(G) < n$.*
2. *Si G a un ensemble independent de $p \geq 1$ sommets de degré au plus 2, alors $\gamma_{[1,2]}(T) \leq n - p < n$.*

Théorème 2.2.6 [8] *Si G est un graphe de degré maximum $\Delta(G) \leq 4$ et au moins a une arête, alors $\gamma_{[1,2]}(G) < n$.*

Corollaire 2.2.2 [8] *Si G est un graphe r-régulier non trivial avec $r \leq 4$, alors $\gamma_{[1,2]}(G) < n$.*

Le théorème *2.2.6* montre que les graphes G avec un degré maximum petit ont $\gamma_{[1,2]}(G) < n$, mais un degré maximum petit n'implique pas que le nombre de $[1,2]$-domination est égal à sa borne inférieure $\gamma(G)$. Par exemple, rappelons l'arbre T avec $\Delta(T) = p$ construit comme suite : Soit u de degré $p \geq 3$, et que chaque voisin de u a exactement deux feuilles. Alors $\gamma(G) = p$ et $\gamma_{[1,2]}(G) = p + 1$. On note que l'arbre T est d'ordre $n = 3p + 1$ et $\gamma(G) < \gamma_{[1,2]}(G)$.

Théorème 2.2.7 [8] *Si G a une clique d'ordre k dont les sommets sont de degré k ou $k+1$ dans G, alors $\gamma_{[1,2]}(G) < n - k < n$.*

Soit $\alpha'(G)$ la cardinalité d'un couplage induit maximum dans G.

Proposition 2.2.3 [8] *Si G est un graphe tel que tout sommet est de degré 2 ou 3, alors $\gamma_{[1,2]}(G) + \alpha'(G) \leq n$.*

Corollaire 2.2.3 [8] *Si G est un graphe cubique, alors $\gamma_{[1,2]}(G) + \alpha'(G) \leq n$.*

Rappelons que, pour un graphe cubique G d'ordre n et de maille g, on a $\gamma_{[1,2]}(G) \leq n - g \leq n - 3$. Chellali et al. dans *[8]* ont montré que le seul graphe cubique connexe vérifiant la borne supérieure $n - 3$ est le graphe complet K_4.

Proposition 2.2.4 [8] *Soit G un graphe cubique connexe d'ordre n. Alors $\gamma_{[1,2]}(G) = n - 3$ si et seulement si $G = K_4$.*

2.2.3 Inégalités de type Nordhaus-Gaddum

Théorème 2.2.8 [20]*Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 2$,*

$$3 \leq \gamma_{[1,2]}(G) + \gamma_{[1,2]}\left(\overline{G}\right) \leq 2n,$$
$$2 \leq \gamma_{[1,2]}(G)\,\gamma_{[1,2]}\left(\overline{G}\right) \leq n^2$$

Les bornes inférieures sont atteintes pour $G = K_{1,n-1}$.

Les bornes superieures sont atteintes pour le graphe G défini par la manière suivante : Soit $G = G_p$ le graphe construit dans Section 2, tel que $p \geq 5$. Si n_1 est l'ordre de G, alors $n_1 = p + C_p^3$. Soit $H = G \circ G$ le graphe d'ordre n, Pour un graphe simple G, le lexicographique produit $G \circ G$ est un graphe simple avec l'ensemble de sommets $V(G) \times V(G)$, dont le quel (u, v) et (u', v') sont adjacents si $uu' \in E(G)$ ou $u = u'$ et $vv' \in E(G)$. C'est à dire replacinant chaque sommet v de G par une copie de G, notée G_v, et ajoutant toutes les arêtes possibles entre les sommets de G_v et G_w si $vw \in E(G)$. Alors $n(H) = (n(G))^2$, $\gamma_{[1,2]}(H) = n(G)^2 = n(H)$, $\gamma_{[1,2]}\left(\overline{H}\right) = \gamma_{[1,2]}\left(\overline{G} \circ \overline{G}\right) = n(G)^2 = n(H)$. D'où, on conclue que $\gamma_{[1,2]}(H) + \gamma_{[1,2]}\left(\overline{H}\right) = 2n(H)$ et $\gamma_{[1,2]}(H)\,\gamma_{[1,2]}\left(\overline{H}\right) = (n(G))^2$.

