Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr. Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques et Informatique



MÉMOIRE

présentée pour l'obtention du diplôme

Master en Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle

La coloration étoile dans les graphes "star coloring "

Présentée par

Kamilia ELHADI et **Zineb RABEHI**

Soutenue devant le jury composé de :

A. BENKACI, MAA, UYFM, Médéa ..... Président

A. BOUCHOU, MCA, UYFM, Médéa ..... Examinateur

A. BENDALI-BRAHAM, MCB, UYFM, Médéa..... Promotrice

2020-2021

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à la notion de la coloration étoile des sommets d'un graphe et le nombre chromatique étoile dans les graphes. Une coloration propre des sommets d'un graphe G = (V, E) consiste à affecter une couleur à chaque sommet de V de telle manière que deux sommets adjacents ne reçoivent pas la même couleur. Le nombre chromatique de G, noté $\chi(G)$, est le plus petit entier k telle que G admet une coloration propre avec k couleurs. Une coloration étoile d'un graphe G est une coloration propre de G tel qu'aucune chaîne de longueur 3 en G n'est bicolore. Le nombre chromatique étoile de G, et noté $\chi_s(G)$, est le plus petit entier k pour lequel G admet une coloration étoile avec k couleurs.

Dans ce manuscrit, nous déterminons le nombre χ_s-chromatique de certaine graphes.

ABSTRACT

In this manuscript, we are interested in the notion of the star coloring of vertices and the star chromatic number in graphs $\chi_s(G)$. A proper vertex coloring of a graph G = (V, E) consists in assigning a color to each vertex of V in such a way that two adjacent vertices do not receive the same color. The chromatic number of G, denoted $\chi(G)$, is the smallest integer k such that G admits a proper with k colors. A star coloring of a graph G is a proper coloring c of G such that no path of length 3 in G is bicolored. The star chromatic number, denoed $\chi_s(G)$ is the smallest integer k for which the graph G admits a star coloring with k colors.
In this work, we determine the exact value of the star chromatic number of some graphs.

ملخص

في هذه المذكرة نهتم بمفهوم التلوين النجمي للرؤوس والعدد اللوني النجمي في الرسوم البيانية يرمز له ب $X_S(G)$.

التلوين الأجود لرؤوس بيان $G=(V,E)$ هو تخصيص لون لكل رأس من $V(G)$ ، بحيث رأسان متجاوران لا يحصلان على نفس اللون.

العدد اللوني ل G ، هو أصغر عدد صحيح k بحيث يقبل G تلوين k مناسب للرؤوس يشار إليه ب $X(G)$، إن التلوين النجمي للرسم البياني G هو تلوين مناسب ل G بحيث لا توجد سلسلة طولها 3 في G ثنائي اللون أصغر عدد صحيح k يسمح له الرسم البياني G بقبول التلوين النجمي هو الرقم اللوني النجمي ويشار إليه ب $X_S(G)$.

في هذا العمل ، نحدد العدد اللوني النجمي لرسوم بيانية معينة.

DÉDICACE

J e dédier ce modeste travail :

A mes chers parents, ma mère et mon père

A mes frères Louai et Mohamed Amine

A mon binôme Zineb

A toute ma grande famille sans exception.

A tous les enseignants du département de Mathématique et Informatique

A mes amies : Hanan, Amira, Merieme, Faiza, Nadia, Soumia, zahira et Radia.

A l'ensemble des étudiants de ma promotion 2020 / 2021 .

Merci

E.Kamilia

DÉDICACE

J e dédier ce modeste travail :

***A** mes chers parents, ma mère et mon père*

***A** mes sœurs Zohra et Maryam*

***A** mes frères Mohamed, Hamza et Billal*

***A** mon binôme Kamilia*

***A** toute ma grande famille sans exception.*

***A** mes amies : Leyla, Messaouda, Ibtisam, Ichrak, Amel, Najah, Soumia et Nadia.*

***A** tous les enseignants du département de Mathématique et Informatique*

***A** l'ensemble des étudiants de ma promotion 2020 / 2021 .*

Merci

R.Zineb

Table des matières

RÉSUMÉ **1**

ABSTRACT **2**

RÉSUMÉ EN ARABE **3**

REMERCIEMENT **4**

INTRODUCTION **5**

1 Définitions et notations de base **8**

1.1 Définitions et notations 8

1.1.1 Terminologie 8

1.1.2 Voisinage et degré 9

1.1.3 Chaîne,cycle et maille 9

1.1.4 Distance, excentricité et rayon 10

1.1.5 Sous-graphes et graphes partiels 10

1.1.6 Ensemble minimale (resp.maximale)/minimum (resp.maximum) 11

1.1.7 Graphe connexe 11

1.1.8 Graphes particuliers 12

1.1.9 Invariants d'un graphe 15

1.2 Quelques opération sur les graphes 15
1.3 Complexité algorithmique 19
1.3.1 Problème de décision 19
1.3.2 Classes de complexité 19
1.4 Coloration des sommets d'un graphe 21
1.4.1 Coloration propre et nombre chromatique 21
1.4.2 Bornes du nombre chromatique 22

2 Coloration étoile dans les graphes **24**
2.1 Coloration étoile 24
2.2 Nombre chromatique étoile de quelques graphes 28

3 Nouveaux résultats sur la coloration étoile **33**
3.1 Nombre χ_s-chromatique du graphe complémentaire d'un cycle et d'une chaîne 33
3.2 Coloration étoile d'une roue 35
3.3 Nombre χ_s-chromatique du graphe milieu et du graphe total d'une chaîne . . 35
3.4 nombre χ_s-chromatique du prisme complémentaire de certains graphes particulier 44
3.5 Nombre χ_s-chromatique du produit cartésien $P_2 \square K_{1,n}$ (book graphe) 49
3.6 Coloration étoile d'un graphe prisme de chaîne 50
3.7 Coloration étoile d'un graphe puissance d'une chaîne 51

Conclusion et Perspectives **53**

Bibliographie **54**

Table des figures

1.1 Un graphe G = (V, E). 9

1.2 Exemple d'une chaîne P_5 et un cycle C_5. 10

1.3 Un graphe G avec un sous graphe et un graphe partiel. 11

1.4 a, b sont des sommets d'articulations et l'arête ab est un isthme. 12

1.5 Le graphe G et son complémentaire $\overline{G}$. 12

1.6 Représentation planaire du G 12

1.7 Exemple des graphes complets. 13

1.8 Un graphe biparti et un graphe biparti complet $K_{3,3}$. 13

1.9 Un graphe 3-réguliers (cubique). 14

1.10 Exemple d'un arbre et d'une forêt. 14

1.11 Une étoile $K_{1,n}$. 14

1.12 Exemple d'un graphe G avec un sous graphe et un graphe partiel. 16

1.13 Exemple d'un cycle C_6 et sa couronne. 17

1.14 Un graphe de la chaîne humaine $HC_{2,3}$ 17

1.15 Une chaîne humaine circulaire $CHC_{5,5}$. 18

1.16 Le graphe complet K_5 et son *Mycielski* graphe.. 18

1.17 Coloration propre des sommets d'un graphe G. 22

2.1 Un graphe planaire G_1 pour lequel $\chi_s(G_1) \geq 6$. 27

3.1 Coloration étoile d'un complémentaire de C_5 et C_7 avec $\chi_s(\overline{C_5}) = 4$ et $\chi_s(\overline{C_7}) = 6$. 34

3.2 Coloration étoile d'un complémentaire de P_6 et P_7 avec $\chi_s(\overline{P_6}) = 5$ et $\chi_s(\overline{P_7}) = 6$. 34

3.3 Coloration étoile d'une roue W_6, $\chi_s(W_6) = 4$. 35

3.4 Exemple d'un graphe milieu et graphe total d'une chaîne. 36

3.5 Une coloration étoile de $M(P_3)$. 37

3.6 Une coloration étoile de $M(P_4)$. 37

3.7 Une coloration étoile de $M(P_n)$, $n \geq 5$. 38

3.8 Une coloration étoile de $T(P_2)$. 38

3.9 Une coloration étoile de $T(P_3)$ 39

3.10 Une coloration étoile de $T(P_n)$,$n \geq 4$ 39

3.11 coloration étoile de $M(C_5)$et$M(C_8)$ 41

3.12 Coloration étoile de $M(C_7)$ et $M(C_9)$. 41

3.13 Coloration étoile de $M(C_7)$ et $M(C_9)$. 44

3.14 Coloration étoile de $T(C_4)$ et $T(C_8)$. 44

3.15 La coloration étoile de $P_6\overline{P_6}$ avec $\chi_s(P_6\overline{P_6}) = 6$. 46

3.16 La coloration étoile de $C_4\overline{C_4}$ avec $\chi_s(C_4\overline{C_4}) = 5$. 47

3.17 Exemple d'un prisme complémentaire de C_8 avec $\chi_s(C_8) = 9$. 48

3.18 Coloration étoile de $P_2 \square K_{1,5}$ avec $\chi_s(P_2 \square K_{1,5}) = 4$. 49

3.19 Coloration étoile de $K_{1,6}K_{1,6}$ avec $\chi_s(K_{1,6}K_{1,6}) = 4$. 50

3.20 Coloration étoile de P_4^2 avec $\chi_s(P_4^2) = 3$. 51

3.21 Coloration étoile de P_5^2 avec $\chi_s(P_5^2) = 4$. 51

3.22 Coloration étoile de P_6^2 avec $\chi_s(P_6^2) = 5$. 52

3.23 Coloration étoile de P_n^2 avec $\chi_s(P_n^2) = 5$ pour $n \geq 6$. 52

INTRODUCTION

La théorie des graphes est une branche des mathématiques discrètes. Elle représente un moyen très utile et très efficace pour résoudre des problèmes discrets de la Recherche Opérationnelle (RO). Elle est donc souvent présente dans notre vie quotidienne, sans que l'on en soit toujours conscient.

Le problème appelé "*problème des sept ponts de Koenigsberg*" posé par Euler en 1736 [17], est l'origine de cette branche. Ce problème consiste à répondre à la question suivante : "peut-on se promener dans la ville "1" en traversant chaque pont une et une seule fois?". Depuis, la théorie des graphes s'est développée, notamment grâce aux travaux de Berge [9], qui a grandement participé à sa diffusion. La théorie des graphes peut modéliser beaucoup de problèmes pratiques et dans plusieurs domaines, notamment en technologie, par exemple, les problématiques de réseaux informatiques, de réseaux routiers, de transport de marchandises, d'emplois du temps, d'électronique, de mécanique du solide et aussi les réseaux de télécommunication (voir [27]).

Un autre problème qui est parmi les premières sources d'inspiration de la théorie des graphes est *le problème des quatre couleurs*. Ce problème consiste à répondre à la question suivante : "suffit-il de quatre couleurs pour colorer n'importe quelle carte géographique de sorte que deux pays ayant une frontière commune aient des couleurs distinctes?". Mathématiquement et en théorie des graphes, ce problème consiste à répondre à la question suivante : " peut-on colorer les sommets d'un graphe planaire en utilisant quatre couleurs de telle sorte que toutes les arêtes aient des extrémités de couleurs différentes?". Ce problème a été posé sous forme de conjecture par F. Guthrie en 1852. Depuis, il est considéré comme l'un des problèmes les plus célèbres en théorie des graphes. Plus d'un siècle plus tard, en

1977, il y a eu une réponse positive à ce problème proposée par Appel, Haken et Koch [5, 6], mais à l'aide de l'ordinateur (leur preuve a nécessité plus de 1200 heures de calcul sur trois ordinateurs). Treize ans plus tard, Robertson, Sanders, Seymour et Thomas ont obtenu une preuve plus simple et plus courte, mais toujours à l'aide de l'ordinateur [31]. Bien que ce problème ait été résolu, il attire toujours de nombreux chercheurs, qui tentent de le résoudre sans l'aide d'un ordinateurs. Actuellement, on trouve dans la littérature plusieurs types de colorations : elles sont définies par la coloration des éléments du graphe (sommets, arêtes, faces...), avec une ou plusieurs contraintes supplémentaires. Il existe de nombreux résultats sur plusieurs types de colorations que nous ne détaillerons pas ici, mais nous pouvons citer l'ouvrage de Jensen et Tofl [24], "Graph Coloring Problems", qui rassemble la plupart des résultats sur plusieurs types de colorations de graphes ainsi de nombreuses questions ouvertes. La *coloration simple* ou *standard* ou encore la plus naturelle est la *coloration propre* de sommets. Une $k-coloration$ propre des sommets ($k\epsilon$N, $k \geq 1$) d'un graphe G = (V, E) est une application c qui va de l'ensemble de sommets V de G dans l'ensemble des couleurs $1, 2, ..., k$ telle que si deux sommets u et v sont adjacents alors $c(u) \neq c(v)$. Un graphe qui admet une k-coloration est dit *k-colorable*. Le *nombre chromatique*, noté χ(G), est le plus petit entier k tel que G est k-colorable. Une *classe de couleur i* est un sous-ensemble de sommets deux à deux non adjacents de V colorés avec la même couleur i. Le problème de décision lié à ce paramètre est NP-complet. Pour cette raison, plusieurs travaux ont été menés pour borner ce paramètre en fonction d'autres paramètres de graphe.

Le nombre chromatique a permis d'introduire de nombreux paramètres de coloration. La plupart de ces derniers cherchent à minimiser le nombre de couleurs nécessaires à la coloration d'un graphe.

Parmi les paramètres de coloration existants, nous avons étudié *le nombre chromatique étoile d'un graphe*.

Une coloration étoile d'un graphe G est une coloration propre c de G tel que aucune chaîne de longueur 3 en G n'est *bicolore*. Le plus petit entier k pour lequel un graphe G admet une coloration étoile est le nombre chromatique étoile et noté χ_s(G).

Dans ce mémoire nous nous intéressons à la coloration étoile. Ce mémoire est développe en trois chapitres :

Chapitre 1 : Définitions et notations basiques

Nous rappelons les principales définitions nécessaires à la compréhension du contenu de ce mémoire. En outre, nous présentons quelques opérations sur les graphes qui nous seront utiles dans la suite et nous faisons une brève présentation sur l'efficacité des algorithmes et de la complexité des problèmes. Enfin, nous exposons un aperçu de la coloration classique.

Chapitre 2 : Coloration étoile dans les graphes

Nous définissons la coloration étoile et nous donnons un recueil des principaux résultats existants sur la coloration étoile des sommets d'un graphe, bornes et valeurs exactes du nombre chromatique étoile pour certaines classe de graphes.

Chapitre 3 : Nouveaux résultats sur la coloration étoile

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la détermination de la valeur exacte et des bornes du nombre chromatique étoile de certaine graphes comme le graphe complémentaire d'un cycle C_n, complémentaire d'une chaîne P_n, la roue W_n, le graphe milieu et total d'un cycle et d'une Chaîne, le produit cartésien du $P_2 \square K_{1,n}$ le prisme complémentaire d'une chaîne $P_n\overline{P_n}$, le prisme complémentaire d'un cycle $C_n\overline{C_n}$. De plus, nous donnons le nombre chromatique étoile de prisme d'une chaîne P_nP_n, prisme d'une étoile $K_{1,n}K_{1,n}$, et le graphe puissance d'une chaîne P_n^2.

Chapitre 1

Définitions et notations de base

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions et la terminologie utilisées dans ce mémoire. D'abord, nous rappelons quelques définitions de base de la théorie des graphes. Ensuite, nous présentons quelques opérations sur les graphes qui nous seront utiles dans la suite et nous faisons l'efficacité des algorithmes et la complexité des problèmes. A la fin, nous exposons la coloration classique.

1.1 Définitions et notations

1.1.1 Terminologie

— Un *graphe* G est la donnée d'un couple (V, E) où V est un ensemble finie non vide dit ensemble des *sommets* et un ensemble E de paires de sommets, appelées *arêtes*.

— Les *sommets* sont notées de manière usuelle par des lettres minuscules : u, v, x, y, etc... et les *arêtes* sont notées uv, xy, etc...

— Deux *sommets* u et v sont dit *adjacents* s'il existe une arête entre u et v, dans ce cas u et v sont dits des *voisins* et *l'arête* uv est dite *incidente* aux sommets u et v.

— Deux arête sont dites *adjacentes* si elles possèdent une *extrémité* commune.

— Un *sommet* u est dit *isolé* s'il n'existe aucune *arête* dans E *incidente* à u.

— Si $u = v$ alors *l'arête* uv est appelée *boucle*. Les *arêtes* qui ont les mêmes *extrémité* sont appelées *arêtes multiples*.

