RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DR. YAHIA FARÈS DE MÉDÉA
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

par

Labbaci Hamza

TITRE DU MÉMOIRE

Homogénéisation périodique d'un problème elliptique

Soutenu le 03 juillet 2023 devant le jury composé de

Président	M. Benchaa,	MAA, Université de Médéa
Directeur de Mémoire	M.L. Leghmizi,	MCA, Université de Médéa
Examinateur	R. Souilah,	MCA, Université de Médéa

Remerciements

Dans ces quelques lignes j'aimerais tenter d'ébaucher des remerciements pour Dieu et toutes les personnes qui ont compté et m'ont encouragé dans ce travail.

Je remercie tout d'abord mon encadreur Monsieur M.L.Leghmizi de m'avoir proposé ce thème et pour sa continuité à me soutenir et à m'encourager. Grâce à ses conseils éclairés, j'ai pu améliorer la qualité de mon mémoire. Je le remercie pour son soutien, sa disponibilité et l'apport pédagogique durant la préparation de ce mémoire.

Mes remerciements vont également à Messieurs M. Benchaa et S.Rezak d'avoir accepter d'examiner ce travail.

Je remercie également les membres du département de Mathématiques et Informatique de l'université de Médéa de m'avoir permis de travailler dans de bonnes conditions durant la réalisation de ce travail.

Résumé

L'objet de ce mémoire est d'étudié l'homogénéisation d'un problème elliptique classique dans le cas périodique. Nous illustrons à partir d'un exemple d'equation aux dérivées partielles elliptique l'homogénéisation périodique dans le cas de dimension 1 et le cas en dimension supérieure. Nous présentons quelques méthodes asymptotiques d'homogénéisation pour ce type de problème.

Notations

Ω	Un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$
$\partial\Omega$	Frontière topologique de Ω
$\|\Omega\|$	Mesure de Lebesgue de l'ensemble Ω
$x=(x_1,\cdots,x_n)$	Point générique de $\mathbb{R}^n$
$dx=dx_1dx_2\cdots dx_n$	Mesure de Lebesgue sur Ω
$\longrightarrow$	La convergence forte
$\rightharpoonup$	La convergence faible
$\overset{*}{\rightharpoonup}$	La convergence $*$ faible
p.p.	Presque partout
V	Un espace de Banach
H	Un espace de Hilbert
V'	Le dual topologique de V
$\langle .,. \rangle_{V'\times V}$	Le crochet de dualité entre l'espace V et son dual topologique V'
$\|.\|$	La norme sur l'espace de Banach V
$(.,.)$	Le produit scalaire sur l'espace de Hilbert H
$\|.\|$	La norme sur l'espace de Hilbert H
$\mathbb{R}^{m\times n}$	L'espace des matrices réelles d'ordre $m\times n$
Id	La matrice d'identité.
$\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$	L'espace des fonctions continues
$\mathscr{D}(\Omega)$	L'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω et à support compact dans Ω
∂_i	La i-ème dérivée partielle : $\partial_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$
∂^α	La dérivée d'ordre α : $\partial^\alpha=\frac{\partial^{\|\alpha\|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$
$\nabla u=(\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n})$	Gradient de $v:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$
$\operatorname{div} v$	La divergence du vecteur $v=(v_1,...,v_n)$: $\operatorname{div} v=\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+...+\frac{\partial v_n}{\partial x_n}$

Table des matières

Introduction générale **1**

1 Rappels et outils de base **3**
1.1 Espace de Lebesgue 3
1.2 Espace Sobolev 4
1.3 Fonction périodique 6
1.4 Lemme de Lax-Milgram 7

2 Homogénéisation d'un problème elliptique **9**
2.1 Position du problème 9
2.2 Formulation faible du problème 11
2.3 Problème homogénéisé 13

3 Méthodes d'homogénéisation **21**
3.1 Méthode de développements asymptotique 22
3.2 G-convergence 23
3.3 Γ-convergence 24

Bibliographie **27**

Introduction générale

L'utilisation des matériaux composites dans l'industrie se développe de jour en jour dans divers applications. C'est grâce à leur microstructure que leur mise en oeuvre permet de bien illustrer l'etude du comportement mécanique (coefficients de conductivités, élasticité).

L'analyse de telles structures, incluant un paramètre de la microstructure, se révèle cependant difficile tant que le degré d'hétérogénéité est assez grand. Cette hétérogénéité implique que les propriétés physiques du matériau dépendent des variables d'espace et varient rapidement par rapport à celles-ci. Une manière naturelle de contourner cette difficulté est d'obtenir un matériau homogène équivalent qui, en moyenne, fournit la même réponse structurale que le matériau composite tout en tenant compte des caractéristiques microstructures du matériau hétérogène. Cette technique est dite Homogénéisation et de nombreuse méthodes et approches mathématiques ont été établis de manière rigoureuse (voir N.S. Bachvalov [4], A. Bensoussan, J.-L. Lions et G. Papanicolaou [5], E. Sanchez-Palencia [13], G. G. Sbordone [14]) pour obtenir de manière précise les propriiétés élastiques macroscopiquement équivalentes en fonction des caractéristiques géométriques et mécaniques des constituants. L'idée de base est de considérer les caractéristiques locales oscillantes de la forme $a(\frac{x}{\varepsilon})$, où $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre et la fonction $a(x)$ est périodique, autrement le matériau composite considéré ainsi est constitué d'une répétition périodique à partir d'une cellule de base à l'échelle microscopique. L'analyse asymptotique de ces oscillations dans les équations aux dérivées partielles et les fonctionnelles intégrales de calcul des variations conduit directement au concept mathématique d'homogénéisation.
L'objectif de notre mémoire est d'étudié l'homogénéisation périodique d'un problème elliptique classique et de donner un aperçu sur quelques méthodes d'homogénéisation .

Le contenu de ce mémoire est composé de trois chapitres
.

Le premier chapitre est consacré à un rappels des outils de base nécessaires qu'on aura besoin à utiliser par la suite : les espaces fonctionnelles et principalement des résultats utiles en homogénéisation.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à l'étude du problème d'homogénéisation elliptique classique suivant

$$\begin{cases} -div(a_{ij}^{\varepsilon}(x)\nabla u_{\varepsilon}) = f & dans\ \Omega \\ u_{\in} = 0 & dans\ \partial\Omega \end{cases} \qquad (P_{\varepsilon})$$

tels que f est une fonction de $L^2(\Omega)$ et $a_{ij}^{\varepsilon}(x) = \left(a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)_{i.j=1...n}$ est une matrice carrée symétrique d'ordre n où les coefficients $a_{i.j}$ sont des fonctions Y-pérodiques appartenant à

$L^\infty(\Omega)$ vérifiant la condition d'ellipticité et de coercivité

$$\alpha|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_j\xi_i \leq \beta|\xi|^2,$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$. On donnera une formulation faible du problème pour montrer l'existence de solution et on abordera l'homogénéisation du problème posé dans le cas de dimension1 et le cas de dimension supérieure.

Le troisième chapitre est dédié à la description de différentes méthodes d'homogénéisation pour le problème elliptique (P_ε). On citera les principales méthodes : développement asymptotique, G-convergence, Γ-convergence.