Chapitre 3

Quelques résultats sur les $[1, k]$-ensembles

Ce chapitre est composé de cinq sections, dans la première section, on va présenté quelques propriétés des $[1, k]$-ensembles, particulièrement lorsque ces ensembles sont disjoints. Dans la deuxième section, nous donnons principalement quelques conditions suffisantes pour que $\gamma_{[1,k]}(G) < n$. Dans la troisième section, nous donnons des conditions nécessaaires pour qu'un graphe G vérifie $\gamma_{[1,k]}(G) = n$, ensuite nous donnons un exemple de graphe scindé tel que $\gamma_{[1,k]}(G) = n$. Dans la quatrième section, nous donnons des bornes sur$\gamma_{[1,k]}(G)$. Enfin, dans la dernière section, nous présentons des relations de type Nordhaus–Gaddum sur $\gamma_{[1,k]}(G)$.

3.1 Propriétés des $[1, k]$-ensembles

Dans cette section on va présenté quelques propriétés des $[1, k]$-ensembles, particulièrement lorsque ces ensembles des disjoints.

Proposition 3.1.1 *Si G a deux $[1, k]$-ensembles disjoints S_1 et S_2 avec $|S_1| \leq |S_2|$, alors*

1. $\delta(G) \geq 1$.

2. chaque sommet de $V - (S_1 \cup S_2)$ est de degré au moins 2.

3. $|S_2| \leq k\,|S_1|$.

Preuve. 1. Supposons qu'il existe un sommet, disant x, dans V tel que $d_G(x) = 0$. Alors $x \in S_1$ et $x \in S_2$, on a une contraduction avec le fait que S_1et S_2 sont disjoints.

2. Supposons qu'il existe un sommet, disant x, dans $V - (S_1 \cup S_2)$ de degré 1. Alors x est dominé par S_1 ou bien S_2, on a une contraduction avec le fait que S_1et S_2 sont disjoints.

3. Le nombre d'arêtes $m(S_1, S_2)$, entre S_1 et S_2, vérifiant $|S_2| \leq m(S_1, S_2) \leq k|S_1|$ et donc $|S_2| \leq k|S_1|$. ■

Les deux resultats suivants donnent des bornes superieures en fonction de la taille de S_1 et S_2.

Proposition 3.1.2 *Si G a deux $[1, k]$-ensembles disjoints S_1 et S_2 avec $|S_1| \leq |S_2|$, alors*

$$|S_1| \leq \frac{n}{2},$$

avec l'égalité si et seulement si $V = S_1 \cup S_2$ et $|S_2| = \frac{n}{2}$.

Preuve. Puisque S_1 et S_2 sont disjoints, $|S_1| + |S_2| \leq |V| = n$, et comme $|S_1| \leq |S_2|$, on a donc $2|S_1| \leq n$.

Maintenant si $|S_1| = \frac{n}{2}$, alors $|S_2| \leq n - |S_1| \leq n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$, d'autre part $|S_2| \geq |S_1| = \frac{n}{2}$. Par conséquent $|S_2| = \frac{n}{2}$ et donc $|S_1| + |S_2| = n$.

Inversement, supposons que $V = S_1 \cup S_2$ et $|S_2| = \frac{n}{2}$. Puisque S_1 et S_2 sont disjoints, $|S_1| + |S_2| = |V| = n$, alors $|S_1| = n - |S_2| = n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$. ■

Proposition 3.1.3 *Si G a deux $[1, k]$-ensembles disjoints S_1 et S_2 avec $|S_1| \leq |S_2|$, alors*

$$|S_2| \leq \frac{kn}{1+k}.$$

en plus, l'égalité est atteinte si et seulement si $|S_1| = \frac{n}{1+k}$ et $V = S_1 \cup S_2$.

Preuve. Par la proposition *3.1.1-3*, on a $|S_2| \leq k|S_1|$, et puisque $|S_1| + |S_2| \leq n$, on trouve

$$|S_2| \leq k|S_1| = k(n - |S_2|) = kn - k|S_2|,$$

et donc $|S_2| \leq \frac{kn}{1+k}$.

Maintenant si $|S_2| = \frac{kn}{1+k}$, alors $|S_2| = k\,|S_1|$, et donc $|S_1| = \frac{|S_2|}{k} = \frac{n}{1+k}$, et par suite $|S_1| + |S_2| = \frac{n}{1+k} + \frac{kn}{1+k} = n$.

