RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DR. YAHIA FARÈS DE MÉDÉA
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Recherche Opérationnelle

par

SOUAD BENGOUIA

Intitulé: Théorie asymptotique des processus *GARCH* multivariés

---

Soutenu publiquement le 13 juin 2017 devant le jury

Président :	MOHAMAD LAMINE LEGHMIZI	*MCA*	*U.Y.F.M*
Examinateur :	NADIA AZROU	*MAA*	*U.Y.F.M*
Examinateur :	KAMEL TABLENNEHAS	*MAA*	*U.Y.F.M*
Promotrice :	KHEDIDJA SERIER ABDALLAH	*MAA*	*U.Y.F.M*
Invité :	AMOR BOUTAGHOU	*MCA*	*U.Y.F.M*

ANNÉE UNIVERSITAIRE: 2016-2017

Remerciements

Tout d'abord.
Je remercie Allah pour m'avoir guidér vers le chemin du savoir et la patience pour terminer ce travail.

Au terme de ce travail :
Je remercie chaleureusement, Madame Serier Abdallah Khedidja.
Pour ses encouragements et ses nombreuses remarques constructives tout au long de la direction de ce travail.

Je tiens à remercier également les membres de jury pour avoir accepté d'evaluer ce travail.

Je souhaite adresser mes sincères remerciements à toutes les personnes qui ont contribué à sa réalisation de près ou de loin et ont permis par leur soutien et leurs conseils, de le mener à bien.

Je tiens également à remercier chaleureusement.
L'équipe des enseignants du département de mathématiques qui ont contribué à notre encadrement pendant les deux années du master.

Dédicace

Je dédie ce travail

À ma très chére mère

L'exemple de dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager et de prier pour moi.

Puisse ALLAH, le tout puissant, te préserver et t'accorder santé, longue vie et bonheur.

À la mémoire de mon très chére pere

À mes frères : Kaladi, Abdelkkader, Tawfiq, Moulod, et Benalia

À mon marie :Rachid

À mes soeures: Fatoum et Zahour

À mes petits frères :Zakaria, Majid, Maria,Abderrahmane, hodifa, ya3koub, Mohamed, et Alaa

À mon aimé : Dalila

Vous vous êtres dépensés pour moi sans compter. En reconnaissance de tous les sacrifices consentis par tous et chacun pour me permettre d'atteindre cette étape de ma vie.

À mes enseignants de l'école primaire jusqu'à l'université dont les conseils précieux m'ont guide, qu'ils trouvent ici l'expression de ma reconnaissance.

À mes amies et *à* leurs familles

À toute la promotion de Recherche Opérationnelle $2016 - 2017$.

À tous ceux qui m'aiment.*À* tous ceux que j'aime.

Résumé

Nous nous intéressons à notre travail a détailler l'article de Comte et Leiberman [19]. Les auteurs ont étudié la théorie asymptotique d'un processus $GARCH$ multivarié, ont établie la forte consistance par la méthode du quasi-maximum de vraisemblance sous les conditions de Jeauntheau [11] et ils ont utilisé un résultat de Boussama [6], concernant l'existence d'une solution de processus $GARCH$ multivarié strictement stationnaire et ergodique. La normalité asymptotique à été établie où l'état initiale fixé ou stationnaire.

Abstract

We are interesed in this work to stadie the paper of Comte and Leiberman [19]. The authors studied the asmptotic theory for the multivariate $GARCH$ process. Strong consistency of the quasi-maximum likelihood estimator (MLE) is established by appealing to conditions given by Jeauntheau [11] in conjunction with a result given by Boussama [6], concerning the existence of a stationary and ergodic solution to the multivariate $GARCH(p, q)$ process. We proved asymptotic normality of the quasi-MLE when the initial state is stationary or fixed.

Table des matières

Notations et abréviations **1**

1 Outils de base **4**

1.1 **Convergence des variables aléatoires** 4

1.2 Espérance et Variance 6

1.3 Espérance conditionnelle 8

1.3.1 Propriétés fondamentales de l'espérance conditionnelle 9

1.4 La stationnarité 11

1.4.1 Processus stationnaires univariés 11

1.4.2 Processus stationnaires multivariés 12

1.5 Ergodicité 12

1.5.1 Bruit blanc faible 14

1.6 Produit de Kronecker 14

1.7 L'opérateur *vec* 15

1.8 La notion de Martingale 15

2 Modèles $GARCH$ univariés **17**

2.1 Introduction 17

2.2 Processus $GARCH$ d'ordre p et q 17

2.2.1 Processus $GARCH(p,q)fort$ 18

2.3 Stationnarité d'un modèle $GARCH(p,q)$ 19

2.3.1 Stationnarité d'un modèle $GARCH(1,1)$ 19

2.3.2 Stationnarité au second ordre du modèle GARCH(1,1) 22

2.3.3 Stationnarité stricte du processus GARCH(p,q) fort 24
2.3.4 Stationnarité stricte d'un modèle $GARCH(p,q)$ 27
2.3.5 Stationnarité au second ordre de modèle $GARCH(p,q)$ 30
2.4 Estimation des paramètres d'un modèles $GARCH$ univariés 35
2.4.1 Quasi de vraisemblance conditionnelle 35
2.4.2 Propriétés asymptotique de l'estimateur du QMV 38

3 Modèles $GARCH$ multivariés **40**
3.1 Les différentes spécifications de la matrice de variance-covariance 41
3.1.1 Modèle $GARCH$ vectoriel 41
3.1.2 Modèle diagonale-vectoriel 41
3.1.3 Modèle a corrélation conditionnelle constantes 42
3.1.4 Modèle a corrélation constant dynamique 42
3.1.5 Le modèle Tse et Tsui 43
3.1.6 La spécification $BEKK$ 43
3.2 Estimation 44

4 Théorie asymptotique des processus $GARCH$ multivariés **46**
4.1 **La forte consistance** 46
4.1.1 Conditions de Jeaunthau 47
4.1.2 Vérification des conditions de Jeantheau 47
4.2 Normalité asymptotique 50
4.2.1 Les conditions de Basawa et al 51

Notations et abréviations

Dans la suite nous présentons les différentes notations et abréviations utilisées dans ce travail.

ARCH : Autorégressif conditionnellement hétéroscidastique.

GARCH : Autorégressif conditionnellement hétéroscidastique généralisé.

BEKK : Baba, Engle, Kraft et Knoner.

i.i.d(0,1): indépendant et identiquement distribué, centré et de variance unitaire.

σ_t^2 variance conditionnelle ou volatilité

$\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{t-1})$: L'espérance conditionnelle de X sachant une information précédente $\mathcal{F}_{t-1}$

$Var(.)$: La variance ; $Cov(.,.)$: La covariance et $\sigma(.)$ est l'écart type.

$\mathbb{P}(X)$: La probabilité de X

$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$, $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$

$\mathbb{N}, \mathbb{N}^*$:L'ensemble des nombres naturelles, naturelles sauf le zéro respectivement

$\mathbb{Z}, \mathbb{C}$: L'ensemble des nombres: relatifs respectivement complexes

I_d : La matrice d'identité d'ordre d

Soit A et B deux matrices.

A', $tr(A)$, $\rho(A)$, $diag(A)$ et $det(A)$: La transposé de A, la trace de A, le rayon spectral de A, le diagonal de A et le déterminant de A, respectivement.

$A \otimes B$: Le produit de Kronecor entre A et B.

$\mathbf{1}_E(.)$ ou La fonction indicatrice de l'ensemble E.

Introduction

Engle [8] en 1982 à introduit le modèle *Conditionnelle Autorégressive hétéroxidastique* ($ARCH$) pour analyser les séries financières. Ce modèle a été généralisé en suite par Bollerslev [5] en 1986 noté $GARCH$ pour rendre compte des propriétés des séries financière où leurs paramétrisation repose essentiellement sur le concept de variance conditionnelle univariée. Les modèles $GARCH$ multivarié noté $MGARCH$ ont été introduit pour analyser plusieurs séries financières le problème avec ces modèles le grand nombre de paramètres à estimer pour réduire ce grand nombre de paramètre. Plusieurs spécifications pour la matrice de variance-covariance ont été proposée la litérateure comme la paramétrisation vectoriel, qui à été introduite par Bollerslev et al [21] le modèle diagonale-vectoriel, modèle a corrélation conditionnelle constant proposé par [22], modèle a corrélation dynamique [22] le problème avec ces paramétrisations ne garantissent pas la définie positivité de la matrice de variance covariance. La spécification $BEKK$ a été introduite par Engle et Kroner [9] pour assurer que la matrice de variance-covariance est toujours définie positive, le modèle $BEKK$ à été utilisé par plusieurs chercheurs pour modèliser le modèle $MGARCH$ par exemple Comte et Leiberman [19] ont utilisé la spécification $BEKK$ pour étudier la normalité asymptotique et le forte consistance d'un modèle $GARCH$ multivarié.

Dans ce travail nous nous intéressons à détailler l'article de Comte et Leiberman [19] les auteurs ont étudié la théorie asymptotique d'un processus $GARCH$ multivariés, ont établie la forte consistance par la méthode du quasi-maximum de vraisemblance sous les conditions de Jeauntheau [11] où ils ont utilisé un résultat de Boussama [6], concernant l'existence d'une solution de processus $GARCH$ multivarié strictement stationnaire et ergodique, et la normalité asymptotique à été établie où l'état initiale fixé ou stationnaire.

Ce mémoire est composé de trois chapitres, dans le première chapitre nous présentons les

modèles $GARCH$ univarés. Le deuxième chapitre comporte les modèles $GARCH$ multivariés, et dans le dernière chapitre nous étudierons la théorie asymptotique des processus $GARCH$ multivariés suivant [19], à la fin nous donnons quelques outils de base sous forme d'annexe et une bibliographie.

Chapitre 1

Outils de base

1.1 Convergence des variables aléatoires

Soit $(X_n)_n$ est une suite de variables aléatoires réelles, X est une variable aléatoire réelle, et que toutes ces variables sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{C}, \mathbb{P})$.

Converge presque sûre

Définition 1.1.1 *On dit que $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires converge presque sûrement vers X si :*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1$$

Ou de manière équivalente, s'il existe un sous ensemble P négligeable $w \subset \Omega$ tel que :

$$\forall w \subset \Omega \backslash N, \quad X_n(w) \underset{n\to\infty}{\to} X(w).p.s.$$

on note la convergence presque sûrement:

$$X_n \overset{p.s}{\to} X \tag{1.1.1}$$

Remarque 1.1.1 *La convergence presque sûre se réécrit sous la forme :*

$\forall \epsilon > 0, \quad \mathbb{P}(\lim \underset{n}{inf} \mid X_n - X \mid < \epsilon) = 1$

ou encore

$\forall \epsilon > 0, \quad \mathbb{P}(\lim \underset{n}{sup} \mid X_n - X \mid > \epsilon) = 0$

Théorème 1.1.1 *La convergence presque sûre entraîne la convergence en probabilité.*

Remarque 1.1.2 *La convergence en probabilité n'entraine pas la convergence presque sûre.*

Lemme 1.1.1 *(Lemme de Fatou)*
Soit (Ω, τ, μ) un espace mesuré. pour tout suite $(f_n)_n \in \mathbb{N}$de fonction mesurables sur ω a valeurs dans $[0, +\infty]$,la limite inférieure de la suite est mesurable et l'on a

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

l'égalité n'est en général pas vérifiée. [(1)]

Preuve. par lemme de Fatou on montre la théorème précédente, on a pour tout $\epsilon > 0$

$$\liminf_n \mathbb{P}(\mid X_n - X \mid < \epsilon) \geqslant \mathbb{P}(\liminf_n \mid X_n - X \mid < \epsilon) = 1$$

■

Lemme 1.1.2 *(Lemme fondamental pour la convergence presque sûre) Une suite de v.a $(X_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0 si et seulement si :*

$$Y_n = \sup_{k\geq n} \left| X_k \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0 \right|.$$

Propriété(A.1.a): On donne deux critères pour la convergence presque sûre des v.a $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une v.a on a donc: 1^{er} Critère:

$$\forall \epsilon > 0, \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \epsilon\right) < +\infty \Longrightarrow X_n \underset{n\to\infty}{\overset{p.s.}{\to}} X.$$

$2^{éme}$ Critère: Si pour $a > 0$ on a

$$\mathbb{E}\left[|X_n - X|^a\right] < +\infty$$

alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[|X_n - X|^a\right] < +\infty \Longrightarrow X_n \underset{n\to\infty}{\overset{p.s.}{\to}} X.$$

Lemme 1.1.3 *Soit $(X_k)_k$ une suite de v.a.r .Si*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(|X_k| > \epsilon\right) < +\infty, \ \textit{Pour tout } \epsilon > 0, \textit{alors } \ X_k \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} 0$$

[(1)] soit$(x)_n$ une suite $(x_n : \mathbb{N} \to [-\infty, +\infty])$,$\liminf_n$ est un limite d'une sous suite.

Convergence en probabilité

Définition 1.1.2 *Suite de v.a.r.* $(X_n)_{n\geq 1}$ *converge en probabilité vers la v.a.r* X *si, pour tout* $\epsilon > 0$, *on a :*

$$\mathbb{P}\left(|X_n - X| \geq \epsilon\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

$$X_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} X$$

Proposition 1.1.1 *La suite* $(X_n)_{n\geq 1}$ *converge en probabilité vers* X *si et seulement si :*

$$(\forall \epsilon > 0)\,(\exists N \geq 1)\,, n \geq N \Rightarrow \mathbb{P}\left(|X_n - X| \geq \epsilon\right) \leq \epsilon$$

Proposition 1.1.2 *Soient* $(X_n)_{n\geq 1}$ *et* $(Y_n)_{n\geq 1}$ *deux suites convergent en probabilité vers* X *et* Y *respectivement, i.e.Si*

$$X_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} X \quad et\, Y_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} Y.$$

Alors

$$X_n Y_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} XY.$$

Proposition 1.1.3 *Supposons que* $(X_n)_{n\geq 0}$ *converge en probabilités vers la v.a.r* X *et qu'il existe* $K > 0$ *tel que* $|X_n| \leq K$ *pour tout* n *et* $|X| \leq K$. *Alors*

$$\mathbb{E}\left(X_n\right) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} \mathbb{E}\left(X\right).$$

1.2 Espérance et Variance

Définition 1.2.1 *(Espérance)*
On dit que la variable $X = (x_1, x_2, ...)$ *admet une espérance si et seulement si la sérié* $\sum_{i\in I} x_i \mathbb{P}_i$ *est absolument convergente c-à-d*

$$\sum_{i\in I} |x_i \mathbb{P}_i| < +\infty$$

on appelle espérance de X *et on note* $\mathbb{E}[X]$ *la quantité :*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i\in I} x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{i\in I} x_i p_i.$$

Propriété(A.1.1): Soit X et Y deux variables aléatoires admettant une espérance, a et b deux réels, alors :

(i) $\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$ (la linéarité).

(ii) $X \leq Y \Leftrightarrow \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$

(iii) $X \geq 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}(X) \geq 0$

(iv) $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[|X|]$.

Définition 1.2.2 *(Variance et l'écart-type)*
Soit X une variable aléatoire discrète admettant une espérance $\mathbb{E}[X]$. La variance de X est définie par :

$$var(X) = E[(x - \mathbb{E}[X])^2] = \sum_{i \in I} (xi - \mathbb{E}[X])^2 p_i$$

sous réserve de convergence de cette série. On appelle alors écart-type, noté $\sigma(X)$, la racine de la $\sqrt{var(X)}$
Puisque la série $\sum_{i \in I} (xi - \mathbb{E}[X])^2 p_i$ est à termes positifs, la convergence absolue équivaut à la convergence.
A nouveau, lorsque X ne prend qu'un nombre fini de valeurs, la variance est toujours définie.

Propriété(A.1.2): Soit X une variable aléatoire discrète, alors sous réserve d'existence de sa variance on a :

(i) Var(X) $= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.

(ii) Si a et b sont deux réels, $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$.

(iii) $Var(X) = 0$ si et seulement si X est constante.

Définition 1.2.3 *(Covariance)*
Soit X et Y variables aléatoires discrètes admettant des moments d'ordre 2. La covariance entre X et Y est définie par :

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

Propriété(A.1.2): Soit X et Y variables aléatoires discrètes admettant des moments d'ordre 2. Alors :

(i) $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$.

(ii) $Cov(X,X) = Var(X)$.

(iii) pour tous réels a,b,c,d : $Cov(aX+b,cY+d) = acCov(XY)$.

(iv) $Var(X+Y) = Var(X) + 2Cov(X,Y) + Var(Y)$.

1.3 Espérance conditionnelle

Soit $(\Omega,\mathcal{C},\mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(A_1,...,A_n)$ une partition de Ω. Soit $X:\Omega\to\mathbb{R}$ une variable aléatoire constituée d'événements de probabilité non nulle. On note par $\mathcal{C}$ la tribu engendrée par cette partition et $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{F}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

$$\mathcal{C} = \bigcup_{i\in I} A_i, I = \{1,...,n\} \text{ et } X = 1_A$$

I est une partie dénombrable. L'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{C}$ données par la relation:

$$\mathbb{E}[X/\mathcal{C}] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X/A_i]\, 1_{A_i}$$

Définition 1.3.1 *$X\in\mathbb{L}^2(\Omega,\mathcal{C},\mathbb{P})$ une variable aléatoire et $\mathcal{B}$ une sous-tribu . On appelle espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$, que l'on note $\mathbb{E}[X/\mathcal{B}]$, la projection orthogonale de X sur $\mathbb{L}^2(\Omega,\mathcal{C},\mathbb{P})$.*

Théorème 1.3.1 *Soit X une variable aléatoire intégrable (ou positive) sur $(\Omega,\mathcal{C},\mathbb{P})$. Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{C}$. Alors, il existe une variable aléatoire Y, $\mathcal{B}$ -mesurable et $\mathbb{P}_{\mathcal{B}}$-intégrable (ou positive) vérifiant:*

$$\forall A\in\mathcal{B}, \int_A X d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P}.$$

Cette variable aléatoire Y est définie $\mathbb{P}_{\mathcal{B}}$ p.s de manière unique.

Définition 1.3.2 *Soit $X \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{C}, \mathbb{P})$, Il existe une unique $Y \in \mathcal{B}$, telle que $\forall A \in \mathcal{B}$:*

$$\mathbb{E}[1_A X] = \mathbb{E}[1_A Y]$$

Y est appelée espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$.

1.3.1 Propriétés fondamentales de l'espérance conditionnelle

Propriété(A.1.1): $X \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{C}, \mathbb{P})$ une v.a.r et $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ des sous tribus.

(i) Si $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$,

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{B}_1]|\mathcal{B}_2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{B}_2]|\mathcal{B}_1] = \mathbb{E}[X|\mathcal{B}_1] \quad p.s.$$

En particulier,

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{B}_1]] = \mathbb{E}X \quad p.s$$

(ii) Si X et $\mathcal{B}_1$ sont indépendantes de $\mathcal{B}_2$,

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{B}_1 \vee \mathcal{B}_2] = \mathbb{E}[X|\mathcal{B}_1] \quad p.s.$$

(iii) Soient $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe, $X \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ une variable aléatoire et $\mathcal{B}$ une sous-tribu.Si

$$\mathbb{E}|\varphi(X)| < \infty,$$

alors

$$\varphi(\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)|\mathcal{B}] \quad p.s.$$

Propriété(A.1.2): Soient X et Y deux variables aléatoires intégrables et $\mathcal{B}$ une sous-tribu.

(i) Si X est $\mathcal{B}-$mesurable,

$$X = \mathbb{E}[X|\mathcal{B}] \quad p.s.$$

(ii) $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}[aX + bY|\mathcal{B}] = a\mathbb{E}[X|\mathcal{B}] + b\mathbb{E}[Y|\mathcal{B}] \ p.s.$$

(iii) Si $X \leq Y \ p.s$,

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{B}] \leq \mathbb{E}[Y|\mathcal{B}] \ p.s.$$

(iv) Si X est indépendante de $\mathcal{B}$,

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{B}] = \mathbb{E}X \quad p.s.$$

(v) Si $\mathbb{E}|XY| < \infty$ et si X est $\mathcal{B}-$mesurable,

$$\mathbb{E}[XY|\mathcal{B}] = X\mathbb{E}[X|\mathcal{B}] \quad p.s.$$

Proposition 1.3.1 *Pour tout $X, Y \in \mathbb{L}^1(\mathcal{F})$ et tout sous-tribu $\mathcal{B}, \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ on a les propriétés suivantes:*

(i) *Linéarité:*

$$\mathbb{E}[X+Y|\mathcal{B}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{B}] + \mathbb{E}[Y|\mathcal{B}];$$

(ii) *Positivité:*

$$X \geq 0 p.s. \Longrightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{B}] \geq 0 p.s.$$

(iii) *Convergence monotone:*

$$0 \leq X_n \nearrow X \quad p.s.$$

(iv) *Inégalité de Jensen: si φ est connexe et $\varphi(X) \in \mathbb{L}^1$:*

$$\mathbb{E}[\varphi(X)|\mathcal{B}] \leq \varphi(\mathbb{E}[X|\mathcal{B}])$$

(v) *Contractivité dans $\mathbb{L}^p$*

$$\|\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]\|_p \leq \|X\|_p.$$

(vi) *Emboitement : si $\mathcal{H}$ est une sous$-$ tribu de $\mathcal{B}$, alors*

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{B}] \setminus \mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]|\mathcal{B}].$$

(vii) *Si*

$$z \in \mathcal{B}, \mathbb{E}\|X\| < \infty$$

et

$$\mathbb{E}\|ZX\| < +\infty$$

alors

$$\mathbb{E}[ZX|\mathcal{B}] = Z\mathbb{E}[X|\mathcal{B}].$$

1.4 La stationnarité

1.4.1 Processus stationnaires univariés

Un processus aléatoire $(X_t)_t$ est stationnaire s'il est d'espérance constante

$$\mathbb{E}\left|X_t\right| := \mu, \forall t$$

et si les covariances sont stables par translation dans le temps, c'est-à-dire, pour tout h

$$cov\left(X_t, X_{t+h}\right) := \sigma\left(h\right) \qquad \forall t.$$

On appelle fonction d'auto-covariance du processus stationnaire la suite $\sigma\left(h\right)$, et fonction d'auto-corrélation du processus stationnaire la suite

$$\rho\left(h\right) := \frac{\sigma\left(h\right)}{\sigma\left(0\right)}.$$

Remarque 1.4.1 *$\sigma\left(h\right) = \sigma\left(-h\right)$, pour tout h*

Proposition 1.4.1 *Si $\left(X_t, t \in \mathbb{N}\right)$ est un processus stationnaire, et si $\left(a_i, i \in \mathbb{N}\right)$est une suite de réels absolument convergente,*

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} |a_i| < +\infty,$$

alors, le processus (Y_t) défini par

$$Y = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i X_{t-i},$$

pour tout $t \in \mathbb{N}$,est un processus stationnaire.