CHAPITRE 1

Rappels et outils de base

Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions et rappels des résultats nécessaires pour la suite de ce travail. Nous rappelons quelques définitions, lemmes et théorèmes sur les espaces fonctionnels, pour plus de détaille voir [6].

1.1 Espace de Lebesgue

Définition 1.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On définit l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ par*

$$\text{Pour } 1 \leq p < +\infty, \quad L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mesurable}, \quad \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$\text{Pour } p = +\infty, \quad L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mesurable}, \quad \sup_{x \in \Omega} ess|u(x)| < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} ess|u(x)|.$$

Proposition 1.2 *$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$ et particulièrement, c'est un espace de Hilbert pour $p = 2$ muni du produit scalaire*

$$(f, g) = \int_\Omega f(x) g(x) \, dx,$$

pour $f, g \in L^2(\Omega)$.

Proposition 1.3 (Séparabilité, réflexivité et dual de $L^p(\Omega)$)

1. *$L^p(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < +\infty$ et réflexif pour $1 < p < +\infty$.*
2. *Le dual de $L^p(\Omega)$ pour $1 < p < +\infty$ est isomorphe à $L^{p'}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*
3. *$L^1(\Omega)$ est séparable mais pas réflexif et son dual est $L^\infty(\Omega)$.*
4. *$L^\infty(\Omega)$ n'est ni séparable, ni réflexif et son dual contient strictement $L^1(\Omega)$.*

Théorème 1.4 *(Inégalité de Hölder)*
Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Alors $fg \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}.\|g\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

Corollaire 1.5 *Soit $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. Si $|\Omega| < +\infty$, alors $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.*

La convergence forte et faible dans les espaces L^p

La notion de **convergence forte** d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ dans $L^p(\Omega)$ est définie comme suit

- Pour $1 \leq p \leq \infty$, on a

$$u_n \to u \text{ fortement dans } L^p$$

si

$$\|u_n - u\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

La notion de **convergence faible** d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ dans $L^p(\Omega)$ est donnée par

- Pour $1 \leq p < \infty$, on a

$$u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^p$$

si $\forall v \in L^{p'}$

$$\int_\Omega u_n(x).v(x)dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega u(x).v(x)dx$$

- Pour $p = +\infty$ on a

$$u_n \rightharpoonup u \ *\text{faiblement dans } L^\infty$$

si $\forall v \in L^1$

$$\int_\Omega u_n(x).v(x)dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega u(x).v(x)dx$$

1.2 Espace Sobolev

Définition 1.6 *On définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ par*

$$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \quad 1 \leq i \leq n \right\}$$

où $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ est la dérivée au sens de distribution de u.

Pour $p=2$, on définit l'espace de Sobolev H^1 par

$$W^{1,2}(\Omega)=H^1(\Omega):=\left\{u\in L^2(\Omega):\frac{\partial u}{\partial x_i}\in L^2(\Omega)\quad 1\le i\le n\right\}$$

Où $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ est la dérivée au sens de distribution.
On muni l'espace H^1 par les deux normes équivalentes suivantes :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}=\begin{cases}\|u\|_{L^2},+\sum_{i=1}^n\|\frac{\partial u}{d x_i}\|_{L^2}\\[2ex](\|u\|_{L^2}^2+\|\nabla u\|_{(L^2)^n}^2)^{\frac{1}{2}}\end{cases}$$

où

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2=\left(\sum_{i=1}^n\left\|\frac{\partial u}{d x_i}\right\|_{L^2}^2\right).$$

On rappelle la définition d'un domain régulier souvent utilisé en analyse mathématique appliquée.

Définition 1.7 *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{F}$ un espace de fonctions définies sur $\mathbb{R}^{n-1}$. On dit que $\partial\Omega$ est de classe $\mathscr{F}$, si pour tout $x_0\in\partial\Omega$ il existe $r>0$ et une fonction $\varphi\in\mathscr{F}$ telle que pour une transformation de système de coordonnée on*

$$\Omega\cap B(x_0,r)=\{x\in B(x_0,r):\ x_n>\varphi(x_1,...,x_{n-1})\},$$

où $B(x_0,r)$ est la boule de centre x_0 et de rayon r.
Si $\mathscr{F}$ est l'ensemble des fonctions continues Lipschizennes, on dit que Ω est un domain lipschitzien (régulier).

Proposition 1.8 *on a*

- *L'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Banach réflexif.*
- *$H_0^1(\Omega)$ désigne la fermeture de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. En particulier, dans le cas, où Ω est un lipschitzien (régulier), on a*

$$H_0^1(\Omega)=\left\{u\in H^1(\Omega);\ \ u=0\ \ sur\ \ \partial\Omega\right\}.$$

Définition 1.9 *(**converge faible dans** $H^1(\Omega)$)*
Soint $\{u_\varepsilon,u\}$ une famille $H^1(\Omega)$

$$u_\varepsilon\rightharpoonup u\ \ faiblement\ dans\ \ H^1(\Omega)\Leftrightarrow\begin{cases}u_\varepsilon\rightharpoonup u & dans\ \ L^2(\Omega)\\ et\\ \nabla u_\varepsilon\rightharpoonup\nabla u & dans\ \ (L^2(\Omega))^n\end{cases}$$

L'équivalence entre la norme du gradient dans L^2 et la norme dans $H^1(\Omega)$ est donnée par le théorème de Poincaré .

Théorème 1.10 *(**Inégalité de Poincaré**)*
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ (ou borné dans une direction). Alors, il existe une constante $C_p>0$ dite constante de Poincaré, qui dépend de Ω, telle que

$$\forall u\in H_0^1(\Omega),\quad \|u\|_{L^2(\Omega)}\le C_p\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

Remarque : *Une conséquence remarquable de l'inégalité de Poincaré est que la semi-norme*

$$u \mapsto \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} := \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2}$$

définit une norme sur $H_0^1(\Omega)$.

Théorème 1.11 ***(Rellich -Kondrachov)***
Soit Ω *borné à frontière régulière .*
l'injection canonique $H^1 \hookrightarrow L^2(\Omega)$ *est compact relativement à la topologie forte de* $L^2(\Omega)$

Remarque 1 *Toute suite bornée dans* $H^1(\Omega)$ *admet une sous suite qui converge fortement dans* $L^2(\Omega)$ *et faiblement dans* $H^1(\Omega)$.

Corollaire 1.12 *De toute suite bornée de* $H^1(\Omega)$ *on peut extraire une suite faiblement convergente dans* $H^1(\Omega)$ *et fortement convergente dans* $L^2(\Omega)$.

Théorème 1.13 (Formule de Green) *On suppose* Ω *un ouvert régulier. Pour* $u, v \in H^1(\Omega)$ *,et* $1 \leq i \leq n$

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{dx_i} dx = -\int_\Omega v \frac{\partial u}{dx_i} dx + \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u)\gamma_0(v) dx,$$

où γ_0 *est la trace de* u .