Inversement, supposons que $V = S_1 \cup S_2$ et $|S_1| = \frac{n}{1+k}$. Puisque S_1 et S_2 sont disjoints, $|S_1|+|S_2| = |V| = n$, alors $|S_2| = n - |S_1| = n - \frac{n}{1+k} = \frac{kn}{1+k}$. ■

Pour le cas particulier $k = 1$, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 3.1.1 *Si G a deux $[1,1]$-ensembles disjoints S_1 et S_2 avec $|S_1| \leq |S_2|$, alors*

$$|S_1| = |S_2| \leq \frac{n}{2}.$$

Avec égalité si et seulement si $|S_1| = \frac{n}{2}$.

Preuve. Par la proposition *3.1.3*, on a $|S_2| \leq \frac{n}{2}$. D'où $|S_1| \leq |S_2| \leq \frac{n}{2}$. D'autre part, par la proposition *3.1.1* et le fait que $|S_1| \leq |S_2|$, on a $|S_1| = |S_2|$.

Maintenant si $|S_2| = \frac{n}{2}$, alors $|S_2| = |S_1| = \frac{n}{2}$.

Inversement, supposons que $|S_1| = \frac{n}{2}$. Puisque S_1 et S_2 sont disjoints, $|S_1| + |S_2| \leq n$, et comme $|S_2| \geq |S_1| = \frac{n}{2}$, on obtient $|S_2| = \frac{n}{2}$. ■

3.2 Graphes G d'ordre n avec $\gamma_{[1,k]}(G) = n$

Trivialement, le nombre de $[1,k]$-domination d'un graphe, G d'ordre n, est majoré par n. De plus, l'égalité est atteinte pour le graphe $\overline{K_n}$. Cela nous amène à se demander s'il existe des graphes nontrivial connexes G tels que $\gamma_{[1,k]}(G) = n$. Cependant, comme la caractérisation des graphes G pour lesquels $\gamma_{[1,k]}(G) = n$ semble assez difficile, nous nous limiterons aux graphes scindés. Dans le reste, on pose $X_{[j,k]} = \{v \in V : j \leq d_G(v) \leq k\}$.

On commence par les deux observations suivantes sur les graphes G pour lesquels $\gamma_{[1,k]}(G) \in \{n, n-1\}$.

Observation 3.2.1 *Soit G un graphe d'ordre n, et soit $k \geq 1$ un entier. Si $\gamma_{[1,k]}(G) = n$, alors $X_{[1,k]} = \emptyset$.*

Preuve. Supposons que $X_{[1,k]} \neq \emptyset$. Alors $X_{[1,k]}$ contient un sommet v tel que $1 \leq d_G(v) \leq k$, et donc l'ensemble $V - \{v\}$ est un $[1,k]$-ensemble. Par suite $\gamma_{[1,k]}(G) \leq |V - \{v\}| = n - 1$, contradiction. ■

Notons que l'inverse de l'observation *3.2.1* n'est pas vrai. On peut le voir par l'exemple suivant : Pour la clique K_n d'ordre $n \geq 3$, on a $X_{[1,k]} = \emptyset$, mais $\gamma_{[1,k]}(G) = 1 \neq n$, pour $1 \leq k \leq n-2$.

Observation 3.2.2 *Soit G un graphe d'ordre n, et soit $k \geq 1$ un entier. Si $\gamma_{[1,k]}(G) = n-1$, alors $X_{[1,k]} \neq \emptyset$.*

Preuve. Soit G un graphe d'ordre n avec $\gamma_{[1,k]}(G) = n - 1$, et soit S un $\gamma_{[1,k]}(G)$-ensemble. Alors $|S| = n-1$ et $V - S$ contient un unique sommet, disant u. Alors $1 \leq |N_G(u) \cap S| \leq k$, et par suite $1 \leq |d_G(u)| \leq k$, et donc $u \in X_{[1,k]}$. ■

Notons que l'inverse de l'observation *3.2.2* n'est pas vrai. On peut le voir par l'exemple suivant : Pour l'étoile $K_{1,n}$ d'ordre $n \geq 2$, on a $X_{[1,k]} \neq \emptyset$, mais $\gamma_{[1,k]}(G) = 1 \neq n - 1$, pour $1 \leq k \leq n$.

Maintenant on donne un exemple d'une famille de graphes scindés tels que $\gamma_{[1,k]}(G) = n$. Soit G_p un graphe obtenu d'un graphe complet K_p d'ordre $p \geq 2k + 1$, comme suite. Pour chaque sous-ensemble de $k + 1$ sommets S de $V(K_p)$, on ajoute un nouveau sommet x_S et les arêtes $x_S u$ pour tout $u \in S$. Notons que le nombre total de sommet ajoutés est C_p^{k+1} et le nombre total d'arêtes ajoutées est $(k+1)\, C_p^{k+1}$.