— Un *graphe* est dit *simple* s'il est sans *boucles* et sans *arêtes multiples*.

Exemple 1.1.1 *Le graphe* G = (V, E) *donné sur la Figure 1.1 ayant pour ensemble des sommets* V = {x, u, v, w, y} *et pour ensemble des arêtes* E = {xu, xv, xw, uv, vw, wy}. *Le graphe* G = (V, E) *est d'ordre* |V| = 5 *et de taille* |E| = 6.

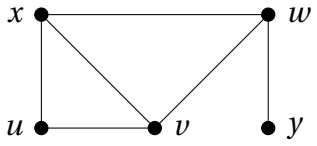


FIGURE 1.1 – Un graphe G = (V, E).

Notons que tous les graphes considérés dans ce mémoire sont non-orientés, finis, simples et sans sommets isolés.

1.1.2 Voisinage et degré

— *Le voisinage ouvert* d'un sommet $v \in V(G)$, noté $N_G(v)$, est l'ensemble de tous les sommets adjacents à v. C'est-à-dire $N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$

— *Le voisinage fermé* d'un sommet $v \in V(G)$, noté $N_G[v] = N_G(v) \cup \{u\}$

— *Le degré* d'un sommet u de G, noté $d_G(u)$, est égal au nombre de ses voisins, autrement dit $d_G(u) = |N_G(u)|$.

— *Le degré maximum* d'un graphe G, noté $\triangle$ (G), est le maximum des degrés des sommets de G.

— *Le degré minimum* d'un graphe G, noté $\delta(G)$, est le minimum des degrés des sommets de G.

— Un sommet d'ordre 1 est dit sommet *pendant*. Tout sommet adjacent à une feuille est dit un *support*.

1.1.3 Chaîne,cycle et maille

— Une *chaîne* d'ordre k (avec $k \geq 2$), notée P_k, est une suite finie d'arêtes $v_i v_{i+1}$, avec $i \in \{1, ..., k-1\}$. Les sommets v_1 et v_k sont les *extrémités* de P_k. La *longueur* de la chaîne P_k est le nombre de ses arêtes, donc c'est $k-1$. Une chaîne passant une et une seule

fois par chacune de ses arêtes est dite *simple*. Une chaîne passant une et une seule fois par chacun de ses sommets est dite *élémentaire*. Une arête reliant deux sommets non succéssifs dans une chaîne est dite une *corde*.

— Un *cycle* d'ordre k (avec $k \geq 3$), noté C_k, est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues. Un cycle élémentaire C_n induit par n sommets est un cycle dont les sommets sont distincts. Le nombre d'arêtes d'un cycle représente sa *longueur*.

Exemple 1.1.2 *La Figure 1.2 représente une chaîne* P_5 *et un cycle* C_5.



FIGURE 1.2 – Exemple d'une chaîne P_5 et un cycle C_5.

1.1.4 Distance, excentricité et rayon

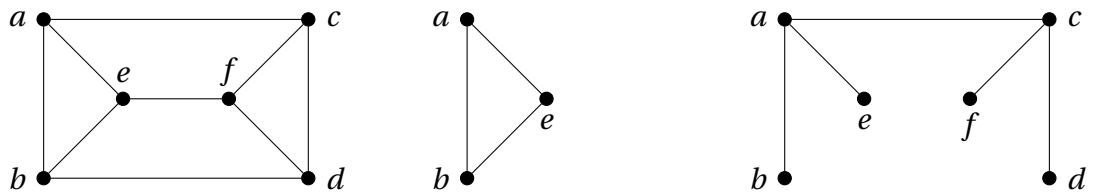
— La *distance* entre deux sommets u et v d'un graphe G, notée $d(u,v)$, est la longueur de la plus petite chaîne les reliant. *L'excentricité* de v , noté $exc(v)$, est définie par $exc(v) = \max\{d(v,w) : w \in V\}$. Le *diamètre* de G est $diam(G) = \max\{exc(v) : v \in V\}$. Le *rayon* de G est $r(G) = \min\{exc(v) : v \in V\}$. Un sommet de G ayant une excentricité minimale est appelé *centre*.

— La longueur du plus petit cycle d'un graphe G est appelée *maille* de G, notée $g(G)$.

1.1.5 Sous-graphes et graphes partiels

— $H = (V', E')$ est un sous-graphe de $G = (V, E)$ si $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$. En outre, si $E' = \{uv \in E : u, v \epsilon V'\}$, alors H est dit *sous-graphe induit* (ou engendré) par V', dans ce cas H est noté par $G[V']$.

— $H = (V', E')$ est un graphe partiel d'un graphe $G = (V, E)$ si $V' = V$ et $E' \subseteq E$.



Graphe G. Sous graphe de G. Graphe partiel d'un G.

FIGURE 1.3 – Un graphe G avec un sous graphe et un graphe partiel.

1.1.6 Ensemble minimale (resp.maximale)/minimum (resp.maximum)

Soit G = (V, E) un graphe et $\mathscr{P}$ une propriété.

— Un sous-ensemble A de V est dit *minimal* (resp.*maximal*) par rapport à la propriété $\mathscr{P}$ s'il n'existe pas d'ensemble B ⊆ A (resp.A ⊆ B) tel que G[B] vérifie $\mathscr{P}$.

— Un sous-ensemble A de V est dit *minimum* ou de *taille minimale* (resp.*maximum* ou de *taille maximale*) par rapport à la propriété $\mathscr{P}$ s'il n'existe pas d'ensemble B ⊆ V tel que G[B] vérifie $\mathscr{P}$ et |A| ≥ |B| (resp.|A| ≤ |B|).

1.1.7 Graphe connexe

— Un graphe G = (V, E) est dit *connexe* si pour toute paire de sommets, il existe une chaîne les relie. Une composante connexe de G est un sous-graphe de G qui est maximal pour la propriété d'être connexe. Un graphe qui n'est pas connexe est dit *non connexe*.

— Un sommet $v \in V$ (resp. une arête $e \in E$) est dit *sommet d'articulation* (resp. *isthme*) si sa suppression de V (resp.E) augmente le nombre de composantes connexes de G (voir la Figure 1.4)

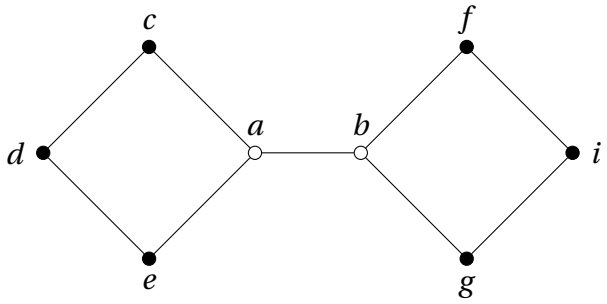


FIGURE 1.4 – a, b sont des sommets d'articulations et l'arête ab est un isthme.

1.1.8 Graphes particuliers

— Le *graphe complémentaire* d'un graphe G = (V, E) noté $\overline{G} = (V, \overline{E})$, est le graphe défini par $V(\overline{G}) = V(G)$ et $E(\overline{G}) = \{uv : u, v \in V(G) \text{ et } uv \notin E(G)\}$ (voir Figure 1.5).



FIGURE 1.5 – Le graphe G et son complémentaire $\overline{G}$.

— *Graphe planaire* est un graphe s'il peut être dessiné dans le plan de sorte que ses arêtes ne se croisent pas, (voir la Figure 1.6).

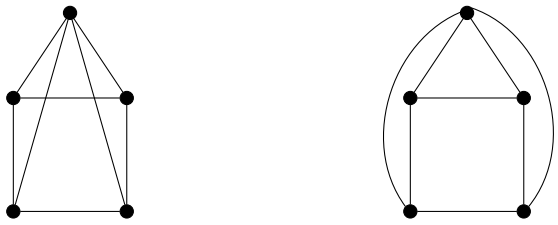
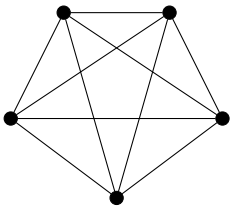
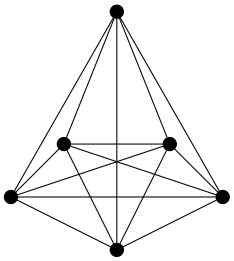


FIGURE 1.6 – Représentation planaire du G .

— *Graphe complet* d'ordre n noté K_n, est un graphe dont tous les sommets sont deux à deux adjacents, il contient $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes.



Un graphe complet d'ordre 5 K_5.

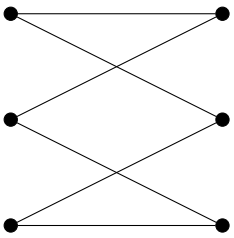


Un graphe complet d'ordre 6 K_6.

FIGURE 1.7 – Exemple des graphes complets.

— Un graphe G = (V, E) est dit *biparti* s'il existe une partition de l'ensemble des sommets de G en deux sous-ensembles V_1 et V_2 tel que toute arête de G a une extrémité dans V_1 et l'autre extrémité dans V_2. Si de plus, $|V_1| = |V_2|$ alors G est appelé *graphe biparti équilibré*.

— *Un graphe biparti* est dit *complet*, noté $K_{m,n}$, si tous les sommets de V_1 est adjacent a tous les sommet de V_2, avec $m = |V_1|$ et $n = |V_2|$.



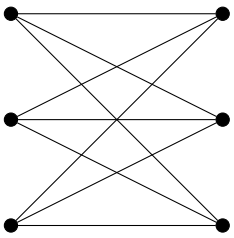


FIGURE 1.8 – Un graphe biparti et un graphe biparti complet $K_{3,3}$.

— Un graphe *régulier* est un graphe dont tous les sommets ont le même degré. Si le degré est égale à d, alors on dit que le graphe est *d-régulier*. Un graphe 3-régulier est aussi appelé *cubique* (voir la Figure 1.9). Notons que les cycles sont des graphes 2-réguliers, les couplages sont des graphes 1-réguliers, les stables sont des graphes 0-réguliers et les cliques sont des graphes $(n-1)$-réguliers.

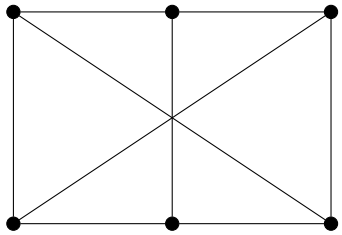
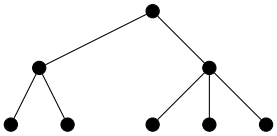


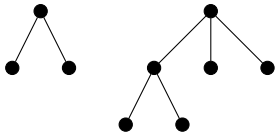
FIGURE 1.9 – Un graphe 3-réguliers (cubique).

— *Un arbre* est un graphe connexe sans cycle. Il comporte exactement $(n-1)$ arêtes, il est noté par T.

— Un graphe sans cycle qui n'est pas connexe est appelé *forêt* (toutes les composantes connexes sont des arbres).



un arbre avec cinq feuilles.



une forêt.

FIGURE 1.10 – Exemple d'un arbre et d'une forêt.

— *Une étoile* est un graphe biparti complet dans lequel $|V_1| = 1$ et $|V_2| = n$, noté $K_{1,n}$ on peut définir un étoile comme un graphe connexe dont tous les sommets sauf un sont des feuilles. Le sommet de V_1 est appelé *centre* de l'étoile.

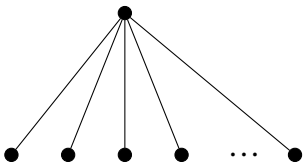


FIGURE 1.11 – Une étoile $K_{1,n}$.

— *Une galaxie* est un graphe dont toutes les composantes connexes sont des étoiles.

— *Une griffe* d'un graphe G = (V, E) est un sous-ensemble de sommets de G qui engendre une étoile $K_{1,3}$. Un graphe est dit *sans griffe* s'il ne contient pas $K_{1,3}$ comme sous-graphe induit.

1.1.9 Invariants d'un graphe

Soit G = (V, E) un graphe.

— Deux graphes G = (V, E) et G′ = (V′, E′) sont dits *isomorphes* et on écrit G ≅ G′ s'il existe une *bijection* f de V vers V′ telle que pour tous $u, v \notin$ V, on a $uv \notin$ E si et seulement si $f(u)f(v) \notin$ E′.

Si deux graphes sont isomorphes alors ils ont des propriétés communes. Ces propriétés communes sont appelées *invariants* de graphes. En d'autre termes un invariant est une propriétés stable par isomorphisme. Le nombre de sommets et d'arêtes sont deux invariants de base d'un graphe. Nous définissons ci-après quelques invariants de graphes intervenant dans la suite.

— *Un stable* de G (ou indépendant) est un sous-ensemble de sommets de G deux à deux non adjacents. Un stable maximum de G est un stable de cardinalité maximale. Le nombre de sommets d'un stable maximum dans G est appelé *nombre de stabilité* (ou nombre d'indépendance) et noté par α(G).

— *Un couplage* M dans un graphe G est un sous-ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes. Un sommet x de G est dit *saturé* par M, s'il existe une arête de M incidente à x. Un couplage est dit parfait, s'il sature tous les sommets de G. *Un couplage maximum* est un couplage de taille maximale. On note par β(G) la taille du couplage maximum dans G.

— *Une clique* de G est un sous-ensemble de sommets de G deux à deux adjacents. La taille d'une clique est le nombre de ses sommets. On note par ω(G) la taille de la clique maximum dans G.

1.2 Quelques opération sur les graphes

Nous donnons, ci-après, quelques opérations de base sur les graphes.

— *L'union* de deux graphes G = (V, E) et G′ = (V′, E′) notée G + G′ est le graphe ayant pour ensemble de sommets V ∪ V′ et ensemble d'arêtes E ∪ E′. On note par kG l'union de $k \geq 1$ copies de G.

— *Le joint* de deux graphes G = (V, E) et G′ = (V′, E′) noté G ∨ G′ est le graphe ayant pour

ensemble de sommets $V \cup V'$ et ensemble d'arêtes $(E \cup E') = \{uv : u \in V et v \in V'\}$. Autrement dit, $G \vee G'$ est le graphe obtenu à partir de $G + G'$ en ajoutant toutes les arêtes entre tous les sommets de G et G′.

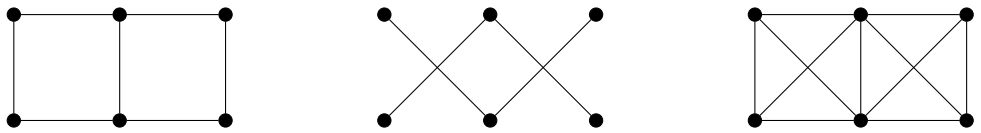
— *Le produit cartésien* de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$, noté $G_1 \square G_2$, est le graphe ayant pour ensemble de sommets $\{(u, v) : u \in V_1 et v \in V_2\}$. Deux sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont adjacents si $u_1 = u_2$ et $v_1 v_2 \in E_2$ ou $v_1 = v_2$ et $u_1 u_2 \in E_1$.

— *Une grille* est le produit cartésien de deux chaîne, noté $G_{n,m}$.

— *Le produit direct* (ou croisé) de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$, noté $G_1 \times G_2$, est le graphe ayant pour ensemble de sommets $\{(u, v) : u \epsilon V_1$ et $v \epsilon V_2\}$. Deux sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont adjacents si $v_1 v_2 \epsilon E_2$ et $u_1 u_2 \epsilon E_1$.

— *Le produit total* (ou fort) de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et$G_2 = (V_2, E_2)$, noté $G_1 \boxtimes G_2$, est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V(G_1) \times V(G_2)$ et dont deux sommets $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$ sont reliés par une arête si et seulement si $u_1 = u_2$ ou $u_1 u_2 \epsilon E(G_1)$ et $v_1 = v_2$ ou $v_1 v_2 \epsilon E(G_1)$. Ceci veut dire que $E(G_1 \boxtimes G_2) = E(G_1 \square G_2) \bigcup E(G_1 \times G_2)$.