Par la suite, on aura besoin de l' inégalité de convexité suivante

Lemme 1.14 *Pour* $\alpha_j \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ *et* $1 \leq j \leq n$, *on a*

$$\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j\right)^2 \leq n \sum_{j=1}^n \alpha_j^2.$$

Preuve. Il suffit de résonner par récurrence. ■

1.3 Fonction périodique

Définition 1.15 *Soit* Y *un produit de* n *intervalle dans* $\mathbb{R}^n$ *définie par*
$Y =]0, l_1[\times]0, l_2[\times ...\times]0, l_n[$ *où* $l_1, l_2, ..., l_n$ *sont des nombres positifs donnés. On désignera par* Y *la période de référence. Soit* b *une fonction définie p.p sur* $\mathbb{R}^n$. *La fonction* b *est dite* Y*-périodique si, et seulement si,*

$$b(x + k l_i e_i) = b(x) \quad p.p\ x \in \mathbb{R}^n,\ \forall k \in \mathbb{Z},\ \forall i \in \{1, 2, ..., n\},$$

où $\{e_i\}$ *est la base canonique de* $\mathbb{R}^n$.

Exemple 1 *on a les fonctions suivantes :*

- cos *et* sin *des fonctions périodiques de période* 2π.
- *la fonction tangente est périodique de période* π.

Soi b une fonction Y -périodique et ε un paramètre positif on définit

$$b^\varepsilon(x) = b(\frac{x}{\varepsilon}).$$

alors b^ε est ε Y -périodique où $\varepsilon Y =]0, \varepsilon l_1[\times ...\times]0, \varepsilon l_n[$ et on a le lemme suivant :

Lemme 1.16 ***(Riemann-Lebesgue)***
Soit $1 \leq p \leq +\infty$. *On considère* $b \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $Y-$ *périodique et on définit pour* $\varepsilon > 0$

$$b_\varepsilon(x) = b(\frac{x}{\varepsilon}) \ \text{ et } \ M_Y(b) = \frac{1}{mes(Y)} \int_Y b(x)dx$$

Alors :

$$b_\varepsilon \rightharpoonup M_Y(b) \ \text{ dans } \ L^p(\Omega) \ \text{ si } \ 1 \leq p < +\infty$$
$$\text{et}$$
$$b_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} M_Y(b) \ \text{ dans } \ L^\infty(\Omega) \ \text{ si } \ p = +\infty$$

pour tout ouvert bornée $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Preuve. voir [7] . ■

On rappelle la définition des espaces périodiques $H^1_{per}(Y)$ très utiles en homogénéisation périodiques.

On note par $C^\infty_{\text{per}}(Y)$ à l'ensemble des fonctions périodiques infiniment différentiables inclu dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Définition 1.17 *Lensemble* $H^1_{per}(Y)$ *est la fermeture de* $C^\infty_{per}(Y)$ *relativement à la topologie fort de* H^1

$$H^1_{per}(Y) = \overline{C^\infty_{per}(Y)}^{H^1}$$

c'est à dire : $\forall u \in H^1_{per}(Y), \exists u_n \in C^\infty_{per}(Y)$ *telle que*:

$$\|u_n - u\|_{H^1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

On définit l'espace $W_{per}(Y)$ *par*

$$W_{per}(Y) = \left\{ u | u \in H^1_{per}(Y) : \ M_Y(u) = 0 \right\}$$

où $M_Y(u)$ *est la moyenne de* u .

1.4 Lemme de Lax-Milgram

Soit H : une espace de Hilbert .
On considère $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme **bilinéaire** vérifiant
(1) La continuité :

$\exists M > 0$ telle que :

$$a(u,u) \leq C\|u\|_H \|v\|_H \ \ \forall u, v \in H.$$

(2) La coercivité :
$\exists \alpha > 0$ telle que

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2_H \ \ \forall u \in H.$$

et soit $L : H \to \mathbb{R}$ une forme **linéaire continue**. Autrement dit, L est linéaire et vérifie
$\exists K > 0$ telle que :

$$|L(v)| \leq K\|v\|_H \ \ \forall v \in H.$$

Lemme 1.18 *Sous les hypothèses ci-dessus, le problème suivant*

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H \\ \forall v \in H \quad a(u,v) = L(v) \end{cases} \tag{P}$$

admet une solution unique faible dans H. De plus, si a est symétrique toute solution de (P) *est solution du problème variationnel suivant*

$$\inf\left\{\frac{1}{2}a(v,v) - l(v) : v \in H\right\}.$$

CHAPITRE 2

Homogénéisation d'un problème elliptique

2.1 Position du problème

On considère le problème elliptique classique suivant

$$\begin{cases} -div(A\nabla u) = f \quad sur \ \ \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \tag{P}$$

où :

- $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ un ouvert borné régulier
- f : une fonction continue dans $L^2(\Omega)$
- $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in L^{\infty}(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n symétrique coercive et bornée, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes $0 < \alpha \leq \beta < \infty$ telle que

$$\alpha|\xi|^2 \leq A(x)\xi.\xi \leq \beta|\xi|^2, \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

autrement dit,

$$\alpha|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_j\xi_i \leq \beta|\xi|^2$$

on a le lemme suivant

Lemme 2.1 *Sous les hypothèses de coercivité et de croissance, on a*

$$|a_{ij}| \leq 2\beta,$$

pour $1 \leq i, j \leq n$.

Preuve. Ona $\xi \in \mathbb{R}^n$:

$$0 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_j\xi_i \leq \beta|\xi|^2$$

pour $\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ : \\ . \\ 1 \\ 0 \\ : \\ 0 \end{pmatrix}$ on prend la position $i^{\text{iem}} = 1$ alors $0 \leq a_{ii} \leq \beta|\xi|$

Donc $0 \leq a_{ii} \leq \beta$ pour $1 \leq i \leq n$

D'autre part on choisit :

pour $\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ : \\ 1 \\ 0 \\ : \\ 1 \\ 0 \\ : \end{pmatrix}$ on prend les positions $i^{\text{iem}} = 1$ et $j^{\text{iem}} = 1$ avec $i \neq j$

$A\xi\xi = (a_{ii} + a_{ij}) + (a_{ji} + a_{jj})$

D'où ,comme A est symétrique :

$$|A\xi\xi| = |2a_{ij} + a_{ii} + a_{jj}| \leq 2\beta$$

comme :

$$2|a_{ij}| - |a_{ii} + a_{jj}| \leq 2\beta \leq |2a_{ij} + a_{ii} + a_{jj}| \leq 2\beta$$

Alors

$$\begin{aligned} 2|a_{ij}| &\leq 2\beta + |a_{ii} + a_{jj}| \\ &\leq 2\beta + |a_{ii}| + |a_{jj}| \\ &\leq 4\beta \end{aligned}$$

Donc :

$$|a_{ij}| \leq 2\beta$$

■ **Dans le cas de l'homogénéisation périodique :**

On considère les hypothèses suivantes

$\star \forall \varepsilon > 0$ un petit paramètre représentant la taille de la période.

$\star Y = (0;1)^n$ une cellule de référence(unité) .

$\star a_{ij}$ est un coefficient Y -périodique.

on note :

$\star \frac{x}{\varepsilon}$: le variable d'échelle périodique

$\star u_\varepsilon$: une fonction dans $H_0^1(\Omega)$ et c'est la solution du problème d'homogénéisation périodique.