Théorème 3.2.1 *Pour tout graphe G_p avec $p \geq 2k+1$, d'ordre $n = C_p^{k+1} + p$. Alors $\gamma_{[1,k]}(G_p) = |V(G_p)| = n$.*

Preuve. Soit $V(K_p) = P = \{u_1, u_2, ..., u_p\}$, et soit X l'ensemble de C_p^{k+1} sommets ajoutés, c'est-à-dire $X = \{x_S : S$ et un $(k+1)$-sous-ensemble de $V(K_p)\}$. Soit D un $\gamma_{[1,k]}(G_p)$-ensemble, $|D \cap P| = r$ et $P' = P - D$. Supposons que $|D| < |V(G_p)| = n$. On distingue cinq cas selon r :

Cas 1. $r = p$. Alors par notre hypothèse que $\gamma_{[1,k]}(G_p) < n$, $V - D$ contient au moins un sommet dans X, disant x_S. Mais alors x_S est dominé par $k+1$ sommets de $P \subset D$, contredisant le fait que D est un $[1,k]$-ensemble de G_p.

Cas 2. $k+1 \leq r \leq p-1$. Alors chaque sommet de $P - D$ est dominé par au moins $k+1$ sommets de $D \cap P$, ce qui contredit le fait que D est un $[1,k]$-ensemble de G_p.

Cas 3. $r = 0$. Alors $X = D$, car tous les voisins de chaque sommet de X appartiennent totalement à P, de plus, puisque $p \geq 2k+1$ et tout sommet u de P est dans $C_{p-1}^{k} \geq k+1$ sous-ensembles de P de cardinalité $k+1$, il s'ensuit que u a au moins $k+1$ voisins dans D, on a aussi une contradiction.

Cas 4. $1 \leq r \leq k$. Soit X' l'ensemble des sommets de X qui n'ont pas de voisins dans $D \cap P$. Donc $X' \subseteq D$. De plus, par la minimalité de D, on obtient $D \cap X = X'$. Il est facile de voir que $|X'| = C_{p-r}^{k+1} \geq p - r$. On va montrer que P' contient un sommet avec au moins $k - r + 1$ voisins dans X'. En effet, supposons au contraire, que chaque sommet de P' a au plus $k-r$ voisins dans X'. Alors $m(P', X') \leq (k-r)|P'| = (k-r)(p-r)$. De plus, puisque chaque sommet de X' a exactement $k+1$ voisins dans P', on a $m(P', X') = (k+1)|X'| \geq (k+1)(p-r)$. Alors $(k+1)(p-r) \leq (k-r)(p-r)$ qui conduit à $k+1 \leq k-r$, et donc $r \leq -1$, contredisant le fait que $r \geq 1$. Par suite P' a un sommet v avec au moins $k - r + 1$ voisins dans X', et donc v a au moins $(k - r + 1) + r = k + 1$ voisins dans D, on a encore une contradiction. Par conséquent $\gamma_{[1,k]}(G_p) = n$. ■

3.3 Borne sur $\gamma_{[1,k]}(G)$

On donne une borne sur $\gamma_{[1,k]}(G)$ en fonction de n, $\delta(G)$ et k.

Théorème 3.3.1 *Soit G un graphe d'ordre n et de degré minimum $\delta(G) \geq 1$. Alors*

$$\gamma_{[1,k]}(G) \leq n + k - \delta(G) - 1,$$

Preuve. Soit S est un $[1,k]$-ensemble. Alors pour tout sommet $y \in V - S$, on a $1 \leq |N_G(y) \cap S| \leq k$ et $|N_G(y) \cap (V - S)| \leq |V - S| - 1$. D'autre part on a $d_G(y) = |N_G(y) \cap S| + |N_G(y) \cap (V - S)|$

et $\delta(G) \leq d_G(y)$, et donc $\delta(G) \leq d_G(y) \leq k + |V - S| - 1 = k + n - |S| - 1$. D'où $\gamma_{[1,k]}(G) \leq |S| \leq n + k - \delta(G) - 1$. ■

Maintenant on donne une condition nécessaire pour qu'un graphe G vérifie $\gamma_{[1,k]}(G) = n + k - \delta(G) - 1$.