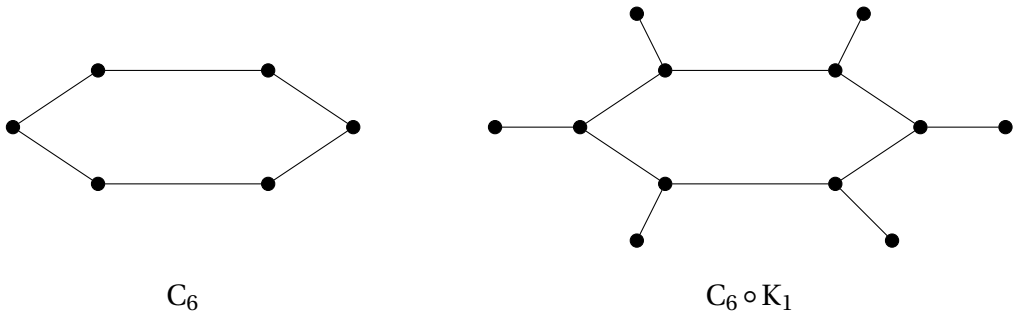
— Les trois produits sont illustrés dans la Figure suivante



$P_2 \square P_2$. $P_2 \times P_2$. $P_2 \boxtimes P_2$.

FIGURE 1.12 – Exemple d'un graphe G avec un sous graphe et un graphe partiel.

— *La couronne* d'un graphe G, notée $C_r(G)$ ou $G \circ K_1$ est le graphe obtenu en attachant à chaque sommets de G un sommet pendant, et donc il est évident que l'ordre de $C_r(G)$ est égal à $2|V(G)|$.



C_6 $C_6 \circ K_1$

FIGURE 1.13 – Exemple d'un cycle C_6 et sa couronne.

— *Un graphe de chaîne humaine* est obtenu à partir d'une chaîne $u_1, u_2, \ldots, u_{2n+1}, n \in \mathbb{N}$ en joignant un cycle de longueur $m(C_m)$ et arbre (Y_{m+1}), $m \geq 3$ à chaque u_{2i} pour $1 \leq i \leq n$. Les sommets du cycle (C_m) et Y-arbre (Y_{m+1}) sont respectivement $v_1, v_2, \ldots, v_{(m+1)n}$ et $w_1, w_2, \ldots, w_{mn}$ et les sommets du chemin sont $u_1, u_2, \ldots, u_{2n+1}$. Le graphe de la chaîne humaine est noté par $HC_{n,m}$.

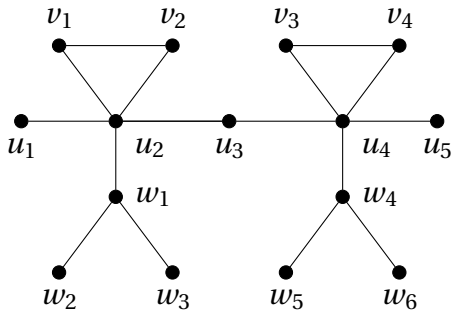


FIGURE 1.14 – Un graphe de la chaîne humaine $HC_{2,3}$.

— *Une chaîne humaine circulaire* est obtenu à partir d'un cycle (C_{2n}) $u_1, u_2, \ldots, u_{2n}, u_1$, $n \geq 3$ par joignant un cycle de longueur $m(C_m)$ et Y-arbre (Y_{m+1}), $m \geq 3$ à chaque u_{2i} pour $1 \leq i \leq n$. Les sommets du cycle (C_m) et Y-arbre (Y_{m+1}) sont respectivement $v_1, v_2, \ldots, v_{(m-1)n}$ et $w_1, w_2, \ldots, w_{mn}$ et les sommets de C_{2n} sont $u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$. La chaîne humaine circulaire est désigné par $CHC_{n,m}$.

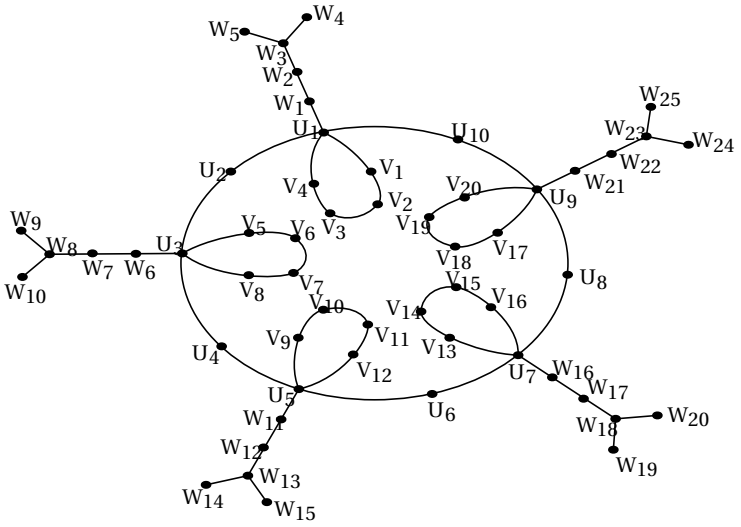


FIGURE 1.15 – Une chaîne humaine circulaire $CHC_{5,5}$.

— *Le graphe de Mycielski* introduit une intéressante transformation de graphe en 1955. La transformation est décrite comme suit :

  — Considérons tout graphe connexe simple G d'ordre n, avec $n \geq 2$ sommets nommés $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$.

  — Considérons l'ensemble de sommets $V(G) \bigcup \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ et ajoutons les arêtes v_i, x_j, v_j rt x_i : si et seulement si $v_i v_j \in E(G)$. Ajoutez un autre sommet w avec les arêtes $\{wx_i : \forall i\}$. De manière formelle, le *Mycielski* graphe noté $\mu(G)$, est le simple graphe connexe avec $V(\mu(G)) = V(G) \bigcup v' \bigcup \{w\}$ avec $V' = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ et $E(\mu(G)) = E(G) \bigcup E' \bigcup E''$ avec $E' = \{v_i x_j, v_j x_i$: si et seulement si $v_i v_j \epsilon E(G)\}$ et $E'' = \{wx_i : \forall i\}$ tel que $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$.

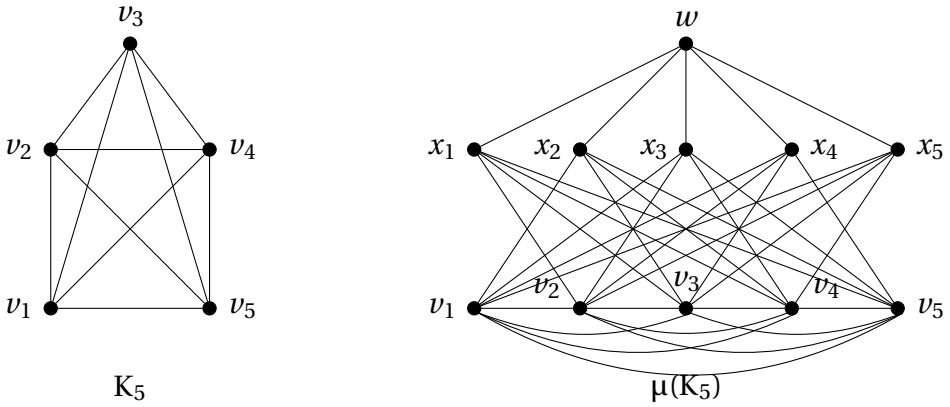


FIGURE 1.16 – Le graphe complet K_5 et son *Mycielski* graphe..

1.3 Complexité algorithmique

La théorie de la complexité s'intéresse à l'étude formelle de la difficulté des problèmes en informatique et plus précisément à leur résolution de façon éfficace, en tenant compte le temps de calcul et les données stoquées en mémoire.

1.3.1 Problème de décision

Chaque problème combinatoire peut se réduire à un problème de décision, c'est-à-dire un problème formulé comme une question dont la réponse est Oui ou Non. Un problème qui n'est pas formulé de cette manière peut être très simplement transformé en un problème de décision équivalent. Le problème du voyageur de commerce qui cherche dans un graphe à trouver la taille du cycle le plus court passant une fois par chaque sommet, peut s'énoncer en un problème de décision ainsi : Existe-t-il un cycle passant une et une seule fois par chaque sommet tel que la somme des coûts des arcs utilisés soit inférieure à k, avec $k \in \mathrm{N}$. Ce problème est équivalent au problème du voyageur de commerce au sens où si l'on sait résoudre efficacement l'un, on sait aussi résoudre efficacement l'autre.

1.3.2 Classes de complexité

La théorie de la complexité repose sur la définition de classes de complexité sont consiste ce classe les problèmes combinatoire de la complexité des algorithmes qui existent pour les résoudre.

Classe P

Un problème p est dit Polynomial (ie.$p \in \mathrm{P}$), s'il peut être résolu par un algorithme déterministe en un temps polynomial.

Prenons par exemple le problème de la connexité dans un graphe. étant donné un graphe à n sommets, il s'agit de savoir si toutes les paires de sommets sont reliées par un chemin. Pour le résoudre, on dispose de l'algorithme de parcours en profondeur qui va construire un arbre couvrant du graphe à partir d'un sommet. Si cet arbre contient tous les sommets

du graphe, alors le graphe est connexe. Le temps nécessaire pour construire cet arbre est au plus n^2, donc le problème est bien dans la classe P.

Les problèmes dans P correspondent en fait à tous les problèmes facilement solubles.

Classe NP

Un problème p est NP, s'il est résoluble par un algorithme Non déterministe en un temps polynomial par rapport à la taille de l'instance.

De façon équivalente, c'est la classe des problèmes qui admettent un algorithme dans P qui, étant donné une solution du problème NP, est capable de répondre oui ou non. Intuitivement, les problèmes dans NP sont tous les problèmes qui peuvent être résolus en énumérant l'ensemble des solutions possibles et en les testant avec un algorithme polynomial.

Par exemple, la recherche de cycle hamiltonien dans un graphe peut se faire avec deux algorithmes :

— Le premier génère l'ensemble des cycles (ce qui est exponentiel,

— Le second teste les solutions (en temps polynomial).

On constate, immédiatement, queP $\subset$ NP.

Problème NP-Complet

Un problème est NP-difficile si ce problème est au moins aussi dur que tous les problèmes dans NP. Formellement, on définit une notion de réduction :Soient p et p' deux problèmes. Une réduction de p' à p est un algorithme transformant toute instance de p' en une instance de p. Ainsi si l'on a un algorithme pour résoudre p, on sait aussi résoudre p'. p est donc au moins aussi difficile à résoudre que p'. Les problèmes les plus étudiés sont les problèmes NP-complets, parce qu'on ne sait pas les résoudre éfficacement à cause de leur indéterminisme. Il est clair que P $\in$ NP, puisqu'un algorithme déterministe est un algorithme non déterministe particulier.

p est alors NP-difficile si pour tout problème p' de NP, p' se réduit à p. Quand on parle de problèmes NP-difficiles on s'autorise uniquement des réductions dans P, c'est-à-dire que l'algorithme qui calcule le passage d'une instance de p' à une instance de p est polynomial.

Classe NP-complet

Le problème étant dans NP et NP-difficile, il est NP-complet; en d'autres termes, les problèmes NP-complets sont les plus difficiles de la classe NP.

1.4 Coloration des sommets d'un graphe

Dans cette section, nous présentons brièvement l'historique de la coloration dans les graphes, nous donnons sa définition et quelques résultats obtenus dans ce contexte.

1.4.1 Coloration propre et nombre chromatique

Un des premier problèmes de coloration de graphe est certainement le problème de quatre couleurs. Ce problème posé par Francis Guthrie 1852, consiste à répondre à la question suivant : "est-il possible de colorer toute carte de géographie avec quatre couleurs en respectant la condition que deux pays voisins ne soient pas recouverts par la même couleur?". Ce n'est qu'en 1976, que deux chercheurs américains, K. Appel et W. Haken [5, 6] ont pu répondre affirmativement à cette question à l'aide d'un ordinateur.

Définition 1.4.1 *Une coloration propre des sommets d'un graphe* $\mathrm{G}(\mathrm{V},\mathrm{E})$ *est un application* c *de l'ensemble des sommets* V *dans l'ensemble des entiers* $\{1,...,k\}$ *de telle sorte que deux sommets adjacents dans* G *reçoivent des couleurs différentes, c'est-à-dire, pour toute arêtes* $uv \in \mathrm{E}, c(u) \neq c(v)$.

Définition 1.4.2 *Le nombre chromatique de* G*, noté* $\chi(\mathrm{G})$*, est le plus petit entier* k *telle que* G *admet une coloration propres des sommets avec* k *couleurs (*k*-coloration).*

— Un graphe qui admet une k-coloration est dit k-colorable.

Exemple 1.4.1 *La Figure 1.12(a)représente une coloration propre des sommets d'un graphe* G *avec 5 couleurs, mais le nombre de couleur utilisé n'est pas minimum. Le nombre chromatique de* G *vérifier :* $3 \leq \chi(G)$, *car* G *contient* C_3 *donc au moins 3 couleurs sont nécessaire pour colorer le graphe* G.*Comme il existe une coloration utilisant 3 couleurs (Voir Figure 1.12(b)), alors* $\chi(G) \leq 3$, *on conclue que* $\chi(G) = 3$.



(a) (b)

FIGURE 1.17 – Coloration propre des sommets d'un graphe G.

1.4.2 Bornes du nombre chromatique

En 1941, R.Brooks [14] a proposé une majoration de $\chi(G)$ en fonction de degré maximum $\triangle(G)$.

Théorème 1.4.1 *[14] Pour tout graphe* G *de degré maximum* $\triangle(G)$ *on a :*

$$\chi(G) \leq \triangle(G) + 1$$

Théorème 1.4.2 *[14] Soit* G *un graphe connexe, si* G *n'est un cycle impair ni un graphe complet,*

$$\chi(G) \leq \triangle(G)$$

Le résultat suivant a été établi par C. Berge [10].

Théorème 1.4.3 *[10] Soit G un graphe d'ordre n. Alors,*

$$\chi(G)\alpha(G) \geq n \quad et \quad \chi(G) + \alpha(G) \leq n + 1$$

Gaddum et Nordhaus [30] ont prouvé le résultat suivant.

Théorème 1.4.4 *[30] Soient* G *un graphe et* $\overline{G}$ *le graphe complémentaire de* G*, on a*

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$$

Théorème 1.4.5 *[7] Si* G *est un graphe planaire. Alors*

$$\chi(G) \leq 4$$

Dans un graphe biparti $G = (V_1 \cup V_2, E)$, chaque arête doit être l'incident un sommet de V_1 et un sommet V_2, alors on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème 1.4.6 *[35] Un graphe* G *est 2-colorable si seulement si* G *est biparti.*

Le borne inférieure du nombre chromatique d'un graphe G implique le nombre chromatique de ses sous-ensemble.

Théorème 1.4.7 *[35] Si* H *est un sous-graphe d'un graphe* G*, alors*

$$\chi(H) \leq \chi(G)$$

Une borne inférieure de $\chi(G)$ est donné en fonction de la taille maximum d'un clique $\omega(G)$.En effet, si G contient une k-clique alors $\chi(G) \geq \omega(G)$.

Chapitre 2

Coloration étoile dans les graphes

Dans ce chapitre, nous présentons quelques résultats obtenu sur la coloration étoile, bornes et valeurs exactes du nombre chromatique étoile pour certains graphes.

2.1 Coloration étoile

En 1973, Grünbaum a publié un article [21] sur la coloration des graphes, dans lequel diverses restrictions ont été données au type de tous les sous-graphes ayant un nombre chromatique égale à 2 et 3.

Définition 2.1.1 *Une coloration acyclique d'un graphe* G *est une coloration propre de* G *telle que aucun cycle en* G *n'est bicolore. Le nombre chromatique acyclique, noté* $\chi_a(G)$*, est le plus petit entier k pour lequel* G *admet une coloration acyclique avec k couleurs, dans ce cas,* G *est dit acycliquement k-colorable*

Autrement dit, une coloration acyclique d'un graphe est une coloration propre telle que le sous-graphe induit par l'union de deux classes de couleurs quelconques est une collection disjointe d'arbres.

L'attention principale dans l'article [21] a été accordée aux graphes planaires. La principale conjecture de Grünbaum dans [21] était : chaque graphe planaire est acycliquement 5-colorable. Plusieurs travaux ont été mené sur cette coloration, d'où, en 1978, Kostochka

[26], a prouvé qu'il est NP-complet de décider si $\chi_a(G) \leq 3$ en général. Ensuite en 1985, Coleman et al. ont montré que la variante de décision du problème est NP-complète même lorsque G est un graphe bipartite. Gebremedhin et al. ont démontré que chaque coloration de sommet appropriée d'un graphe chordal est également une coloration acyclique, 2008 [22]. Un algorithme en temps linéaire pour colorer de manière acyclique un graphe de degré maximum 3 en utilisant 4 couleurs ou moins a été donné par Skulrattanakulchai en 2004 [33].