$\star A^\varepsilon(x) = (a_{ij}^\varepsilon(x)) = (a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon}))$: la matrice d'ordre $n \times n$ telle que les coefficients sont εY -périodiques.

Alors on a le problème elliptique en homogénéisation périodique suivant

$$\begin{cases} -div(A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f & \text{dans } \Omega \\ u_\varepsilon = 0 & \text{dans } \partial\Omega \end{cases} \qquad (P_\varepsilon)$$

Autrement (pour $A^\varepsilon(x) = a_{ij}^\varepsilon(x)$)

$$\begin{cases} -div\left(\sum_{j=1}^n a_{1j}^\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}, ..., \sum_{j=1}^n a_{nj}^\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\right) = f & \text{dans } \Omega \\ u_\varepsilon = 0 & \text{dans } \partial\Omega \end{cases}$$

2.2 Formulation faible du problème

Pour l'existence de la solution du problème, la première étape consiste à écrire une formulation faible du problème (P_ε).

Définition 2.2 *Soit la fonction de test $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. On dit que la fonction $u_\varepsilon \in H_0^1$ est une solution du problème (P_ε), si elle vérifie*

$$\int_\Omega (A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon).\nabla\varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx.$$

Lemme 2.3 *:*
Le problème (P_ε) admet une solution unique.

Preuve. : L'existence et l'unicité de la solution u_ε dans $H_0^1(\Omega)$ du problème (P_ε) est obtenue par **Le lemme de Lax Milgramme**
Il suffit de considérer pour $\varepsilon > 0$ fixé :

$$\star b(u_\varepsilon, \varphi) = \int_\Omega (A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon).\nabla\varphi \, dx.$$

$$\star L(\varphi) = \int_\Omega f\varphi \, dx$$

On montre qu'il existe $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$b(u_\varepsilon, \varphi) = L(\varphi) \text{ pour tout } \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

On appliquer les condition sur les deux termes

1. **b**(u_ε, φ) :la biliniairité ,la continuité, la coercivité.
2. **L**(φ) : la linéarité,la continuité.

les conditions de b :

1. **la biliniarité de b :** elle découle directement de la linéarité du gradient et celle de l'intégrale .
2. **la continuité de b** : Il suffit montrer que

$$\exists C>0 \text{ telle que } |b(u_\varepsilon,\varphi)|\leq C\|u_\varepsilon\|_{H_0^1}.\|\varphi\|_{H_0^1}$$

. On a

$$\begin{aligned}|b(u_\varepsilon,\varphi)| &= \left|\int_\Omega (A^\varepsilon(x)\nabla u_\varepsilon).\nabla\varphi\, dx\right| \\ &\leq \int_\Omega |(A^\varepsilon(x)\nabla u_\varepsilon).\nabla\varphi| dx \\ &\leq \int_\Omega \left|\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right| dx \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega |a_{ij}^\varepsilon|\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right|\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right| dx\end{aligned}$$

D'après le lemme(2.1) et l'inégalité de Holder.

$$\begin{aligned}|b(u_\varepsilon,\varphi)| &\leq \sum_{i,j=1}^n \beta \left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right\|_{L^2}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right\|_{L^2} \\ &\leq \beta\sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right\|_{L^2}\sum_{j=1}^n \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right\|_{L^2}\end{aligned}$$

D'après les normes de H^1 on obtient

$$|b(u_\varepsilon,\varphi)|\leq C\|u_\varepsilon\|_{H^1}.\|\varphi\|_{H^1}$$

3. **La coercivité de b** : Il suffit montrer que :

$$\exists\alpha>0 \text{ telle que } b(u_\varepsilon,u_\varepsilon)\geq\alpha\|u_\varepsilon\|_{H_0^1}^2$$

On a d'après l'hypothèse de coercivité de A^ε :

$$\begin{aligned}b(u_\varepsilon,u_\varepsilon) &= \int_\Omega A^\varepsilon(x)\nabla u_\varepsilon.\nabla u_\varepsilon dx \\ &\geq \alpha\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \\ &= \alpha\|\nabla u_\varepsilon\|_{(L^2)^n}^2\end{aligned}$$

Donc (d'après l'inégalité de Poincaré)

$$b(u_\varepsilon,u_\varepsilon)\geq\alpha\|u_\varepsilon\|_{H^1}^2$$

.

Les conditions de L :

1. **Liniarité :** L est linéaire grace à la linéarité de l'intégrale .
2. **Continuité** : Il suffit montrer que :

$$\exists M>0 \text{ telle que } |L(\varphi)| \leq M\|\varphi\|_{H_0^1}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} L(\varphi) &= \left|\int_\Omega f\varphi\, dx\right| \\ &\leq \int_\Omega |f\varphi| dx \end{aligned}$$

d'aprés l'inégalité de Holder

$$\begin{aligned} &\leq \left(\int_\Omega |f|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |\varphi|^2 dx\right)^{1/2} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq M\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Donc

$$L(\varphi) \leq M\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}$$

■

Lemme 2.4 *(voir [7])*
La solution u_ε vérifie la condition de bornitude suivante

$$\|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega}{\alpha}\|f\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.1}$$

où C_Ω est la constante de Poincaré et $\alpha>0$.

Remarque : *D'après le théorème de compacité de* ***Rellich-Kondrashov****(1.11), la famille des solutions (u_ε) entraîne l'existence d'un élément u dans $H_0^1(\Omega)$ tel que à une sous-famille près, qu'on notera $(u_\varepsilon)_\varepsilon$, on a*

$$u_\varepsilon \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} u \text{ faiblement dans } H_0^1(\Omega) \text{ et } u_\varepsilon \underset{n\to\infty}{\to} u \text{ fortement dans } L^2(\Omega)$$

2.3 Problème homogénéisé

2.3.1 Cas de dimention $n=1$

On va décrire l'homogénéisation d'une équation elliptique du problème (P_ε) sur un fil. On considère les hypothèses suivantes

- $\Omega=(0,1)$: un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}$.
- f : Soit f une fonction de $L^2(\Omega)$.

- a^ε : est une foction définie pour $Y :=]0,1[$, εY -périodique, coercive et bornée telles que : $\exists\ \alpha, \beta$ avec : $0 < \alpha \leq \beta < \infty$

$$\alpha \leq a^\varepsilon(x) \leq \beta.$$

- $Y = (0;1)$ une cellule de référence(unité) pour n=1

Le problème associé est le suivant

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}(a^\varepsilon \frac{du_\varepsilon}{dx}) = f & \text{dans } \Omega \\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0 \end{cases} \tag{P_ε^1}$$

On pose que :

$$\xi_\varepsilon = a^\varepsilon \frac{du_\varepsilon}{dx}$$

Alors l'équation de (P_ε^1) s'écrit

$$\frac{-d\xi_\varepsilon}{dx} = f.$$

En utilisant la périodicité et le lemme (1.14) on obtient

$$b^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{b} = \frac{1}{|Y|}\int_Y b(x)dx \quad *\text{faiblement dans } L^\infty(\Omega).$$

où $\bar{b}$ est une moyenne constante et $|Y|$ la mesure de la cellule Y.