Proposition 3.3.1 *Soit G un graphe d'ordre n et de degré minimum $\delta(G) \geq 1$, et soit k un entier tel que $1 \leq k \leq \delta(G)$. Si $\gamma_{[1,k]}(G) = n + k - \delta(G) - 1$, alors G est un graphe tel que son ensemble de sommets $V(G)$ est partitionné en deux sous ensembles A et B, avec B est une clique, chaque sommet de B est de degré $\delta(G)$, et il a exactement k voisins dans A.*

Preuve. Supposont que $\gamma_{[1,k]}(G) = n + k - \delta(G) - 1$, alors d'après le théorème précédent, on a $\delta(G) = d_G(y) = |N_G(y) \cap S| + |N_G(y) \cap (V - S)| = k + |V - S| - 1$, pour tout sommet $y \in V - S$, et donc $|N_G(y) \cap S| = k$ et $|N_G(y) \cap (V - S)| = |V - S| - 1$, alors il est facile de voir que chaque sommet de $V - S$ est de degré $\delta(G)$, il a exactement k voisins dans S, et il est adjacent à tout les sommets de $V - S$, et donc le sous graphe induit par $V - S$ est une clique. ■

Exemple 3.3.1 *La borne de la proposition précédente est atteinte pour la clique K_n et pour le cycle C_4 pour $k = 1$.*

Maintenant, nous donnons des bornes sur $\gamma_{[1,k]}$ en fonction de l'ordre n de G, pour tout $k \in \{\Delta, \Delta - 1\}$. Rappelons que $X_{[j,k]} = \{v \in V : j \leq d_G(v) \leq k\}$.

Théorème 3.3.2 *Soit G un graphe d'ordre n et de degré maximum $\Delta(G) \geq 1$. Alors*

$$\gamma_{[1,\Delta]}(G) \leq n - 1,$$

avec égalité si et seulement si $G = (n-2)K_1 \cup K_2$.

Preuve. Puisque $\Delta(G) \geq 1$, G contient une arête, disant xy. Alors $V(G) - \{y\}$ est un dominant de cardinalité $|V(G) - \{y\}| = n - 1$. D'où $\gamma_{[1,\Delta]}(G) = \gamma(G) \leq n - 1$.

Maintenant, supposons que $\gamma_{[1,\Delta]}(G) = n-1$. Supposons que $\Delta(G) \geq 2$. Alors G a un sommet v tel que $d_G(v) \geq 2$. Donc $V - N_G(v)$ est un $[1,\Delta]$-ensemble de cardinal $|V - N_G(v)| \leq n-2$, une contradiction. Finalement, supposons que G contient deux arêtes indépendants, disant uv et wz. Donc $V - \{v,z\}$ est un $[1,\Delta]$-ensemble de cardinal $|V - \{v,z\}| \leq n-2$, on a encore une contradiction. Par conséquent $G = (n-2)K_1 \cup K_2$.

Invesement, si $G = (n-2)K_1 \cup K_2$, alors il est facile de voir que $\gamma_{[1,\Delta]}(G) = n-1$. ■

Corollaire 3.3.1 *Soit G un graphe d'ordre n et de degré minimum $\delta(G) \geq 1$. Alors $\gamma_{[1,\Delta]}(G) = n-1$ si et seulement si $G = K_2$.*

Corollaire 3.3.2 *Soit G un graphe d'ordre n et de degré maximum $\Delta(G) \geq 2$. Alors $\gamma_{[1,\Delta]}(G) \leq n-2$.*

Théorème 3.3.3 *Soit G un graphe connexe d'ordre n, et de degré maximum $\Delta(G) \geq 2$. Alors*

$$\gamma_{[1,\Delta-1]}(G) \leq n-2,$$

Preuve. Soit G un graphe connexe d'ordre n avec $\Delta(G) \geq 2$. On distingue deux cas selon $X_{[2,\Delta]}$:

Cas 1. $X_{[2,\Delta]}$ est stable. Alors $G\left[X_{[2,\Delta]}\right]$ est l'union de t étoiles, noté $H_1, H_2, ..., H_t$ d'ordre au moins 3, de centres $x_1, x_2, ..., x_t$. Donc $V = \cup_{i=1}^{t} H_i$ avec $n = \sum_{i=1}^{t} |V(H_i)|$. Alors $V - (\cup_{i=1}^{t} N(x_i))$ est un $[1,\Delta-1]$-ensemble de cardinalité au plus $n-2$. D'où $\gamma_{[1,\Delta-1]}(G) \leq n-2$.

Cas 2. $X_{[2,\Delta]}$ contient deux sommets adjacents, disant y et y'. Alors $V - \{y,y'\}$ est un $[1,\Delta-1]$-ensemble , et donc $\gamma_{[1,\Delta-1]}(G) \leq |V - \{y,y'\}| = n-2$. ■

La borne précédente est atteinte pour les graphes P_3, P_4, C_3, C_4.