Corollaire 1.4.1 *En particulier, si $\left(a_i, i \in \mathbb{N}\right)$ est une suite de réels finie, la suite Y_t est stationnaire. Par exemple, si $a_0 = a_1 = 1/2$, et $a_i = 0$ pour $i \notin \{0, 1\}$:*

$$Y_t = 1/2\left(X_t + X_{t-1}\right),$$

est stationnaire dès lors que (X_t) est stationnaire. De même pour

$$Y_t = X_t - X_{t-1}$$

Définition 1.4.1 ***(Stationnarité stricte)*** *Le processus* (X_t) *est dit strictement stationnaire si les vecteurs* $(X_1, ..., X_k)^{'}$ *et* $(X_{1+h}, ..., X_{k+h})^{'}$ *ont même loi jointe, pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *et tout* $h \in \mathbb{Z}$.

Définition 1.4.2 ***(Stationnarité au second-ordre)*** *Le processus* (X_t) *est dit stationnaire au second-ordre si*
1) $\mathbb{E}X_t^2 = \infty$, $t \in \mathbb{Z}$
2) $\mathbb{E}X_t = m$, $t \in \mathbb{Z}$
3) $Cov(X_t, X_{t+h}) = \gamma_x(h), t, h \in \mathbb{Z}$.

1.4.2 Processus stationnaires multivariés

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ un processus vectoriel de dimension m, tel que

$$X_t = (X_{1t}, ..., X_{mt})'.$$

La définition de la stationnarité stricte est reste valable en multivarié, donc la notion de stationnarité au second ordre est définit comme suit .

Définition 1.4.3 ***(Stationnarité au second-ordre)*** *Le processus* (X_t) *est dit stationnaire au second-ordre si*
1) $\mathbb{E}X_{it}^2 < \infty$ $t \in \mathbb{N}, i = 1, ...m$,
2) $\mathbb{E}X_t = \mu$, $t \in \mathbb{Z}$,
3) $Cov(X_t, X_{t+h}) = \mathbb{E}\left[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)^{'}\right] = \Gamma(h), \ \forall t, h \in \mathbb{N}$.
La fonction $\Gamma(.)$*, à valeur dans l'espace des matrices* $m \times m$ *est appelée fonction d'autocovariance de* (X_t)*. Il est évident que* $\Gamma_x(h) = \Gamma_x(-h)^{'}$*. En particulier* $\Gamma_x(0) = Var(X_t)$ *est une matrice symétrique.*

1.5 Ergodicité

Définition 1.5.1 *(Processus stationnaire ergodique)*
Un processus strictement stationnaire $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$*, à valeurs réelles, est dit ergodique si et seule-*

ment si, pour tout borélien B et tout entier k,

$$n^{-1}\sum_{t=1}^{n} 1_B\left(X_t, X_{t+1}, ..., X_{t+k}\right) \to \mathbb{P}\left\{(X_1, ..., X_{1+t}) \in B\right\}$$

avec probabilité 1

Théorème 1.5.1 *Si $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement stationnaire ergodique et si $(Y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est définie par*

$$Y_t = f\left(..., X_{t-1}, X_t, X_{t+1}, ...\right),$$

où f est une fonction mesurable de $\mathbb{R}^n$ dans R, alors $(Y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est également une suite strictement stationnaire ergodique.

En particulier, si $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est la solution stationnaire non anticipative d'un modèle auto régressive linéaire d'ordre 1 noté $AR(1)$

$$X_t = aX_{t-1} + \eta_t, \ \ |a| < 1, \eta_t \ iid\left(0, \sigma^2\right).$$

Alors on peut dire que les suites stationnaires $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}, (X_{t-1}\eta_t)_{t\in\mathbb{N}}$ et $\left(X_{t-1}^2\right)_{t\in\mathbb{N}}$ sont ergodiques.

Théorème 1.5.2 *(Le théorème de l'ergodicité pour les suites stationnaires)*

Si $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est strictement stationnaire et ergodique, si f est mesurable et si

$$\mathbb{E}\left|f\left(..., X_{t-1}, X_t, X_{t+1}, ...\right)\right| < \infty$$

Alors

$$n^{-1}\sum_{t=1}^{n} f\left(..., X_{t-1}, X_t, X_{t+1}, ...\right) \to \mathbb{E}f\left(..., X_{t-1}, X_t, X_{t+1}, ...\right) \ \ p.s.$$

$\beta-$ mélangeant

On dit que le processus (X_t) est $\beta-$mélangeant si

$$\lim_{k\to\infty} \beta_x(k) = 0$$

où $\beta_x(k)$ sont les coefficients de $\beta-$ mélange d'un processus stationnaire X sont définie par

$$\begin{aligned}\beta_x(k) &= \mathbb{E}\sup_{B\in\sigma(X_s,s\geq k)}|\mathbb{P}(B/\sigma(X_s,s\leq 0))-\mathbb{P}(B)| \\ &= \frac{1}{2}\sup\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}|\mathbb{P}(A_i\cap B_j)-\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B_j)|\end{aligned}$$

où dans la dernière égalité le sup est pris sur tout les paires de partition $\{A_1,...,A_I\}$ et $\{B_1,...,B_J\}$ de Ω telles que $A_i\in\sigma(X_s,s\leq 0)$ pour tout i, $B_j\in\sigma(X_s,s\geq k)$ pour tout j.

1.5.1 Bruit blanc faible

Définition 1.5.2 ***(bruit blanc faible)*** *Le processus (ε_t) est appelé bruit blanc faible s'il vérifie, pour une constante positive σ^2 :*
1) $\mathbb{E}\epsilon_t=0$, $\forall t\in\mathbb{Z}$,
2) $\mathbb{E}\epsilon_t^2=\sigma^2,\forall t\in\mathbb{Z}$,
3) $cov(\epsilon_t,\epsilon_{t+h})=0\ \forall t,h\in\mathbb{Z},\ h\neq 0$.

1.6 Produit de Kronecker

Définition 1.6.1 *soient A un matrice de taille $m\times n$ et B une matrice de taille $p\times q$. Leur produit de Kronecker (tensoriel) est la matrice $A\otimes B$ de taille $m.p\times n.q$, définie par blocs successifs de taille $p\times q$, le bloc d'indice i,j valant $(a)_{ij}\cdot B$*
En d'autres termes

$$A\otimes B=\begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

propriété(A.8.1)
le produit de Kronecker est bilinéaire et associatif: sous réserve de compatibilité des tailles pour $A,BetC$, pour $\lambda\in\mathbb{R}^*$ on a les axiomes suivantes :

(i)$A \otimes (B + \lambda C) = (A \otimes B) + \lambda(A \otimes C)$
(ii)$(A + \lambda B)C = (A \otimes C) + \lambda(B \otimes C)$
(iii)$A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$

1.7 L'opérateur *vec*

Définition 1.7.1 *Soit A une matrice de taille $m \times n$ et a_i est $j_e$me colone .Avec $vec(A)$ est un vecteur de taille $mn \times 1$*
donc l'opération vec transforme une matrice en vecteur en empilant les colonne de la matrice sous l'autre. On le note $vec(A)$ est définie pour n'importe quelle matrice.

$$vecA = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Notez également que

$$vec(A) = vec(B)$$

N'implique pas $A = B$,sauf si A et B sont des matrices de meme ordre.

propriété(A.9.1)
1)$veca' = veca = a$ pour n'importe quel vecteur de colonne a.

1.8 La notion de Martingale

Définition 1.8.1 *(Martingale)(voir[18])*
Soit $(Y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles $(v.a.r)$ et $(\mathcal{C}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ une suite de tribus. La suite $(Y_t, \mathcal{C}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est une martingale si et seulement si

(i) $\mathcal{C}_t \subset \mathcal{C}_{t+1}$

(ii) *Y_t est $\mathcal{C}_t$-mesurable*

(iii) $\mathbb{E}|Y_t| < \infty$

(iv) $\mathbb{E}(Y_{t+1}/\mathcal{C}_t) = Y_t$

Quand on dit que $(Y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est une martingale, on prend implicitement $\mathcal{C}_t = \sigma(Y_u, u < t)$, c'est-à-dire la tribu engendrée par les valeurs passées et pressentes.

Définition 1.8.2 *(Différence de martingale)(voir [18])*
Soit $(Y_t)_{t\in\mathbb{N}}$ une suite de (v.a.r). et $(\mathcal{C}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ une suite de tribus. La suite $(\eta_t, \mathcal{C}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est une différence de martingale si:

(i) $\mathcal{C}_t \subset \mathcal{C}_{t+1}$

(ii) η_t *est* $\mathcal{C}_t$*-mesurable*

(iii) $\mathbb{E}|\eta_t| < \infty$

(iv) $\mathbb{E}(\eta_{t+1}/\mathcal{C}_t) = 0.$

Définition 1.8.3 *(**carré sommable où carré intégrable**) On dit que une fonction définie sur un espace mesuré Ω et à valeur dans $\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$ est de carré sommable où de carré intégrable si elle appartient à l'aspace $\mathbb{L}^2(\Omega)$*

$$\int_{\mathbb{R}} \mid f(x) \mid^2 dx < \infty$$

Théorème 1.8.1 *(**de Chung Fuches**) Si $X_1, ..., X_N$ est une suite iid telle que $\mathbb{E}(X_1) = 0$ et $\mathbb{E}(\mid X_1 \mid) > 0$ alors $\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n X_i = +\infty$ et $\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n X_i = -\infty$*

Chapitre 2

Modèles $GARCH$ univariés

2.1 Introduction

Les modèles *Autorégressifs Conditionnelement Hétéroscidastiques* notés $ARCH$ ont été introduit par Engle [8] en 1982. Ces modèles aptent a capter le comportement de la volatilité dans le temps. Une généralisation a été suggérée par Bolerslev [4] en 1986 pour rendre compte des propriétés des séries financières où leur caractérisation repose essentiellement sur le concept de variance conditionnelle univarié qui consiste à décrire la variance conditionnelle du processus en fonction de son passé.

Ce chapitre est composé de trois sections. Dans la première section nous définissons le modèle $GARCH$ univarié et rappelons quelques propriétés de ce modèle. L'étude de la stationnarité de ce modèle est le but de la deuxième section, où nous étudions d'abord la stationnarité d'un modèle $GARCH(1,1)$. Enfin, dans la dernière section nous estimons les paramètres d'un modèle $GARCH$ univarié par la méthode de quasi-maximum vraisemblance.

2.2 Processus $GARCH$ d'ordre p et q

Définition 2.2.1 *On dit qu'un processus $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un $GARCH$ d'ordre p et q noté $GARCH(p,q)$ si ses deux premiers moments conditionnels existent et vérifiant les deux équations suivantes*

$$\mathbb{E}(\epsilon_t/\mathcal{F}_{t-1}) = 0, t \in \mathbb{Z}, \tag{2.2.1}$$

avec $\mathcal{F}_{t-1}$ est la tribu engendrée par le passé du processus

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2, \tag{2.2.2}$$

où $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1...q$, $\beta_j \geq 0$, $j = 1...p$, $t \in \mathbb{Z}$.
η_t est un suite de variables aléatoires iid tel que $\mathbb{E}(\eta_t) = 0$ et $\mathbb{E}(\eta_t^2) = 1$.

2.2.1 Processus $GARCH(p,q) fort$

Définition 2.2.2 *Soit $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ une suite de variable i.i.d d'espérance nulle et de variance unité, $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus $GARCH\,(p,q)$ au sens fort relativement à $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ s'il vérifié*

$$\epsilon_t = \sqrt{\sigma_t}\,\eta_t, \tag{2.2.3}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2, \tag{2.2.4}$$

où $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$ pour $i = 1, .., q$, $\beta_j \geq 0$ pour $j = 1, .., p$.
Dans (2.2.4) en subtituant ϵ_{t-i} par $\sigma_{t-i}\eta_{t-i}$ on obtient:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i (\sigma_{t-i}\eta_{t-i})^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2, \tag{2.2.5}$$

Soit $r = max(p,q)$, l'équation (2.2.5) s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \sigma_{t-i}^2 \eta_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{r} \beta_i \sigma_{t-i}^2 \\ &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{r} \left(\alpha_i \eta_{t-i}^2 + \beta_i\right) \sigma_{t-i}^2 \end{aligned}$$

Supposons que

$$\widetilde{\alpha}_i(\eta_{t-i}) = \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \beta_i \tag{2.2.6}$$

alors

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{r} \widetilde{\alpha}_i\left(\eta_{t-i}\right) \sigma_{t-i}^2, \tag{2.2.7}$$

2.3 Stationnarité d'un modèle $GARCH(p,q)$

L'étude de stationnarité d'un modèle $GARCH(p,q)$ est difficile, donc on commence par l'étude de stationnarité d'un modèle $GARCH$ d'ordre $p=q=1$, c'est à dire d'un modèle $GARCH(1,1)$.

2.3.1 Stationnarité d'un modèle $GARCH(1,1)$

Avant d'étudier la stationnarité de $GARCH(1,1)$, on va d'abord introduire sa définition

Définition 2.3.1 *Un modèle $GARCH(1,1)$ est défini par (2.2.4) pour $p=q=1$ et est donné par*

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha\epsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2, \text{ avec } \alpha_0 > 0,\ \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0. \tag{2.3.1}$$

La stationnarité stricte du modèle $GARCH(1,1)$ fort, est établie par Bollerslev [4] et elle est basée sur l'utilisation du ceofficient de lyaponouv défini par

$$\gamma := \mathbb{E}\log\left\{\alpha\eta_{t-1}^2 + \beta\right\} \tag{2.3.2}$$

Théorème 2.3.1 *[5]*
La stationnarité stricte du modèle $GARCH(1,1)$ fort donné par (2.3.1) est établie, si $\gamma < 0$ avec γ est donné par (2.3.2) Alors la série

$$\sigma_t = \left\{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{\alpha}\left(\eta_{t-1}\right)...\widetilde{\alpha}\left(\eta_{t-i}\right)\right\}\alpha_0 \tag{2.3.3}$$

converge presque sûrement et l'équation (2.2.3) donne l'unique solution strictement stationnaire du modèle (2.3.1). Cette solution est non anticipative et est ergodique.

Preuve.
Dans (2.2.6) pour $i=1$ on a: $\widetilde{\alpha}(\eta_{t-1}) = \alpha\eta_{t-1}^2 + \beta$ et comme

$$\gamma = \mathbb{E}(\log(\widetilde{\alpha}(\eta_t))) = \mathbb{E}(\log(\alpha\eta_{t-1}^2 + \beta)) \tag{2.3.4}$$

Le coefficient $\gamma = \mathbb{E}\log\left\{\widetilde{\alpha}\left(\eta_t\right)\right\}$ existe dans $[-\infty, +\infty[$ car

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\log^+\left\{\widetilde{\alpha}\left(\eta_t\right)\right\} &\leq \mathbb{E}\left\{\widetilde{\alpha}\left(\eta_t\right)\right\} \\ &\leq \mathbb{E}(\alpha\eta_{t-1}^2 + \beta) \end{aligned}$$

comme l'espérance est linéaire alors

$$\mathbb{E}(\alpha\eta_{t-1}^2+\beta)=\alpha\mathbb{E}(\eta_{t-1}^2)+\beta$$

et $\mathbb{E}(\eta_{t-1}^2)=1$ alors $\mathbb{E}(\alpha\eta_{t-1}^2+\beta)=\alpha+\beta$

Donc

$$\mathbb{E}\log^+\{\widetilde{\alpha}(\eta_t)\} \leq \mathbb{E}\{\widetilde{\alpha}(\eta_t)\}=\alpha+\beta$$

En utilisant la recrusivité du modèle (2.2.7) avec $i=1$, en écrit $\widetilde{\alpha}(\eta_{t-1})=\alpha\epsilon_{t-1}^2+\beta$ pour $N\geq 1$, En itérant $(N+1)$ fois on obtient

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \alpha_0+\widetilde{\alpha}(\eta_{t-1})\sigma_{t-1}^2\\ &= \alpha_0+\widetilde{\alpha}(\eta_{t-1})\left[\alpha_0+\widetilde{\alpha}(\eta_{t-2})\sigma_{t-2}^2\right]\\ &= \vdots\\ &= \alpha_0+\widetilde{\alpha}(\eta_{t-1})(\alpha_0+\widetilde{\alpha}(\eta_{t-2}))...(\alpha_0+\widetilde{\alpha}(\eta_{t-N-1}))\sigma_{t-N-1}^2\end{aligned}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0\left[1+\sum_{i=1}^{N}\widetilde{\alpha}(\eta_{t-1})...\widetilde{\alpha}(\eta_{t-i})\right]+\widetilde{\alpha}(\eta_{t-1})...\widetilde{\alpha}(\eta_{t-N-1})\sigma_{t-N-1}^2 \qquad (2.3.5)$$

Suppose que:

$$\sigma_t(N)=\alpha_0+\widetilde{\alpha}(\eta_{t-1})\sigma_{t-1}(N-1)$$

alors (2.3.5) s'écrit

$$\sigma_t^2 := \sigma_t(N)+\widetilde{\alpha}(\eta_{t-1})...\widetilde{\alpha}(\eta_{t-N-1})\sigma_{t-N-1}^2. \qquad (2.3.6)$$

$\lim_{t\to\infty}\sigma_t(N)=\sigma_t$ existe dans $[0,+\infty]$. et quand $N\to\infty$ on a

$$\sigma_t=\alpha_0+\widetilde{\alpha}(\eta_{t-1})\sigma_{t-1}.$$

Dans la suite on va montrer que σ_t est presque sûrement finie si et seulement si $\gamma<0$.

Supposons que $\gamma<0$. D'après la règle de Cauchy pour les séries à termes positifs[(1)], on a

$$[\widetilde{\alpha}(\eta_{t-1})...\widetilde{\alpha}(\eta_{t-N})]^{\frac{1}{n}}=\exp\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\{\widetilde{\alpha}(\eta_{t-i})\}\right]\xrightarrow{p.s}e^{\gamma} \qquad (2.3.7)$$

[(1)]Soit $\sum a_n$ une série des termes positives,et $\lambda=\limsup_{n\to\infty}a_n^{1/n}$, si $\lambda<1$ la série converge, si $\lambda>1$ la série diverge, et si $\lambda=1$ on ne peut rien dire.

quand $N \to \infty$ la suite $[\widetilde{\alpha}(\eta_{t-1})...\widetilde{\alpha}(\eta_{t-n})]^{\frac{1}{n}} \to 1$, donc la série (2.3.3) converge presque sûrement dans $\mathbb{R}$.

Le processus $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est strictement stationnaire et ergodique et non anticipative. (ϵ_t) vérifie le modèle (2.2.3). Reste à montrer l'unicité, soit $\tilde{\epsilon}_t = \sigma_t\eta_t$ solution strictement stationnaire de (2.3.1).

En utilisant l'expression de σ_t^2 donné par (2.3.6) pour calculer $\sigma_t^2 - \sigma_t$ et donc

$$\sigma_t^2 - \sigma_t = \{\sigma_t(N) - \sigma_t\} + \widetilde{\alpha}(\eta_{t-1})...\widetilde{\alpha}(\eta_{t-N-1})\,\sigma_{t-N-1}^2$$

quand $N \to \infty$, alors $\sigma_t(N) - \sigma_t \to 0$ avec probabilité 1, ceci amplique que σ_t converge presque sûrement.

$$\widetilde{\alpha}(\eta_{t-1})...\widetilde{\alpha}(\eta_{t-n}) \to 0, \quad \text{quand} \quad n \to \infty$$

La loi σ_{t-N-1}^2 est indépendante de N, lorsque $N \to \infty$ la suite $\widetilde{\alpha}(\eta_{t-1})...\widetilde{\alpha}(\eta_{t-N-1})$ converge vers zéro, donc $\sigma_t^2 - \sigma_t \xrightarrow{p} 0$ ce terme est indépendant de N, alors $\sigma_t^2 = \sigma_t$ pour tout t, $p.s.$

Si $\gamma > 0$ d'après (2.3.7) et d'après la règle de Cauchy

$$\sum_{n=1}^{N} \widetilde{\alpha}(\eta_{t-1})...\widetilde{\alpha}(\eta_{t-n}) \to \infty \;\; p.s \;\; \text{quand } N \to \infty$$

donc si $\alpha_0 > 0$, $\quad \sigma_t = +\infty$ $p.s$, alors $\sigma_t^2 = +\infty$ $p.s.$ donc l'équation (2.3.1) n'admet pas de solution presque sûrement.