Le but est tendre $\varepsilon \to 0$ et obtenir l'équation homogénéisée. Par le lemme(2.3) la solution u_ε est bornée . i,e :

$$\|u_\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \text{ avec } C > 0.$$

Donc il existe une sous-famille, qu'on notera aussi (u_ε), telle que

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ dans } H_0^1(\Omega) \Leftrightarrow \begin{cases} u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ dans } L^2(\Omega) \\ \frac{du_\varepsilon}{dx} \rightharpoonup \frac{du}{dx} \text{ dans } L^2(\Omega) \end{cases}$$

On se retrouvera devant un problème de produit de deux convergences faibles!!!

$$\begin{aligned} a^\varepsilon &\rightharpoonup \bar{a} && \text{dans } L^\infty(\Omega) \\ &\text{et} \\ \frac{du_\varepsilon}{dx} &\rightharpoonup \frac{du}{dx} && \text{dans } L^2(\Omega) \end{aligned}$$

On ne peut obtenir

$$a^\varepsilon \frac{du_\varepsilon}{dx} \rightharpoonup \bar{a}\frac{du}{dx} \text{ dans } L^2(\Omega) \ ?$$

Pour cela, on procède comme
On pose $\xi_\varepsilon = a^\varepsilon \frac{du_\varepsilon}{dx}$, qui est bornée dans $L^2(\Omega)$. Puisque (a^ε) et (u_ε) sont bornées dans $L^\infty(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$ respectivement, il existe sous-famille, qu'on notera aussi (ξ_ε), dans $L^2(\Omega)$ telle que

$$\xi_\varepsilon \rightharpoonup \xi \text{ dans } L^2(\Omega)$$

Donc, pour tout $\forall \varphi \in L^2(\Omega)$

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_\Omega \xi_\varepsilon(x)\varphi \, dx = \int_\Omega \xi \varphi \, dx.$$

Pour $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$

$$< f, \varphi > = < -\frac{d\xi_\varepsilon}{dx}, \varphi > = < \xi_\varepsilon, \frac{d\varphi}{dx} >$$

D'ou $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} < -\frac{d\xi_\varepsilon}{dx}, \varphi > &= \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_\Omega \xi \frac{d\varphi}{dx} dx \\ &= \int_\Omega \xi \frac{d\varphi}{dx} dx \\ &= < \xi, \frac{d\varphi}{dx} > \\ &= < -\frac{d\xi}{dx}, \varphi > \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$f = -\frac{d\xi_\varepsilon}{dx} \rightharpoonup -\frac{d\xi}{dx} = f \text{ au sens de distribution .}$$

Nous cherchons ξ en relation avec u et a^{hom} : On a

$$\xi_\varepsilon = a^\varepsilon \frac{du_\varepsilon}{dx}$$

Alors

$$\frac{1}{a^\varepsilon}\xi_\varepsilon = \frac{du_\varepsilon}{dx}$$

Comme

1. $b^\varepsilon \rightharpoonup \bar{b} = \frac{1}{|Y|}\int_Y b(x)dx$ et |Y|=1 pour $\Omega = (0,1)$ alors

$$b^\varepsilon = \frac{1}{a^\varepsilon} \rightharpoonup \int_Y \frac{1}{a(x)} dx \text{ dans } L^\infty(\Omega)$$

2. (ξ_ε) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ alors :

$$\xi_\varepsilon \rightarrow \xi \text{ dans } L^2(\Omega)$$

D'où d'aprés **1. et 2.** on a

$$\frac{du_\varepsilon}{dx} = \xi_\varepsilon \frac{1}{a^\varepsilon} \rightharpoonup \xi \frac{1}{|Y|}\int_Y \frac{1}{a(x)}dx = \frac{du}{dx} \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

$$i,e:$$

$$\frac{du_\varepsilon}{dx} \rightharpoonup \frac{du}{dx} \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

Donc

$$\frac{du}{dx} = \xi \int_Y \frac{1}{a(x)}dx$$

$$i,e:$$

$$\xi = \frac{1}{\int_Y \frac{1}{a(x)}dx}\frac{du}{dx}$$

c'est à dire le problème limite est

$$-\frac{d\xi}{dx} = -\frac{-d}{dx}\left(\frac{1}{\int_Y \frac{1}{a(x)}dx}\frac{du}{dx}\right)$$

$$= f$$

alors

$$-\frac{d}{dx}\left(a^{\text{hom}}\frac{du}{dx}\right) = f \qquad \text{où} \quad a^{\text{hom}} = \frac{1}{\int_Y \frac{1}{a(x)}dx}$$

Conclusion : d'après les étapes précédentes on obtient le résultat suivant

$$\frac{d\xi_\varepsilon}{dx} \rightharpoonup \frac{d\xi}{dx} \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

c'est à dire :

$$\frac{d}{dx}\left(a^\varepsilon \frac{du_\varepsilon}{dx}\right) \rightharpoonup \frac{d}{dx}\left(a^{\text{hom}}\frac{du}{dx}\right)$$

L'homogénéisation périodique du problème elliptique (P_ε) sur un fil, autrement dit, le problème limite est donné par

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}(a^{\text{hom}}\frac{du}{dx}) = f & \text{dans } \Omega \\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0 \end{cases} \qquad (P_{\text{hom}})$$

2.3.2 Cas de dimention $n > 1$

On va décrire l'homogénéisation d'une équation elliptique du problème (P_ε) sur Ω **avec :**

- $\Omega = (0,1)^n \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné régulier.

- f : une fonction de $L^2(\Omega)$.
- u_ε : une solution dans $H_0^1(\Omega)$ du problème (P_ε).
- $A=(a_{i.j})_{1\le i,j\le n}\in L^\infty(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n symétrique $(a_{i,j}=a_{j,i})$ coercive et bornée, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes $0<\alpha\le\beta<\infty$ telles que :

$$\alpha|\xi|^2\le A^\varepsilon(x)\xi\xi\le\beta|\xi|^2,\ \ \forall\xi\in\mathbb{R}$$

On considère le mème problème elliptique (P_ε) suivant

$$\begin{cases} -div(A^\varepsilon(x)\nabla u_\varepsilon)=f & \text{dans } \Omega \\ u_\varepsilon=0 & \text{dans } \partial\Omega \end{cases}$$

On pose le vecteur de fonctions suivant :

$$(w_\varepsilon)=(w_\varepsilon^1,...,w_\varepsilon^n)=\left(\sum_{j=1}^n a_{1,j}^\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j},...,\sum_{j=1}^n a_{n,j}^\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\right)=A^\varepsilon\nabla u_\varepsilon$$

. C'est à dire on a :

$$-div(w_\varepsilon)=f \text{ dans } \Omega$$

Lemme 2.5 *sous les hypothèse de la matrice A^ε et la bornitude de u_ε (voir lemme(2.4)) :*

$$\|w^\varepsilon\|_{(L^2(\Omega))^n}\le C\|f\|_{L^2(\Omega)} \quad \textbf{avec :}\ C>0 \tag{2.2}$$