3.4 Graphes G d'ordre n avec $\gamma_{[1,k]}(G) < n$

Dans cette section, nous donnons quelques conditions suffisantes pour que $\gamma_{[1,k]}(G) < n$ pour tout graphes G d'ordre n. Nous commençons par le résultat suivant qui donne une condition nécessaire et suffisante pour les graphes G d'ordre n avec $\gamma_{[1,k]}(G) \leq n-p$ pour tout entier positif $p \leq n-1$.

Théorème 3.4.1 *Soient k et p des entiers positifs avec $p \leq n-1$. Pour tout graphe G d'ordre n, $\gamma_{[1,k]}(G) \leq n-p$ si et seulement s'il existe un sous-graphe induit H de G d'ordre au moins p tel que $1 \leq d_G(v) - d_H(v) \leq k$ pour tout $v \in V(H)$.*

Preuve. Soit G graphe d'ordre n tel que $\gamma_{[1,k]}(G) \leq n-p$, et soit S un $\gamma_{[1,k]}(G)$-ensemble. Alors $|V-S| \geq p$, et $1 \leq |N_G(v) \cap S| \leq k$ pour tout $v \in V-S$. Puisque $|N_G(v)| = |N_G(v) \cap S| + |N_G(v) \cap (V-S)|$, on a $1 \leq |N_G(v)| - |N_G(v) \cap (V-S)| \leq k$ pour tout $v \in V-S$. Considérons H le sous-graphe induit par $V-S$. Donc $1 \leq d_G(v) - d_H(v) \leq k$ pour tout $v \in V(H)$.

Inversement, supposons que Pour tout graphe G d'ordre n, il existe un sous-graphe induit H de G d'ordre au moins p tel que $1 \leq d_G(v) - d_H(v) \leq k$ pour tout $v \in V(H)$. Donc $V(G) - V(H)$ est un $[1,k]$-ensemble de cardinal $|V(G) - V(H)| \leq n-P$, alors $\gamma_{[1,k]}(G) \leq n-p$. ■

Corollaire 3.4.1 *Soit k un entier positif avec $k \geq 1$. Si G admet une clique d'odre p, dont les sommets sont de degré compris entre p et $p+k-1$ dans G, alors $\gamma_{[1,k]}(G) \leq n-p$.*

Corollaire 3.4.2 *Soit k un entier positif avec $k \geq 1$. Si G a un cycle induit C d'ordre p dont les sommets sont de degré compris entre 3 et $k+2$ dans G, alors $\gamma_{[1,k]}(G) \leq n-p$.*

Exemple 3.4.1 *Le graphe G de la figure 3.1 est d'orde 6, admet une clique (un cycle) d'ordre $p=3$, alors $\gamma_{[1,1]}(G) = 3 \leq 6-3 = 3$.*

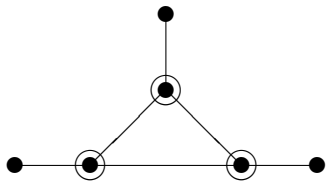


FIG. 3.1 – Exemple d'un graphe G tel que $\gamma_{[1,1]}(G) = n-p = 6-3 = 3$

Théorème 3.4.2 *Soit G un graphe d'ordre n de degré minimum $\delta(G)$ et de degré maximum $\Delta(G)$, et soit k un entier positif tel que $k \geq 2$ et $1 \leq \delta(G) \leq \Delta(G) \leq k+2$. Alors $\gamma_{[1,k]}(G) < n$.*

Preuve. Soit G un graphe d'ordre n de degré minimum $\delta(G)$ et de degré maximum $\Delta(G)$, et soit k un entier positif tel que $1 \leq \delta(G) \leq \Delta(G) \leq k+2$. Supposons que $\delta(G) \leq k$. Alors il existe

un sommet v de G tel que $d_G(v) = \delta(G)$, et donc $V(G) - \{v\}$ est un $[1,k]$-ensemble de cardinal $\gamma_{[1,k]}(G) \leq |V(G) - \{v\}| < n$.

Maintenant on suppose que $\delta(G) \geq k+1$. Alors $k+1 \leq \delta(G) \leq \Delta(G) \leq k+2$. Il clair que $\Delta(G) = k+1$ ou $k+2$. On distingue deux cas :

Cas1. $\Delta(G) = k+1$. Alors G est régulier. D'après le théorème *3.3.3*, $G \in \{C_3, C_4\}$, et donc $\gamma_{[1,k]}(G) = \gamma_{[1,\Delta-1]}(G) = n-2 < n$.