Dans [21], Grünbaum a introduit un autre type de coloration dite "coloration étoile".

Définition 2.1.2 *La coloration étoile d'un graphe* G *est une coloration de* G *telle que aucun chaîne de longueur 3 en* G *n'est bicolore. Le nombre chromatique étoile de* G, *noté* $\chi_s(G)$, *est le nombre minimum de couleurs nécessaires à la coloration étoile* G.

Autrement dit, une coloration étoile d'un graphe est une coloration appropriée telle que le sous-graphe induit par l'union de deux classes de couleurs quelconques est l'union disjointe d'étoiles.

Puisque l'union disjointe d'étoiles constitue une forêt, il s'ensuit que chaque coloration d'étoile est aussi une coloration acyclique. Par conséquent, nous obtenons l'observation suivante.

Observation 1 *[20] Pour tout graphe* G, *on a :*

$$\chi_a(G) \leq \chi_s(G)$$

Dans [28], A. Lyons a montré qu'une coloration acyclique d'un cographe G (graphe sans P_4) est une coloration étoile de G, et donc $\chi_a(G) = \chi_s(G)$. En outre, il a donné un algorithme en temps linéaire pour trouver une coloration optimale acyclique et étoile d'un cographe, [28].

Du point de vue de complexité, en 1984, Coleman et Moré [16], ont montré que trouver une coloration d'étoile optimale est NP-difficile même lorsque G est un graphe bipartite. Et en 2004, Albertson et al. ont démontré qu'il est NP-complet de déterminer si $\chi_s(G) \leq 3$, même si G est un graphe à la fois planaire et bipartite, [1]. Les auteurs ont également montré qu'il est NP-complet de décider si le nombre chromatique d'un graphe G est égal au nombre

chromatique étoile de G, même si G est un graphe planaire avec un nombre chromatique égal à 3. Les résultats d'inapproximation pour les deux problèmes sont donnés dans [22].

En présence de ces résultats de NP-complétude, beaucoup de travaux ont été menés pour définir des bornes pour le nombre χ_s-chromatique d'un graphe arbitraire ou bien pour déterminer sa valeur exacte pour certaines classes de graphes.

Proposition 2.1.1 *[18] Pour tout graphe* G *d'ordre n et de taille m*

$$\chi_s(G) \geq \frac{2n+1-\sqrt{\gamma}}{2}$$

où $\gamma = 4n(n-1) - 8m + 1$

Le nombre chromatique étoile , $\chi_s(G)$, a été étudié dans plusieurs articles, voir [20, 12, 13, 11, 29, 1], il existe de nombreuses bornes supérieures et inférieures pour $\chi_s(G)$ en termes de paramètres de graphe.

Observation 2 *[20] Soit* G *un graphes, alors*

$$\chi_s(G) \leq 1 + |V(G)| - \alpha(G) \tag{2.1}$$

où $\alpha(G)$ *le nombre indépendant de* G.

Observation 3 *[20] Pour tout graphe* $G = (V,E)$ *et pour tout entier* α*, tel que* $1 \leq a \leq \upsilon(G)$ *soient* $G_1, ..., G_p$ *des composantes connexes de* G *obtenues par suppression de* α *sommets de* G. *Dans ce cas,*

$$\chi_s(G) \leq max\{\chi_s(G_i)\} + \alpha$$

Dans [20], l'auteur a prouvé que pour un graphe planaire G si $g(G) \geq 5$, alors $\chi_s(G) \leq 32$, et si $g(G) \geq 7$, alors $\chi_s(G) \leq 12$. De plus, il a donné une borne de ce paramètre en fonction du degré maximum d'un graphe [20].

Proposition 2.1.2 *[20] Soit* G *un graphe de degré maximum* $\Delta(G) \geq 2$*,*

$$\chi_s(G) \leq \Delta^2(G)$$

Le théorème suivant montre la relation entre la coloration acyclique et la coloration étoile.

Théorème 2.1.1 *[12, 13] Pour tout graphe* G, *si* $\chi_a(G) \leq k$, *alors* $\chi_s(G) \leq k \cdot 2^{k-1}$.

En corollaire de ce résultat, les auteurs de [20] ont pu déterminer une borne supérieure pour $\chi_s(P)$, où P désigne la famille des graphes planaires. En effet, Borodin [11] a montré que tout graphe planaire admet une coloration acyclique en utilisant au plus 5 couleurs. Et il en déduit donc que $\chi_s(P) \leq 80$. Cependant, un résultat de [29], appliqué à la famille P, donne $\chi_s(P) \leq 30$, et ce résultat a été amélioré par la suite dans [1], où il est montré que $\chi_s(P) \leq 20$. Concernant les bornes inférieures, il existe un graphe planaire G_1 pour lequel tout la coloration des étoiles nécessite 6 couleurs (ce graphe est illustré dans la Figure 2.1) : en effet, nous pouvons d'abord noter que nous besoin d'au moins 4 couleurs à attribuer aux sommets v_1, v_2, v_3 et v_4, puisque le sous-graphe induit par ces 4 sommets est isomorphe à K_4. Utilisons alors les couleurs 1,2,3 et 4 pour colorer respectivement v_1, v_2, v_3 et v_4. Cependant, quatre couleurs ne suffisent pas à la couleur étoile G_1, car si nous ne sommes autorisés qu'à 4 couleurs alors $c(v_5) = 3$, et dans ce cas aucune couleur ne peut être donnée à v_6. Donc $X_s(P) \leq 30$. Supposons maintenant que nous ayons droit à 5 couleurs. Si $c(v_5) = 3$, alors $c(v_6) = 3$ et $c(v_7) = 3$; mais en dans ce cas, il est impossible d'attribuer une couleur à la v9. Donc $c(v_5) = 5$. Dans ce cas, si $c(v_6) = 2$, alors $c(v_7) = 5$, et v_8 ne peuvent pas recevoir de couleur. Enfin, si $c(v_6) = 5$, alors soit $c(v_7) = 1$, soit $c(v_7) = 5$. Dans le premier cas, il est impossible de colorer v_8, alors que dans le second cela implique $c(v_8) = 3$, et au sommet v_9 ne peut pas être coloré. Ainsi, 5 couleurs ne suffisent pas à la couleur étoile G_1 et par conséquent $\chi_s(G_1) \geq 6$ (on note que, sur cet exemple, il est possible de trouver une coloration étoile de G_1 avec exactement 6 couleurs).

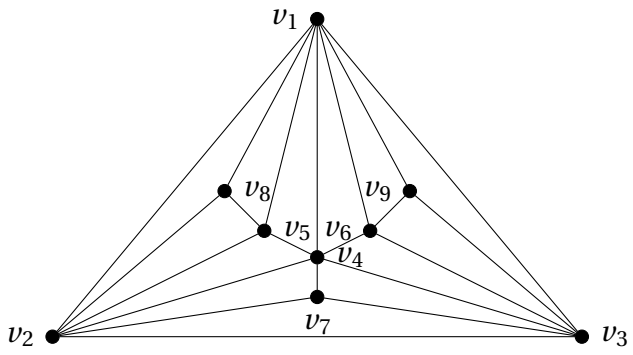


FIGURE 2.1 – Un graphe planaire G_1 pour lequel $\chi_s(G_1) \geq 6$.

Théorème 2.1.2 *[20] Soit* G *un graphe de degré maximum* $\Delta(G)$*, alors*

$$\chi_s(G) \geq \varepsilon.\frac{\Delta^{\frac{3}{2}}(G)}{(log\Delta(G))^{\frac{1}{2}}}$$

avec ε *est une constante.*

Le résultat suivant a été prouvé par M.Albestron et al.

Corollaire 2.1.1 *[1]Pour tout graphe* G*, on a*

$$\chi_s(G) \leq \chi_a(G)(2\chi_a(G) - 1)$$

.

2.2 Nombre chromatique étoile de quelques graphes

Dans [20], les auteurs ont trouvé des résultats sur la coloration étoile dans les cycle, les chaînes et les graphes bipartis complets.

Proposition 2.2.1 *[20] Soit* C_n *un cycle d'ordre n avec* $n \geq 3$ *sommets,*

$$\chi_s(C_n) = \begin{cases} 4 \text{ si } n = 5 \\ \\ 3 \text{ sinon} \end{cases}$$

Proposition 2.2.2 *[20] Soit* F_r *une famille des forêts telle que r est le rayon maximum sur toutes les arbres contenus dans* F_r*. Dans ce cas,*

$$\chi_s(F_r) = min\{3, r+1\}.$$

Proposition 2.2.3 *[20] Soit* K_n *un graphe complet d'ordre n. Alors,*

$$\chi_s(K_n) = n.$$

Proposition 2.2.4 *[20] Soit* $K_{n,m}$ *un graphe biparti complet d'ordre* $n+m$*. Alors,*

$$\chi_s(K_{n,m}) = min\{m,n\} + 1.$$

Théorème 2.2.1 *[19] Soit* K_n *graphe complet d'ordre n avec* $n \geq 2$. *Alors,*

$$\chi_s(S(K_n)) = n + 1$$

Dans [20], des études et des bornes pour le nombre chromatique étoile d'autres familles de graphes, tels que les graphes planaires, les grilles, les hypercubes de dimension d ($d \geq 3$), les tores de dimension d ($d \geq 2$), les graphes à largeur arborescente bornée et cubique sont données.

Théorème 2.2.2 *[20] Pour tout hypercube de dimension d, noté* H_d,

$$\lceil \frac{d+3}{2} \rceil \leq \chi_s(H_d) \leq d + 1$$

Dans [19], H. Furmanczyk et al.ont trouvé des résultats sur la coloration étoile des graphes splliting d'un graphes complet et biparti complet d'une chaîne et d'un cycle.

Définition 2.2.1 *Le graphe splitting d'un graphe* G, *noté par* S(G) , *est obtenu en ajoutant un nouveau sommet* v' *correspondant à chaque sommet* v *de* G, *tel que* $N_{S(G)}(v') = N_G(v)$.

Théorème 2.2.3 *[19] Soit* P_n *une chaîne avec* $n \geq 4$. *Alors,*

$$\chi_s(S(P_n)) = 4$$

Théorème 2.2.4 *[19] Soit* $K_{n,m}$ *un graphe biparti complet avec* $m \leq n$. *Alors,*

$$\chi_s(S(K_{m,n})) = 2m + 1$$

Théorème 2.2.5 *[19] Soit* C_n *un cycle avec* $n \leq 3$. *Alors,*

$$\chi_s(S(C_n)) = \begin{cases} 4 \text{ si } n \neq 1 mod 3 \text{ et } n \neq 5 \\ \\ 3 \text{ sinon} \end{cases}$$

Les résultats suivants sont prouvés par T. Han et al dans [20].

Théorème 2.2.6 *[20] pour deux graphes quelques G et H*

$$\chi_s(G\square H) \leq \chi_s(G).\chi_s(H).$$

Théorème 2.2.7 *[20] Soit* $G_{n,m}$ *est une grille tel que* $min\{n,m\} \geq 4$. *Alors,*

$$\chi_s(G(n,m)) = 5$$

Proposition 2.2.5 *[20]* $\chi_s(G(2,2)) = 3$ *et pour tout* $m \geq 4$, $\chi_s(G(2,m)) = \chi_s(G(3,m)) = 4$.

Les résultats suivants sont prouvés par Z.Shao et al. [32]

Théorème 2.2.8 *[32] Soit* P_n *une chaîne.* $\chi_s(P_2\square P_2) = 3$, $\chi_s(P_2\square P_3) = 4$ *et pour tout* $m \geq 4$,$\chi_s(P_2\square P_m) = \chi_s(P_3\square P_m) = 4$.

Théorème 2.2.9 *[32] Soit* $i, j \geq 4$, *Alors* $\chi_s(P_i\square C_j) = 5$

Théorème 2.2.10 *Soit* $i, j \geq 30$, *Alors* $\chi_s(C_i\square C_j) = 5$

Dans [32], Z. Shao et al. ont montré que $\chi_s(C_3\square C_3\square C_3) = 7$ et que $\chi_s(C_3\square C_3\square C_k) = 7$ pour $k \geq 4$ plus les deux résultats suivants.

Proposition 2.2.6 *[32]*

- $\chi_s(C_4\square C_4\square C_4) = 6$
- $\chi_s(C_6\square C_6\square C_6) = 6$
- $\chi_s(C_4\square C_4\square C_6) = 6$
- $\chi_s(C_4\square C_6\square C_6) = 6$

Théorème 2.2.11 *[32]*

- $\chi_s(P_2\square P_2\square P_k) = 4$ *si* $k = 2,3$, $\chi_s(P_2\square P_2\square P_k) = 5$ *si* $k \geq 4$.
- $\chi_s(P_3\square P_3\square P_3) = 4$, $\chi_s(P_3\square P_3\square P_k) = 5$ *si* $k \geq 4$.
- $\chi_s(P_2\square P_3\square P_3) = 4$, $\chi_s(P_2\square P_3\square P_k) = 5$ *si* $k \geq 4$.
- $\chi_s(P_2\square P_4\square P_k) = 5$ *si* $k \geq 4$.
- $\chi_s(P_i\square P_j\square P_k) = 6$ *si* $i \geq 3, j \geq 4, k \geq 4$.

Les résultats suivants sont prouvés par K.Venkatesany et al. où ils ont focalisé leur étude sur les couronnes de quelques graphes, [34].

Théorème 2.2.12 *[34] Soient* K_n *graphe complet d'ordre* $n \geq 2$ *et* P_n *une chaîne d'ordre* $n \geq 2$.*Alors*

$$\chi_s(P_n \circ K_n) = n+2.$$

Théorème 2.2.13 *[34] Soient* P_n *une chaîne et* C_n *un cycle d'ordre* $n \geq 3$ *.Alors*

$$\chi_s(P_n \circ C_n) = \begin{cases} 6 \text{ si } n = 5 \\ \\ 5 \text{ sinon} \end{cases}$$

Théorème 2.2.14 *[34] Soient* P_n *une chaîne d'ordre* $n \geq 3$ *et* $K_{1,n}$ *un étoile d'ordre n+1. Alors*

$$\chi_s(P_n \circ K_{1,n}) = 4.$$

Théorème 2.2.15 *[34] Soient* P_n *une chaîne d'ordre* $n \geq 2$ *et* K_{n_1,n_2} *est un graphe biparti d'ordre* $n_1 + n_2$ *où* $n = n_1$ *ou* $n = n_2$. *Alors*

$$\chi_s(P_n \circ K_{n_1,n_2}) = min\{n_1, n_2\} + 3$$

Théorème 2.2.16 *[34] Soient* $K_{1,n}$ *un étoile d'ordre n+1 et* K_n *est un graphe biparti avec* $n \geq 3$. *Alors*

$$\chi_s(K_{1,n} \circ K_n) = n+1.$$

Dans [4], K. Anitha et al. ont déterminer le nombre chromatique acyclique et nombre chromatique étoile des graphes dits chaînes humaines et chaînes humaines circulaire (définis dans le premier chapitre). Cette notion a été introduite en 2019 par Anitha and Selvam [2, 3].

Théorème 2.2.17 *[4] Pour* $n \geq 1$*et* $m \geq 3$

$$\chi_s(HC_{n,m}) = \begin{cases} 3 \text{ si } m \neq 5 \\ \\ 4 \text{ si } m = 5 \end{cases}$$

Théorème 2.2.18 *[4] pour $n, m \geq 3$*

$$\chi_s(\mathrm{CHC}_{n,m}) = \begin{cases} 3 \text{ si } m \neq 5 \\ \\ 4 \text{ si } m = 5 \end{cases}$$

D'autres résultats sur la coloration étoile ont été obtenus dans d'autres classes de graphes, tel que le graphe de Mycielski d'un graphe G, noté $\mu(G)$, [25].

Théorème 2.2.19 *[25] Soit K_n graphe complet avec $n \geq 2$. Alors,*

$$\chi_s(\mu(K_n)) = n + 2.$$

Théorème 2.2.20 *[25] Pour tout entier positif $n > 3$,*

$$\chi_s(\mu(P_n)) = 5.$$

Théorème 2.2.21 *[25] Pour tout entier positif n,*

$$\chi_s(\mu(C_n)) = \begin{cases} 5 \text{ si } n = 3k \text{ et } n = 3k+2 \\ \\ 6 \text{ si } n = 3k+1 \end{cases}$$

où k est un entier positif.