Preuve. *on a*

$$\begin{aligned}\|w_i^\varepsilon\|_{L^2}^2&=\int_\Omega\left|\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right|^2dx\\ &\le\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^n|a_{ij}^\varepsilon|\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right|\right)^2dx\end{aligned}$$

d'aprés l'hypothèse de matrice A^ε :

$$\|w_i^\varepsilon\|_{L^2}^2\le 4\beta^2\int_\Omega\left(\sum_{j=1}^n\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\right|\right)^2dx$$

D'après l'inégalité de convexité (ref..)

$$\begin{aligned}\|w_i^\varepsilon\|_{L^2}^2&\le 4\beta^2 n\int_\Omega\left(\sum_{j=1}^n\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}\right|^2\right)dx.\\ &\le 4\beta^2 n\|u_\varepsilon\|_{H^1}^2\end{aligned}$$

d'aprés lemme... $\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)_0} \leq C_\Omega \|f\|_{L^2(\Omega)}$

$$\|w_i^\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq 4\beta^2 C_\Omega^2 \|f\|_{L^2}^2$$

Alors

$$\|w_\varepsilon\|_{(L^2)^n} = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \|w_i^\varepsilon\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} \leq 2n\beta\, C_\Omega \|f\|_{L^2} \tag{2.3}$$

D'où

$$\|w_\varepsilon\|_{(L^2)^n} \leq C(n,\Omega)\|f\|_{L^2} \quad \textbf{\textit{avec :}}\ C(n,\Omega) > 0 \tag{2.4}$$

■ *Par conséquent, il existe une sous-suite on notera aussi* $w_\varepsilon \in (L^2(\Omega))^n$ *telles que :*

$$w_\varepsilon \rightharpoonup w_0 \ \textit{faiblement dans}\ (L^2(\Omega))^n$$

Alors $\forall \varphi \in L^2(\Omega)$ ona :

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_\Omega w_\varepsilon^i \varphi \, dx = \int_\Omega w_0^i \varphi \, dx$$

Pour réaliser l'homogénéisation du problème (P_ε), on a :

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \ \text{ dans } H_0^1(\Omega) \Leftrightarrow \begin{cases} u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \text{ dans } L^2(\Omega) \\ \frac{du_\varepsilon}{dx_i} \rightharpoonup \frac{du_0}{dx_i} \ \text{ dans } L^2(\Omega). \end{cases}$$

e t(par lemme (1.16))

$A^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} M_y(A) = \frac{1}{|Y|}\int_Y A dy$ $*$ faiblement dans $L^\infty(\Omega)$.

Comme les deux convergences sont faibles, alors on ne peut pas utiliser le produit.
i.e :

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_\Omega (A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon).\nabla \varphi \, dx \neq \int_\Omega (M_y(A\nabla u_0)).\nabla \varphi \, dx$$

Alors on procède d'une autre manière.

Pour $\varphi \in (\mathscr{D}(\Omega))^n$ (au sens de distribution)

$$\begin{aligned} < f, \varphi > &= < -div\, w_\varepsilon, \varphi > \\ &= -\sum_{i=1}^{n} < \frac{\partial}{\partial x_i} w_\varepsilon^i, \varphi > \\ &= \sum_{i=1}^{n} < w_\varepsilon^i, \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi > \end{aligned}$$

pour la covergence faible $w_\varepsilon^i \rightharpoonup w_0^i$ dans $(L^2(\Omega))^n$ alors on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} -\sum_{i=1}^{n} < \frac{\partial w_\varepsilon^i}{d x_i}, \varphi > &= \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} \sum_{i=1}^{n} < w_\varepsilon, \frac{\partial \varphi}{d x_i} > \\
&= \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} \int_\Omega w_\varepsilon \, div \, \varphi \, d x \\
&= \int_\Omega w_0 \, div \, \varphi \, d x \\
&= \sum_{i=1}^{n} < w_0, \frac{\partial \varphi}{d x_i} > \\
&= -\sum_{i=1}^{n} < \frac{\partial w_0^i}{d x_i}, \varphi > \\
&= < f, \varphi >
\end{aligned}$$

i,e :

$$f = -div \, w_\varepsilon \rightharpoonup -div \, w_0 = f \text{ au sens de distribution .}$$

Alors $\forall \varphi \in (\mathscr{D}(\Omega))$:

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega w_\varepsilon^i \varphi \, d x = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega w_0^i \varphi \, d x.$$

D'autre part comme on a :
$w_\varepsilon \rightharpoonup w_0$ dans $(L^2(\Omega))^n$ par raport l'equation (2.4)

Alors pour tout $\varphi \in L^2(\Omega)$ et $i = 1...n$:
On cherche à trouver une relation explicite entre u_0 et w_0 et à trouver si u_0 satisfait un problème du même type que u_ε , c'est une des principales question de la théorie d'homogénéisation. Dans le théorème suivant on rappelle le résultat classique d'homogénéisation du problème (P_ε).

Théorème 2.6 *Soit f une fonction de $L^2(\Omega)$ et u_ε la solution faible du problème* (**??**). *Alors*

$$\begin{cases} u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 & dans \ H_0^1(\Omega) \\ A^\varepsilon \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup A^{hom} \nabla u_0 & dans \ (L^2(\Omega))^n \end{cases}$$

Où u_0 est unique solution du problème homogéniésation dans $H_0^1(\Omega)$ de

$$\begin{cases} -div(A^{hom} \nabla u_0) = f & dans \ \Omega \\ u_\in = 0 & dans \ \partial\Omega \end{cases}$$

où $A^{hom} = (a_{ij}^{hom})_{1\le j\le n}$ *est une matrice homogénéisée constante donnée par*

$$A^{hom}\lambda = M_Y(A\nabla\chi_\lambda - Ay),$$

pour $\lambda \in \mathbb{R}^n$ et χ_λ est solution de

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla\chi_\lambda) = -\mathrm{div}(A\lambda) \\ \chi_\lambda \in W_{per} \end{cases}$$

Autrement dit, pour $\lambda = e_j = (0,..,1,..,0)$ *vecteur j ème unitaire,* $1 \leq j \leq n$*, on a*

$$a_{ij}^{hom}) = M_Y\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial \chi_{e_j}}{\partial y_k}\right) - M_Y(a_{ij})$$

avec χ_{e_j} *solution de*

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}\left(\frac{\partial \chi_{e_j}}{\partial y_j} - e_j\right)\right) = 0 \\ \chi_\lambda \in W_{per} \end{cases}$$

Ce résultat a été démontré par plusieurs méthodes. On citera par exemple la méthode de Tartar (voir [15]).

CHAPITRE 3

Méthodes d'homogénéisation

La littérature sur l'homogénéisation périodique est vaste. Parmi les méthodes d'homogénéisation les plus utilisées, on citera : **la méthode de développement asymptotique, la G-convergence , la convergence à deux échelles , l'éclatement périodique, la H-convergence, la Γ-convergence et la Mosco-convergence.**. Dans cette partie, on va décrire d'une manière général les trois méthodes suivantes :

- Développement asymptotique.
- G-convergence.
- Γ-convergence.