Si $\gamma = 0$ on suppose qu'il n'existe pas une solution strictement stationnaire de (2.3.1) Pour $N > 0$

$$\sigma_0^2 \geq \alpha_0 \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{N} \widetilde{\alpha}(\eta_{t-1})...\widetilde{\alpha}(\eta_{t-i}) \right\}.$$

Quand $t \to \infty$

$$\widetilde{\alpha}(\eta_{t-1})...\widetilde{\alpha}(\eta_n)\,\alpha_0 \xrightarrow{p.s} 0.$$

Ou de manière équivalente quand $N \to \infty$

$$\sum_{i=1}^{n} \log \widetilde{\alpha}(\eta_i) + \log \alpha_0 \xrightarrow{p.s} -\infty. \tag{2.3.8}$$

et d'après le théorème de **Chung Fuches** (voir 1.8.1), nous avons

$$\limsup \sum_{i=1}^{n} \log \widetilde{\alpha}(\eta_i) = +\infty$$

avec probabilité 1, contradiction avec (2.3.8). ■

2.3.2 Stationnarité au second ordre du modèle GARCH(1,1)

Théorème 2.3.2 *[5]*

Supposons que $\alpha_0 > 0$.

1) Si $\alpha + \beta \geq 1$, *il n'existe pas de solution non anticipative et stationnaire au second ordre du modèle* $GARCH(1,1)$.

2) Si $\alpha + \beta < 1$, *le processus* $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *défini par* (2.2.3), *est stationnaire au second ordre. Plus précisément,* $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *est un bruit blanc faible. De plus, il n'existe pas d'autre solution stationnaire au second ordre et non anticipative.*

Preuve.

Si $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus $GARCH(1,1)$, au sens de la définition (2.2.2), stationnaire au second-ordre et non anticipative, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\epsilon_t^2\right) &= \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left(\epsilon_t^2/\mathcal{F}_{t-1}\right)\right\} \\
&= \mathbb{E}\left(\sigma_t^2\right) \\
\mathbb{E}\left(\epsilon_t^2\right) &= \alpha_0 + (\alpha+\beta)\,\mathbb{E}\left(\epsilon_{t-1}^2\right)
\end{aligned}$$

C'est à dire

$$(1-(\alpha+\beta))\,\mathbb{E}\left(\epsilon_t^2\right) = \alpha_0 \tag{2.3.9}$$

L'équation (2.3.9) a un sens sauf si $\alpha+\beta<1$ et ceci car on a $\alpha_0 > 0$ et $\sigma_t^2 = \mathbb{E}(\epsilon_t^2) > 0$.
Inversement, Si $\alpha+\beta<1$, la seule solution strictement stationnaire de ce modèle est $\epsilon_t = 0$.
Il suffit donc de montrer que la solution strictement stationnaire définie par (2.2.1) admet une variance finie, σ_t est une limite croissante des variables aléatoires positives, on peut écrire

$$\mathbb{E}\left(\epsilon_t^2\right) = \mathbb{E}\left(\sigma_t^2\right) \tag{2.3.10}$$

d'après (2.3.5) on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\epsilon_t^2\right) &= \left[1+\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{E}(\widetilde{\alpha}(\eta_{t-1})...\widetilde{\alpha}(\eta_{t-n})\right]\alpha_0 \\ &= \left[1+\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{E}(\widetilde{\alpha}(\eta_{t-1}))^n\right]\alpha_0 \\ &= \alpha_0+\alpha_0\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha+\beta)^n\end{aligned}$$

comme $\alpha+\beta<1$ donc la somme de la série $(\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha+\beta)^n\ )$ converge, alors.

$$\mathbb{E}\left(\epsilon_t^2\right)=\alpha_0\left(\frac{1}{1-(\alpha+\beta)}\right).$$

Ceci montre la stationnarité au second ordre. De plus, cette solution est un bruit blanc car

$$\mathbb{E}(\epsilon_t)=\mathbb{E}[\mathbb{E}(\epsilon_t/\mathcal{F}_{t-1})]=0$$

et pour tout $h>0$,

$$cov(\epsilon_t,\epsilon_{t-h})=\mathbb{E}\epsilon_{t-h}\mathbb{E}(\epsilon_t/\mathcal{F}_{t-1})=0$$

Soit $\widetilde{\epsilon}_t=\widetilde{\sigma}_t\eta_t$ une autre solution stationnaire au second ordre et non anticipative, on a

$$\mid\sigma_t-\widetilde{\sigma}_t\mid=\widetilde{\alpha}(\eta_{t-1})...\widetilde{\alpha}(\eta_{t-n})\mid\sigma_{t-n-1}-\widetilde{\sigma}_{t-n-1}\mid$$

et par suite

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\mid\sigma_t-\widetilde{\sigma}_t\mid &= \mathbb{E}[\widetilde{\alpha}(\eta_{t-1})...\widetilde{\alpha}(\eta_{t-n})]\mathbb{E}\mid\sigma_{t-n-1}-\widetilde{\sigma}_{t-n-1}\mid \\ &= \mathbb{E}[\widetilde{\alpha}(\eta_{t-1})]...\mathbb{E}[\widetilde{\alpha}(\eta_{t-n})]\mathbb{E}\mid\sigma_{t-n-1}-\widetilde{\sigma}_{t-n-1}\mid \\ &= \underbrace{(\alpha+\beta)...(\alpha+\beta)}_{nfois}\mathbb{E}\mid\sigma_{t-n-1}-\widetilde{\sigma}_{t-n-1}\mid \\ &= (\alpha+\beta)^n\mathbb{E}\mid\sigma_{t-n-1}-\widetilde{\sigma}_{t-n-1}\mid\end{aligned}$$

$\mid\sigma_{t-n-1}-\widetilde{\sigma}_{t-n-1}\mid\leq\mathbb{E}\mid\sigma_{t-n-1}\mid+\mathbb{E}\mid\widetilde{\sigma}_{t-n-1}\mid$ est finie et $(\alpha+\beta)^n$ tendant vers 0 quand $n\to+\infty$. Donc on obtient $\mathbb{E}\mid\sigma_t-\widetilde{\sigma}_t\mid=0$ et donc $\sigma_t=\widetilde{\sigma}_t$ pour tout t, *p.s.* ■

2.3.3 Stationnarité stricte du processus GARCH(p,q) fort

Considérons le vecteur S_t tel que $S_t = (\epsilon_t^2, \epsilon_{t-1}^2, ...)'$ on s'intéresse dans la suite à l'écriture vectorielle de notre modèle

$$\begin{aligned}
\epsilon_t^2 &= \left(\sqrt{\sigma}_t\, \eta_t\right)^2 \\
&= \sigma_t \eta_t^2 \\
&= \left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}\right) \eta_t^2 \\
&= \alpha_0 \eta_t^2 + \left(\alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \epsilon_{t-2}^2 + ... + \alpha_q \epsilon_{t-q}^2\right) \eta_t^2 + \left(\beta_1 \sigma_{t-1} + \beta_2 \sigma_{t-2} + ... + \beta_p \sigma_{t-p}\right) \eta_t^2 \\
&= \alpha_0 \eta_t^2 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 \eta_t^2 + \alpha_2 \epsilon_{t-2}^2 \eta_t^2 + ... + \alpha_q \epsilon_{t-q}^2 \eta_t^2 + \beta_1 \sigma_{t-1} \eta_t^2 + \beta_2 \sigma_{t-2} \eta_t^2 + ... + \beta_p \sigma_{t-p} \eta_t^2
\end{aligned}$$

$$\text{Soit } S_t = \begin{pmatrix} \epsilon_t^2 \\ \epsilon_{t-1}^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \epsilon_{t-q+1}^2 \\ \sigma_{t-1} \\ \sigma_{t-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \sigma_{t-p+1} \end{pmatrix} \text{ donc } S_t = \left(\epsilon_t^2, ..., \epsilon_{t-q+1}^2, \sigma_t, ..., \sigma_{t-p+1}\right)'$$

$$S_t = \begin{pmatrix} \epsilon_t^2 \\ \epsilon_{t-1}^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \epsilon_{t-q+1}^2 \\ \sigma_{t-1} \\ \sigma_{t-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \sigma_{t-p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \eta_t^2 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 \eta_t^2 + ... + \alpha_q \epsilon_{t-q}^2 \eta_t^2 + \beta_1 \sigma_{t-1} \eta_t^2 + ... + \beta_p \sigma_{t-p} \eta_t^2 \\ \alpha_0 \eta_{t-1}^2 + \alpha_1 \epsilon_{t-2}^2 \eta_{t-1}^2 + ... + \alpha_q \epsilon_{t-q}^2 \eta_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-2} \eta_{t-1}^2 + ... + \beta_p \sigma_{t-p+1} \eta_{t-1}^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_0 \eta_t^2 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 \eta_t^2 + ... + \alpha_q \epsilon_{t-2q+1}^2 \eta_t^2 + \beta_1 \sigma_{t-1} \eta_t^2 + ... + \beta_p \sigma_{t-2p+1} \eta_t^2 \\ \sigma_{t-1} \\ \sigma_{t-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \sigma_{t-p+1} \end{pmatrix}$$

Alors

$$S_t = \begin{pmatrix} \alpha_0\eta_{t-1}^2 \\ \alpha_0\eta_{t-2}^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1\eta_t^2 & & \dots & & \alpha_q\eta_t^2 & \beta_1\eta_t^2 & & \dots & & \beta_p\eta_t^2 \\ 1 & 0 & \dots & & 0 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & \dots & & 0 & 0 & & \dots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & 1 & 0 & 0 & & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & & \dots & & \alpha_q & \beta_1 & & \dots & & \beta_p \\ 0 & & \dots & & 0 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & & \dots & & 0 & 0 & 1 & \dots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 & 0 & 0 & & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{t-1}^2 \\ \epsilon_{t-2}^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \epsilon_{t-q+1}^2 \\ \sigma_{t-1} \\ \sigma_{t-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \sigma_{t-p+1} \end{pmatrix}$$

$$R_t = R_t(\eta_t) = \begin{pmatrix} \alpha_0\eta_{t-1}^2 \\ \alpha_0\eta_{t-2}^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p+q}$$

supposons que

$$A_t = \begin{pmatrix} \alpha_1\eta_t^2 & & \dots & & \alpha_q\eta_t^2 & \beta_1\eta_t^2 & & \dots & & \beta_p\eta_t^2 \\ 1 & 0 & \dots & & 0 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & \dots & & 0 & 0 & & \dots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & 1 & 0 & 0 & & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & & \dots & & \alpha_q & \beta_1 & & \dots & & \beta_p \\ 0 & & \dots & & 0 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & & \dots & & 0 & 0 & 1 & \dots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 & 0 & 0 & & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.3.11}$$

S_t pour écriture matricielle

$$S_t = R_t + A_t S_{t-1} \tag{2.3.12}$$

(2.3.12) constitue un modèle vectoriel autorégressif d'ordre 1[(1)] de coefficients positifs. En itérant (2.3.12) k fois on obtient

$$\begin{aligned} S_t &= R_t + A_t S_{t-1} \\ &= R_t + A_t(R_{t-1} + A_{t-1}S_{t-2}) \\ &= R_t + A_t R_{t-1} + A_t A_{t-1} S_{t-2} \\ &= R_t + A_t R_{t-1} + A_t A_{t-1} R_{t-2} + A_t A_{t-1} A_{t-2} S_{t-3} \\ &\vdots \\ &= R_t + \sum_{k=1}^{\infty} A_t A_{t-1} ... A_{t-k+1} R_{t-k} \end{aligned}$$

donc

$$S_t = R_t + \sum_{k=1}^{\infty} A_t A_{t-1} ... A_{t-k+1} R_{t-k} \tag{2.3.13}$$

[(1)] Un modèle vectoriel autorégressif noté VAR d'ordre 1 se définit comme la représentation autorégressif vectorielle de variable aléatoire Y_t d'ordre 1 donné par $Y_t = A_0 + A_1 Y_{t-1} + b_t$ où A_0, A_1 sont des matrices et b_t est vecteur

La série existe au sens presque sûre, reste donc a retrouver les conditions justifiant l'existence de cette série.

$$R_t + \sum_{k=1}^{\infty} A_t A_{t-1} ... A_{t-k+1} R_{t-k} > 0. \tag{2.3.14}$$

2.3.4 Stationnarité stricte d'un modèle $GARCH(p,q)$

Définition 2.3.2 *Soit $(A_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ une suite strictement stationnaire et ergodique de matrices aléatoires, tel que $\mathbb{E}\log \parallel A \parallel$ est fini où $A = A_t$, $\parallel . \parallel$ est la norme euclidienne, nous définissons le plus grand exposant de Lyaponouv noté $\gamma(A)$ par*

$$\gamma(A) = \inf_{t\in\mathbb{N}} \frac{1}{t} \left(\mathbb{E}\log \parallel A_t A_{t-1} ... A_1 \parallel\right) = \lim_{t\longrightarrow\infty} \frac{1}{t} \mathbb{E}(\log \parallel A_t A_{t-1} ... A_1 \parallel) \tag{2.3.15}$$

Théorème 2.3.3 *[5]*

Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution strictement stationnaire du modèle (2.2.4) est que $\gamma < 0$. Quand une solution strictement stationnaire existe, elle est unique non anticipative et ergodique.

Lemme 2.3.1 *[5]*

Soit $(A_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ une suite ergodique et strictement stationnaire de matrices aléatoires telle que $\mathbb{E}\log^+ \parallel A \parallel$ est finie et γ défini comme précédement alors

$$\lim_{t\to\infty} \parallel A_0 ... A_{-t} \parallel = 0, p.s \Longrightarrow \gamma < 0. \tag{2.3.16}$$

Preuve. (2.3.3)

Remarque que η_t est une suite de variables aléatoires, tous les termes de la matrice A_t sont intégrables

$$\mathbb{E}\log^+ \parallel A_t \parallel \leq \mathbb{E} \parallel A_t \parallel < \infty$$

suppose que $\gamma < 0$ et calculons la limite de (2.3.13) on obtient

$$\lim_{t\to\infty} S_t = \lim_{t\to\infty} [R_t + \sum_{k=0}^{\infty} A_t A_{t-1} ... A_{t-1} R_{t-k-1}] = b_t + \sum_{n=0}^{N} A_t A_{t-1} ... A_{t-1} R_{t-n-1} = \widetilde{S}_t(N)$$

converge presque sûre,quand N tend ∞, a une certaine limite $\widetilde{S}_t(N)$.

En utilisant (2.3.16) on obtient

$$\parallel \widetilde{S}_t(N) \parallel \leq \parallel R_t \parallel + \sum_{n=0}^{\infty} \parallel A_t A_{t-1} ... A_{t-n} \parallel \parallel R_{t-n-1} \parallel$$

en utilisant la règle de Cauchy pour les séries à termes positif

$$\| A_tA_{t-1}...A_{t-n} \|^{1/n} \| R_{t-n-1} \|^{1/n} = \exp[\frac{1}{n}\log \| A_tA_{t-1}...A_{t-n} \| + \frac{1}{n}\log \| R_{t-n-1} \|] \longrightarrow e^{\gamma} p.s$$

car

$$n^{-1}\log \| R_{t-n-1} \| \longrightarrow 0 p.s$$

et $\frac{1}{n}\log \| A_tA_{t-1}...A_{t-n} \|$ car

$$\mathbb{E} \mid \log \| R_{t-n-1} \| \mid \leq \mid \log \alpha_0 \mid + \mathbb{E} \log^+ \mid R_{t-n-1} \mid \leq \mid \log \alpha_0 \mid + \mathbb{E} \| R_{t-n-1} \| < \infty$$

La règle de Cauchy assure que $\widetilde{S}_t$ est bien défini dans $(\mathbb{R}^{*+})^{p+q}$. Soit S_{q+1} les $(q+1)$ composantes de $\widetilde{S}_t$. Soit $\epsilon_t = \sqrt{\widetilde{S}_{q+1}}\ \eta_t$ est une solution de modèle (2.2.3) cette solution est non anticipative et par (2.3.13) $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ peut être exprimé comme fonction mesurable de $\eta_t, \eta_{t-1}...$ par la preuve de l'unicité de solution est parallèle aux cas ou $p = q = 1$.
Soit $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ une solution strictement stationnaire du modèle (2.2.4), et $\widetilde{S}_t$ est solution positive et strictement stationnaire de (2.3.2) pour tout $N \geq 0$,

$$S_t = \widetilde{S}_t(N) + A_t...A_{t-N}S_{t-N-1}$$

alors

$$\| S_t \| \leq \| \widetilde{S}_t(N) \| + \| A_t...A_{t-N} \| \| S_{t-N-1} \|$$

$S_t \underset{t\to\infty}{\to} 0\ p.s$
On a $\| A_t...A_{t-N} \| \to 0$ avec probabilité 1 ou $t \to \infty$. La loi de $\| S_{t-N-1} \|$ est indépendante de N par stationnarité. $\| A_t...A_{t-N} \| \| S_{t-N-1} \| \underset{N\to\infty}{\to} 0$.
et on a donc $S_t - \widetilde{S}_t \underset{N\to\infty}{\to} 0$. Ce terme étant indépendant de N donc forcement $Z_t \equiv \widetilde{Z}_t$ presque sûrement $\forall t$.
Pour établir (2.3.16) il suffit de montrer que $1 \leq i \leq p+q$, où e_i est le i-ème élément de la base canonique de $\mathbb{R}^{p+q}$

$$\lim_{t\to\infty} A_0...A_{-t}e_i = 0, p.s \tag{2.3.17}$$

Soit $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ une solution stationnaire de (2.2.4) vérifiant (2.2.1) et soit (S_t) défini par (2.2.1). On a pour $t > 0$,

$$\begin{aligned} S_0 &= R_0 + A_0S_{-1} \\ &= R_0 + \sum_{k=0}^{t-1} A_0...A_{-k}R_{-k-1} + A_0...A_{-t}S_{-t-1} \geq \sum_{k=0}^{t-1} A_0...A_{-k}R_{-k-1} \end{aligned}$$

car les coefficients des matrices A_t,R_0 et S_t sont positifs[1]. La série $\sum_{k=0}^{t-1} A_0...A_{-k}R_{-k-1}$ converge et donc $A_0...A_{-k}R_{-k-1}$ tend presque sûrement vers 0 quand $k \to \infty$. Or $R_{-k-1} = \alpha_0\eta^2_{-k-1}e_1 + \alpha_0 e_{q+1}$. Donc $A_0...A_{-k}R_{-k-1}$ se décompose en deux termes positifs et on a

$$\lim_{t\to\infty} A_0...A_{-k}\alpha_0\eta^2_{-k-1}e_1, \lim_{t\to\infty} A_0...A_{-k}\alpha_0\eta^2_{q+1}e_{q+1} \tag{2.3.18}$$

car $\alpha_0 \neq 0$,(2.3.17) est vraie pour $i = q+1$. On utilise la relation

$$A_{-k}e_{q+i} = \beta_i\eta^2_{-k}e_1 + \beta_i e_{q+1} + e_{q+i+1}, i = 1, ..., p \tag{2.3.19}$$

Par convention $e_{p+q+1} = 0$. pour $i = 1$ cette relation donne

$$0 \leq \lim_{t\to\infty} A_0...A_{-k+1}e_{q+2} \leq \lim_{t\to\infty} A_0...A_{-k}e_{q+1} = 0$$

Donc (2.3.17) est vraie pour $i = q+2$, et par récurrence, pour $i = q+j$,$j = 1, ..., p$ en utilisant (2.3.19). On remarque que $A_{-k}e_q = \alpha_q\eta^2_{-k}e_1 + \alpha_q e_{q+1}$ ce qui permet de voir, d'après (2.3.18) et (2.3.19) est vérifiée pour $i = q$.

On conclut pour les autres valeurs de i en utilisant

$$A_{-k}e_i = \alpha_i\eta^2_{-k}e_1 + \alpha_i e_{q+1} + e_{i+1}, i = 1, ..., q-1$$

et une récurrence ascendante. Donc le théorème est démontré. ■

Exemple 2.3.1 *Pour $GARCH(1,1)$ la matrice A_t s'écrit*

$$A_t = (\eta^2_t, 1)'(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha\eta^2_t & \beta\eta^2_t \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

Alors

$$A_tA_{t-1}...A_1 = \prod_{k=1}^{t-1}(\alpha\eta^2_{t-k} + \beta)A_t$$

par suite

$$\log \parallel A_tA_{t-1}...A_1 \parallel = \sum_{k=1}^{t-1} \log(\alpha\eta^2_{t-k} + \beta) + \log \parallel A_t \parallel$$

[1]Soit x et y deux vecteurs on dit que $x \geq y$ si toutes les composantes de x sont supérieures ou égales a celles du vecteur y tels que x et y de même dimension.

et d'aprés (2.3.15) et

$$\begin{aligned}\gamma &= \mathbb{E}\log(\alpha\eta_t^2+\beta)\\ &\leq \log\mathbb{E}(\alpha\eta_t^2+\beta)\\ &\leq \log(\alpha\mathbb{E}(\eta_t^2)+\beta)\\ &\leq \log(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

alors si $\alpha+\beta\leq 1$ *donc* $\log(\alpha+\beta)\leq 0$ *donc la condition nécessaire et suffisante est vérifie pour l'existence d'une solution strictement stationnaire de ce modèle.*

2.3.5 Stationnarité au second ordre de modèle $GARCH(p,q)$

Pour montrer la stationnarité au second ordre du modèle $GARCH(p,q)$ en utilise le théorème de Bollerslev [5] (1995).

Théorème 2.3.4 *(Bollerslev [5])*
Etant donné la stationnaire au second-ordre et non anticipative d'un processus $GARCH(p,q)$ *est établi, et si* $\alpha_0>0$ *et*

$$\sum_{i=1}^{q}\alpha_i+\sum_{j=1}^{p}\beta_j<1 \tag{2.3.20}$$

Inversement, si (2.3.23) est vérifiée, l'unique solution strictement stationnaire du modèle(2.2.4) est un bruit blanc faible (donc est stationnaire au second ordre). Il n'existe pas d'autre solution stationnaire au second ordre.