Cas2. $\Delta(G) = k+2$. Alors G et semi-régulier. Puisque $\delta(G) = k+1 \geq 3$, G contient un cycle, disant C, Alors $V(G) - V(C)$ est un $[1,k]$-ensemble, et donc $\gamma_{[1,\Delta-1]}(G) \leq V(G) - V(C) \leq n-3 < n$. ■

Corollaire 3.4.3 *Soit T un arbre d'ordre n et de degré maximum $\Delta(T)$, et soit k un entier avec $\Delta(T) \leq k+2$. Alors $\gamma_{[1,k]}(T) < n$.*

Exemple 3.4.2 *Arbre T de la figure 3.2 d'orde 7, de degré maximum $\Delta(T) = 3$, avec $k = 2$, alors $\Delta(T) = 3 < 2+2 = 4$. Donc $\gamma_{[1,k]}(T) = 2 < 7$.*

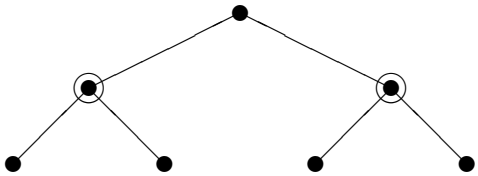


FIG. 3.2 – Exemple d'un arbre T tel que $\gamma_{[1,k]}(G) = 2 < n = 7$

3.5 Relatios de type Nordhaus–Gaddum

Théorème 3.5.1 *Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 2$,*

$$3 \leq \gamma_{[1,k]}(G) + \gamma_{[1,k]}(\overline{G}) \leq 2n,$$

avec égalité pour la borne inférieure si et seulement si G a un sommet univesel u et $\overline{G} - u$ a un sommet univesel.

Preuve. Les bornes superieures sont trivials, car $\gamma_{[1,k]}(G) \leq n$ et $\gamma_{[1,k]}(\overline{G}) \leq n$.

Montrons la borne inférieure. Soit G un graphe, et supposons que $\gamma_{[1,k]}(G) + \gamma_{[1,k]}(\overline{G}) \leq 2$. Puisque $\gamma_{[1,k]}(G) \geq 1$ et $\gamma_{[1,k]}(\overline{G}) \geq 1$, on obtient $\gamma_{[1,k]}(G) = \gamma_{[1,k]}(\overline{G}) = 1$. Donc, il existe deux distincts sommets u et v tels que $\deg_G(u) = n - 1$ et $\deg_{\overline{G}}(v) = n - 1$, une contradiction. Par conséquent $\gamma_{[1,k]}(G) + \gamma_{[1,k]}(\overline{G}) \geq 3$.

Maintenant, On suppose que $\gamma_{[1,k]}(G) + \gamma_{[1,k]}(\overline{G}) = 3$. Il est facile de voir que $\gamma_{[1,k]}(G) = 1$ et $\gamma_{[1,k]}(\overline{G}) = 2$, ou $\gamma_{[1,k]}(G) = 2$ et $\gamma_{[1,k]}(\overline{G}) = 1$. Sans perte de généralité, on suppose que $\gamma_{[1,k]}(G) = 1$ et $\gamma_{[1,k]}(\overline{G}) = 2$. Alors G a un sommet univesel u ($\deg_G(u) = n - 1$). D'autre part u est isolé dans $\overline{G}$, et donc $\overline{G} - u$ a un sommet univesel v ($\deg_G(v) = n - 2$).

L'inverse est immédiat. ■

Exemple 3.5.1 *L'étoile $K_{1,n-1}$ est un exemple de graphe vérifiant la borne inférieure dans le théorème précédent.*

$\gamma_{[1,k]}(G) = 1$ et $\gamma_{[1,k]}(\overline{G}) = 2$, alors $\gamma_{[1,k]}(G) + \gamma_{[1,k]}(\overline{G}) = 3$.