3.1 Méthode de développements asymptotique

La méthode des développements asymptotiques consiste à proposer un ansatz pour la solution u_ε du problème (P_ε) sous forme d'un développement en série de puissances de ε du type

$$u_\varepsilon(x) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i u_i\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \tag{3.1}$$

où les $u_i(x,y)$ sont des fonctions Y -périodiques en $y := \frac{x}{\varepsilon}$.

Les variables x et y supposées indépendantes (séparation d'échelles) sont appelées respectivement variable lente et variable rapide.

L'équation (3.1) fait intervenir des opérateurs différentiels qui vont agir sur les variables x et y. Pour différencier ces opérateurs, on notera div_x, ∇_x (respectivement div_y,∇_y) les opérateurs divergence et gradient par rapport à x (respectivement par rapport à y). Lorsque l'on applique l'opérateur gradient à des fonctions du type $\sigma(x, \frac{x}{\varepsilon})$ on obtient :

$$\nabla\sigma(x, \frac{x}{\varepsilon}) = \nabla_x\sigma(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon}\nabla_y\sigma(x, \frac{x}{\varepsilon})$$

Pour cette équation, on obtient que :
Soit l'opérateur τ_ε défini par

$$\begin{aligned} &\tau_\varepsilon : H_0^1 \to H^{-1} \\ &\tau_\varepsilon u := -div(A^\varepsilon(x)\nabla u) \end{aligned}$$

c'est à dire : le probleme (2.1) équivalant

$$\begin{cases} u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \\ \tau_\varepsilon u_\varepsilon = f \qquad dans\ \Omega \end{cases} \tag{3.2}$$

Alors on obtient que :

$$\tau_\varepsilon\sigma(x, \frac{x}{\varepsilon}) = [(\varepsilon^{-2}\tau_0 + \varepsilon^{-1}\tau_1 + \tau_2)\sigma](x, \frac{x}{\varepsilon})$$

Où :

$$\begin{aligned} &\tau_0\sigma := -div_y(A(y)\nabla_y\sigma) \\ &\tau_1\sigma := -div_x(A(y)\nabla_y\sigma) - div_y(A(y)\nabla_x\sigma) \\ &\tau_2\sigma := -div_x(A(y)\nabla_x\sigma) \end{aligned}$$

Par conséquent, le problème : (3.2) devient :

$$\begin{cases} u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \\ \left(\varepsilon^{-2}\tau_0 + \varepsilon^{-1}\tau_1 + \tau_2\right) u_\varepsilon = f \quad dans\ \Omega \end{cases}$$

On utilise la formule $u_\varepsilon(x)$ pour simplifier :

$$\begin{cases} u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \\ \varepsilon^{-2}\tau_0 u_0 + \varepsilon^{-1}(\tau_0 u_1 + \tau_1 u_0) + (\tau_0 u_2 + \tau_1 u_1 + \tau_2 u_0) + o(\varepsilon) = f \end{cases}$$

En identifiant les termes de même ordre en ε dans l'équation ci-dessus, on obtient les équations en cascade suivantes :

$$\begin{array}{lll} A \text{ l'ordre } \varepsilon^{-2}: & \tau_0 u_0 & = 0 \\ A \text{ l'ordre } \varepsilon^{-1}: & \tau_0 u_1 & = 0 \\ A \text{ l'ordre } \varepsilon^{0}: & \tau_0 u_2 + \tau_1 u_1 + \tau_2 u_0 & = f \end{array}$$

Cette identification n'est pas justifiée ici mais doit l'être a posteriori. On obtiendra la forme explicite du problème homogénéisé en résolvant les équations associées.

3.2 G-convergence

Définition 3.1 *La lettre G vient du nom Green , parce que la G-convergence correspond à la convergence de fonctions de Green.*
Soit Ω un ouvetrt borné de $\mathbb{R}$ et α, β deux constantes strictement positives .
On note M_n : l'ensemble des matrices carrés symétriques d'ordre n . On définit l'ensemble :

$$N_m(\alpha,\beta,\Omega) := \left\{ A \in L^\infty(\Omega, M_n) / \alpha\|\xi\|^2 \leq A(x)\xi.\xi \leq \beta\|\xi\|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \ \ et\ p.px \in \Omega \right\}$$

Définition 3.2 *Soit (A_ε) une suite dans $N_m(\alpha,\beta,\Omega)$.On dit que :*

$$A_\varepsilon \text{ G-converge vers } A^* \in N_m(\alpha,\beta,\Omega) \text{ et on note : } A_\varepsilon \xrightarrow{G} A^*$$

Si pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$, la solution u_ε du problème (P_ε), vérifie :

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \ \ dans \ \ H_0^1(\Omega), A_\varepsilon \nabla u \ \ dans \ \ L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

où u est la solution de

$$\begin{cases} -div(A^* \nabla u) = f \quad dans \ \ \Omega \\ u \in H_0^1 \end{cases}$$

A^* est appelé la G-limite de la suite A_ε.

Nous énonçons les propriétés fondamentales de la G-convergence suivantes

Propriétés 3.3

1. *La G-limite est unique.*
2. *La G-limite est indépendante des conditions aux limites.*
3. *Si $A_\varepsilon \in N_m(\alpha,\beta,\Omega)$et $A_\varepsilon \longrightarrow A$ dans $L^2(\Omega)$, alors $A_\varepsilon \xrightarrow{G} A$.*
4. *Si $A_\varepsilon \xrightarrow{G} A^*$, alors : $A_\varepsilon^t \xrightarrow{G} (A^*)^t$.*
5. *Si $A_\varepsilon \xrightarrow{G} A^*$, alors*

   $$A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup A^* \nabla u$$

   dans $L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$ et

   $$A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \longrightarrow A^* \nabla u \nabla u$$

   au sens des distributions dans Ω.

6. *La G-limite A^* satisfait l'inégalité de Voigt-Reuss :*

$$\left(\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} A_\varepsilon^{-1}\right)^{-1} \leq A^* \leq \lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} A_\varepsilon.$$

Remarque 2 *les limites sont au sens de converge faiblement de $L^2(\Omega)$.*

Théorème 3.4 *(théorème de compacité) L'ensemble $N_m(\alpha,\beta,\Omega)$ est compact au sens de la G-convergence ,**i.e :***
pour tout suite $A_\varepsilon \in N_m(\alpha,\beta,\Omega)$, on peut obtenir une sous suite qui G-convergence vers $A^* \in N_m(\alpha,\beta,\Omega)$.

Remarque 3
1. *Le théorème de compacité précédent prouve l'existence d'une pour une sous-famille de $A_\varepsilon \in N_m(\alpha,\beta,\Omega)$ G-convergente vers A^*.*
2. *Si une famille A_ε dans $N_m(\alpha,\beta,\Omega)$ converge fortement dans $L^\infty(\Omega;M_n)$ vers une limite A, alors A_ε G-converge aussi vers cette limite A. Mais, la réciproque est fausse.*

3.3 Γ-convergence

La Γ-convergence, introduite par E. De Giorgi et T. Franzoni en 1975 dans [9], est une notion de convergence pour des suites de fonctionnelles. Elle s'est développée en liens avec les problèmes de calcul des variations et en particulier l'analyse limite de fonctionnelles intégrales. On en trouve une étude plus générale et approfondie de cette notion dans les ouvrages de H. Attouch [2] et G. Dal Maso [8].C'est l'outil le mieux adapté pour étudier le comportement asymptotique d'une famille de problèmes de minimisation dépendant d'un paramètre. Plus généralement, la Γ-convergence permet de répondre à la question suivante : étant donnée une suite de problèmes de minimisation associés à des fonctionnelles F_n, quelle topologie mettre sur les fonctionnelles pour que la convergence de F_n vers F assure la convergence des minima (ou minimiseurs) de F vers les minima (ou minimiseurs) de F ?