Preuve.
Montrons la condition nécessaire (2.3.23)
Soit $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$un processus $GARCH(p,q)$, stationnaire au second ordre et non anticipatif.Alors

$$\mathbb{E}(\epsilon_t^2)=\mathbb{E}\{\mathbb{E}(\epsilon_t/\mathcal{F}_{t-1})\}=\mathbb{E}(\sigma_t^2)$$

est un réel positif, indépendant de t. En prenant l'espérance des deux membres de l'égalité (2.2.2) , on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\epsilon_t^2) &= \mathbb{E}(\sigma_t^2) \\
&= \mathbb{E}\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2\right) \\
&= \mathbb{E}(\alpha_0) + \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2) + \mathbb{E}(\sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2) \\
&= \mathbb{E}(\alpha_0) + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \mathbb{E}(\epsilon_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \mathbb{E}(\sigma_{t-j}^2)
\end{aligned}$$

car $\mathbb{E}(\alpha_0) = \alpha_0$ et $\mathbb{E}(\epsilon_{t-i}^2) = \mathbb{E}(\sigma_{t-j}^2) = \mathbb{E}(\epsilon_t^2)$

$$\mathbb{E}(\epsilon_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \mathbb{E}(\epsilon_t^2) + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \mathbb{E}(\epsilon_t^2)$$

donc

$$(1 - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i - \sum_{j=1}^{p} \beta_j)\mathbb{E}(\epsilon_t^2) = \alpha_0 \tag{2.3.21}$$

comme $\alpha_0 > 0$ donc

$$1 - \left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j\right) > 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j\right) < 1$$

alors (2.3.23) est établie.

Supposons que (2.3.23) est vérifieé et cherchons une solution du $GARCH$ au sens fort qui soit stationnaire. Pour $t, k \in \mathbb{Z}$ soient les vecteurs suivants dans $\mathbb{R}^d$

$$Z_k(t) = \begin{cases} 0 \qquad si\ k < 0 \\ b_t + A_t Z_{k-1}(t-1) \qquad si\ k \geq 0 \end{cases}$$

On a

$$Z_k(t) - Z_{k-1}(t) = \begin{cases} 0 \qquad si\ k < 0 \\ b_t \qquad si\ k = 0 \\ A_t Z_{k-1}(t-1) - Z_{t-1} \qquad si\ k > 0 \end{cases}$$

En itérant ces relations on obtient, pour $k > 0$

$$Z_k(t) - Z_{k-1}(t) = A_t A_{t-1} ... A_{t-k+1} b_{t-k} \tag{2.3.22}$$

On utilisons cette norme

$$\| C \| = \sum | c_{ij} |$$

pour toute matrice C a coefficient positifs on a

$$\mathbb{E} \| c \| = \mathbb{E} \sum_{i,j} | c_{ij} | = \mathbb{E} \sum c_{ij}$$

Donc pour $k > 0$ on prend l'espérance de (2.3.25) on obtient

$$\mathbb{E} \| Z_k(t) - Z_{k-1}(t) \| = \| \mathbb{E}(A_t A_{t-1} ... A_{t-k+1} b_{t-k}) \|$$

Comme $A_t A_{t-1} ... A_{t-k+1} b_{t+k}$ est positif. Tous les termes du produit $A_t A_{t-1} ... A_{t-k+1} b_{t-k}$ sont indépendants (car η_t est un processus iid) on prend $A = \mathbb{E}(A_t)$, $b = \mathbb{E}(b_t)$ est indépendant t, $\forall k > 0$,

$$\mathbb{E} \| Z_k(t) - Z_{k-1}(t) \| = \| A^k b \| = (1, ..., 1) A^k b$$

car les termes du vecteur $A^K B$ sont positifs.

De (2.3.23) implique on remarque que les valeurs propres de A sont de module strictement inférieur a 1 donc on a

$$\det(\lambda I_{p+q} - A) = \lambda^{p+q} (1 - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \lambda^{-i} - \sum_{j=1}^{p} \beta_j \lambda^{-j})$$

Donc si$| \lambda | \geq 1$ on utilise l'inégalité $| a | - | b | \leq | a - b |$, on obtient

$$0 < (1 - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i - \sum_{j=1}^{p} \beta_j) \leq | (1 - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \lambda^{-i} - \sum_{j=1}^{p} \beta_j \lambda^{-j}) | \leq | \det(\lambda I_{p+q} - A) |$$

d'où $\rho(A) < 1$, en utilisant la décomposition de Jordan, ou (2.3.15)on a $A^k \to 0$ quand $k \to \infty$ ■ Pour montrer la stationnarité au second ordre de modèle $GARCH(p,q)$ en utilisant le théorème de Bollerslev [5] (1995).

Théorème 2.3.5 *(Bollerslev [5])*

Etant donné la stationnaire au second-ordre et non anticipative d'un processus $GARCH(p,q)$ est établie , et si $\alpha_0 > 0$ et

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j < 1 \tag{2.3.23}$$

Inversement, si (2.3.23) est vérifiée, l'unique solution strictement stationnaire du modèle(2.2.4) est un bruit blanc faible (donc est stationnaire au second ordre). Il n'existe pas d'autre solution stationnaire au second ordre.

Preuve.

Montrons que la condition nécessaire (2.3.23)

Soit $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$un processus $GARCH(p,q)$, stationnaire au second ordre et non anticipatif.Alors

$$\mathbb{E}(\epsilon_t^2) = \mathbb{E}\{\mathbb{E}(\epsilon_t/\mathcal{F}_{t-1})\} = \mathbb{E}(\sigma_t^2)$$

est un réel positif, indépendant de t. En prenant l'espérance des deux membres de l'égalité (2.2.2) , on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\epsilon_t^2) &= \mathbb{E}(\sigma_t^2) \\
&= \mathbb{E}\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j\sigma_{t-j}^2\right) \\
&= \mathbb{E}(\alpha_0) + \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{q}\alpha_i\epsilon_{t-i}^2) + \mathbb{E}(\sum_{j=1}^{p}\beta_j\sigma_{t-j}^2) \\
&= \mathbb{E}(\alpha_0) + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\mathbb{E}(\epsilon_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^{p}\beta_j\mathbb{E}(\sigma_{t-j}^2)
\end{aligned}$$

car $\mathbb{E}(\alpha_0) = \alpha_0$ et $\mathbb{E}(\epsilon_{t-i}^2) = \mathbb{E}(\sigma_{t-j}^2) = \mathbb{E}(\epsilon_t^2)$

$$\mathbb{E}(\epsilon_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\mathbb{E}(\epsilon_t^2) + \sum_{j=1}^{p}\beta_j\mathbb{E}(\epsilon_t^2)$$

donc

$$(1 - \sum_{i=1}^{q}\alpha_i - \sum_{j=1}^{p}\beta_j)\mathbb{E}(\epsilon_t^2) = \alpha_0 \tag{2.3.24}$$

comme $\alpha_0 > 0$ donc

$$1 - \left(\sum_{i=1}^{q}\alpha_i + \sum_{j=1}^{p}\beta_j\right) > 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{q}\alpha_i + \sum_{j=1}^{p}\beta_j\right) < 1$$

alors (2.3.23) est établie.

Supposons que (2.3.23) est vérifie et cherchons une solution du $GARCH$ au sens fort qui

soit stationnaire. Pour $t, k \in \mathbb{Z}$ soient les vecteurs suivants dans $\mathbb{R}^d$

$$Z_k(t) = \begin{cases} 0 \qquad si\ k < 0 \\ b_t + A_t Z_{k-1}(t-1) \qquad si\ k \geq 0 \end{cases}$$

On a

$$Z_k(t) - Z_{k-1}(t) = \begin{cases} 0 \qquad si\ k < 0 \\ b_t \qquad si\ k = 0 \\ A_t Z_{k-1}(t-1) - Z_{t-1} \qquad si\ k > 0 \end{cases}$$

En itérant ces relations on obtient, pour $k > 0$

$$Z_k(t) - Z_{k-1}(t) = A_t A_{t-1} ... A_{t-k+1} b_{t-k} \tag{2.3.25}$$

En utilisons cette norme

$$\| C \| = \sum | c_{ij} |$$

pour toute matrice C a coefficient positifs on a

$$\mathbb{E} \| c \| = \mathbb{E} \sum_{i,j} | c_{ij} | = \mathbb{E} \sum c_{ij}$$

Donc pour $k > 0$ on prend l'espérance de (2.3.25) on obtient

$$\mathbb{E} \| Z_k(t) - Z_{k-1}(t) \| = \| \mathbb{E}(A_t A_{t-1} ... A_{t-k+1} b_{t-k}) \|$$

Comme $A_t A_{t-1} ... A_{t-k+1} b_{t+k}$ est positif. Tous les termes du produit $A_t A_{t-1} ... A_{t-k+1} b_{t-k}$ sont indépendants (car η_t est un processus iid) on prend $A = \mathbb{E}(A_t)$, $b = \mathbb{E}(b_t)$ est indépendant t, $\forall k > 0$,

$$\mathbb{E} \| Z_k(t) - Z_{k-1}(t) \| = \| A^k b \| = (1, ..., 1) A^k b$$

car les termes du vecteur $A^K B$ sont positifs.

De (2.3.23) on remarque que les valeurs propres de A sont de module sont strictement inférieurs a 1 donc on a

$$\det(\lambda I_{p+q} - A) = \lambda^{p+q} (1 - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \lambda^{-i} - \sum_{j=1}^{p} \beta_j \lambda^{-j})$$

Donc si $\mid \lambda \mid \geq 1$, on utilise l'inégalité $\mid a \mid - \mid b \mid \leq \mid a - b \mid$, on obtient:

$$0 < (1 - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i - \sum_{j=1}^{p} \beta_j) \leq \mid (1 - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \lambda^{-i} - \sum_{j=1}^{p} \beta_j \lambda^{-j}) \mid \leq \mid \det(\lambda I_{p+q} - A) \mid$$

d'où $\rho(A) < 1$, en utilisant la décomposition de Jordan, ou (2.3.15)on a $A^k \to 0$ quand $k \to \infty$ ■

2.4 Estimation des paramètres d'un modèles $GARCH$ univariés

Dans cette section, la méthode du quasi-maximum de vraisemblance noté (QMV) sera utilisée pour estimer les paramètres du modèle $GARCH$ univarié.

2.4.1 Quasi de vraisemblance conditionnelle

Soit $(\epsilon_1, ..., \epsilon_n)$ constituant une réalisation d'un processus $GARCH(p, q)$, solution strictement stationnaire non anticipative du modèle, où $(\epsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ vérifie (2.2.1) et (2.2.2), et supposons que les ordres p et q sont connue.
Soit θ vecteur des paramètres de modèle $GARCH(p, q)$

$$\theta = (\theta_1, ..., \theta_{p+q-1})' := (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_p, \beta_1, ..., \beta_q)'$$

où α_i les coefficient de $ARCH$, β_j les coefficient d'une $GARCH$ vérifient $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq$ Soit Θ l'espace des paramètres tel que

$$\Theta \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[^{p+q}$$

Soit θ_0 La vraie valeur elle est inconnue on a

$$\theta_0 = (\alpha_0, \alpha_{01}, ..., \alpha_{0p}, \beta_{01}, ..., \beta_{0q})'$$

On considère la quasi-vraisemblance Gaussienne pour écrire la vraisemblance du modèle, les vraisemblances de $(\epsilon_1, ..., \epsilon_n)$ conditionnelles. La vraisemblance conditionnelle Gaussien

donné par

$$L_n(\theta) = L_n(\theta, \epsilon_1, ..., \epsilon_n) = \prod_{t=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\widetilde{\sigma}_t^2}} exp\left(\frac{-\epsilon_t^2}{2\widetilde{\sigma}_t^2}\right) \tag{2.4.1}$$

où les $\widetilde{\sigma}_t^2$ sont défini récursivement, pour $t \geq 1$, par

$$\widetilde{\sigma}_t^2 = \widetilde{\sigma}_t^2(\theta) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \epsilon_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \widetilde{\sigma}_{t-j}^2. \tag{2.4.2}$$

Franc et Zokain [18] ont donné à la page (185) le choix des valeurs initiale où

$$\epsilon_0^2 = ... = \epsilon_{t-q}^2 = \sigma_0^2 = ...\sigma_{t-p}^2$$

et comme

$$\epsilon_0^2 \quad = \quad \alpha_0 + \epsilon_0^2 \left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j\right)$$

Donc

$$\alpha_0 = \epsilon_0^2 \left(1 - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j\right)$$

Alors

$$\epsilon_0^2 = ... = \epsilon_{t-q}^2 = \sigma_0^2 = ...\sigma_{t-p}^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j\right)} \tag{2.4.3}$$

Pour certaines valeurs de θ l'équation (2.4.3) prendre des valeurs négatives, alors la stationnarité au second ordre n'est pas vérifiée.

On prend comme valeurs initiales

$$\epsilon_0^2 = ... = \epsilon_{t-q}^2 = \widetilde{\sigma}_0^2 = ...\widetilde{\sigma}_{t-p}^2 = \alpha_0 \tag{2.4.4}$$

ou

$$\epsilon_0^2 = ... = \epsilon_{t-q}^2 = \widetilde{\sigma}_0^2 = ...\widetilde{\sigma}_{t-p}^2 = \epsilon_1^2 \tag{2.4.5}$$

$\hat{\theta_n}$ est la valeur estimée θ où θ est définie comme toute solution mesurable $\hat{\theta_n}$ de

$$\hat{\theta_n} = \arg\max_{\theta \in \Theta} L_n(\theta)$$

où $L_n(\theta)$ est donnée par (2.4.1)

En prend le logarithme de (2.4.1) on obtient

$$\begin{aligned}
\log(L_n(\theta)) &= \log\left[\prod_{t=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\widetilde{\sigma}_t^2}}exp\left(\frac{-\epsilon_t^2}{2\widetilde{\sigma}_t^2}\right)\right] \\
&= \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\widetilde{\sigma}_t^2}}\right)^n - \sum_{t=1}^{n}\frac{\epsilon_t^2}{2\widetilde{\sigma}_t^2} \\
&= -\left[\frac{1}{n}\log(\sqrt{2\pi\widetilde{\sigma}_t^2}) + \sum_{t=1}^{n}\frac{\epsilon_t^2}{2\widetilde{\sigma}_t^2}\right] \\
&= -\left[\frac{1}{2n}\log(2\pi\widetilde{\sigma}_t^2) + \sum_{t=1}^{n}\frac{\epsilon_t^2}{2\widetilde{\sigma}_t^2}\right]
\end{aligned}$$

Soit

$$\widetilde{\ell}_t = \frac{\epsilon_t^2}{\widetilde{\sigma}_t^2} + \log\left(\widetilde{\sigma}_t^2\right)$$

où $\widetilde{\sigma}_t^2$ est donnée par (2.4.2), donc la solution mesurable est une estimation de QMV de l'équation

$$\hat{\theta}_n = \arg\min_{\theta\in\Theta} L_n(\theta) \tag{2.4.6}$$

notons par $\sigma_t^2(\theta_0) = h_t$

l'équation de vraisemblance est donnée par les dérivé de $\log(L_n(\theta))$ par rapport à θ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \log L_n(\theta)}{\partial\theta} &= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{\epsilon_t^2}{\widetilde{\sigma}_t^2} + \log\left(\widetilde{\sigma}_t^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{t=1}^{n}\frac{-\epsilon_t^2}{\widetilde{\sigma}_t^4}\frac{\partial\widetilde{\sigma}_t^2}{\partial\theta} + \frac{1}{\sigma_t^2}\frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\theta}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{t=1}^{n}\frac{\epsilon_t^2\partial\widetilde{\sigma}_t^2 - \widetilde{\sigma}_t^2\partial\widetilde{\sigma}_t^2}{\widetilde{\sigma}_t^4\partial\theta}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(\epsilon_t^2 - \widetilde{\sigma}_t^2\right)\frac{1}{\widetilde{\sigma}_t^4}\frac{\widetilde{\sigma}_t^2}{\partial\theta}
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(\epsilon_t^2 - \widetilde{\sigma}_t^2\right)\frac{1}{\widetilde{\sigma}_t^4}\frac{\widetilde{\sigma}_t^2}{\partial\theta} = 0$$

dans cette égalité, le terme gauche précédentés comme

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(\epsilon_t^2 - \widetilde{\sigma}_t^2\right)\frac{1}{\widetilde{\sigma}_t^4}\frac{\widetilde{\sigma}_t^2}{\partial\theta}$$

l'orsque $n \to \infty$ les valeurs initiales sont nulle et pour la vrai valeur du paramètre, l'innovation de ϵ_t^2 est $v_t = \epsilon_t^2 - h_t^2$. Donc l'espérance conditionnelle est existe, on a $\epsilon_t^2 = v_t + h_t^2$ et comme $\sigma_t^2(\theta_0) = h_t$ alors

$$\mathbb{E}_{\theta_0}\left(v_t \frac{1}{v_t^4(\theta_0)} \frac{\partial \sigma_t^2(\theta_0)}{\partial \theta}\right) = 0$$

car

$$\frac{1}{v_t^4(\theta_0)} \frac{\partial \sigma_t^2(\theta_0)}{\partial \theta}$$

est une fonction mesurable des ϵ_{t-i} ,$i > 0$.

2.4.2 Propriétés asymptotique de l'estimateur du QMV

Soit A une matrice des éléments $A = (a_{ij})$ quelconque, la norme $\| A \| = \sum \mid a_{ij} \mid$. On note $\rho(A)$ rayon spectrale de la matrice A; et soit $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ désignéra la convergence en loi.
Convergence forte Le modèle (2.2.3) et (2.2.4) peut être admet une solution strictement stationnaire si et seulement si la suite de la matrice $A_0 = (A_{0t})$, où A_0 définie comme suit

$$A_t = \begin{pmatrix}
\alpha_{01}\eta_t^2 & & \dots & & \alpha_{0q}\eta_t^2 & \beta_{01}\eta_t^2 & & \dots & & \beta_{0p}\eta_t^2 \\
1 & 0 & \dots & & 0 & 0 & & \dots & & 0 \\
0 & 1 & \dots & & 0 & 0 & & \dots & & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
0 & & \dots & 1 & 0 & 0 & & \dots & 0 & 0 \\
\alpha_{01} & & \dots & & \alpha_{0q} & \beta_{01} & & \dots & & \beta_{0p} \\
0 & & \dots & & 0 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\
0 & & \dots & & 0 & 0 & 1 & \dots & & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
0 & & \dots & 0 & 0 & 0 & & \dots & 1 & 0
\end{pmatrix} \tag{2.4.7}$$

admet un coefficient de Lyapounov strictement négatif,

$$\begin{aligned}
\gamma(A_0) &:= \inf_{t \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{t} \mathbb{E}\left(\| A_{0t} A_{0t-1} ... A_{01} \|\right) \\
&:= \lim_{t \in \infty} \frac{1}{t} \log \| A_{0t} A_{0t-1} ... A_{01} \|
\end{aligned}$$

On note $\mathcal{A}_\theta(z) = \sum_{i=1}^q \alpha_i z^i$ et $\mathcal{B}_\theta(z) = \sum_{j=1}^p \alpha_j z^j$
donc si $q = 0$ (resp $p = 0$), alors $\mathcal{A}_\theta(z) = 0$ (resp $\mathcal{B}_\theta(z) = 1$). Il ya qautres hypothéses, pour

que montrer la convergence forte:

A1) L'espace du paramètre Θ est compacte et $\theta_0 \in \Theta$.

A2) $\forall\theta \in \Theta$, $\gamma(A_0) < 0$, $\sum_{j=1}^{p} \beta_j$.

A3) η_t^2 a une loi non dégénérée et $\mathbb{E}\eta_t^2 = 1$.

A4) si $p > 0$, $\mathcal{A}_{\theta_0}(z)$ et $\mathcal{B}_{\theta_0}(z)$ n'est pas de racine commune,

$$\mathcal{A}_{\theta_0}(1) \neq 0 \; et \; \alpha_{0q} + \beta_{0p} \neq 0.$$

donc A2 implique que les racines de $\mathcal{B}_\theta(z)$ sont exterieures au disque unité. Ainsi la suite $(\sigma_t^2)_t$ est strictement stationnaire ergodique et non anticipative dans (2.2.4) On définie

$$I_n(\theta) = I_n(\theta, \epsilon_n, \epsilon_{n-1}, ..) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ell_t \tag{2.4.8}$$

et

$$\ell_t = \ell_t(\theta) = \frac{\epsilon_t^2}{\sigma_t^2} + log\sigma_t^2 \tag{2.4.9}$$

La convergence fort de $\hat{\theta}_n$ est établir dans ce théorème.

Théorème 2.4.1 ***(convergence forte de l'estimareur du*** QMV***)***

Soit $(\hat{\theta}_n)$ *une suite d'estimateurs du* QMV *satisfaisant* (2.4.6)*; avec les conditions initiales* (2.4.4) *et* (2.4.5)*.*

Sous les hypothèses A1-A4; presque sûrement $\hat{\theta} \to \theta_0$ *quand* $n \to \infty$

Remarque 2.4.1 *1) Cette théorème est traiter que les coefficient* α_i *où* β_j *sont nuls.*

2) L'hypothèse que $\mathbb{E}\eta_t = 0$ *n'est pas nécessaire pour les propriétés asymptotiques de l'estimateur de* QMV *d'un* $GARCH$*.*

Normalité asymptotique On consédère les hypothèses suivantes: A5) $\theta_0 \in \Theta'$, où Θ' est l'interieur de Θ.