Théorème 2.2.22 *[25] Soient n et m des entiers positifs, alors*

$$\chi_s(\mu(K_{m,n})) = 2(min\{m, n\} + 1).$$

Chapitre 3

Nouveaux résultats sur la coloration étoile

Dans ce chapitre, nous présentons notre contribution dans le domaine de la coloration étoile, d'où nous donnons la valeur exacte du paramètre lié à cette coloration pour quelques graphes particuliers et nous le bornons pour d'autres.

3.1 Nombre χ_s-chromatique du graphe complémentaire d'un cycle et d'une chaîne

Proposition 3.1.1 *Pour tout cycle* C_n *d'ordre* $n \geq 5$*, on a :*

$$\chi_s(\overline{C_n}) = n - 1.$$

Preuve. Soit $\overline{C_n}$ le complémentaire d'un C_n d'ordre $n \geq 5$, d'ensemble des sommets $V(\overline{C_n}) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ et d'ensemble d'arêtes $E(\overline{C_n}) = \{v_i v_j : 1 < i < j \leq n \ et \ v_i v_j \notin E(C_n)\}$. Soit c une coloration étoile de $\overline{C_n}$ avec k couleurs. Si $n \geq 5$, afin de montrer que $\chi_s(\overline{C_n}) \leq n-1$, il suffit de donner une coloration de $\overline{C_n}$ avec $n-1$ couleurs comme suit : $c(v_1) = c(v_2) = 1$, et pour $i = \overline{3, n}$, $c(v_i) = i - 1$, et donc $k \leq n-1$. Montrons maintenant que $k \geq n-1$. Supposons le contraire que $k \leq n-2$, c'est-à-dire il existe au moins deux couleurs de c répétées, disons k et l, dans ce cas la structure de $\overline{C}_n$ implique qu'il existe P_4 bicolore avec les couleur$k$ et l, contradiction avec la définition de coloration étoile. ■

Remarque 3.1.1 *Pour* $n = 4$, $\overline{C_4} \equiv 2P_2$, $\chi_s(\overline{C_4}) = 2$.

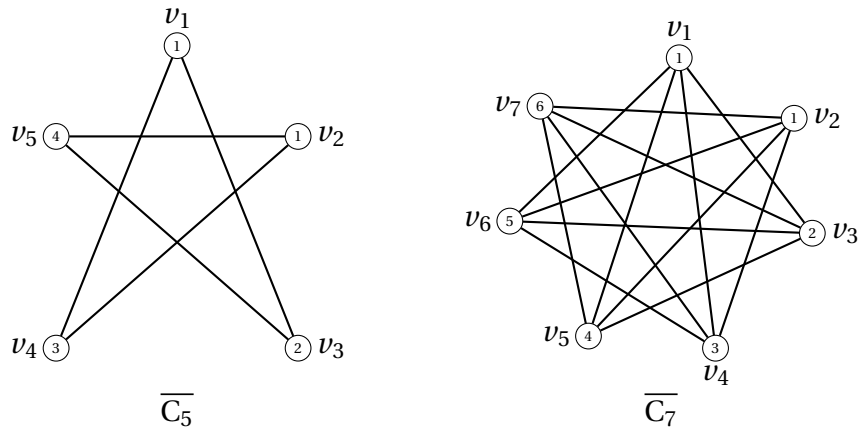


FIGURE 3.1 – Coloration étoile d'un complémentaire de C_5 et C_7 avec $\chi_s(\overline{C_5}) = 4$ et $\chi_s(\overline{C_7}) = 6$.

Proposition 3.1.2 *Pour toute chaîne* P_n *d'ordre* $n \geq 4$*, on a :*

$$\chi_s(\overline{P_n}) = n - 1.$$

Preuve. Soit $\overline{P_n}$ le complémentaire de P_n d'ordre $n \geq 4$ d'ensemble des sommets $V(\overline{P_n}) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ et d'ensemble d'arêtes $E(\overline{P_n}) = \{v_i v_j : 1 < i < j \leq n \ et \ v_i v_j \notin E(P_n)\}$. Soit c une coloration étoile de $\overline{P_n}$ avec k couleurs. Pour $n \geq 4$, afin de montrer que $\chi_s(\overline{P_n}) \leq n-1$ il suffit de donner une coloration de $\overline{P_n}$ avec $n-1$ couleurs comme suit : $c(v_1) = c(v_2) = 1$, et pour $i = \overline{3, n}$, $c(v_i) = i - 1$, et donc $k \leq n - 1$. Montrons maintenant que $k \geq n - 1$. Supposons le contraire que $k \leq n - 2$, c'est-à-dire il existe au moins deux couleurs répétées, disons k et l, dans ce cas la structure de $\overline{P_n}$ implique qu'il existe P_4 bicolore avec les couleurs k et l, contradiction avec la définition de coloration étoile. ■

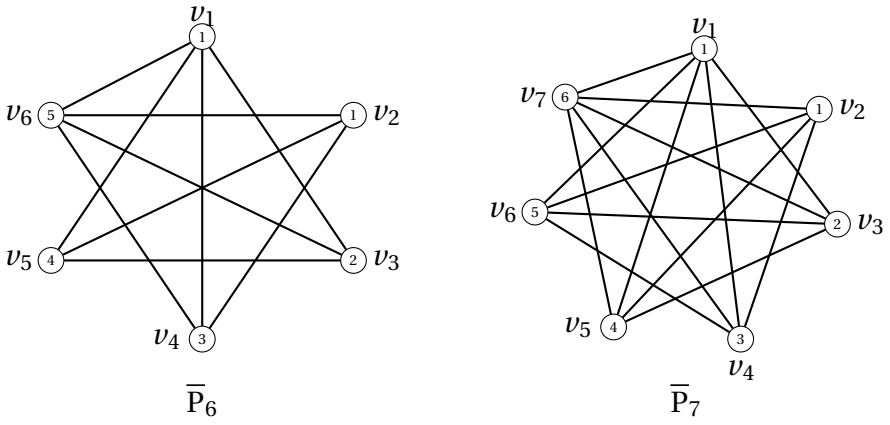


FIGURE 3.2 – Coloration étoile d'un complémentaire de P_6 et P_7 avec $\chi_s(\overline{P_6}) = 5$ et $\chi_s(\overline{P_7}) = 6$.

3.2 Coloration étoile d'une roue

Définition 3.2.1 *Une roue, notée* W_n *est un graphe formé en connectant un sommet universel à tous les sommets d'un cycle* C_{n-1}.

A partir de la coloration de C_n, on peut obtenir facilement le résultat suivant.

Corollaire 3.2.1 *Pour toute roue* W_n *d'ordre* $n \geq 3$, *on a :*

$$\chi_s(W_n) = \begin{cases} 5 \text{ si } n = 5 \\ \\ 4 \text{ sinon} \end{cases}$$

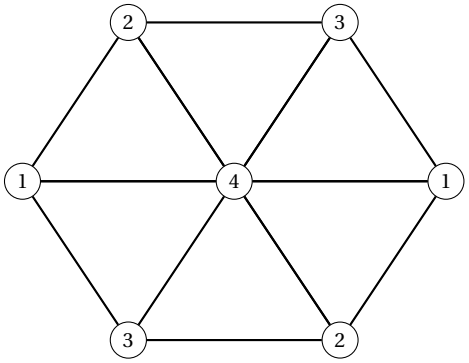


FIGURE 3.3 – Coloration étoile d'une roue W_6, $\chi_s(W_6) = 4$.

3.3 Nombre χ_s-chromatique du graphe milieu et du graphe total d'une chaîne

Définition 3.3.1 *(Hamada et Yoshimura) [23] Soit* $G = (V, E)$ *un graphe simple. Le graphe milieu de* G, *noté* M(G) *est défini comme suit : L'ensemble des sommets de* M(G) *est* $V \cup E$, *et deux sommets x, y de* M(G) *sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

— $x, y \in E$ *et x est adjacent à y dans* G.

— $x \in V$ *et* $y \in E$ *et x est incident à y dans* G.

Définition 3.3.2 *(Behzad) [8] Soit* G = (V, E) *un graphe simple. Le graphe total de* G*, noté* T(G)*, est défini comme suit : L'ensemble des sommets de* T(G) *est* V ∪ E*, et deux sommets x, y de* T(G) *sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

— $x, y \in V$ *et x, y sont adjacents dans G.*

— $x, y \in E$ *et x est adjacent à y dans* G.

— $x \in V$ *et* $y \in E$ *et x est incident à y dans* G.

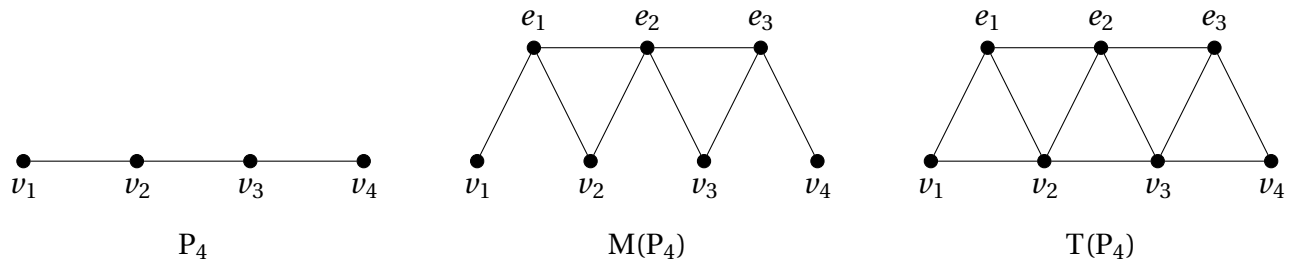


FIGURE 3.4 – Exemple d'un graphe milieu et graphe total d'une chaîne.

Proposition 3.3.1 *Pour toute chaîne* P_n *d'ordre n avec* $n \geq 3$*, on a :*

$$\chi_s(M(P_n)) = \begin{cases} 3 \text{ si } n = 3,4 \\ \\ 4 \text{ si } n \geq 5. \end{cases}$$

Preuve. Soit P_n une chaîne d'ordre $n \geq 3$ d'ensemble de sommets $V(P_n) = \{v_1, v_2, ...v_n\}$ et d'ensemble d'arêtes $E(P_n) = \{e_1, e_2, ...e_{n-1}\}$, tel que $e_j = v_j v_{j+1}$ pour $1 \leq j \leq n-1$. Soit G le graphe milieu de P_n d'ensemble de sommets $V(G) = V(P_n) \cup E(P_n)$. Soit c une coloration étoile de G avec k couleurs.

Pour $n = 3$. Comme $\alpha(G) = 3$ et en utilisant (2.1), alors $\chi_s(G) \leq 3$. Pour montrer que $\chi_s(G) \geq 3$. Supposant le contraire que $\chi_s(G) \leq 2$, contradiction avec la définition de coloration étoile. D'où $k = 3$.

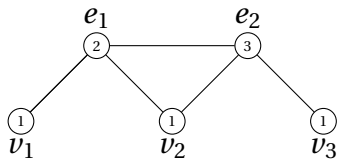


FIGURE 3.5 – Une coloration étoile de M(P_3).

Pour $n = 4$, une coloration étoile c de G avec 3 couleurs peut être obtenue comme suit : $c(v_1) = c(v_2) = c(v_3) = c(v_4) = 1$, $c(e_1) = c(e_3) = 2$, $c(e_2) = 3$, et donc $\chi_s(G) \leq 3$. Montrons maintenant que $\chi_s(G) \geq 3$. Supposons le contraire que $\chi_s(G) \leq 2$, contradiction avec la définition de coloration étoile. D'où $k = 3$.

Pour $n \geq 5$, afin de montrer que $\chi_s(G) \leq 4$, il suffit de donner une coloration c de G avec 4

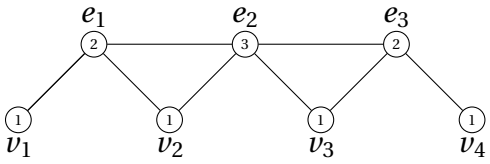


FIGURE 3.6 – Une coloration étoile de M(P_4).

couleurs comme suit : $c(v_i) = 1$ pour $i = \overline{1,n}$ et $c(e_i) = \begin{cases} 2 \text{ si } i \text{ impair ;} \\ 3 \text{ si } i \text{ pair et } (i \mod 4) \neq 0; \\ 4 \text{ si } (i \mod 4) = 0 . \end{cases}$

et donc $\chi_s(G) \leq 4$. Pour montrant que $\chi_s(G) \geq 4$. Supposons le contraire que $\chi_s(G) \leq 3$. Comme $\omega(G) = 3$, alors $\chi_s(G) \geq 3$, donc $\chi_s(G) = 3$. Comme $\{v_1, e_1, e_2, ..., e_{n-1}, v_n\}$ induisent plusieurs P_4 et comme $\chi_s(G) \leq 3$, alors les couleurs $1,2,3$ apparaissent dans l'ensemble $\{v_1, e_1, ..., e_{n-1}, v_n\}$ d'une manière alternative. Il reste de colorer les sommets v_2, v_{n-1}. Puisque $\{e_i, e_{i-1}, e_{i+1} : i = 2, n-1\}$ induisent un C_3 donc le sommet v_i prend la couleur différent à celle de e_{i-1} et e_{i+1}. Donc $1,2,3$ sont affectées aux $v_2, .., v_{n-1}$ alternativement, mais dans ce cas plusieurs P_4 bicolore sont produit (exemple $v_i e_i e_{i+1} v_{i+2}$) (pour $i = 2, ..., n-2$).

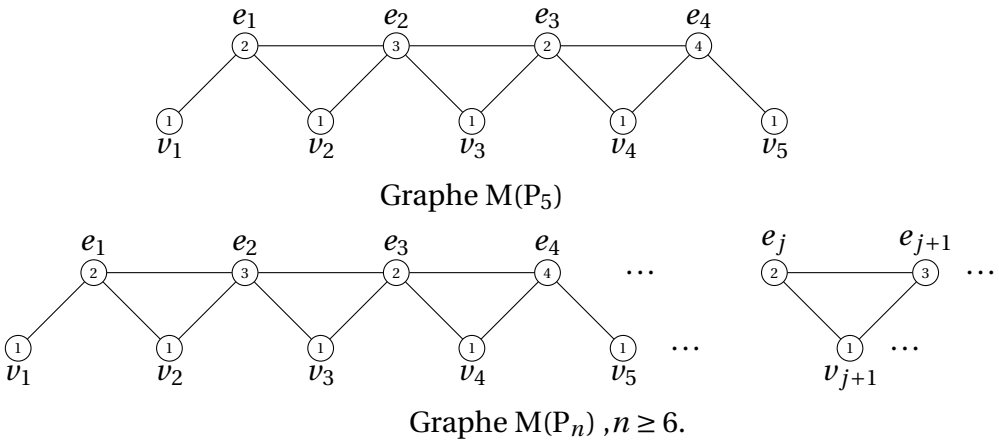


FIGURE 3.7 – Une coloration étoile de M(P_n), $n \geq 5$.

■

Proposition 3.3.2 *Soit* P_n *une chaîne d'ordre* $n \geq 3$. *Alors,*

$$\chi_s(T(P_n)) = \begin{cases} n+1 \text{ si } n = 2,3\,; \\ \\ 5 \text{ si } n \geq 4\,. \end{cases}$$

Preuve. Soit P_n une chaîne d'ordre $n \geq 2$ d'ensemble de sommets $V(P_n) = \{v_1, v_2, ...v_n\}$ et d'ensemble d'arêtes $E(P_n) = \{e_1, e_2, ...e_{n-1}\}$, tel que $e_j = v_j v_{j+1}$ pour $1 \leq j \leq n-1$. Soit G le graphe total de P_n d'ensemble de sommets $V(G) = V(P_n) \cup E(P_n)$. Soit c une coloration étoile de G avec k couleurs. Pour $n = 2$, G possède un cycle d'ordre 3, alors $\chi_s(C_3) = 3$.

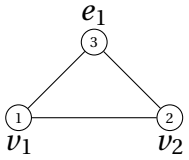


FIGURE 3.8 – Une coloration étoile de $T(P_2)$.