On présente ici la définition et la propriété variationnelle de la Γ-convergence.

Définition 3.5 *On considère X un espace de Banach et $\{F_n, F_\infty : X \to]-\infty,+\infty], n \in \mathbb{N}\}$ une famille de fonctions.*
On dit que la suite $\{F_n\}$ Γ-converge vers F_∞ en $u \in X$ si, et seulement si, les deux assertions suivantes sont vérifiées :

(i) *Pour toute suite $\{u_n\}$ convergeant vers u dans X,*

$$\liminf_{n\to+\infty} F_n(u_n) \geq F_\infty(u),$$

(ii) *il existe une suite $\{u_n\}$ convergeant vers u dans X, telle que*

$$\limsup_{n\to+\infty} F_n(u_n) \leq F_\infty(u).$$

Si cette propriété est vérifiée pour tout $u \in X$, on dit que $\{F_n\}$ Γ-converge vers F_∞ dans X et on écrit $F_\infty = \Gamma(X)\text{-}\lim_{n\to+\infty} F_n$.

Remarque 4

1. *La* Γ*-limite est une fonctionnelle semi-continue inférieurement.*
2. *On a la même définition pour une famille de fonctionnelles* $\{F_\varepsilon\}$*, lorsque* ε *tend vers* 0.
3. *Les inégalités de (i) et (ii) déterminent la* Γ*-limite de façon unique.*
4. *On peut remplacer l'inégalité de la* Γ*-limite supérieure par la condition suivante :*
   (ii') il existe une suite u_n *telle que :*

$$u_\varepsilon \longrightarrow u \quad dans \quad X \ et \ \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) = F(u).$$

Toute suite vérifiant (ii') s'appelle : ***une suite approximante.***

Application en homogénéisation périodique

On considère $\Omega =]0,1[$. Soit la famille de fonctionnelles intégrales $\{F_\varepsilon\}$ définie sur $L^2(\Omega)$ par

$$F_\varepsilon = \int_\Omega a_\varepsilon u^2(x)dx$$

où $a_\varepsilon(x) = a(\frac{x}{\varepsilon})$ avec $a > 0$, périodique et continue sur Ω.

On a le lemme suivant

Lemme 3.6 *La famille de fonctionnelles intégrales* $\{F_\varepsilon\}$ Γ*− converge vers* F_{hom}*, relativement à la topologie faible de* $L^2(0,1)$*, donnée par*

$$F_{hom} = \gamma \int_\Omega u^2(x)dx,$$

où $\gamma = \frac{1}{M(\frac{1}{a})}$ *avec* $M(\frac{1}{a}) = \int_\Omega \frac{1}{a(x)}dx$.

Preuve. Il suffit de vérifier (i) et (ii) de la définition 3.5.
Il est facile de vérifier que

$$\frac{1}{a_\varepsilon} \overset{*}{\rightharpoonup} \frac{1}{\gamma} \quad \text{dans} \quad L^\infty(\Omega)$$

• Vérifions (i). Soit $\{u_\varepsilon\}$ dans $L^2(\Omega)$ telle que $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ faiblement dans $L^2(\Omega)$ On a

$$\begin{aligned} F(u_\varepsilon) &= \int_\Omega a_\varepsilon(x)u^2(x)dx \\ &= \int_\Omega a_\varepsilon(x)\left[u_\varepsilon(x) - \gamma\frac{u(x)}{a_\varepsilon(x)}\right]^2 + 2\gamma u_\varepsilon(x)u(x) - \gamma^2\frac{u(x)^2}{a_\varepsilon(x)} \\ &\geq 2\gamma\int_\Omega u_\varepsilon(x)u(x)dx - \gamma^2\int_\Omega \frac{1}{a_\varepsilon(x)}u^2(x)dx. \end{aligned}$$

Par passage à la limite inférieure ,on obtient

$$\underline{\lim_\varepsilon} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq F_{\text{hom}}(u).$$

• Vérifions (ii). Soit $u \in L^2(\Omega)$ et on pose

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\gamma}{a_\varepsilon(x)} u(x).$$

Alors $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ faiblement dans $L^2(\Omega)$ et on a

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_\varepsilon} F_\varepsilon(u_\varepsilon) &= \lim_\varepsilon \gamma^2 \int_\Omega \frac{1}{a_\varepsilon(x)} u^2(x) dx \\
&= \gamma \int_\Omega u^2(x) dx \\
&= F(u).
\end{aligned}$$

■

Bibliographie

[1] H. Abdoul-Anziz, Homogénéisation de composites élastiques périodiques à fort contraste : Conception de métamatériaux de second gradient, thèse de Doctorat en Mathématiques, Université de Toulon, 2018.

[2] H. Attouch, *Variational Convergence for Functions and Operators* Appl. Math. Series, Pitman, London, 1984.

[3] H. Attouch, G. Buttazzo et G. Michaille, *Variational Analysis in Sobolev and BV Spaces : Applications to PDEs and Optimization*, Mathematical Programming Society (MPS) and Society for Industrial and Applied Mathematics(SIAM), , Philadelphia, PA, 2006.

[4] N. S. Bakhvalov, *Averaged Characteristics of Bodies with Periodic Structure, Dokl. Akad. Nauk SSSR 218(5), 1046–1048,1974.*

[5] A. Bensoussan, J.-L. Lions et G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North Holland, Amsterdam, 1978.

[6] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, Springer Verlag, 2011.

[7] D. Cioranescu et P. Donato, *An introduction to homogenization.* Oxford University Press, 1999.

[8] G. Dal Maso, *An Introduction to* Γ*-convergence*, Birkhäuser, Boston, 1993.

[9] E. De Giorgi et T. Franzoni, Su un tipo di convergenza variazionale, Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, Rendiconti 58.6, 842-850, 1975.

[10] N. Hafsi, Analyse asymptotique des correcteurs de la couche limite dans un problème elliptique, mémoire de master en Mathématiques, Université de Ouargla, 2018.

[11] M.L. Leghmizi, *Analyse variationnelle et Gamma-convergence,* Notes de cours, Université de Médéa, 2022-2023.

[12] P. A. Raviart, J.-M. Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.* Dunod, Paris, 2004.

[13] E. Sanchez-Palencia, Comportement local et macroscopique d'un type de milieux physiques hétérogène. Int. J. Engin. Sci., 12, 331–351, 1974.

[14] G. Sbordone, Su alcune applicazioni di un tipo di convergenza variazionale. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., 2, 617-638, 1975.

[15] L. Tartar, Estimations des coefficients homogénéisés, Lectures Notes in Mathematics, 704, Springer-Verlag, Berlin, 364-373, 1977.