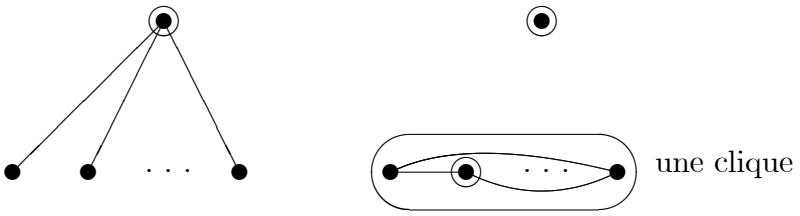


FIG. 3.3 – Un exemple d'un graphe G tel que $\gamma_{[1,k]}(G) + \gamma_{[1,k]}(\overline{G}) = 3$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés a l'étude de la $[1,k]$-domination. Plus précisément, nous nous sommes focalisés sur cinq points importants : Etablissement des propriétés des $[1,k]$-ensembles, lorsque ces ensembles sont disjoints, puit nous avons étudié les graphes G tels que $\gamma_{[1,k]}(G) < n$. Ensuite nous avons donné des conditions nécessaires pour qu'un graphe G vérifie $\gamma_{[1,k]}(G) = n$, aussi nous avons donné des bornes sur$\gamma_{[1,k]}(G)$ en fonction de n, $\delta(G)$ et k. Enfin nous avons donné des relations de type Nordhaus–Gaddum sur $\gamma_{[1,k]}(G)$.

Bibliographie

[1] C. Berge,*Graphs and Hypergraphs.* (*North Holland, Amsterdam,* 1973).

[2] M. Blidia, M. Chellali and L. Volkmann. *Bounds on the 2-domination number of graphs.* Utilitas Maths. 71 (2006) 209-216.

[3] F. Beggas, V. Turau, M. Haddad and H. Kheddouci, $[1,2]$-*Domination in generalized Petersen graphs*, Discrete Math. Algorithms and Appl. 11 (5) (2019) 1950058.

[4] A. Bishnu, K. Dutta, A. Gosh and S. Pual, $[1,j]$-*set problem in graphs*, Discrete Math. 339 (2016) 2215–2525.

[5] K.S. Booth et J.H. Johnson, *Dominating sets in chordal graphs. SIAM J. Comput.* 11(1982) 191-199.

[6] E. J. Cockayne and S. T. Hedetniemi, *Towards a theory of domation in graphs*, Net-works 7 (1977) 247-261.

[7] B. Chaluvaraju, M. Chellali and K.A. Vidya, *Perfect k-domination in graphs*, Austral. J. Combin. 48 (2010) 175–184.

[8] M. Chellali, T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi and A. McRae, $[1,2]$-*sets in graphs*, Disc. Appl. Math., 161 (18) (2013) 2885–2893.

[9] M. Chellali, O. Favaron, T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and A. McRae. *Independent* $[1,k]$-*sets in graphs*, Australasian Journal of Combinatorics 59(1) (2014) 144–156.

[10] G. H. Fricke, S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, A. A. McRae, C.K. Wallis, M. S. Jacobson, H. W. Martin and W. D. Weakley, Combinatorial problems on chessboards, A briev survey, dans Graph Theory, Combinatorics and Applications : Proc. Seventh Quad. Internat. Conf. on the Theory and Applications of Graphs, vol. 1, Y. Alavi and A. Schwenk, Eds., Wiley, (1995) 507-528.

[11] N. Ghareghani, I. Peterin and P. Sharifani, $[1, k]$-*domination number of lexicographic products of graphs*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 44 (2021) 375–392.

[12] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, New York, 1998.

[13] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater, *Domination in Graphs : Advanced Topics*, Marcel Dekker, New York, 1998.

[14] S.T. Hedetniemi et R.C. Laskar, *Introduction*. Discrete Mathematics 86 (1990) 3–9.

[15] C.F. de Jaenisch, *Applications de l'analyse mathématique au jeu des echecs*, Petro-grade (1862).

[16] R. Laskar and K. Peters, *Domination and irredundance in graphs*. Technical Report 434, Dep. Mathematical Sciences, Clemson univ, (1983).

[17] R. Laskar, J. Pfa, S.M. Hedetniemi and S.T. Hedetniemi, *On the algorithmic com-plexity of total domination*. SIAM J. Alg. Disc. Meth. Vol. 5, No3, september 1984.

[18] M.A. Meybodi, F.V. Fomin, A.E. Mouawad and F. Panolan, *On the parameterized complexity of* $[1, j]$-*domination problems*, Theoretical Computer Science 804 (2020) 207–218.

[19] O. Ore, *theory of graphs*, Amer. Math soc. Colloq. Publ. 38 (1962).

[20] X. Yang and B. Wu, $[1, 2]$-*domination in graphs,* Disc. Appl. Math., 175 (2014) 79–86.

[21] C.C. Yen and R.C.T. Lee, *The weighted perfect domination problem*, Inform. Process. Lett., 35 (6) (1990) 295–299.