Pour $n = 3$, une coloration étoile c de G avec 4 couleurs peut être obtenu comme suit : $c(v_1) = 1$, $c(v_2) = 2$, $c(v_3) = c(e_1) = 3$et $c(e_2) = 4$, d'où $k \leq 4$. Montrons maintenant que $k \geq 4$, par l'absurde supposons que $k \leq 3$. Comme le graphe G possède un cycle d'ordre 5, donc au moins 4 couleurs nécessaire pour colorer le graphe G, contradiction. D'où $k = 4$. Pour $n \geq 4$,

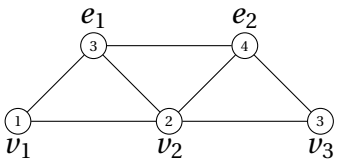
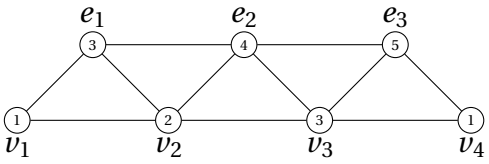


FIGURE 3.9 – Une coloration étoile de $T(P_3)$

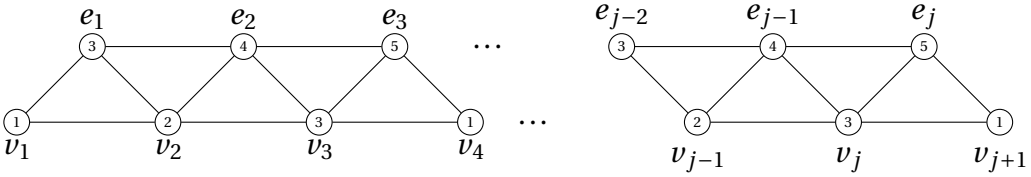
afin de montrer que $k \leq 5$, il suffit de donner une coloration étoile de G avec 5 couleurs comme suit :

$$c(v_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i \mod 3 \equiv 1; \\ 2 \text{ si } i \mod 3 \equiv 2. \\ 3 \text{ si } i \mod 3 \equiv 0. \end{cases} \quad \text{et} \quad c(e_i) = \begin{cases} 3 \text{ si } i \mod 3 \equiv 1; \\ 4 \text{ si } i \mod 3 \equiv 2; \\ 5 \text{ si } i \mod 3 \equiv 0. \end{cases}$$

Montrons maintenant que $k \geq 5$, on utilisant l'absurde $k \leq 4$. Comme $\{v_1, e_1, e_2, ..., e_{n-1}, v_n\}$ induisent plusieurs P_4, alors les couleurs $1, 2, 3$ apparaissent dans l'ensemble $\{v_1, e_1, e_2, ..., e_{n-1}, v_n\}$ d'un manière alternative. Il reste colorer le sommet v_2 qui prend la couleur différente à celle de v_1, e_1, e_2, on colorer le sommet v_3 par la couleur e_1 et colorer v_4 avec une nouvelle couleur, contradiction. ■



Graphe $T(P_4)$



Graphe $T(P_n)$, $n \geq 5$

FIGURE 3.10 – Une coloration étoile de $T(P_n)$, $n \geq 4$

Proposition 3.3.3 *Soit* C_n *un cycle d'ordre* $n \geq 3$. *Alors,*

$$\chi_s(M(C_n)) = \begin{cases} 5 \textit{ si } n = 5 ; \\ \\ 4 \textit{ sinon} . \end{cases}$$

Preuve. Soit C_n un cycle d'ordre $n \geq 3$ d'ensemble de sommets $V(C_n) = \{v_1, ..., v_n\}$ et d'ensemble d'arêtes $E(C_n) = \{e_1, ..., e_n\}$, tel que $e_j = v_j v_{j+1}$ pour $1 \leq j \leq n-1$. Soit G le graphe milieu de C_n d'ensemble de sommets $V(G) = V(C_n) \cup E(C_n)$. Soit c une coloration étoile de G avec k couleurs. Pour $n = 5$, afin de montrer que $k \leq 5$ il suffit de donner une coloration de G avec 5 couleurs comme suit : $c(e_1) = 1, c(e_2) = c(e_4) = 2, c(e_3) = 3, c(e_5) = 4$, et $c(v_1) = 2, c(v_2) = c(v_3) = 1, c(v_4) = 1, c(v_5) = 5$.

Montrons maintenant que $k \geq 5$, nous pouvons d'abord noter que nous besoin de 4 couleurs $1, 2, 3, 4$ aux sommets $e_1, ..., e_n$, mais 4 couleurs ne suffisent pas à la coloration étoile de G, car s'il y a 4 couleurs $c(v_1) = 2, c(v_2) = c(v_3) = 4, c(v_4) = 1$ et dans ce cas aucune couleurs ne peut être à v_5. Par conséquent $k \geq 5$.
Pour $n = 3p$, afin de montrer que $k \leq 4$ il suffit de donner une coloration c de G avec 4 couleurs comme suit :

$$c(e_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i \mod 3 \equiv 1; \\ 2 \text{ si } i \mod 3 \equiv 2. \\ 3 \text{ si } i \mod 3 \equiv 0. \end{cases} \quad \text{et} \quad c(v_i) = 4.$$

Montrons maintenant que $k \geq 4$, nous pouvons d'abord noter que nous besoin de 3 couleurs $1, 2$ et 3 aux sommets $e_1, ..., e_n$, mais 3 couleurs ne suffisent pas à la coloration étoile de G, car s'il y a 3 couleurs alors $c(v_2) = 1$ et dans ce cas aucune couleurs ne peut être donnée à v_3. Par conséquent $k \geq 4$.
Pour $n = 3p + 1$, afin de montrer que $k \leq 4$ il suffit de donner une coloration c de G avec 4 couleurs comme suit :

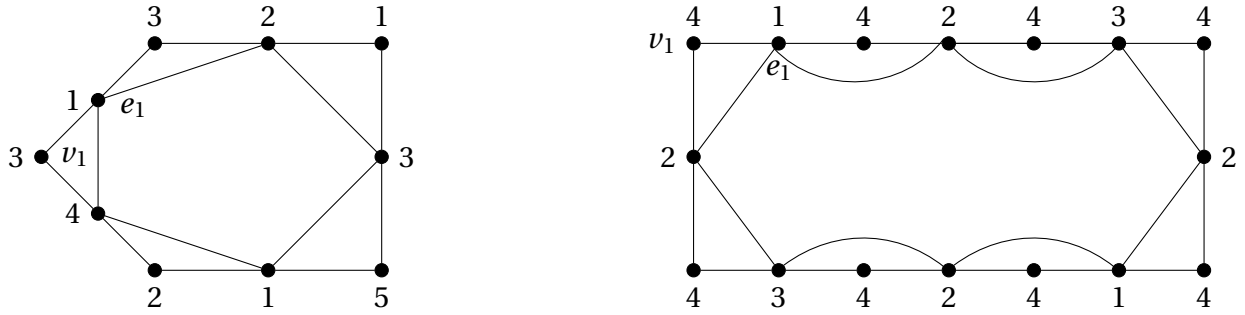
$$c(e_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i mod 3 \equiv 1, i = 1, ..., n-1; \\ 2 \text{ si } i mod 3 \equiv 2 \text{ et } i = n; \\ 3 \text{ si } i mod 3 \equiv 0, i = 1, ..., n-1. \end{cases} \quad \text{et} \quad c(v_i) = 4.$$

Montrons maintenant que $k \geq 4$, nous pouvons d'abord noter que nous besoin de 3 couleurs $1, 2$ et 3 aux sommets $e_1, ..., e_n$, mais 3 couleurs ne suffisent pas à la coloration étoile de G, car s'il y a 3 couleurs alors $c(v_2) = 3$ et dans ce cas aucune couleurs ne peut être donnée à v_3. Par conséquent $k \geq 4$.

Pour $n = 3p+2$, afin de montrer que $k \leq 4$ il suffit de donner une coloration c de G avec 4 couleurs comme suit :

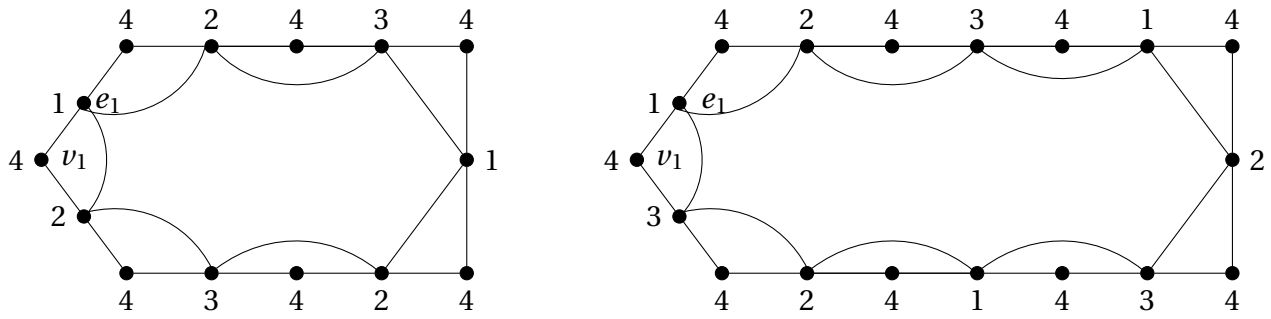
$$c(e_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i \mod 2 \equiv 1; \\ 2 \text{ si } i \mod 2 \equiv 0; \quad \text{et} \quad c(v_i) = 4. \\ 3 \text{ sinon .} \end{cases}$$

Montrons maintenant que $k \geq 4$, nous pouvons d'abord noter que nous avons besoin de 3 couleurs 1,2 et 3 aux sommets $e_1, ..., e_n$, mais 3 couleurs ne suffisent pas à la coloration étoile de G, car dans ce cas aucune couleurs ne peut être donnée à v_2. Par conséquent $k \geq 4$.



$\chi_s(\mathrm{M}(\mathrm{C}_5)) = 5$ $\chi_s(\mathrm{M}(\mathrm{C}_8)) = 4$

FIGURE 3.11 – coloration étoile de $\mathrm{M}(\mathrm{C}_5)$et$\mathrm{M}(\mathrm{C}_8)$



$\chi_s(\mathrm{M}(\mathrm{C}_7)) = 4$ $\chi_s(\mathrm{M}(\mathrm{C}_9)) = 4$

FIGURE 3.12 – Coloration étoile de $\mathrm{M}(\mathrm{C}_7)$ et $\mathrm{M}(\mathrm{C}_9)$.

■

Proposition 3.3.4 *Pour tout cycle* C_n *d'ordre* $n \geq 3$*, on a :*

$$\chi_s(T(C_n)) = \begin{cases} 5 \text{ si } n = 3p \text{ et } n = 5; \\ \\ 6 \text{ sinon}. \end{cases}$$

Preuve. Soit C_n un cycle d'ordre $n \geq 3$ d'ensemble de sommets $V(C_n) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ et d'ensemble d'arêtes $E(C_n) = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$, tel que $e_j = v_j v_{j+1}$ pour $1 \leq j \leq n-1$. Soit G le graphe total de C_n d'ensemble de sommets $V(G) = V(C_n) \cup E(G)$. Soit c une coloration étoile de G avec k couleurs. Pour $n = 4$, afin de montrer que $k \leq 6$ il suffit de donner une coloration de G avec 6 couleurs comme suit : $c(e_1) = 1, c(e_2) = c(e_4) = 2, c(e_3) = 3$ et $c(v_1) = 6, c(v_2) = c(v_4) = 4, c(v_3) = 5$. Montrons maintenant que $k \geq 6$, nous pouvons d'abord noter que nous besoin de 3 couleurs 1,2 et 3 aux sommets $e_1, ..., e_n$, mais 3 couleurs ne suffisent pas à la coloration étoile de G car s'il y a 3 couleurs, dans ce cas aucune couleurs ne peut être donnée à v_2, supposons maintenant que nous ayons 4 couleurs. Si $c(v_2) = 4$ dans ce cas aucune couleurs ne peut être donnée à v_3, supposons maintenant que nous ayons 5 couleurs. Si $c(v_3) = 5, c(v_3) = 4$ dans ce cas il impossible d'attribuer une couleurs à la v_1. Ainsi, 5 couleurs ne suffisent pas à la coloration étoile de G, par conséquent $k \geq 6$.

Pour $n = 5$, afin de montrer que $k \leq 5$ il suffit de donner une coloration c de G avec 5 couleurs comme suit :$c(e_1) = c(e_4) = 1, c(v_2) = c(e_3) = 3, c(v_3) = c(e_5) = 4, c(v_4) = c(v_1) = 5, c(v_5) = c(e_2) = 2$. Montrons maintenant que $k \geq 5$, nous pouvons d'abord noter que nous besoin de 4 couleurs 1,2,3 et 4 aux sommets $e_1, ..., e_n$, mais 4 couleurs ne suffisent pas à la coloration étoile de G, car s'il y a 4 couleurs alors $c(v_2) = 3, c(v_3) = 4$ et dans ce cas aucune couleurs ne peut être donnée a v_4, par conséquent $k \geq 5$.
Pour $n = 3p$, afin de montrer que $k \leq 5$ il suffit de donner une coloration c de G avec 5 couleurs comme suit :

$$c(e_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i \mod 3 \equiv 1; \\ 2 \text{ si } i \mod 3 \equiv 2; \\ 3 \text{ si } i \mod 3 \equiv 0. \end{cases} \quad \text{et} \quad c(v_i) = \begin{cases} 5 \text{ si } i \mod 3 \equiv 1; \\ 3 \text{ si } i \mod 3 \equiv 2; \\ 4 \text{ si } i \mod 3 \equiv 0. \end{cases}$$

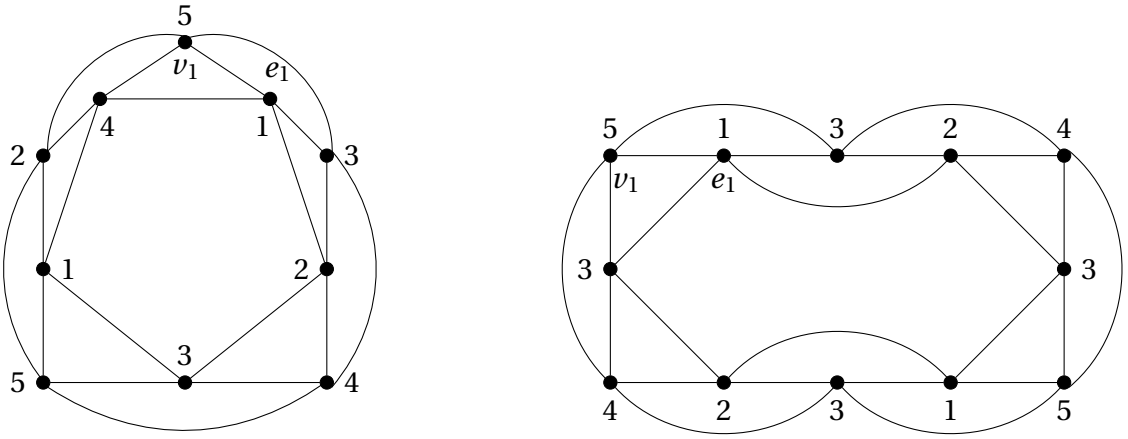
Montrons maintenant que $k \geq 5$, nous pouvons d'abord noter que nous besoin de 3 cou-

leurs 1,2 et 3 aux sommets $e_1, e_2, ..., e_n$, mais 3 couleurs ne suffisent pas à la coloration étoile de G, car s'il y a 3 couleurs alors $c(v_2) = 3$ et dans ce cas aucune couleur ne peut être donnée à v_3, supposons que nous ayons 4 couleurs. Si $c(v_2) = 3$ alors $c(v_3) = 4$, mais dans ce cas il est impossible d'attribuer une couleurs à la v_4. Ainsi, 4 couleurs ne suffisent pas à la coloration étoile de G par conséquent $k \geq 5$.