A6) $\mathfrak{K} = \mathbb{E}\eta_t^4 < \infty$.

Théorème 2.4.2 ***(Normalité asymptotique de l.estimateur du*** QMV***)***

Sous les hypothèses A1-A6 $\sqrt{n}(\theta_n - \theta) \underset{\mathcal{L}}{\to} \mathcal{N}(0, (\mathfrak{K} - 1)J^{-1})$ *où*

$$J = \mathbb{E}_{\theta_0}\left(\frac{\partial^2 \ell_t(\theta_0)}{\partial\theta\partial\theta'}\right) = \mathbb{E}_{\theta_0}\left(\frac{1}{\sigma_t^4(\theta_0)}\frac{\partial\sigma_t^{2(\theta_0)}}{\partial\theta}\frac{\partial\sigma_t^{2(\theta_0)}}{\partial\theta'}\right)$$

est une matrice définie positive.

Chapitre 3

Modèles $GARCH$ multivariés

Introduction

Pour analyser les volatilités et les corrélations entre plusieurs séries financières, on utilise des processus $GARCH$ vectoriele ou multivariée, noté $MGARCH$. Plusieurs spécifications du modèle $MGARCH$ pour la matrice de variance-covariance ont été proposées pour estimer les paramètres.

Ce chapitre est composé de deux sections. Dans la première section, nous introduisons le modèle $GARCH$ multivarié, la deuxième section nous rappelons les différentes spécifications de la matrice de variance-covariance, et dans la troisième section nous estimons les paramètres de modèle $BEKK$.

Définition 3.0.1 *On dit que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus $GARCH$ multivarié de dimension d et d'ordre p et q noté $MGARCH(p,q)$,ie $X_t = (X_{1,t}, ..., X_{d,t})'$, si*

$$\mathbb{E}(X_t/\mathcal{F}_{t-1}) = 0_{\mathbb{R}^m} \tag{3.0.1}$$

$$H_t = \mathbb{E}(X_t X_t'/\mathcal{F}_{t-1}) \tag{3.0.2}$$

où H_t est une matrice symétrique appelée matrice de variance-covariance conditionnelle du processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

Définition 3.0.2 *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoire, ϵ_t vérifiant la propriété*

$$\epsilon_t \sim iid(0, I_d) \tag{3.0.3}$$

le modèle $GARCH(p,q)$ *multivarié noté* $MGARCH(p,q)$ *s'exprime*

$$X_t = H^{1/2}\epsilon_t \tag{3.0.4}$$

où $H_t^{1/2}H_t^{1/2} = H_t$.

3.1 Les différentes spécifications de la matrice de variance-covariance

Plusieurs spécifications d'un modèle $MGARCH$ ont été proposées pour la matrice H_t. Dans cette section nous présentons quelques spécifications de H_t, on commence par le modèle vectoriel noté *vec* puis au modèle vectoriel diagonale noté $Dvec$, modèle a corrélation conditionnelle canstantes noté CCC, modèle a corrélations constants dynamiques noté DCC et on termine par le modèle $BEKK$.

3.1.1 Modèle $GARCH$ vectoriel

Bollerslev et al [21] ont introduit le modèle $vec(1,1)$ et est donné par

$$h_t = c + A\epsilon_{t-1} + Bh_{t-1} \tag{3.1.1}$$

où $h_t = vech(H_t)$, $\epsilon_t = vech(X_tX_t')$ et A, B sont les matrices des paramètres d'ordre 2. Le modèle vectoriel donné par (3.1.1) possède un grand nombre de paramètres à estimer une formulation est proposé par Bollerslev et al [21] (1988) pour réduire le nombre de paramètres, où ils ont supposé que les matrices de paramètres A, B sont diagonales.
On passe le modèle diagonale car les systèmes à grande paramètres est difficiles à estimer en pratique

3.1.2 Modèle diagonale-vectoriel

Le modèle diagonale-vectoriel noté (Dvec) introduit par Bollerslev et al [21]. Dant le quel A et B sont supposées des matrices diagonales, ceci reduit le nombre de paramètres, en réécrire le modèle en termes de produit Hadamard (noté $\odot$), en particulier, on définie les

matrices A°, B° et C° sont symétrique comme suit $A^{\circ} = diag[vech(A)]$, $B^{\circ} = diag[vech(B)]$ et $C^{\circ} = diag[vech(C)]$ le modèle s'écrit ce la forme :

$$H_t = C^{\circ} + A^{\circ} \odot (X_{t-1}X'_{t-1}) + B^{\circ} \odot H_{t-1} \tag{3.1.2}$$

On passe au modèle a corrélation conditionnelle constantes car cette spécification est dimunue grandement le nombre de paramètre à estimer, et cette spécification réduit le nombre de paramètres inconnus et donc une estimation simplifie. On passe à le modèle a corrélation conditionnelle constantes car en réalité on peut pas prend toujours les matrices A et B des matrices diagonale.

3.1.3 Modèle a corrélation conditionnelle constantes

Bollerslev (1990) [22] à introduit le modèle à corrélation conditionnelle constantes noté CCC est donné par

$$\begin{cases} H_t = D_t R D_t \\ D_t = diag(\sqrt{h_{11,t}}, \sqrt{h_{22,t}}, ..., \sqrt{h_{dd,t}}) \\ R = \rho_{ij} \; avec \rho_{ijt} = 1 \end{cases} \tag{3.1.3}$$

où D_t est une matrice diagonale. R la matrice de corrélation d'ordre d et elle est constante. On passe au modèle a corrélation constant dynamique car le modèle a corrélation conditionnelle constant n'est pas réaliste.

3.1.4 Modèle a corrélation constant dynamique

Engle (2002) [23] a introduit le modèle à corrélation conditionnelle dynamique noté DCC (Dynamic Constant Correlation). est donné par

$$\begin{cases} H_t = D_t R_t D_t \\ D_t = diag(\sqrt{h_{11,t}}, \sqrt{h_{22,t}}, ..., \sqrt{h_{dd,t}}) \\ R_t = (diag Q_t)^{-1/2} Q_t (diag Q_t)^{-1/2} \end{cases} \tag{3.1.4}$$

où Q est une matrice symétrique d'ordre d définie positive avec

$$Q_t = (1 - \theta_1 - \theta_2)\underline{Q} + \theta_1 u_{t-1} u'_{t-1} + \theta_2 Q_{t-1}$$

où $\underline{Q}$ est la matrice de variance-covariance inconditionnelle d'ordre d symétrique définie positive, et $u_t = (u_{1t}, u_{2t}, ..., u_{dt})^{'}$ vecteur colonne $u_{it} = \frac{\epsilon_{it}}{\sqrt{h_{iit}}}, i = 1, ..., d$

3.1.5 Le modèle Tse et Tsui

Le modèle Tse et Tsui proposé par Engle [23] (2002)

Définition 3.1.1 *Le modèle DCC de tse et Tsui ou $DCC_T(M)$ est définie par*

$$\begin{cases} H_t = D_t R_t D_t \\ D_t = diag(h_{11,t}^{1/2}, ..., h_{dd,t}^{1/2}) \\ R_t = (1 - \theta_1 - \theta_2)R + \theta_1 \Psi_{t-1} + \theta_2 R_{t-1} \end{cases}$$

où θ_1 et θ_2 sont des paramètres nom négative $\theta_1 + \theta_2 < 1$, R est symétrique d'ordre d,Ψ_{t-1} est une matrice de corrélation d'ordre d.

3.1.6 La spécification $BEKK$

Engle et Kroner [9][(1)] ont introduit le modèle $BEKK$ pour assurer la définie positivité de H_t. Soit ϵ_t une suite de variables $i.i.d$ de $\mathbb{R}^d$, telle que $\mathbb{E}(\epsilon_t) = 0$ et de matrice de variance covariance $\mathbb{E}(\epsilon_t \epsilon_t^{'}) = I$.

Définition 3.1.2 *le modèle $BEKK(p, q)$ défini par*

$$H_t = C + \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{k} A_{i,j} X_{t-i} X_{t-i}' A_{ij}' + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{k} B_{ij} H_{t-i} B_{ij}' \tag{3.1.5}$$

où C est un matrice constante d'ordre d, A_{ij} et B_{ij} sont des matrice carrée d'ordre d pour $i = 1, ..., q$, $j = 1, ..., k$.

On applique l'opérateur *vec* (voir (1.7.1)) sur (3.1.5) on obtient

$$\begin{aligned} vec(H_t) &= vec\left(C + \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{k} A_{ij} X_{t-i} X_{t-i}' A_{ij}' + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{k} B_{ij} H_{t-i} B_{ij}' \right) \\ &= vec(C) + \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{k} vec(A_{ij} X_{t-i} X_{t-i}' A_{ij}') + \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{k} vec(B_{ij} H_{t-i} B_{ij}') \end{aligned}$$

[(1)]Le terme $BEKK$ est un acronyme formé par les initiales des noms Baba, Engle, Kraft et Kroner

on utilisant la relation suivante $vec(ABC) = (C^{'} \otimes A)vecB$ on obtient

$$vec(H_t) = vec(C) + \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{k}(A_{ij} \otimes A_{ij})vec(X_{t-i}X'_{t-i}) + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{k}(B_{ij} \otimes B_{ij})vec(H_{t-i}) \quad (3.1.6)$$

Soit $A^* = \sum_{j=1}^{k} A_{ij} \otimes A_{ij}$, et $B^* = \sum_{j=1}^{k} B_{ij} \otimes B_{ij}$, $i = 1, ..., p$, $j = 1, ..., q$, alors (3.1.6) s'écrit

$$vec(H_t) = vec(C) + \sum_{i=1}^{q} A_i^* vec(X_{t-i}X'_{t-i}) + \sum_{i=1}^{p} B_i^* vec(H_{t-i}) \quad (3.1.7)$$

L'opérateur $vech$ transforme une matrice de dimension d^2 à un vecteur colonne de dimension $d(d+1)/2$, $\widetilde{A}_i = L_d A_i^* K_d^{'}$, $\widetilde{B}_i = L_d B_i^* K_d^{'}$ et les matrices L_d, K_d sont des matrices unique de dimension $d(d+1) \otimes d^2$ et $L_d K_d^{'} = I_{d(d+1)/2}$, on obtient

$$vech(H_t) = vech(C) + \sum_{i=1}^{q} \widetilde{A}_i vec(X_{t-i}X'_{t-i}) + \sum_{i=1}^{p} \widetilde{B}_i vech(H_{t-i})$$

3.2 Estimation

Dans cette section on va estimer les paramètres d'un modèle $BEKK$ donné (3.1.5) en utilisant la méthode du quasi-maximum de vraisemblance (QMV).
Soit

$$\theta = (\theta_1, ..., \theta_d)^{'} = (c', \alpha'_1, ..., \alpha'_q, \beta'_1, ..., \beta'_p, \rho')' = (c', \alpha', \beta', \rho')^{'}$$

l'espace des paramètres est un sous-espace Θ de

$$]0, +\infty[^d \times [0, +\infty[^{d^2(p+q)} \times]-1, 1[^{d(d-1)/2}$$

la vraie valeur du paramètre est notée

$$\theta = (c'_0, \alpha'_{01}, ..., \alpha'_{0q}, \beta'_{01}, ..., \beta'_{0p}, \rho'_0)' = (c'_0, \alpha'_0, \beta'_0, \rho'_0)'$$

Propriétés asymptotiques de l'estimation pour la formulation CCC d'un $GARCH$

Soit $(\epsilon_1, ..., \epsilon_n)$ l'unique solution strictement stationnaire non anticipative du modèle (3.1.5). conditionnellement a des valeurs initiales $X_0, ..., X_{1-q}, h_0, ..., h_{1-p}$ positives non nulle. Le

quasi-vraisemblance gaussienne s'écrit

$$L_n(\theta) = L_n(\theta, X_1, ..., X_n) = \prod_{t=1}^{n} \frac{1}{(2\Pi)^{n/2} \mid H_t \mid^{1/2}} exp(-\frac{1}{2} X_t' H_t^{-1} X_t) \tag{3.2.1}$$

Un estimateur de QMV de θ est défini comme toute solution mesurable $\hat{\theta_n}$ de

$$\hat{\theta_n} = \arg\max_{\theta \in \Theta} L_n(\theta) = \arg\max_{\theta \in \Theta} I_n(\theta) \tag{3.2.2}$$

où

$$I_n(\theta) = n^{-1} \sum_{t=1}^{n} \ell_t$$

et

$$\ell_t = \ell_t(\theta) = X_t' H_t^{-1} X_t + log\,[det(H_t)] \tag{3.2.3}$$

Convergence forte de l'estimation du QMV Pour montrer la convergence forte de l.estimation du QMV, nons fairons des hypothèses suivants: A1) $\theta_0 \in \Theta$ et Θ est un compact .

A2) $\gamma(A_0) < 0$ et $\forall \theta \in \Theta$, $det\mathcal{B}(z) = 0 \Rightarrow \mid z \mid > 1$.

A3) les composantes de η_t sont indépendantes et les lois de leurs carrés de plein de rang m.

A4) Si $p > 0$, $\mathcal{A}_{\theta_0}(z)$ et $\mathcal{B}_{\theta_0}(z)$ comprimes à gauche et $M_1(\mathcal{A}_{\theta_0}, \mathcal{B}_{\theta_0})$ est plein de rang m.

A5) R est une matrice de corrélation définie positive pour tout $\theta \in \Theta$ en peut générer la condition de l'hypothèse A4 comme

A4 si $p > 0$, $\mathcal{A}_{\theta_0}(z)$ et $\mathcal{B}_{\theta_0}(z)$ comprimes à gauche et $M(\mathcal{A}_{\theta_0}(z), \mathcal{B}_{\theta_0}(z))$ est plein de rang m. L'hypothése A2 implique que pour tout $\theta \in \Theta$; les racines de $\mathcal{B}_{\theta_0}(z))$ sont à l'éxterieurs du disque d'unité quand on utilise l'approximation de $(\widetilde{\ell_t}(\theta)$, donc la solution strictement stationnaire ergodique et non anticipative est donne par

$$h_t = C + \sum_{i=1}^{q} A_i \epsilon_{t-i} + \sum_{j=1}^{p} B_j^{t-j}$$

en suite, on pose que $D_t = diag(h_t)^{1/2}$ et $H_t = D_t R D_t$, alors on peut définir $I_n(\theta) = I_n(\theta, \epsilon_n, \epsilon_{n-1}, ...) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \ell_t$, $ell_t = \ell_t(\theta) = \epsilon_t^{'} H^{-1} \epsilon_t + \log det(H)$

Chapitre 4

Théorie asymptotique des processus $GARCH$ multivariés

Introduction

Dans ce chapitre nous nous intéressons à présenter les propriétés asymptotique des processus $GARCH$ multivariés et ceci en détaillant l'article de comte et Lieberman 2000 [19]. D'une part les auteurs [19] ont étudié les propriétés asymptotiques des modèle $GARCH$ multivariés, où ils ont établi la forte consistance par la méthode du quasi-maximum de vraissemblance (QMV) sous les conditions de Jeauntheau [11] en utilisant un résultat de Boussama [6], concernant la solution de processus $GARCH$ multivarié strictement stationnaire et ergodique (voir Boussama [6]). D'autre part ils ont prouvé la normalité asymptotique du processus où l'état initiale est fixé ou stationnaire.
Ce chapitre est composé de deux section. Dans la première nous avons établons la forte consistance et la deuxième section la normalité a asymptotique.

4.1 La forte consistance

Comte et Lieberman [19] ont établi la forte consistance du modèle $GARCH$ multivarié, en utilisant la méthode de quasi-QMV sous les conditions de Jeantheau [12].

Soit $\Theta \subset \mathbb{R}^r$ un espace de parametre et $\theta_0 \in \Theta$.

Dans ce qui suit nous rappellons les conditions de Jeaunthau [12]:

4.1.1 Conditions de Jeaunthau

(A0) Θ est compact.

(A1) $\forall \theta_0 \in \Theta$ le modèle admet une unique solution strictement stationnaire et ergodique, loi stationnaire P_{θ_0}.

(A2) Il existe une constante c, telle que $\forall t, \forall \theta \in \Theta, det(H_{t,\theta_0}) \geq c$.

(A3) $\forall \theta_0 \in \Theta$,$\mathbb{E}_{\theta_0}(\mid (det(H_{t,\theta_0})) \mid) < \infty$.

(A4) Le modèle est identifiable

(A5) H_{t,θ_0} est une fonction de θ continue.

4.1.2 Vérification des conditions de Jeantheau

Dans cette section nous vérifions les conditions **(A0)-(A5)**:

(A0) est toujours vérifie

La condition **(A1)** est vérifiée par le théorème suivant de Boussama [6]

Théorème 4.1.1 *[6]*

Pour le modèle donné par (3.0.3),(3.0.4) et (3.1.5) supposons que ϵ_t admet une densité absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, positive en un voisinage de l'origine, supposons que :

où $\widetilde{A}_i$ et $\widetilde{B}_i$ est définies dont

$$\rho\left(\sum_{i=1}^{q} \widetilde{A}_i + \sum_{i=1}^{p} \widetilde{B}_i)\right) < 1 \tag{4.1.1}$$

et Y définie par

$$Y_t = (vech(H_{t+1})', vech(H_t)', ..., vech(H_{t-p+2})', X_t', X_{t-1}', ..., X_{t-q+1}')' \tag{4.1.2}$$

alors les relations aux récurrences stochastiques donnés par (3.0.3),(3.0.4) et (3.1.5) pour Y admet presque sûrement une solution unique et strictement stationnaire et la chaine de Markov est positivement Harris recurrente et géométrique ergodique et $\beta - maxing$

La démonstration du théorème basé sur l'utilisation des résultats de Meyn et Tweedie [15] sur les chaînes de Markov, de plus Boussama [6] à généralisé les résultats de mokkadem [16] ou ces résultats sont basée sur l'utilisation de la topologie algébrique. Pour vérifier la condition **(A2)** rappelons que pour tout W matrice définie positive[(1)] et D matrice semi-définie positive On a

$$det(W + D) \geq det(W) + det(D) \tag{4.1.3}$$

On appliquer (4.1.3) à (3.1.5) on obtient:

$$det\left(H_{t,\theta}\right) = det\left(C + \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{k} A_{ij}X_{t-i}X_{t-i}A_{ij}^{'} + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{k} B_{ij}H_{t-i}B_{ij}^{'}\right)$$

$$det\left(H_{t,\theta}\right) \geq det\left(C\right) + det\left(\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{k} A_{ij}X_{t-i}X_{t-i}A_{ij}^{'}\right) + det\left(\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{k} B_{ij}H_{t-i}B_{ij}^{'}\right)$$

$det(H_{t,\theta}) \geq det(C(\theta))$

Etant Θ est compact, donc soit

$$c := \inf_{\theta\in\Theta} det(C(\theta))$$

où $C(\theta)$ un fonction continue de θ, on supposer que $c > 0$.

Pour vérifier **A3** soit $H_{t,\theta}$ est un matrice carrée d'ordre d admet d valeurs propres distinctes et positives notés $x_i(\theta)$ pour un t fixe, $H_{t,\theta} = P_{t,\theta}^{-1} D_{t,\theta} P_{t,\theta}$ telle que $D_{t,\theta}$ une matrice diagonale et d'éléments de diagonaux les valeurs propres

$$\begin{aligned} det(H_{t,\theta}) &= det(P_{t,\theta}^{-1} D_{t,\theta} P_{t,\theta}) \\ &= det(P_{t,\theta}^{-1}) det(D_{t,\theta}) det(P_{t,\theta}) \\ &= (det(P_{t,\theta}))^{-1} det(P_{t,\theta}) det(D_{t,\theta}) \\ &= det(D_{t,\theta}) \\ &= \prod_{i=1}^{d} x_i(\theta) \end{aligned}$$

[(1)]Siot A une matrice et $X \in \mathbb{R}^n$ où $X \neq 0$. On dit que A est définie positive si $X'AX > 0$, et elle est semi-définie positive si $X'AX \geq 0$.

donc

$$det(H_{t,\theta}) = \prod_{i=1}^{d} x_i(\theta) \tag{4.1.4}$$

alors

$$\begin{aligned} log(det(H_{t,\theta})) &= log(\prod_{i=1}^{d} x_i(\theta)) \\ &= \sum_{i=1}^{d} log(x_i(\theta)) \\ &\leq \sum_{i=1}^{d} x_i(\theta) = tr(H_{t,\theta}) \end{aligned}$$

on prend l'espérance

$$\mathbb{E}(log(det(H_{t,\theta}))) \leq \mathbb{E}(tr(H_{t,\theta})) = \sum_{i=1}^{d} \mathbb{E}\left([H_{t,\theta}]_{ii}\right)$$

par l'intégrable carré [(1)] de X_t ,on a

$$\mathbb{E}\left(vech(H_{t,\theta})\right) < +\infty$$

Ainsi $\mathbb{E}\left(log(det(H_{t,\theta}))\right)^{+} < +\infty$ et $\mathbb{E}\left(log(det(H_{t,\theta}))\right)^{-} \leq \sup(-log(c), 0) < \infty$

Donc

$$\mathbb{E} \mid log(detH_{t,\theta}) \mid < +\infty$$

La condition **A4** est vérifie par la proposition suivante d'Engle et Kroner [9]

Proposition 4.1.1 *[9]*

pour le modèle

$$H_t = C_0 C_0' + \sum_{i=1}^{k} A_{1j}' X_{t-1} X_{t-1}' A_{1j} + \sum_{j=1}^{k} B_{1j}' H_{t-1} B_{1j} \tag{4.1.5}$$

supposons que les éléments diagonaux de C_0 sont finie et positifs, et supposons que A_{1K_S},avec $K_S = d(s-1)+1, ..., ds$ et $s = 1, ..., d$ est le matrice obtient par le première $s-1$ colonne et le première $K_S = d(s-1)+1$ lignes a zéro .et supposons aussi $[A_{1ks}]_{dd} > 0, \forall k_s$, et que

[(1)]Carré sommable où carré intégrable on dit que une fonction définie sur un espace mesuré Ω et à valeur dans $\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$ est de carré intégrable(où sommable) si elle appartient à l'espace $\mathbb{L}^2(\Omega)$ c'est à dire $\int_{\mathbb{R}} \mid f(x) \mid dx < \infty$

des restrictions similiaires sont fixées sur la matrice B_{1j}.
Puis un tout modèle générale $BEKK$ est obtenu qui n'a aucune autre représentation équivalente dans cette classe.
Des conditions similiares pour l'identification peuvent être définies pour les processus $BEKK$ d'ordre supérieur (voir [9]).Cette définition est conforme à Jeauntheau [18,p.72] définition identification à savoir $\forall\theta \in \Theta, \forall\theta_0 \in \Theta$,

$$H_{t,\theta} = H_{t,\theta_0} \Rightarrow \theta = \theta_0, p.s$$

A5 est établi.