Pour $n = 3p + 1$, afin de montrer que $k \leq 6$ il suffit de donner une coloration c de G avec 6 couleurs comme suit :$c(v_1) = 6, c(v_2) = 3, c(v_3) = 4, c(v_4) = 5$,

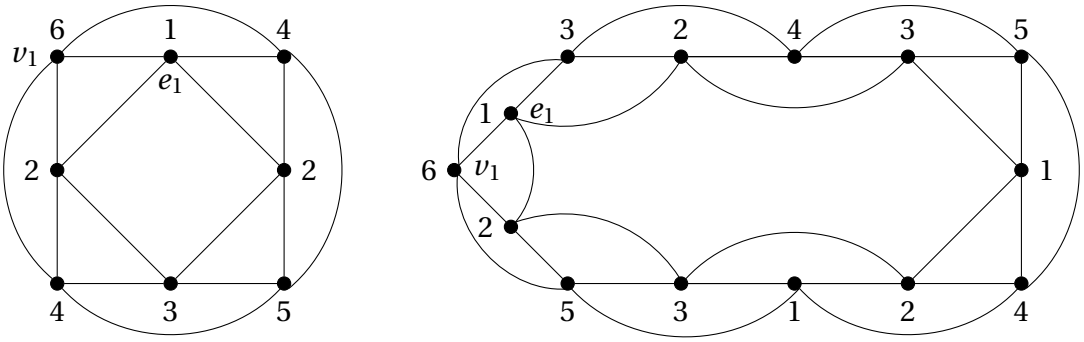
$$c(e_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i \mod 3 \equiv 1, \ i = 1, ..., n-1; \\ 2 \text{ si } i \mod 3 \equiv 2, \text{ et } i = n; \\ 3 \text{ si } i \mod 3 \equiv 0, \ i = 1, ..., n-1. \end{cases} \quad \text{et} \quad c(v_i) = \begin{cases} 4 \text{ si } i \mod 3 \equiv 2; \\ 1 \text{ si } i \mod 3 \equiv 0; \\ 5 \text{ si } i \mod 3 \equiv 1. \\ \text{pour } 5 \leq i \leq n \end{cases}$$

Montrons maintenant que$k \geq 6$, nous pouvons d'abord noter que nous besoin de 3 couleurs 1,2,3 aux sommets $e_1, ..., e_n$ mais 3 couleurs ne suffisent pas à la coloration étoile de G, car s'il y a 3 couleurs alors $c(v_2) = 3$ et dans ce cas aucune couleur ne peut être donnée à v_3, supposons maintenant que nous ayons 4 couleurs si $c(v_3) = 4$ alors dans ce cas, il est impossible d'attribuer une couleur à la v_4 donc le sommets v_4 prend la couleur 5 et 4,1,5 sont affectée aux sommets $v_5, ..., v_{n-1}$ alternativement, enfin le sommets v_1 ne peut pas être coloré. Ainsi, 5 couleurs ne suffisent pas à la coloration étoile de G par conséquent $k \geq 6$.
Pour $n = 3p + 2$, afin de montrer que $k \leq 6$ il suffit de donner une coloration c de G avec 6 couleurs : l'ensemble $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ coloré d'une manière alternative 1,2 et 3.Pour 5 sommets restant, on donne la coloration suivant : 2,1,2,3,2. L'ensemble $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ coloré d'une manière alternative 3,4 et 5.Pour 8 sommets restants on donne la coloration suivant : 4,1,5,4,5,6,4,5. Montrons maintenant que $k \geq 6$, nous pouvons d'abord noter que nous besoin de 3 couleurs 1,2,3 aux sommets $e_1, ..., e_n$, mais 3 couleurs ne suffisent pas à la coloration étoile de G, car s'il y a 3 couleurs alors $c(v_2) = 3$ et dans ce cas aucune couleur ne peut être donnée à v_3, supposons maintenant que nous ayons 4 couleurs si $c(v_3) = 4$ alors dans ce cas, il est impossible d'attribuer une couleur à la v_4, donc le sommets v_4 prend la couleur 5, mais 5 couleurs ne suffisent pas à la coloration étoile de G, car s'il y a 5 couleurs alors les restes sommets sont colorés avec 5 couleurs et dans ce cas aucun couleur ne peut être donnée à v_{n-1}, par conséquent $k \geq 6$.



$\chi_s(T(C_5)) = 5$ $\chi_s(T(C_6)) = 5$

FIGURE 3.13 – Coloration étoile de $M(C_7)$ et $M(C_9)$.



$\chi_s(T(C_4)) = 6$ $\chi_s(T(P_7)) = 6$

FIGURE 3.14 – Coloration étoile de $T(C_4)$ et $T(C_8)$.

■

3.4 nombre χ_s-chromatique du prisme complémentaire de certains graphes particulier

Définition 3.4.1 *Soit* G *un graphe. On appelle prisme complémentaire d'un graphe* G *le graphe formé à partir de l'union disjointe de* $\overline{G}$ *et son complémentaire* G *en ajoutant les arêtes d'un couplage parfait entre les sommets correspondants de* G *et* $\overline{G}$.

Proposition 3.4.1 *Soit* P_n *une chaîne d'ordre* $n \geq 4$. *Alors,*

$$\chi_s(P_n\overline{P_n}) \leq n$$

Preuve. Soit P_n une chaîne d'ordre $n \geq 3$ d'ensemble de sommets $V(P_n) = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ et d'ensemble d'arêtes $E(P_n) = \cup_{i=1}^{n-1}\{u_i u_{i+1}\}$, et soit $\overline{P_n}$ le complémentaire de C_n d'ensemble de sommets $V\left(\overline{P_n}\right) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ et d'ensemble d'arêtes $E(\overline{P_n}) = \{v_i v_j : 1 \leq i < j \leq n$ et $u_i u_j \notin E(P_n)\}$. Soit $G_n = P_n\overline{P_n}$ le prisme complémentaire de P_n d'ensemble de sommets $V(G_n) = V(P_n) \cup V\left(\overline{P_n}\right)$ et d'ensemble d'arêtes $E(G_n) = E(P_n) \cup E\left(\overline{P_n}\right) \cup \left(\cup_{i=1}^{n}\{u_i v_i\}\right)$. Soit c un coloration étoile de $P_n\overline{P_n}$ avec k couleurs. Pour $n = 4$, il suffit de donner une coloration c de $P_n\overline{P_n}$ avec n couleurs comme suit : $c(u_1) = c(u_4) = 1, c(u_2) = c(v_1) = 2, c(u_3) = c(v_2) = 3$ et $c(v_3) = c(v_4) = 4$ et donc $k \leq 4$. Montrons maintenant que $k \geq 4$. Par l'absurde supposons que $k \leq 3$, comme $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ un P_4 et comme $\chi_s = 3$, alors les couleurs $1, 2, 3$ apparaissent dans l'ensemble induites $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Il reste de colorer les sommets v_1, v_2, v_3, v_4, affectons aux v_1, v_2 une couleur différente à celle de sommets u_1, u_2 respectivement et à v_3 la couleurs de u_1, mais dans ce cas un P_4 bicolore s'est produit $(v_3 v_1 u_1 u_2)$, contradiction. D'où, $k = 4$.

Pour $n \geq 5$, afin de montrer que $k \leq n$ il suffit de donner une coloration de $P_n\overline{P_n}$ avec n couleurs comme suit :

$$c(u_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i \mod 3 \equiv 1; \\ 2 \text{ si } i \mod 3 \equiv 2; \\ 3 \text{ si } i \mod 3 \equiv 0. \end{cases} \quad \text{et} \quad c(v_i) = \begin{cases} 2 \text{ si } i = 1; \\ 3 \text{ si } i = 2; \\ 4 \text{ si } i = 3, 4; \\ i \text{ si } i \geq 5. \end{cases}$$

D'où, $k \leq n$.

■

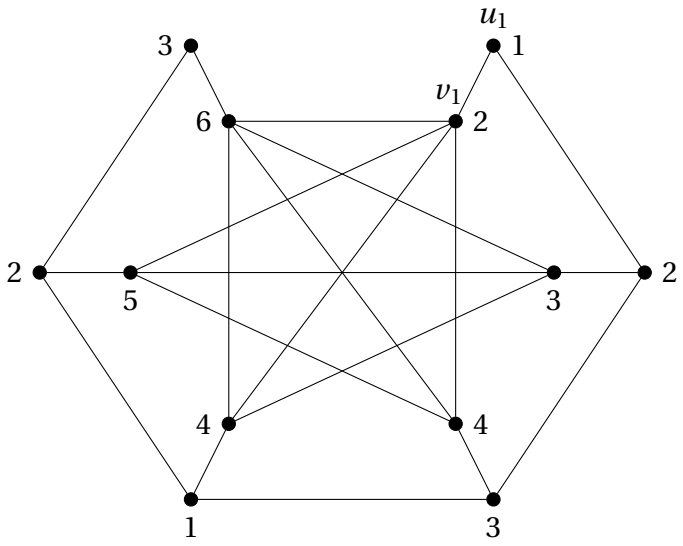


FIGURE 3.15 – La coloration étoile de $P_6\overline{P_6}$ avec $\chi_s(P_6\overline{P_6}) = 6$.

Proposition 3.4.2 *Soit* C_n *un cycle d'ordre* $n \geq 4$. *Alors,*

$$\chi_s(C_n\overline{C_n}) \begin{cases} = n+1 \text{ si } n = 4, 8; \\ \\ \leq n \text{ sinon}. \end{cases}$$

Preuve. Soit C_n un cycle d'ordre $n \geq 3$ d'ensemble de sommets $V(C_n) = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ et d'ensemble d'arêtes $E(C_n) = \cup_{i=1}^{n-1}\{u_i u_{i+1}\}$, et soit $\overline{C_n}$ le complémentaire de C_n d'ensemble de sommets $V\left(\overline{C_n}\right) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ et d'ensemble d'arêtes $E(\overline{C_n}) = \{v_i v_j : 1 \leq i < j \leq n$ et $u_i u_j \notin E(C_n)\}$. Soit $G_n = C_n\overline{C_n}$ le prisme complémentaire de C_n d'ensemble de sommets $V(G_n) = V(C_n) \cup V\left(\overline{C_n}\right)$ et d'ensemble d'arêtes $E(G_n) = E(C_n) \cup E\left(\overline{C_n}\right) \cup \left(\cup_{i=1}^{n}\{u_i v_i\}\right)$.Soit c un coloration étoile de $C_n\overline{C_n}$ avec k couleurs. Pour $n = 4$, afin de montre que $k \leq n+1$ il suffit de donner une coloration c de G avec 5 couleurs comme suite : $c(u_1) = 1, c(u_2) = c(u_4) = c(v_1) = 2, c(u_3) = 3, c(v_2) = c(v_3) = 4$ et $c(v_4) = 5$. Montrons maintenant que $k \geq 5$, tout d'abord, nous avons besoin de 3 couleurs1, 2 et 3 pour colore les sommets $u_1, u_2, ..., u_n$, mais 3 couleurs ne suffisent pas à la coloration étoile de G, car s'il y a 3 couleurs alors $c(v_2) = 2$, et dans ce cas aucune couleurs ne peut être donnée à v_2. Supposons maintenant que nous ayons 4 couleurs, si $c(v_1) = 2$ alors $c(v_2) = c(v_3) = 4$, dans ce cas, il est impossible d'attribuer une couleurs à la v_4.

Ainsi 4 couleurs ne suffisent pas à la coloration étoile de G, par conséquent $k \geq 5$.

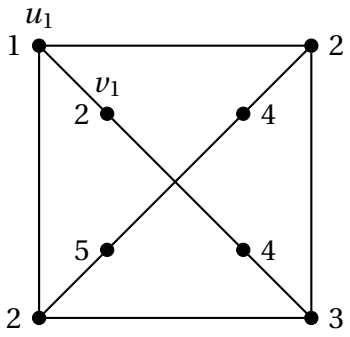


FIGURE 3.16 – La coloration étoile de $C_4\overline{C_4}$ avec $\chi_s(C_4\overline{C_4}) = 5$.

pour $n = 8$, afin de montrer que $k \leq 9$ il suffit de donner une coloration c de G avec 9 couleurs comme suit :

$$c(u_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i\,mod 2 \equiv 1; \\ 2 \text{ si } i\,mod 2 \equiv 0; \\ 3 \text{ sinon .} \end{cases} \quad \text{et } c(v_i) = \begin{cases} 2 \text{ si } i = 1; \\ 4 \text{ si } i = 2,3; \\ i+1 \text{ si } i \geq 4. \end{cases}$$

Montrons maintenant que $k \geq 9$, nous pouvons d'abord noter que nous besoin 3 couleurs $1,2$ et 3 aux sommets $e_1,...,e_n$ mais 3 couleurs ne suffisent pas à la coloration étoile, car s'il y a 3 couleurs, alors $c(v_1) = 2$ et dans ce cas aucune couleurs ne peut être donnée à v_2. Supposons maintenant que nous ayons 4 couleurs, si $c(v_2) = c(v_3) = 4$ dans ce cas, ils sont impossibles d'attribuer une couleurs aux sommets $v_4,...,v_n$, car chaque fois que nous obtenons P_4 bicolore commencer et se termine par la couleurs 4, donc les sommets $v_4,...,v_n$ colorer par couleurs différent, par conséquent $k \geq 9$.

,

Pour tout $n \geq 5$ afin de montrer que $k \leq n$ il suffit de donner une coloration c de $C_n\overline{C_n}$ avec n couleurs comme.

— *Cas 1* :Si *n=3p* . En coloré l'ensembles de sommets u_i et v_i comme suit :

$$c(u_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i\,mod 3 \equiv 1; \\ 2 \text{ si } i\,mod 3 \equiv 2; \\ 3 \text{ si } i\,mod 3 \equiv 0. \end{cases} \quad \text{et } c(v_i) = \begin{cases} 2 \text{ si } i = 1; \\ 3 \text{ si } i = 2; \\ 4 \text{ si } i = 3,4; \\ i \text{ si } i \geq 5. \end{cases}$$

— *Cas 2* :Si *n=3p+1* . En coloré l'ensembles de sommets u_i et v_i comme suit :

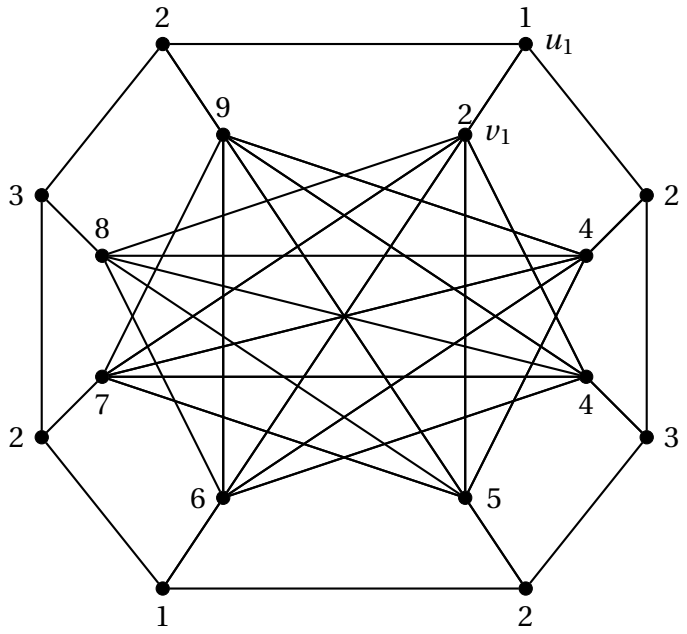


FIGURE 3.17 – Exemple d'un prisme complémentaire de C_8 avec $\chi_s(C_8) = 9$.

$$c(u_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i\,mod 3 \equiv 1 \;\; i = 1,...,n-1; \\ 2 \text{ si } i\,mod 3 \equiv 2 \;\; i = n; \\ 3 \text{ si } i\,mod 3 \equiv 0 \;\; i = 1,...,n-1. \end{cases} \quad \text{et} \quad c(v_i) = \begin{cases} 2 \text{ si } i = 1; \\ 3 \text{ si } i = 2; \\ 4 \text{ si } i = 3,4; \\ i \text{ si } i \geq 5. \end{cases}$$

— *Cas 3* : Si *n=3p+2* .En coloré l'ensemble de sommets u_i et v_i comme suit :

Pour $i = 1,...,3(k-1)$, on colorer les sommets $u_1,...,u_n$ alternative 1,2 et 3 et pour les derniers 5 sommets colores :2,1,2,3,2.

$$c(v_i) = \begin{cases} 2 \text{ si } i = 1; \\ 3 \text{ si } i = 2; \\ 4 \text{ si } i = 3,4; \\ i \text{ si } i \geq 5. \end{cases}$$

D'ou $k \leq n$.

■

3.5 Nombre χ_s-chromatique du produit cartésien $P_2\square K_{1,n}$ (book graphe)

Proposition 3.5.1 *Soit $P_2\square K_{1,n}$ le book graphe. Alors,*

$$\chi_s(P_2\square K_{1,n}) = 4$$

Preuve. Soient $G = P_2\square K_{1,n}$, $V(P_2) = u_1, u_2$ et $V(K_{1,n}) = v_1, ..., v_n$. Soit c une coloration étoile de G avec k couleurs. Pour montrer que $k \leq 4$, considérons la fonction de couleurs $c : V(G) \longrightarrow \{1,2,3,4\}$ définie par $c(u_1, v_1) = 1$, $c(u_2, v_1) = 2$, $c(u_1, v_j) = 3$ et $c(u_2, v_j) = 4$ pour tout j ; $1 \leq j \leq n$. Montrons que $k \geq 4$, supposons le contraire que $k \leq 3$, comme $\{(u_2, v_2)(u_2, v_1)(u_1, v_1)(u_1, v_2)\}$ induisant un P_4 et comme $\chi_s = 3$, alors les couleurs $1,2,3$ apparaissent dans l'ensemble $\{(u_2, v_2)(u_2, v_1)(u_1, v_1)(u_1, v_2)\}$. Il reste de colorer les sommets $(u_1, v_j)(u_2, v_j)$, colorer (u_1, v_j) a couleur différent à celle (u_1, v_1) et colorer (u_2, v_j) a couleur différent à celle (u_2, v_1), sachant qu'il peut prendre la couleur de (u_1, v_1) ou (u_2, v_2), mais dans ce cas plusieurs P_4 bicolorié sont produit $((u_1, v_2)(u_1, v_1)(u_1, v_j)(u_2, v_j))$; $(u_2, v_j)(u_2, v_1)(u_2, v_2)(u_1, v_2)$ (pour $j = \overline{3, n}$) respectivement.

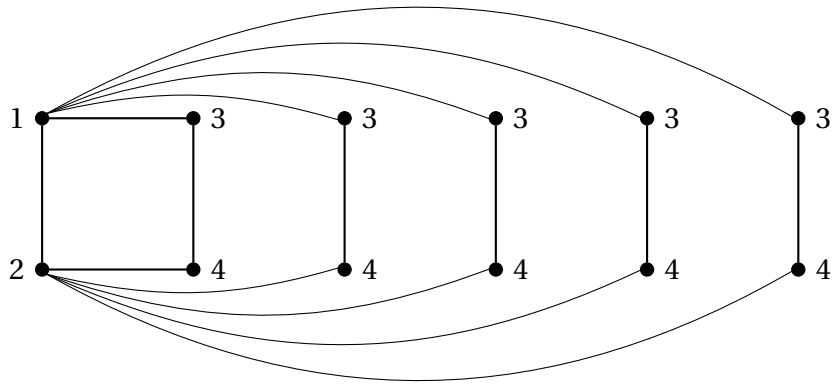


FIGURE 3.18 – Coloration étoile de $P_2\square K_{1,5}$ avec $\chi_s(P_2\square K_{1,5}) = 4$.

■

Comme le book graphe $P_2\square K_{1,n}$ et prisme d'une étoile $K_{1,n}K_{1,n}$ sont deux graphes isomorphes, alors à partir la coloration de book graphe, on peut obtenir facilement le résultat suivant.

Corollaire 3.5.1 *Soit* $K_{1,n}$ *un étoile d'ordre n. Alors,*

$$\chi_s(K_{1,n}K_{1,n}) = 4.$$

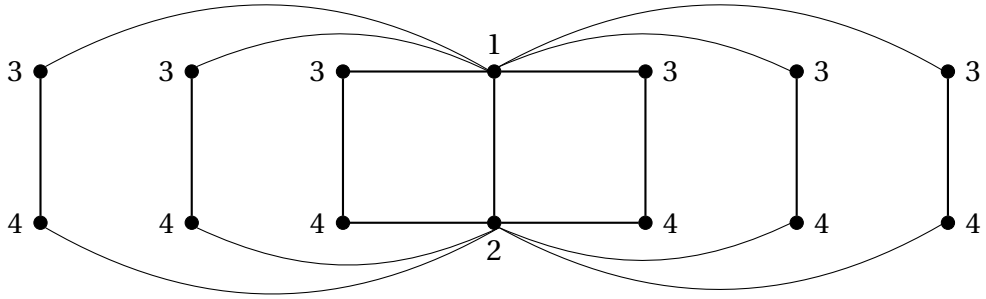


FIGURE 3.19 – Coloration étoile de $K_{1,6}K_{1,6}$ avec $\chi_s(K_{1,6}K_{1,6}) = 4$.

3.6 Coloration étoile d'un graphe prisme de chaîne

Définition 3.6.1 *Soit* G *un graphe. On appelle prisme d'un graphe* G*, noté* GG*, le graphe formé à partir de l'union disjointe de de deux copies de* G *en ajoutant les arêtes d'un couplage parfait entre les sommets correspondants de* G *et* G.

Proposition 3.6.1 *Soit* P_n *une chaîne d'ordre n. Alors,*

$$\chi_s(P_nP_n) = \begin{cases} 3 \text{ si } n = 2; \\ \\ 4 \text{ si } n \geq 3. \end{cases}$$

Preuve. Soient P_n et P'_n deux chaîne d'ordre n d'ensemble de sommets $\{v_1, ..., v_n\}$ et $\{v'_1, ..., v'_n\}$ respectivement. Pour $n = 2$, afin de montrer que $k \leq 3$ il suffit de donner une coloration avec 3 couleurs comme suit : $c(v_1) = c(v'_2) = 1$, $c(v'_1) = 2$, $c(v_2) = 3$. Montrons maintenant que $k \geq 3$. Supposons le contraire que $k \leq 2$, contradiction.

Pour $n \geq 3$, afin de montrer que $k \leq 3$ il suffit de donner une coloration avec 3 couleurs comme suit : si i impair $c(v_i) = 1$, si i pair affecté les couleurs $3, 2, 4$ alternativement. Si i pair $c(v'_i) = 1$, si i impair affecté les couleurs $2, 4, 3$ alternativement. Montrons maintenant que $k \geq 4$. Supposons le contraire que $k \leq 3$, comme G possède un cycle d'ordre 4 alors $\chi_s = 3$, mais 3 couleurs ne suffisent pas à la coloration étoile de G, car s'il y a 3 couleurs dans ce cas aucune couleur ne peut être donnée à v'_3, par conséquent $k \geq 4$. ■

3.7 Coloration étoile d'un graphe puissance d'une chaîne

Définition 3.7.1 *Le graphe de puissance* $p^{\text{ème}}$ *de* G, *noté* G^p, *est un graphe obtenu à partir de* G *en ajoutant une arête entre chaque paire de sommets à une distance p ou moins, avec* $p \geq 1$. *Il est facile de voir que* $G^1 = G$.

Proposition 3.7.1 *Soit* P_n *une chaîne d'ordre* $n \geq 3$. *Alors,*

$$\chi_s(P_n^2) = \begin{cases} 3 \text{ si } n = 3,4; \\ 4 \text{ si } n = 5; \\ 5 \text{ si } n \geq 6. \end{cases}$$

Preuve. Pour $n = 3,4$, afin de montrer que $k \leq 3$ il suffit de donner une coloration avec 3 couleurs comme suit : $c(v_1) = c(v_4) = 1$, $c(v_2) = 2$, $c(v_3) = 3$. Montrons maintenant que $k \geq 3$. Par l'absurde supposons que $k \leq 2$, contradiction. Pour $n = 5$, afin de montrer que $k \leq 4$ il

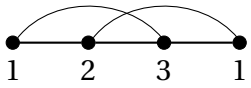


FIGURE 3.20 – Coloration étoile de P_4^2 avec $\chi_s(P_4^2) = 3$.

suffit de donner une coloration avec 4 couleurs comme suit : $c(v_1) = c(v_4) = 1$, $c(v_2) = 2$, $c(v_3) = 3$, $c(v_5) = 4$. Montrons maintenant que $k \geq 4$. Par l'absurde supposons que $k \leq 3$. Comme G possède un cycle d'ordre 5, alors $\chi_s = 4$.

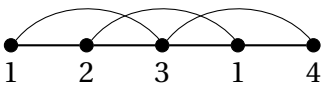


FIGURE 3.21 – Coloration étoile de P_5^2 avec $\chi_s(P_5^2) = 4$.

Pour $n \geq 6$, afin de montrer que $k \leq 5$ il suffit de donner une coloration avec 5 couleurs $1,2,3,1,4,5$ apprissent dans l'ensemble $\{v_1, ..., v_n\}$ d'une manière alternative. Montons maintenant que $k \geq 5$, comme l'ensemble $\{v_1, ..., v_n\}$ induisent plusieurs P_4, alors les couleurs $1,3,3$ appariassent dans l'ensemble $\{v_1, ..., v_n\}$, mais 3 couleurs ne suffisent pas à la coloration étoile de G, car s'il y a 3 couleurs dans ce cas aucune couleur ne peut être donnée à v_5, supposons maintenant que nous ayons 4 couleurs, si $c(v_5) = 4$, dans ce cas il impossible

d'attribuer une couleur à v_6. Par conséquent $k \geq 5$.

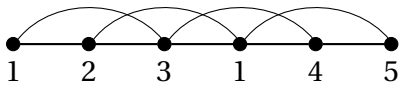


FIGURE 3.22 – Coloration étoile de P_6^2 avec $\chi_s(P_6^2) = 5$.

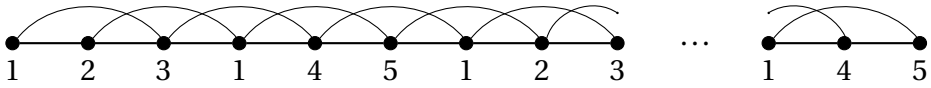


FIGURE 3.23 – Coloration étoile de P_n^2 avec $\chi_s(P_n^2) = 5$ pour $n \geq 6$.

■

Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés principalement à la notion de la coloration étoile dans les graphes.

D'abord, nous avons donné la valeur exacte de nombre chromatique étoile d'un complémentaire d'une chaîne $\overline{P_n}$ et d'un cycle $\overline{C_n}$ et le nombre chromatique étoile de la roue W_n et les valeurs exactes de nombre chromatique étoile du graphe milieu et total d'une chaîne P_n, le nombre chromatique étoile du graphe milieu et total d'un cycle C_n.

Ensuite, nous avons déterminé les valeurs exactes de nombre chromatique du book graphe $P_2 \square K_{1,n}$ et son graphe isomorphe $K_{1,n} K_{1,n}$, et nous avons donné les valeurs exacte de nombre chromatique étoile du prisme d'une chaîne et le nombre chromatique étoile d'un graphe puissance d'une chaîne. Nous avons établi des bornes du nombre χ_s-chromatique de prisme complémentaire d'une chaîne P_n, prime complémentaire d'un cycle C_n.

Les travaux réalisés durant ce mémoire ouvrent plusieurs perspectives de travaux dans le futures :

— Étudier l'effet de la suppression d'une arête ou sommet quelques du graphe sur son nombre χ_s-chromatique.
— Déterminer la valeur exacte du nombre χ_s-chromatique de prisme complémentaire d'un cycle et prisme complémentaire d'un graphe complet.
— Déterminer le nombre χ_s-chromatique de prisme et puissance d'une chaîne.
— Trouver l'application de la coloration étoile.

Bibliographie

[1] M.O. Albertson, G.G. Chappell, H.A. Kierstead, A. K¨undgen, and R. Ramamurthi. Coloring with no 2-colored P4's. 2002. Submitted for publication.

[2] K. Anitha, B. Selvam (2018), Human chain graph International Journal of Engineering, Science and Mathematics 7(8) pp 41-49.

[3] K.Anitha, B. Selvam (2018) Magicness of circular Human chain graph International Journal of Scientific Research in Mathematical and Statistical Sciences 5(6) pp 191-195.

[4] K. Anitha, B. Selvam, K. Thirusangu, Edge, acyclic and star colorings on human chain graphs. Journal of Physics : Conference Series, 1377 (2019) 012007, doi :10.1088/1742-6596/1377/1/012007.

[5] K. Appel et W. Haken. Every planar map is four colorable : Part 1, discharging. Illinois. J.Maths., 21 : 429-490, 1977.

[6] K. Appel et W. Haken. Every planar map is four colorable : Part 2, reducibility. Illinois. J.Maths., 21 : 491-567, 1977.

[7] K. Appel and W.Haken. The existance of unavoidable sets of geographically good configurations. Illinois. Math, 20 : 218 – 297 ; 1976.

[8] M. Behzad : A criterion for the planarity of the total graph of a graph. Proc. Camb.Philos. Soc. 63 : 679 – 681 ; 1967.

[9] C. Berge. Graphes. Gauthier-Villars, 3ime édition, 1983.

[10] C. Berge. Graphs. North Holland, 1985.

[11] O.V. Borodin. On acyclic colorings of planar graphs. Discrete Mathematics, 25 :211–236, 1979.

[12] O.V. Borodin, A.V. Kostochka, A. Raspaud, and E. Sopena. Acyclic k-strong coloring of maps on surfaces. Mathematical Notes, 67 (1) :29–35, 2000.

[13] O.V. Borodin, A.V. Kostochka, and D.R. Woodall. Acyclic colourings of planar graphs with large girth. J. London Math. Soc., 60 (2) :344–352, 1999.

[14] R.L.Brooks. on colouring the nodes of a netwok. proc. combridge phil. soc, 37 :194-197,1941.

[15] Coleman, Thomas F.; Cai, Jin-Yi (1986), "The Cyclic Coloring Problem and Estimation of Sparse Hessian Matrices" (PDF), SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods, 7 (2) : 221–235, doi :10.1137/0607026

[16] Coleman, Thomas F.; Moré, Jorge (1984), "Estimation of sparse Hessian matrices and graph coloring problems" (PDF), Mathematical Programming, 28 (3) : 243–270, doi :10.1007/BF02612334

[17] L. Euler. Solutio Problematis ad geometriam Situs Pertinentis, [Solution d'un problème lié à la géométrie de la position]. Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae, [Mémoires de l'académie impériale des sciences de Saint-Petersbourg], 8 : 128-140, 1736 (pulication en 1741). Voir aussi Opera Omnia, Series 1, 7 : 1-10.

[18] G. Fertin, E. Godard, and A. Raspaud. Acyclic and k-distance coloring of the grid. Information Processing Letters, 87(1) :51–58, 2003.

[19] H. furmanczyk, v. kowsalya, and j. vernold vivin. On star coloring of splitting graphs , arXiv :1705.09357v1 [math.CO] 25 May 2017.

[20] Guillaume Fertin, André Raspaud, Bruce Reed. Star Coloring of Graphs. Journal of Graph Theory, Wiley, 2004, 47 (3), pp.163-182. hal-00307788.

[21] B. Grünbaum, Acyclic colorings of planar graphs, Israel J. Math. 14 (1973) 390-412.

[22] Gebremedhin, Assefaw H.; Tarafdar, Arijit; Pothen, Alex; Walther, Andrea (2008), "Efficient Computation of Sparse Hessians Using Coloring and Automatic Differentiation", INFORMS Journal on Computing, 21 (2) : 209–223, doi :10.1287/ijoc.1080.0286

[23] T. Hamada, I. Yoshimura : Traversability and connectivity of the middle graph of a graph. Discrete Math. 14 : 247 – 256 ; 1976.

[24] T. R. Jensen and B. Tofl. Graph Coloring Problems. Wiley Interscience, 1995.

[25] K.Kaliraj, Kowsalya. On star coloring of Mycielskians. Indonesian Journal of Combinatorics· 2018.

[26] Kostochka, A. V. (1978), Upper bounds of chromatic functions of graphs, Doctoral thesis (in Russian), Novosibirsk.

[27] R. Leese and S. Hurley. Methods and Algorithms for Radio Channel Assignment. Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications 23, december 2002.

[28] A. Lyons. Acyclic and star colorings of cographs. Discrete Applied Mathematics 159 (2011) 1842–1850.

[29] J. Nešetřil and P. Ossona de Mendez. Colorings and homomorphisms of minor closed classes. Technical report 476, Centre de Recerca Matem´atica, 2001.

[30] E. A. Nordhaus, J. W. Gaddum. On complementary graphs. Ann. Math. Monthly, 63 : 175-177, 1956.

[31] N. Robertson, D. P. Sanders, P. Seymour and R. Thomas. The four-color theorem. Journal of Combinatoriacal Theory, Series B, 70(1) : 2 – 44, 1997.

[32] Z.Shao,E.Zhu,Z.Li,F.Deng. Star coloring of Cartesian product of paths and cycles.February 2016.

[33] Skulrattanakulchai, San (2004), "Acyclic colorings of subcubic graphs", Information Processing Letters, 92 (4) : 161–167, doi :10.1016/j.ipl.2004.08.002

[34] K.Venkatesany,V.V.Josephz,V.Mathiyazhaganx. On star Coloring Of Corona Graphs,Received 12 January 2015.

[35] P.Zhang Graphs and digraphs. 6 éme étitions Taylor et Francis Group, 2016.