Théorème 4.1.2 *Pour le modèle $GARCH(p,q)$ défini par les équations (3.0.3),(3.0.4) et (3.1.5), et pour $\hat{\theta_n}$ définie comme suite*

$$\hat{\theta} = \arg\max_{\theta\in\Theta} L_n(\theta)$$

supposons que:

1) Θ est compact C,$\widetilde{A}$, et $\widetilde{B}$ des fonctions continue de θ, et existe $c > 0$ telle que

$$\inf_{\theta\in\Theta} detC(\theta) \geq c > 0$$

2) le modèle est identifiable .

3) les erreurs ϵ_t admettant une densité absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et positive dans le voisinage de l'origine.

4) $\forall\theta \in \Theta$, $\rho\left(\sum_{i=1}^{q} \widetilde{A}_i(\theta) + \sum_{i=1}^{p} \widetilde{B}_i(\theta)\right) < 1$.
car $\hat{\theta_n}$ est fortement compatible, alors $\hat{\theta_n} \underset{n\to+\infty}{\to} \theta_0, p.s$

Boussama [6] a donné ce résultat sans preuve. le **Théorème 4.1.2** est valide seulement dans l'état initiale est aléatoire (pour plus voir [12].

4.2 Normalité asymptotique

Dans cette section, nous établissons la normalité asymptotique de la QMV.
suppose les conditions initiales pour H_t sont dans la loi stationnaire,Basawa et al [2] ont

données les conditions de la normalité asymptotique du QMV pour les processus stochastiques généraux. Ces conditions sont ont été utilisé par Weiss [28,p.130] et Lumsdaine [21,p.594]

4.2.1 Les conditions de Basawa et al

i) $-\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}\frac{\partial \ell_t^2(\theta_0)}{\partial\theta\partial\theta'} \xrightarrow{\mathbb{P}} C_1$, quand $T \to +\infty$ pour C_1 matrice des constantes définie positive.
ii) $\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{i=1}^{T}\frac{\partial \ell_t(\theta_0)}{\partial\theta} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, C_0)$, quand $T \to +\infty$ pour C_0 un constante.
iii) pour tout i, j, k,

$$\mathbb{E}\left(sup_{\|\theta-\theta_0\|\leqslant\delta} \mid \frac{\partial^3 \ell_t(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j\partial\theta_k} \mid \right)$$

est bornée pour tout $\delta > 0$,

Pour montrer la normalité asymptotique de QMV avec la fonction de vraisemblance est

$$L_n(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\det(H_t)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}X_t' H_t^{-1} X_t\right) \tag{4.2.1}$$

Il suffit de vérifier les conditions suivantes
B.1 $C_1 = \mathbb{E}\left(\left(\frac{\partial^2 \ell_t(\theta_0)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)_{1\leq i,j\leq r}\right)$ est finie et positive.
B.2 $C_0 = \mathbb{E}\left(\left(\frac{\partial \ell_t(\theta_0)}{\partial\theta}\frac{\partial \ell_t(\theta_0)}{\partial\theta'}\right)_{1\leq i,j\leq r}\right)$ est finie.
B.3 la condition (iii) Amemiya[1,théorème 4.1.3] est des conditions similaires, par le théorème (4.1.1) et sous les hypothèses du théorème (4.1.2), $\frac{\partial^2 \ell_t}{\partial\theta\partial\theta'}$ est ergodique, et donc le condition (i) sera satisfaite si C_1 est fini et définie positive
pour simplifier on noté $H_{t,\theta}$ par H_t

$$\ell_t(\theta) = \log\left[det\left(H_t\right)\right] + X_t' H_t X_t$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ell_t}{\partial\theta_i}(\theta) &= \frac{\partial}{\partial\theta_i}\left(\log\left[det\left(H_t\right)\right] + X_t' H_t^{-1} X_t\right) \\ &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial\theta_i}\log\left[det\left(H_t\right)\right]}_{(1)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial\theta_i}(X_t' H_t^{-1} X_t)}_{(2)}\end{aligned}$$

d'après la relation (11) de(Magnus et Neudecker [20] la page 171)
Soit F un matrice

$$d\log \mid F \mid = TrF^{-1}dF \tag{4.2.2}$$

on calcule (1) $\equiv \frac{\partial \ell_t}{\partial \theta_i}(\log[det(H_t)]) = TrH_t\frac{\partial H_t^{-1}}{\partial \theta}$
et pour établir (2) en utilisant les propriétés de la trace

$$\begin{aligned} X_t'H_t^{-1}X_t &= Tr(X_t'H_t^{-1}X_t) \\ &= Tr(H_t^{-1}X_tX_t') \\ &= Tr(X_tX_t'H_t^{-1}) \end{aligned}$$

la relation (1) de (Magnus et Neudecker [20] la page 171) est

$$dF^{-1} = -F^{-1}(dF)F^{-1} \tag{4.2.3}$$

où F un matrice donc

$$\frac{\partial H_t^{-1}}{\partial \theta_i} = -H_t^{-1}\frac{\partial H_t}{\partial \theta_i}H_t^{-1}$$

Donc (2) $\equiv Tr(-X_tX_t'H_t^{-1}\frac{\partial H_t}{\partial \theta_i}H_t^{-1})$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell_t}{\partial \theta_i}(\theta) &= Tr\left[H_t^{-1}\frac{\partial H_t^{-1}}{\partial \theta_i} - X_tX_t'H_t^{-1}\frac{\partial H_t}{\partial \theta_i}H_t^{-1}\right] \\ \frac{\partial \ell_t}{\partial \theta_i}(\theta) &= Tr\left[\dot{H}_{t,i}H_t^{-1} - X_tX_t'H_t^{-1}\dot{H}_{t,i}H_t^{-1}\right] \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

donc (4.2.9) est démontre

$$\frac{\partial \ell_t}{\partial \theta_i}(\theta) = Tr\left[\dot{H}_{t,i}H_t^{-1} - X_tX_t'H_t^{-1}\dot{H}_{t,i}H_t^{-1}\right]$$

$$\frac{\partial \ell_t}{\partial \theta_i}(\theta) = Tr\left(\frac{\partial H_{t,\theta}}{\partial \theta_i}H_{t,\theta}^{-1} - X_tX_t'H_{t,\theta}^{-1}\frac{\partial H_{t,\theta}}{\partial \theta_i}H_{t,\theta}^{-1}\right)$$

tel que

$$\mathbb{E}_{\theta_0}\left[\frac{\partial \ell_t}{\partial \theta_i}(\theta_0) \mid \mathcal{F}_{t-1}\right] = 0 \ p.s$$

Ainsi, la fonction score est une différence de martingale d'après le théorème (4.1.1) et sous les condition du théorème (4.1.2). $\frac{\partial \ell_t(\theta)}{\partial \theta}$ est un processus strictement stationnaire et ergodique, car est une fonction mesurable d'un processus strictement stationnaire et ergodique donc on applique le théorème centrale limite pour les martingale (Billingsley [3] p789) pour obtenir la condition (ii).

Théorème 4.2.1 *[19]*

sous les hypothèses

(i) (1)-(4) de théorème (4.1.2) *[19] et* $C(\theta)$, $\widetilde{A}_i(\theta)$ *et* $\widetilde{B}_i(\theta)$ *admet des dérivées continues d'ordre* 3 *dans* Θ.

(ii) les composants du ϵ_t *est indépendantes.*

(iii) X_t *admet des moments d'ordre* 8 *finis.*

(iv) la valeur initiale (de H) est dessiné pour la loi ergodique stationnaire,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathcal{D}}{\to}} \mathcal{N}(0, C_1^{-1}C_0C_1^{-1})$$

sur la loi $\mathbb{P}_{\theta_0}$

si de plus $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, I)$, si $C_0 = 2C_1$ et la loi asymptotique réduit à $\mathcal{N}(0, 2C_1^{-1})$

Preuve. (Théorème 4.2.1)

Premièrement on trouve une borne de $\| H_t^{-1} \|$ supposons que $H_t = C + D$

Soit C une matrice définie positive et D matrice semi définie positive, on a

$$\begin{aligned} 0 \leq Tr\left[(C+D)^{-2}\right] &= \| C^{-1/2}\left(I + C^{-1/2}DC^{-1/2}\right)^{-1} C^{-1/2} \|^2 \\ &\leq Tr\left(C^{-1/2}\left(I + C^{-1/2}DC^{-1/2}\right)^{-2}\right) \\ &\leq \left[Tr\left(C^{-4}\right)Tr\left(I + C^{-1/2}DC^{-1/2}\right)^{-4}\right)\right]^{1/2} \end{aligned}$$

on prend les valeurs propres de

$$\left(I + C^{-1/2}DC^{-1/2}\right)$$

sont tous plus grands que l'unité, et sont inverse nécessairement en $(0, 1]$, ainsi toute puissance de l'inverse on a

$$Tr\left(I + C^{-1/2}DC^{-1/2}\right)^{-4} < d$$

en utilisant les inégalités suivantes (voir Magnus et Neudecker [14])la relation

$$\| AB \| \leq N(A) \| B \|, \| AB \| \leq \| A \| N(B), N(A+B) \leq N(A) + N(B) \tag{4.2.5}$$

et

$$N(A) \leq \| A \| \leq \sqrt{d}N(A) \tag{4.2.6}$$

alors

$$\begin{aligned} N(H_{t,\theta}^{-1})^2 &\leq \| H_{t,\theta}^{-1} \|^2 \leq \sqrt{d} N(H_{t,\theta}^{-1})^2 \\ &\leq \sqrt{d} \| C^{-2}(\theta) \| \leq K^2 \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

■

Lemme 4.2.1 *[19]*
On noté par $\dot{H} = \frac{\partial H_t}{\partial \theta_i}$ *et* $\mu_{4,p} = \mathbb{E}(\varepsilon_{t,p}^4)$ *alors*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{t-1}\left[\frac{\partial \ell_t}{\partial \theta_i}(\theta_0)\frac{\partial \ell_t}{\partial \theta_j}(\theta_0)\right] &= \sum_{i=1}^{d}(\mu_{4,p}-3)\left[H_t^{-1/2}\dot{H}_{t,i}H_t^{-1/2}\right]_{pp}\left[H_t^{-1/2}\dot{H}_{t,j}H_t^{-1/2}\right]_{pp} \\ &+ 2Tr(\dot{H}_{t,i}H_t^{-1}\dot{H}_{t,j}H_t^{-1}) \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

et

$$\mathbb{E}_{t-1}\left[\frac{\partial \ell_t^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j}(\theta_0)\right] = Tr(\dot{H}_{t,i}H_t^{-1}\dot{H}_{t,j}H_t^{-1}) \tag{4.2.9}$$

Preuve.

Pour simplifie on noté H_t par $H_{t,\theta}$ on a

$$\ell_t(\theta) = log\det(H_t) + X_t' H_t^{-1} X_t \tag{4.2.10}$$

tel que $\mid H_t \mid$ le determinant de H_t

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell_t}{\partial \theta_i}(\theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(log \mid H_t \mid + X_t' H_t^{-1} X_t\right) \\ &= \underbrace{\frac{\partial \ell_t}{\partial \theta_i}(log \mid H_t \mid)}_{(1)} + \underbrace{\frac{\partial \ell_t}{\partial \theta_i}(X_t' H_t^{-1} X_t)}_{(2)} \end{aligned}$$

d'après la relation suivante de ((11) Magnus et Neudecker [20] la page 171)
soit F un matrice

$$d\log \mid F \mid = TrF^{-1}dF \tag{4.2.11}$$

on calculons (1) $\equiv \frac{\partial \ell_t}{\partial \theta_i}(log \mid H_{t,\theta} \mid) = TrH_t\frac{\partial H_t^{-1}}{\partial \theta}$
on calculer et pour établir (2) en utilisant les propriétés de la trace

$$\begin{aligned} X_t' H_t^{-1} X_t &= Tr(X_t' H_t^{-1} X_t) \\ &= Tr(H_t^{-1} X_t X_t') \\ &= X_t X_t' Tr(H_t^{-1}) \end{aligned}$$

la relation (1) de (Magnus et Neudecker [20] la page 171) est

$$dF^{-1} = -F^{-1}(dF)F^{-1} \tag{4.2.12}$$

alors

$$\frac{\partial H_t^{-1}}{\partial \theta_i} = -H_t^{-1}\frac{\partial H_t}{\partial \theta_i}H_t^{-1}$$

Donc $(2) \equiv Tr(-X_tX_t'H_t^{-1}\frac{\partial H_t}{\partial \theta_i}H_t^{-1})$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ell_t}{\partial \theta_i}(\theta) &= Tr\left[H_t^{-1}\frac{\partial H_t^{-1}}{\partial \theta_i} - X_tX_t'H_t^{-1}\frac{\partial H_t}{\partial \theta_i}H_t^{-1}\right]\\ \frac{\partial \ell_t}{\partial \theta_i}(\theta) &= Tr\left[\dot{H}_{t,i}H_t^{-1} - X_tX_t'H_t^{-1}\dot{H}_{t,i}H_t^{-1}\right]\end{aligned} \tag{4.2.13}$$

donc (4.2.9) est démontre

$$\frac{\partial \ell_t}{\partial \theta_i}(\theta_0) = Tr\left[\dot{H}_{t,i}H_t^{-1} - X_tX_t'H_t^{-1}\dot{H}_{t,i}H_t^{-1}\right]$$

on calculons l'expression

$$\mathbb{E}\left(X_tX_t^{'}/\mathcal{F}_{t-1}\right) = H_{t,\theta} \tag{4.2.14}$$

donc on passe a calculer

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{\partial \ell_t}{\partial \theta_i}/\mathcal{F}_{t-1}\right) &= \mathbb{E}\left(Tr\left[\dot{H}_{t,i}H_t^{-1} - X_tX_t'H_t^{-1}\dot{H}_{t,i}H_t^{-1}\right]/\mathcal{F}_{t-1}\right) &(4.2.15)\\ &= Tr(\dot{H}_{t,i}H_t^{-1} - H_tH_t^{-1}\dot{H}_{t,i}H_t^{-1}) &(4.2.16)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ell_t}{\partial \theta_i}(\theta_0)\frac{\partial \ell_t}{\partial \theta_j}(\theta_0) &= Tr\left[\dot{H}_{t,i}H_t^{-1} - X_tX_t'H_t^{-1}\dot{H}_{t,i}H_t^{-1}\right]Tr\left[\dot{H}_{t,j}H_t^{-1} - X_tX_t'H_t^{-1}\dot{H}_{t,j}H_t^{-1}\right]\\ &= Tr\left(X_tX_t'H_t^{-1}\dot{H}_{t,i}H_t^{-1}\right)Tr\left(X_tX_t'H_t^{-1}\dot{H}_{t,j}H_t^{-1}\right)\\ &- Tr\left(X_tX_t'H_t^{-1}\dot{H}_{t,i}H_t^{-1}\right)Tr\left(\dot{H}_{t,j}H_t^{-1}\right)\\ &- Tr\left(X_tX_t'H_t^{-1}\dot{H}_{t,j}H_t^{-1}\right)Tr\left(\dot{H}_{t,i}H_t^{-1}\right)\\ &+ Tr\left(\dot{H}_{t,i}H_t^{-1}\right)Tr\left(\dot{H}_{t,j}H_t^{-1}\right)\end{aligned}$$

on prend l'espérance l'équation précédente on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{t-1}\left[\frac{\partial \ell_t}{\partial \theta_i}(\theta_0)\frac{\partial \ell_t}{\partial \theta_j}(\theta_0)\right] &= \mathbb{E}_{t-1}\left(Tr\left(X_tX_t'H_t^{-1}\dot{H}_{t,i}H_t^{-1}\right)Tr\left(X_tX_t'H_t^{-1}\dot{H}_{t,j}H_t^{-1}\right)\right)\\ &- \mathbb{E}_{t-1}\left(Tr\left(X_tX_t'H_t^{-1}\dot{H}_{t,i}H_t^{-1}\right)Tr\left(\dot{H}_{t,j}H_t^{-1}\right)\right)\\ &- \mathbb{E}_{t-1}\left(Tr\left(X_tX_t'H_t^{-1}\dot{H}_{t,j}H_t^{-1}\right)Tr\left(\dot{H}_{t,i}H_t^{-1}\right)\right)\\ &+ \mathbb{E}_{t-1}\left(Tr\left(\dot{H}_{t,i}H_t^{-1}\right)Tr\left(\dot{H}_{t,j}H_t^{-1}\right)\right]\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{t-1}\left[\frac{\partial \ell_t}{\partial \theta_i}(\theta_0)\frac{\partial \ell_t}{\partial \theta_j}(\theta_0)\right] &= \mathbb{E}_{t-1}\left(Tr\left(X_tX_t'H_t^{-1}\dot{H}_{t,i}H_t^{-1}\right)Tr\left(X_tX_t'H_t^{-1}\dot{H}_{t,j}H_t^{-1}\right)\right)\\ &- \mathbb{E}_{t-1}\left(Tr\left(H_tH_t^{-1}\dot{H}_{t,i}H_t^{-1}\right)Tr\left(\dot{H}_{t,j}H_t^{-1}\right)\right)\\ &- \mathbb{E}_{t-1}\left(Tr\left(H_tH_t^{-1}\dot{H}_{t,j}H_t^{-1}\right)Tr\left(\dot{H}_{t,i}H_t^{-1}\right)\right)\\ &+ \mathbb{E}_{t-1}\left(Tr\left(\dot{H}_{t,i}H_t^{-1}\right)Tr\left(\dot{H}_{t,j}H_t^{-1}\right)\right]\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{t-1}\left[\frac{\partial \ell_t}{\partial \theta_i}(\theta_0)\frac{\partial \ell_t}{\partial \theta_j}(\theta_0)\right] &= \mathbb{E}_{t-1}\left(Tr\left(X_tX_t'H_t^{-1}\dot{H}_{t,i}H_t^{-1}\right)Tr\left(X_tX_t'H_t^{-1}\dot{H}_{t,j}H_t^{-1}\right)\right)\\ &- \mathbb{E}_{t-1}\left(Tr\left(\dot{H}_{t,i}H_t^{-1}\right)Tr\left(\dot{H}_{t,j}H_t^{-1}\right)\right)\end{aligned}$$

car $\mathbb{E}(X_tX_t') = H_t$, i et j joue le même rôle.
Soit $H_t^{-1/2}$ une racine symétrique de H_t et $M_i = H_t^{-1/2}\dot{H}_{t,i}H_t^{-1/2}$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{t-1}\left(Tr\left(\epsilon_t\epsilon_t'M_i\right)Tr\left(\epsilon_t\epsilon_t'M_j\right)\right) &= \mathbb{E}_{t-1}\left[\left(\sum_{r=1}^{d}\sum_{u=1}^{d}\epsilon_{t,r}\epsilon_{t,u}[M_i]_{k,p}\right)\left(\sum_{s=1}^{d}\sum_{v=1}^{d}\epsilon_{t,s}\epsilon_{t,v}[M_j]_{l,q}\right)\right]\\ &= \sum_{u=1}^{d}\sum_{r=1}^{d}\sum_{s=1}^{d}\sum_{v=1}^{d}[M_i]_{r,u}[M_j]_{v,s}\mathbb{E}(\epsilon_{t,r}\epsilon_{t,u}\epsilon_{t,s}\epsilon_{t,v})\\ &= \sum_{r=1}^{d}[M_i]_{r,r}[M_i]_{r,r}(\mu_{4,r}-3) + \sum_{r=1}^{d}\sum_{s=1}^{d}[M_i]_{r,r}[M_j]_{s,s}\\ &+ \sum_{r=1}^{d}\sum_{u=1}^{d}[M_i]_{r,u}[M_j]_{r,u} + \sum_{r=1}^{d}\sum_{u=1}^{d}[M_i]_{u,r}[M_j]_{r,u}\\ &= \sum_{r=1}^{d}[M_i]_{r,r}[M_j]_{r,r}(\mu_{4,r}-3) + Tr(M_i)Tr(M_j) + 2Tr(M_iM_j)\\ &= \sum_{p=1}^{d}(\mu_{4,p}-3)\left[H_t^{-1/2}\dot{H}_{t,i}H_t^{-1/2}\right]_{pp}\left[H_t^{-1/2}\dot{H}_{t,j}H_t^{-1/2}\right]_{pp}\\ &+ 2Tr\left(\dot{H}_{t,i}H_t^{-1}\dot{H}_{t,j}H_t^{-1}\right)\end{aligned}$$

nous avons utilisons

$$\mathbb{E}_{t-1}(\epsilon_{t,r}\epsilon_{t,u}\epsilon_{t,s}\epsilon_{t,v}) = \mathbb{E}(\epsilon_{t,r}\epsilon_{t,u}\epsilon_{t,s}\epsilon_{t,v}) = \begin{cases}\mu_{4,r} & si\ r=s=u=v\\ 1 & si\ r=u\ et\ s=v\ et\ r\neq u\\ 0 & sinon\end{cases} \tag{4.2.17}$$

En suite en montrer (4.2.9)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell_t^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}(\theta) &= Tr\left[\frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\dot{H}_{t,i}H_t^{-1} - X_tX_t'H_t^{-1}\dot{H}_{t,i}H_t^{-1}\right)\right] \\
&= Tr\left[\frac{\partial\dot{H}_{t,i}}{\partial\theta_j}H_t^{-1} + \dot{H}_{t,i}\frac{\partial H_t^{-1}}{\partial\theta_j} - X_tX_t'\frac{\partial H_t^{-1}}{\partial\theta_j}\dot{H}_{t,i}H_t^{-1} - X_tX_t'H_t^{-1}\frac{\partial\dot{H}_{t,i}}{\partial\theta_j}H_t^{-1} - X_tX_t'H_t^{-1}\dot{H}_{t,i}\frac{\partial H_T^{-1}}{\partial\theta_j}\right] \\
&= Tr\left[\ddot{H}_{t,i,j}H_t^{-1} - \dot{H}_{t,i}H_t^{-1}\dot{H}_{t,j}H_t^{-1} + X_tX_t'H_t^{-1}\dot{H}_{t,j}H_t^{-1}\dot{H}_{t,i}H_t^{-1} - X_tX_t'H_t^{-1}\ddot{H}_{t,i,j}H_t^{-1}\right] \\
&+ Tr\left[X_tX_t'H_t^{-1}\dot{H}_{t,i}H_t^{-1}\dot{H}_{t,j}H_t^{-1}\right]
\end{aligned}$$

on prend l'espérance on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{t-1}\left[\frac{\partial \ell_t^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j}(\theta)\right] &= \mathbb{E}_{t-1}\left[Tr\left[\ddot{H}_{t,i,j}H_t^{-1} - \dot{H}_{t,i}H_t^{-1}\dot{H}_{t,j}H_t^{-1} + X_tX_t'H_t^{-1}\dot{H}_{t,j}H_t^{-1}\dot{H}_{t,i}H_t^{-1} - X_tX_t'H_t^{-1}\ddot{H}_{t,i,j}H_t^{-1}\right.\right. \\
&+ \left.\left. X_tX_t'H_t^{-1}\dot{H}_{t,i}H_t^{-1}\dot{H}_{t,j}H_t^{-1}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_{t-1}\left[Tr\left[\ddot{H}_{t,i,j}H_t^{-1} - \dot{H}_{t,i}H_t^{-1}\dot{H}_{t,j}H_t^{-1} + H_tH_t^{-1}\dot{H}_{t,j}H_t^{-1}\dot{H}_{t,i}H_t^{-1} - H_tH_t^{-1}\ddot{H}_{t,i,j}H_t^{-1}\right.\right. \\
&+ \left.\left. H_tH_t^{-1}\dot{H}_{t,i}H_t^{-1}\dot{H}_{t,j}H_t^{-1}\right]\right] \\
&= Tr\left[\dot{H}_{t,i}H_t^{-1}\dot{H}_{t,j}H_t^{-1}\right]
\end{aligned}$$

■ **Preuve.** De B.1, de la normalité asymptotique
B1.$C1 = \mathbb{E}\left(\left(\frac{\partial^2\ell_t(\theta_0)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right)_{1\le i,j\le r}\right)$ est fini et positive.

$$\mathbb{E}_{t-1}\left(\frac{\partial^2\ell_t(\theta_0)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right) = \mid Tr(\dot{H}_{t,i}H_t^{-1}\dot{H}_{t,j}H_t^{-1}) \mid$$

comme $H_{t,\theta}$ est symétrique et en utilisant la propriété de la trace

$$\mathbb{E}_{t-1}\left(\frac{\partial^2\ell_t(\theta_0)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right) = \mid Tr(H_{t,\theta}^{-1})^2\dot{H}_{t,i}\dot{H}_{t,j} \mid$$

et d'après la relation suivante

$$\mid Tr(AB) \mid \le \parallel A \parallel\parallel B \parallel \tag{4.2.18}$$

donc

$$\mathbb{E}_{t-1}\left(\frac{\partial^2\ell_t(\theta_0)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right) = \mid Tr(\dot{H}_{t,i}H_t^{-1}\dot{H}_{t,j}H_t^{-1}) \mid \le \parallel H_t^{-1} \parallel^2 \parallel \dot{H}_{t,i}\dot{H}_{t,j} \parallel = Tr \parallel (H_{t,\theta}^{-1})^2\dot{H}_{t,i}\dot{H}_{t,j} \parallel$$

et en utilisant la relation (4.2.7) on obtient

$$\mid \mathbb{E}\left(\frac{\partial^2\ell_t(\theta_0)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}\right) \mid \le K^2\mathbb{E}^{1/2}(\parallel \dot{H}_{t,i} \parallel^2)\mathbb{E}^{1/2}(\parallel \dot{H}_{t,j} \parallel^2) \tag{4.2.19}$$

donc C1 est fini. et on utilise le lemme suivant ■

Lemme 4.2.2 *[19] On suppose que le modèle est tel que X est finis d'ordre 4 et en particulier la condition initiale sur $H_{t,\theta}$ est donnée (dépend seulement de θ_0) et est rainé faiblement stationnaire alors on a: pour tout $1 \leq k \leq l \leq d$ et $i = 1, ..., r$*

$$\mathbb{E}\left\{\sup_{\theta\in\Theta}\left[\frac{\partial H_t}{\partial\theta}(\theta)\right]^2_{k,l}\right\} < \infty \tag{4.2.20}$$

Preuve. (4.2.2)

soit $\mathcal{X}_t$ et $\mathcal{H}_t$ définie par

$$\mathcal{X}_t = (vech(X_tX_t')', ..., vech(X_{t-m+1}X_{t-m+1}'))', \tag{4.2.21}$$

$$\mathcal{H}_t = (vech(H_t)', ..., vech(H_{t-m+1})')', \tag{4.2.22}$$

ou $m = \max(p, q)$ et soit le vecteur C_1 définie par

$$C_1 = (vech(C)', 0, ..., 0)' \tag{4.2.23}$$

de dimension $md(d+1)/2 \times 1$. (4.2.22) donne

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_t &= C + \sum_{i=1}^{m}\widetilde{A}_i X_{t-i}X_{t-i}' + \sum_{i=1}^{m}\widetilde{B}_i\mathcal{H}_{t-i} \\
vech(\mathcal{H}_t) &= vech(C) + \sum_{i=1}^{m}\widetilde{A}_i vech(X_{t-i}X_{t-i}') + \sum_{i=1}^{m}\widetilde{B}_i vech(\mathcal{H}_{t-i}) \\
vech(\mathcal{H}_t) &= vech(C) + \widetilde{A}_1 vech(X_{t-1}X_{t-1}') + \widetilde{A}_2 vech(X_{t-2}X_{t-2}') + ... + \widetilde{A}_m vech(X_{t-m}X_{t-m}') \\
&+ \widetilde{B}_1 vech(\mathcal{H}_{t-1}) + \widetilde{B}_2 vech(\mathcal{H}_{t-2}) + ... + \widetilde{B}_m vech(\mathcal{H}_{t-m})
\end{aligned}$$

$$\mathcal{H}_{t+1} = (vech(H_{t+1})', ..., vech(H_{t-m+2})')',$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{t+1} &= \begin{pmatrix} vech(H_{t+1})' \\ vech(H_t)' \\ vech(H_{t-1})' \\ \vdots \\ vech(H_{t-m+2})' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} vech(C) + \widetilde{A}_1 vech(X_tX_t') + . + \widetilde{A}_m vech(X_{t-m+2}X_{t-m+2}') + \widetilde{B}_1 vech(\mathcal{H}_{t-1}) + . + \widetilde{B}_m vech(\mathcal{H}_{t-m+2}) \\ vech(H_t)' \\ vech(H_{t-1})' \\ \vdots \\ vech(H_{t-m+2})' \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{H}_{t+1} = \begin{pmatrix} vech(C) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widetilde{A}_1 & 0 & \cdots & \widetilde{A}_m \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} vech(X_t X_t^{'}) \\ vech(X_{t-1} X_{t-1}^{'}) \\ \vdots \\ vech(X_{t-m+2} X_{t-m+2}^{'}) \end{pmatrix} \tag{4.2.24}$$

$$+ \begin{pmatrix} \widetilde{B}_1 & 0 & \cdots & \widetilde{B}_m \\ I & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} vech(H_t) \\ vech(H_{t-1}) \\ \vdots \\ vech(H_{t-m+2}) \end{pmatrix} \tag{4.2.25}$$

Soient

$$A = \begin{pmatrix} \widetilde{A}_1 & 0 & \cdots & \widetilde{A}_m \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, et\ B = \begin{pmatrix} \widetilde{B}_1 & 0 & \cdots & \widetilde{B}_m \\ I & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & I & 0 \end{pmatrix}$$

Alors (4.2.25) s'écrit

$$\mathcal{H}_{t+1} = C_1 + B\mathcal{H}_t + A\mathcal{X}_t \tag{4.2.26}$$

où $\widetilde{A}_i = 0$ si $i > q$ et $\widetilde{B}_i = 0$ si $i > p$. En utilisant l'opérateur de retard $LX_t = X_{t-1}$ ($L^k = X_{t-k}$) et donc l'équation (4.2.26) etant

$$\mathcal{H}_t = C_1(\theta) + A\mathcal{X}_{t-1} + B\mathcal{H}_{t-1}$$

en utilisant la recrussivité de (4.2.27) on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_t &= C_1(\theta) + A\mathcal{X}_{t-1} + B\left(C_1(\theta) + A\mathcal{X}_{t-2} + B\mathcal{H}_{t-2}\right] \\ &= C_1(\theta) + A\mathcal{X}_{t-1} + BC_1(\theta) + BA\mathcal{X}_{t-2} + B^2\mathcal{H}_{t-2} \\ &\vdots \\ &= C_1(\theta) + B(\theta)C_1(\theta) + ... + B^{t-1}(\theta)C_1(\theta) + B^t(\theta)\mathcal{H}_0 + A(\theta)\mathcal{X}_t + B(\theta)A(\theta)\mathcal{X}_{t-2} + ... + B^{t-1}(\theta)\mathcal{X}_0 \end{aligned}$$

$$\mathcal{H}_t = \sum_{k=0}^{t-1} B^k(\theta)C_1(\theta) + B^t(\theta)\mathcal{H}_0 + \sum_{k=0}^{t-1} B^k(\theta)A^k(\theta)L^k\mathcal{X}_{t-1}(\theta_0)$$

■ Boussama [6] a prouvé le résultat suivant

Proposition 4.2.1 *[6]*

$$\rho\left(\sum_{i=1}^{q} \widetilde{A}_i + \sum_{i=1}^{p} \widetilde{B}_i\right) < 1 \Rightarrow \rho\left(\sum_{i=1}^{p} \widetilde{B}_i\right) < 1\ et\ \rho\left(\sum_{i=1}^{p} B_i\right) < 1 \Rightarrow \rho\left(B\right) < 1. \tag{4.2.27}$$

Ainsi, l'hypothèse 4 de théorème 22 implique que $\forall\theta \in \Theta, \rho\left(B(\theta)\right) := \rho_1\left(\theta\right) < 1$. *Nous indiquons par* $\rho_0 = \sup_{\theta\in\Theta}\rho_1(\theta)$ *et* ρ_1 *est continue, nous avons que* $\rho_0 < 1$ *(voir [?] pour la continuité des valeurs propres) cela permet de prouver ce qui suit*

Lemme 4.2.3 *Il existe une constante* Ψ *indépendant de* θ, *tel que*

$$N(B^k) \leq \Psi k^{d_0}\rho_0^k,\ \forall k \geq 1,\ d_0 = md(d+1)/2 \tag{4.2.28}$$

Remarque 4.2.1 *Pour la démonstration de la lemme précédent en utilisant*

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}\mathcal{H}_0 + \frac{\partial}{\partial\theta_i}\mathcal{X} = 0 \tag{4.2.29}$$

car $\mathcal{H}_0$ *est constante et* $\mathcal{X}$ *dépend de* θ_0 *mais n'est pas une fonction de* θ, *on a*

$$\frac{\partial\mathcal{H}_t}{\partial\theta_i} = \frac{\partial}{\partial\theta_i}\left(\sum_{k=1}^{t-1} B(\theta)^k\xi\right) + \frac{\partial}{\partial\theta_i}(B^t)\mathcal{H}_0 + \frac{\partial}{\partial\theta_i}\left(\sum_{k=0}^{t-1} B(\theta)^k L^k A(\theta)\right)\mathcal{X}_{t-1} \tag{4.2.30}$$

comme

$$\frac{\partial B^k}{\partial\theta_i} = \sum_{j=0}^{l-1} B^j\frac{\partial B}{\partial\theta_i}(\theta) + B^{k-1-j} \tag{4.2.31}$$

en utilisant (4.2.18) *on obtient*

$$\parallel B^j\frac{\partial B}{\partial\theta_i}B^{k-1-j} \parallel \ \leq \ N(B^j) \parallel \frac{\partial B}{\partial\theta_i}N(B^{k-1-j} \parallel$$

en utilisant (4.2.18) *on obtient*

$$N(B^j) \parallel \frac{\partial B}{\partial\theta_i}N(B^{k-1-j} \parallel \ \leq \ N(B^j) \parallel \frac{\partial B}{\partial\theta_i} \parallel N(B^{k-1-j})$$

et donc d'après (4.2.32) *et* (4.2.32) *on a*

$$\parallel B^j\frac{\partial B}{\partial\theta_i}B^{k-1-j} \parallel \leq N(B^j) \parallel \frac{\partial B}{\partial\theta_i} \parallel N(B^{k-1-j}),\ j = 0, ..., k-1, \tag{4.2.32}$$

en utilisant lemme 4.2.3 on obtient

$$\parallel B^j\frac{\partial B}{\partial\theta_i}B^{k-1-j} \parallel \leq \Psi^2 k^{d_0}\rho_0^{k-1} \parallel \frac{\partial B}{\partial\theta_i} \parallel \tag{4.2.33}$$

nous notons que les normes des dérivées $N\left(\frac{\partial B}{\partial\theta_i}\right)$, $N\left(\frac{\partial A}{\partial\theta_i}\right)$ *et* $N\left(\frac{\partial\xi}{\partial\theta_i}\right)$ *sont uniformément fini en* Θ *car ces sont fonctions tous continue de paramètres* θ.

Notation*:on note par*

$S_i = \sup_{\theta\in\Theta} N\left(\frac{\partial A}{\partial\theta_i}\right)$, $S_i' = \sup_{\theta\in\Theta} N\left(\frac{\partial B}{\partial\theta_i}\right)$, $S_i'' = \sup_{\theta\in\Theta} N\left(\frac{\partial \xi}{\partial\theta_i}\right)$. *et de plus soit* $S_0 = \sup_{\theta\in\Theta} N(A)$ *les dérivations donné par* (4.2.30) *implique trois termes est bornes*

$$\| \frac{\partial}{\partial\theta_i}\left(\sum_{k=0}^{t-1} B^k\xi_1\right) \| \;=\; \| \sum_{k=0}^{t-1}\frac{\partial B^k}{\partial\theta_i}C_1 + \sum_{k=0}^{t-1} B^k\frac{\partial C_1}{\partial\theta_i} \|$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}\sum_{k=0}^{t-1} B^k(\theta)C_1(\theta) = \sum_{k=0}^{t-1}\frac{\partial B^k}{\partial\theta_i}(\theta)C_1(\theta) + \sum_{k=0}^{t-1} B^k(\theta)\frac{\partial C_1}{\partial\theta_i}(\theta)$$

$$\| \frac{\partial}{\partial\theta_i}\sum_{k=0}^{t-1} B^k(\theta)C_1(\theta) \| = \| \sum_{k=0}^{t-1}\frac{\partial B^k}{\partial\theta_i}(\theta)C_1(\theta) + \sum_{k=0}^{t-1} B^k(\theta)\frac{\partial C_1}{\partial\theta_i}(\theta) \|$$

en utilisant la relation (4.2.18) *on obtient*

$$\| \frac{\partial}{\partial\theta_i}\sum_{k=0}^{t-1} B^k(\theta)C_1(\theta) \| \;\leq\; \| \sum_{k=0}^{t-1}\frac{\partial B^k}{\partial\theta_i}(\theta)C_1(\theta) \| + \| \sum_{k=0}^{t-1} B^k(\theta)\frac{\partial C_1}{\partial\theta_i}(\theta) \|$$

en utilisant le lemme 4.2.3 on aura

$$\begin{aligned} \| \frac{\partial}{\partial\theta_i}\left(\sum_{k=0}^{t-1} B^k\xi_1\right) \| &\leq \Psi^2 \| \frac{\partial B}{\partial\theta_i} \| \sum_{k=0}^{t-1} k^{d_0}\rho_0^{k-1} + \Psi \| \frac{\partial \xi_1}{\partial\theta_i} \| \sum_{k=0}^{t-1} k^{d_0}\rho_0^k \\ &\leq \frac{\Psi(d_0-1)!}{\rho_0(1-\rho_0)^{d_0}}\left(\Psi \| \frac{\partial B}{\partial\theta_i} \| + \| \frac{\partial C_1}{\partial\theta_i} \|\right) \end{aligned}$$

avec $\sum_{k=1}^{t-1} k^{d_0}\rho_0^k \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^{d_0}\rho_0^k = (d_0-1)/(1-\rho_0)^{d_0}$, *bien sur, avec* $\rho_0 \neq 0$
Mais si c'est le cas, les termes sont fini car B est nilpotente et toutes les sommes sont finies.
en utilisant

$$N(A) \leq \| A \| \leq \sqrt{d}(A) \tag{4.2.34}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \sup_{\theta\in\Theta} \| \frac{\partial}{\partial\theta_i}\left(\sum_{k=0}^{t-1} B^kC_1\right) \| &\leq \frac{\Psi(d_0-1)!}{\rho_0(1-\rho_0)}\left(\Psi \| \frac{\partial B}{\partial\theta_i} \| + \| \frac{\partial C_1}{\partial\theta_i} \|\right) \\ &\leq \frac{\Psi(d_0-1)!}{\rho_0(1-\rho_0)}\left(\Psi \sup \| \frac{\partial B}{\partial\theta_i} \| + \sup \| \frac{\partial C_1}{\partial\theta_i} \|\right) \\ &\leq \frac{\Psi(d_0-1)!\sqrt{d_0}}{\rho_0(1-\rho_0)^{d_0}}\left(\Psi S_i' + S_i''\right) \end{aligned}$$

de la même manière,

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}(B^t\mathcal{H}_0) = \frac{\partial B^t}{\partial\theta_i}\mathcal{H}_0$$

$$\| \frac{\partial}{\partial\theta_i}(B^t)\mathcal{H}_0 \| \leq \frac{d_0-1)!}{\rho_0(1-\rho_0)^{d_0}}\Psi \| \frac{\partial B}{\partial\theta_i} \|\| \mathcal{H}_0 \|$$

finilement

$$\| \frac{\partial}{\partial\theta_i}\left(\sum_{k=0}^{t-1} B^kL^kA\right)\mathcal{X}_{t-1} \| \leq \| \left[\sum_{k=0}^{t-1}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_i}B^kL^kA\right)\right]\mathcal{X}_{t-1} \| + \| \left[\sum_{k=0}^{t-1} B^kL^k\left(\frac{\partial}{\partial\theta_i}A\right)\right]\mathcal{X}_{t-1} \|$$

supposons que $T_1 = \| \left[\sum_{k=0}^{t-1}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_i}B^kL^kA\right)\right]\mathcal{X}_{t-1} \|$ *et* $T_2 = \| \left[\sum_{k=0}^{t-1} B^kL^k\left(\frac{\partial}{\partial\theta_i}A\right)\right]\mathcal{X}_{t-1} \|$
donc l'inégalité (4.2.36) *s'écrit*

$$\begin{aligned} \| \frac{\partial}{\partial\theta_i}\left(\sum_{k=0}^{t-1} B^kL^kA\right)\mathcal{X}_{t-1} \| &\leq \| \left[\sum_{k=0}^{t-1}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_i}B^kL^kA\right)\right]\mathcal{X}_{t-1} \| + \| \left[\sum_{k=0}^{t-1} B^kL^k\left(\frac{\partial}{\partial\theta_i}A\right)\right]\mathcal{X}_{t-1} \| \quad (4.2.35) \\ &\leq \| T_1 \| + \| T_2 \| \quad (4.2.36) \end{aligned}$$

donc

$$\| T_2 \| = \| \left[\sum_{k=0}^{t-1} B^kL^k\left(\frac{\partial}{\partial\theta_i}A\right)\right]\mathcal{X}_{t-1} \| = \| \sum_{k=0}^{t-1}(BL)^k\frac{\partial A}{\partial\theta_i}\mathcal{X}_{t-1} \|$$

en utilisant les formules (4.2.18) *et* (4.2.34) *on obtient*

$$\begin{aligned} \| T_2 \| = \| \left[\sum_{k=0}^{t-1} B^kL^k\left(\frac{\partial}{\partial\theta_i}A\right)\right]\mathcal{X}_{t-1} \| &= \| \sum_{k=0}^{t-1}(BL)^k\frac{\partial A}{\partial\theta_i}\mathcal{X}_{t-1} \| \\ &\leq \sum_{k=0}^{t-1} N((BL)^k)N(\frac{\partial A}{\partial\theta_i}) \| \mathcal{X}_{t-1} \| \end{aligned}$$

alors en utilisant le lemme (4.2.1) *on obtient*

$$\| T_2 \| \leq \Psi^2\sum_{k=0}^{t-1} k^{d_0}\rho_0^k \| \frac{\partial A}{\partial\theta_i} \|\| \mathcal{X}_{t-1} \|$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sup_{\theta\in\Theta} \| \left[\sum_{k=0}^{t-1} B^kL^k\left(\frac{\partial}{\partial\theta_i}A\right)\right]\mathcal{X}_{t-1} \|^2\right) &\leq \Psi_i^2\left(\sum_{k,k'=0}^{t-1} k^{d_0}(k')^{d_0}\rho_0^{k+k'}\mathbb{E}\left(\| \mathcal{X}_{t-k} \|\| \mathcal{X}_{t-k'} \|\right)\right) \\ &\leq \Psi_i^2\left(\sum_{k=0}^{t-1} k^{d_0}\rho_0^k\mathbb{E}^{1/2}\left(\| \mathcal{X}_{t-k} \|^2\right)\right)^2 \\ &\leq S_i^2\frac{[(d_0-1)!]^2}{(1-\rho_0)^{2d_0}}\mathbb{E}\left(\| \mathcal{X}_0 \|^2\right) \end{aligned}$$

pour la première terme on a

$$\begin{aligned} parallel\left[\sum_{k=0}^{t-1}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_i}B^kL^kA\right)\right]\mathcal{X}_{t-1}\parallel &\leq \Psi^2\left(\sum_{k=1}^{t-1}k^{d_0+1}\rho_0^{k-1}N(A)\parallel\mathcal{X}_{t-k-1}\parallel\right)N\left(\frac{\partial B}{\partial\theta_i}\right)\\ &\leq \Psi^2\left(\sum_{k=1}^{t-1}k^{d_0+1}\rho_1^{k-1}\parallel\mathcal{X}_{t-k-1}\parallel\right)N(A)N\left(\frac{\partial B}{\partial\theta_i}\right)\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sup_{\theta\in\Theta}\parallel\left[\sum_{k=0}^{t-1}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_i}B^kL^kA\right)\right]\mathcal{X}_{t-1}\parallel^2\right) &\leq \Psi^2S_0^2(S_i^{'})^2\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{t-1}k^{d_0+1}\rho_0^{k-1}\parallel\mathcal{X}_{t-k-1}\parallel\right)^2\\ &\leq \Psi^2S_0^2(S_i^{'})^2\mathbb{E}\left(\sum_{k,k'=1}^{t-1}(k^{d_0+1}\rho_0^{k-1})((k^{'})^{d_0+1}\rho_0^{k^{'}-1})\parallel\mathcal{X}_{t-k-1}\parallel\parallel\mathcal{X}_{t}\right.\\ &\leq \frac{(d_0!\Psi S_0S_i^{'})^2}{\left[\rho_0(1-\rho_0)^{d_0}\right]^2}\mathbb{E}\left(\parallel\mathcal{X}_0\parallel^2\right)\end{aligned}$$

comme $\mathbb{E}(\parallel\mathcal{X}_0\parallel^2)<\infty$

Preuve. 4.2.3 Si on peut trouver une matrice unitaire complexe P qui vérifie que $P^*=P^{-1}$, P^* est la conjuguée de la matrice P, tel que $B=P^*DP$, D la matrice diagonale, on a $N(A)=\rho^{1/2}(A^{'}A)$ donc

$$\begin{aligned}N(P^*D^kP) &= \rho^{1/2}\left((P^*D^kP)^{'}(P^*D^kP)\right)\\ &= N\left(P^*D^kP\right)\\ &= \rho^{1/2}\left(\left(P^*D^kP\right)^{'}\left(P^*D^kP\right)\right)\\ &= \rho^{1/2}\left(\left(P^*D^kP\right)^{*}\left(P^*D^kP\right)\right)\\ &= \rho^{1/2}\left(P^*D^{*k}PP^*D^kP\right)\\ &= \rho^{1/2}\left(P^*D^{*k}D^kP\right)\\ &= \rho^{1/2}\left(P^*\left(D^*D\right)^kP\right)\\ &= \rho^{1/2}\left(\left(D^*D\right)^k\right)\end{aligned}$$

car $P^*P=PP^*=I$ le résultat est vraie pour $\Psi=1$. on générale
B ne peut pas être diagonalisé, dans ce cas nous pouvons encore trouver une matrice unitaire complexe P, et un complexe triangulaire inférieur les termes diagonaux de T sont les valeurs

propres de B voir [22, théorème 12] tel que $B = P^*TP$, en écrire $T = D + L$ (ou D matrice diagonale et L matrice triangulaire inférieur avec les éléments diagonaux nulle, L est nilpotente avec $L^{d_0} = 0$) donc on a $N(B^k) = N(T^k)$, en utilisant les formules on obtient

$$N(T^k) \quad = \quad N((D+L)^k)$$

alors en utilisant Binôme de Newton on aura le résultat

$$\begin{aligned} N\left(T^k\right) &\leq N(D^k) + \sum_{j=1}^{d_0} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} N(L)^j N(D)^{k-j} \\ &\leq \rho_1^k + \sum_{j=1}^{d_0} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} N(L)^j \rho_1^{k-j} \end{aligned}$$

pour tout $k \geq d_0$. soit $k = d_0 + n$ en remplace dans l'équation suivant en obtient

$$N\left(T^k\right) \leq \rho_1^n \left(\rho_1^{d_0} + \sum_{j=1}^{d_0} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} N(L)^j \rho_1^{k-j} \right)$$

et

$$\begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ j \end{pmatrix} \prod_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{1 - \frac{j}{d_0+p}} \right)$$

mais pour tout x, $0 \leq x \leq \frac{1}{d_0}$, $-\log(1-x) \leq (d_0/(1+d_0))x$ alors

$$\begin{aligned} \log\left[\prod_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{1 - \frac{j}{d_0+p}} \right) \right] &= -\sum_{p=1}^{n} \log\left(1 - \frac{j}{d_0+p}\right) \\ &\leq \frac{d_0}{1+d_0} \sum_{p=1}^{n} \frac{j}{d_0+p} \\ &\leq \frac{j}{1+d_0} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{1+p/d_0} \\ &\leq \frac{j d_0}{1+d_0} \log\left(1 + \frac{n}{d_0}\right) \\ &\leq d_0 \log\left(1 + \frac{n}{d_0}\right) \end{aligned}$$

on a $j \leq d_0$ alors

$$\begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} d_0 \\ j \end{pmatrix} (1 + 1/d_0)^{d_0}$$

et

$$N\left(T^{d_0+n}\right) \leq \rho_1^n \left(1+\frac{n}{d_0}\right)^{d_0} (N(L)+\rho_1)^{d_0}$$

donc

$$N\left(T^{k}\right) \leq \left(\frac{1+N(L)/\rho_0}{d_0}\right)^{d_0} k^{d_0}\rho_0^k$$

pour cela

$$N(L) = N(T-D) \leq N(T) + N(D) \leq \rho_0 + N(B)$$

■ en suite on prouvé que C1 est définie positive $A_i = H^{-1/2}\dot{H}_i H^{-1/2}$ où t indice négligable et $H^{-1/2}$ est symétrique de H^{-1}. en utilisant pour tout matrices$A, B, Tr(AB) = vec(A^{'})^{'}vec(B)$, on prend

$$\mathbb{E}(\frac{\partial^2 \ell_t(\theta_0)}{\partial^2\theta}) = 2WW^{'}$$

où $W = (vec(A_1) \mid vec(A_2) \mid ... \mid vec(A_r))$ alors en utilisant

$$vec(ABC) = (C^{'} \otimes A)vec(B)$$

on a

$$vec(A_i) = (H^{-1/2} \otimes H^{-1/2})vec(\dot{H}_i)$$

et en utilisant

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC \otimes BD)$$

on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\frac{\partial^2 \ell_t(\theta_0)}{\partial^2\theta}) \\
&\qquad = \quad 2WW^{'} \\
&\qquad = \quad 2(vec(A_i)^{'}vec(A_j))_{1\leq i,j\leq r} \\
&\qquad = \quad 2(vec(\dot{H}_t)^{'}(H^{-1/2} \otimes H^{-1/2})(H^{-1/2} \otimes H^{-1/2})vec(\dot{H}_j))_{1\leq i,j\leq r} \\
&\qquad = \quad 2(vec(\dot{H}_i)^{'}(H^{-1} \otimes H^{-1})vec(\dot{H}_j))_{1\leq i,j\leq r} \\
&\qquad = \quad 2P^{'}(H^{-1} \otimes H^{-1})P
\end{aligned}$$

où

$$P = (vec(\dot{H}_1) \mid vec(\dot{H}_2) \mid ... \mid vec(\dot{H}_r))$$

donc $H^{-1} \otimes H^{-1}$ est définie positive, les valeurs propres de $A \otimes B$ sont $\lambda_i \mu_j$ si λ_i les valeurs propres de A et μ_j les valeurs propres de B. Ce implique que les valeurs propres de $H^{-1} \otimes H^{-1}$ est positive, donc H^{-1} est définie positive, alors C_1 est semi-définie positive, donc il existe un vecteur x indépendant de t, alors

$$x^{'} \mathbb{E}\left(P_t^{'}(H^{-1} \otimes H^{-1}) P_t\right) x = 0$$

$$x^{'} \mathbb{E}\left(P_t^{'}(H^{-1} \otimes H^{-1}) P_t\right) x = \mathbb{E}\left((P_t x)^{'}(H^{-1} \otimes H^{-1}) P_t x\right) = 0$$

donc $P_t x$ est non négative, est nécessairement 0 et $H^{-1} \otimes H^{-1}$ est définie positive, donc en déduit que $P_t x = 0, p.s\ \forall t \in \mathbb{N}$

Ce implique que il existe un vecteur y alors

$$y^{'} \frac{\partial h_t}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{r} y_i \frac{\partial ht}{\partial \theta_i} = 0, p.s\ \forall t \in \mathbb{N}$$

En noté $\frac{\partial h_t}{\partial \theta}$ par le vecteur

$$y^{'}\left(\frac{\partial vech(C)}{\partial \theta} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \widetilde{A}_i}{\partial \theta} \eta_{t-i} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \widetilde{B}_i}{\partial \theta} h_{t-i}\right) = 0,$$

ou

$$\left(y^{'} \frac{\partial vech(C)}{\partial \theta}\right) + \sum_{i=1}^{m}\left(y^{'} \frac{\partial \widetilde{A}_i}{\partial \theta}\right) \eta_{t-i} + \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{y^{'} \partial \widetilde{B}_i}{\partial \theta}\right) h_{t-i} = 0,$$

Cela permettant de trouver une autre représentation de h_t et du modèle et qui'implique une contradiction avec les conditions d'identification assurant l'unicité de la représentation (voir [8]) et donc on a montrer que C.1 est fini et définie positive.

Théorème 4.2.2 *[19]*

Les hypothèses du théorème (4.2.1) *et en particulier si la condition initiale* $x \in \mathbb{R}_+^{md'd+1)/2}$ *du processus* $\mathcal{H}$ *est fixé, alors* $\hat{\theta}_{x,n}$ *est fortement consistent et par Jeauntheau [17, pp 19-41] et d'après le* ***théorème*** 2.2 *de Elie et Jeauntheau [7], la forte consistance est obtenue sous les mêmes condition* $\sup_{\theta \in \Theta} \mid \ell_t(\theta) - \ell_t(\theta, x) \mid \to 0.p, s$ *et alors la normalité asymptotique est une sequence de ce résultat et le théorème* (4.2.1)

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{x,n} - \theta_0) \underset{n \to \infty}{\overset{\mathcal{D}}{\to}} \mathcal{N}(0, C_1^{-1} C_0 C_1^{-1}) \text{ sous } \mathbb{P}_{\theta_0} \tag{4.2.37}$$

Preuve. premièrement, $\hat{\theta}_{x,n}$ est la fortement consistante (voir [15, p..19,41]) si pour tout $x \in \mathbb{R}_+^{md(d+1)}$,

$$\sup_{\theta\in\Theta} \mid \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\ell_t(x,\theta) - \ell_t(\theta)] \mid \longrightarrow 0 \tag{4.2.38}$$

pour montrer B.1 il suffit de retrouver que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{\theta\in\Theta} \mid \ell_t(\theta) - \ell_t(x,\theta)] \mid\right]$$

est bornée par un carré sommable en t, en deduit

$$\sum_{t=1}^{+\infty}\mathbb{P}\left(\sup_{\theta\in\Theta} \mid \ell_t(\theta) - \ell_t(x,\theta)] \mid > \xi\right) < +\infty \tag{4.2.39}$$

pour tout $\xi > 0$

$$\begin{aligned}
\ell_t(\theta,x) - \ell_t(\theta) &= \log[\det(H_{t,x,\theta})] + X_t H_{t,x,\theta}^{-1} X_t - \log[\det(H_{t,\theta})] + X_t H_{t,\theta}^{-1} X_t \\
&= \underbrace{\log\left(\det\left(I_r + H_{t,\theta}^{-1/2}\left(H_{t,x,\theta} - H_{t,\theta}\right) H_{t,\theta}^{-1/2}\right)\right)}_{(1)} + \underbrace{X_t' H_{t,\theta}^{-1}\left(H_{t,\theta} - H_{t,x,\theta}\right) H_{t,x,\theta}^{-1} X_t}_{(2)}
\end{aligned}$$

pour (2) on écrit

$$\begin{aligned}
\mid X_t' H_{t,\theta}^{-1}\left(H_{t,\theta} - H_{t,x,\theta}\right) H_{t,x,\theta}^{-1} X_t \mid &= \mid Tr\left(X_t' H_{t,\theta}^{-1}\left(H_{t,\theta} - H_{t,x,\theta}\right) H_{t,x,\theta}^{-1} X_t\right) \mid \\
&= \mid Tr\left(H_{t,\theta}^{-1}\left(H_{t,\theta} - H_{t,x,\theta}\right) H_{t,x,\theta}^{-1} X_t X_t'\right) \mid
\end{aligned}$$

En utilisant (4.2.18) on obtient

$$\mid Tr\left(H_{t,\theta}^{-1}\left(H_{t,\theta} - H_{t,x,\theta}\right) H_{t,x,\theta}^{-1} X_t X_t'\right) \mid \;\leq\; \parallel X_t X_t' \parallel N(H_{t,\theta}^{-1}) N(H_{t,x,\theta}^{-1}) \parallel H_{t,\theta} - H_{t,x,\theta} \parallel$$

D'après on utilisant (4.2.7) donc

$$\parallel X_t X_t' \parallel N(H_{t,\theta}^{-1}) N(H_{t,x,\theta}^{-1}) \parallel H_{t,\theta} - H_{t,x,\theta} \parallel \;\leq\; K^2 \parallel X_t \parallel^2 \parallel H_{t,\theta} - H_{t,x,\theta} \parallel$$

En utilisant (4.2.27) on a

$$\mathcal{H}_t - \mathcal{H}_{x,t} = B^t(\mathcal{H}_0 - \mathcal{H}_{x,0})$$

où $\mathcal{H}_{x,0}$ est le condition initiale de $\mathcal{H}$ associe à x, ce implique que

$$\begin{aligned}
\parallel \mathcal{H}_t - \mathcal{H}_{x,t} \parallel &\leq N(B^t) \parallel \mathcal{H}_0 - \mathcal{H}_{x,0} \parallel \\
&\leq \Psi t^{d_0} \rho_0^t \parallel \mathcal{H}_0 - \mathcal{H}_{x,0} \parallel
\end{aligned}$$

En utilisant lemme 4.2.3

$$\mid X_t^{'}(H_{t,x,\theta}^{-1} - H_{t,\theta}^{-1})X_t \mid \leq K^2\Psi \parallel \mathcal{H}_0 - \mathcal{H}_{x,0} \parallel\mid\mid X_t \parallel^2 t^{d_0}\rho_0^t.$$

Alors

$$\mathbb{E}\left[\sup_{\theta} \mid X_t^{'}(H_{t,x,\theta}^{-1} - H_{t,\theta}^{-1})X_t \mid\right] = O(t^{d_0}\rho_0^t) \tag{4.2.40}$$

Si $\mathbb{E}(\parallel X_t \parallel^4) \leq +\infty$ est de (4.2.40) est intégrable. pour le première terme, soit $\lambda_i(t,x,\theta)$ les valeurs propres de la matrice symétrique $H_{t,\theta}^{-1/2}(H_{t,x,\theta} - H_{t,\theta}H_{t,\theta}^{-1/2})$, $i = 1, ..., d$. Alors pour $\log(\det(H_{t,\theta})) - \log(\det(H_{t,\theta}))$ d'après le théorème spectrale en dimension finie en déduit que toute matrice symétrique réelles est diagonalisable Exemple Aun matrice symétrique d'ordre n à pour les valeurs propres λ_i

$$det(I + A) = \det((1+\lambda_1)(1+\lambda_2)...(1+\lambda_n))\, 1 + \prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)$$

Supposons maintenant $A = H_{t,\theta}^{-1/2}(H_{t,x,\theta} - H_{t,\theta})H_{t,\theta}^{-1/2}$

$$\log(I + A) = \log\left(\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)\right)$$

supposons que $A = H_{t,\theta}^{-1/2}(H_{t,x,\theta} - H_{t,\theta}H_{t,\theta}^{-1/2})$ alors

$$\log\left\{det\left[I_r + H_{t,\theta}^{-1/2}(H_{t,x,\theta} - H_{t,\theta}H_{t,\theta}^{-1/2})\right]\right\} = \sum_{i=1}^{d}\log(1+\lambda_i(t,x,\theta))$$

On a

$$\mid \lambda_i(t,x,\theta) \mid \leq \rho\left(H_{t,\theta}^{-1/2}(H_{t,x,\theta} - H_{t,\theta}H_{t,\theta}^{-1/2}\right) \leq N(H_{t,\theta}^{-1/2})^2 N(H_{t,x,\theta} - H_{t,\theta})$$

et donc, en utilisant (4.2.40) , alors il existe un constante k indépendant de θ donc

$$\mid \lambda_i(t,x,\theta) \mid \leq kt^{d_0}\rho_0^t$$

pour t fixé par t_0 alors pour $t \geq t_0$, $\mid \lambda_i(t,x,\theta) \mid \leq 1/2$, et $\mid \log(1+u) \mid \leq 2 \mid u \mid$ pour $\mid u \mid \leq 1/2$, pour $t \geq t_0$.

$$\begin{aligned}
\mid \log(det(I_r + H_{t,\theta}^{-1/2}(H_{t,x,\theta} - H_{t,\theta}H_{t,\theta}^{-1/2})) \mid &\leq \sum_{t=1}^{d} \mid \log(1+\lambda_i(t,x,\theta)) \mid \\
&\leq 2\sum_{t=1}^{d} \mid \lambda_i(t,x,\theta) \mid \leq 2dkt^{d_0}\rho_0^t
\end{aligned}$$

alors

$$\sup_{\theta\in\Theta} \mid \log\left[det(H_{t,\theta}^{-1}H_{t,x,\theta})\right] \mid = O(t^{d_0}\rho_0^t) \tag{4.2.41}$$

et borné de (4.2.41) est sommable (pour tout t). Θ pour la normalité asymptotique on écrit

$$\nabla^2 L_n(x,\theta_{n,x}^*)\sqrt{n}(\hat{\theta_{x,n}} - \theta_0) - \nabla L_n(x,\theta_0)) + \nabla^2 L_n(\theta_n^*)\sqrt{n}(\hat{\theta})_n - \theta_0) \tag{4.2.42}$$

où $\mid \theta_{n,x}^* - \theta_0 \mid \leq \mid \hat{\theta})_{n,x} - \theta_0 \mid$ et $\mid \theta_n^* - \theta_0 \mid$.

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \mid \sum_{t=1}^{d}(\nabla\ell_t(\theta_0) - \nabla\ell_t(x,\theta_0)) \mid \tag{4.2.43}$$

et

$$\sup_{\theta\in\Theta} \mid \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(\nabla^2\ell_{t,x} - \nabla^2\ell_t \tag{4.2.44}$$

en utilisant l'inégalité de Markov $\mathbb{P}(\mid X \mid \geq a) \leq \mathbb{E}(\mid X \mid^p)/a^p$, pour tout $p \geq 0$, on a (**??**) pour tout i,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E} \parallel \frac{\partial}{\partial\theta_i}\ell_t(\theta_0) - \frac{\partial}{\partial\theta_i}\ell_t(x,\theta_0) \parallel \tag{4.2.45}$$

est borné on prend θ_0 pour simplifie

$$\begin{aligned} \mid \frac{\partial}{\partial\theta_i}\ell_t(\theta_0) - \frac{\partial}{\partial\theta_i}\ell_t(x,\theta_0) \mid &= \mid X_t^{'}(H_t^{-1}\dot{H}_{t,i}H_t^{-1} - H_{x,t}^{-1}\dot{H_{t,x,i}}H_{x,t}^{-1})X_t - Tr(H_t^{-1}\dot{H}_{t,i}) \\ &- Tr(H_{x,t}^{-1}\dot{H}_{t,x,i}) \mid \end{aligned} \tag{4.2.46}$$

alors

$$\begin{aligned} \mid Tr(H_t^{-1}\dot{H}_{t,i}) - Tr(H_{x,t}^{-1}\dot{H}_{t,x,i}) \mid &\leq \mid Tr(H_t^{-1}(\dot{H}_{t,i} - \dot{H}_{t,x,i})) \mid + \mid Tr((H_t^{-1} - H_{t,x}^{-1})\dot{H}_{t,x,i}) \mid \\ &\leq \mid Tr(H_t^{-1}(\dot{H}_{t,i} - \dot{H}_{t,x,i})) \mid + \mid Tr((H_t^{-1} - H_{t,x})\dot{H}_{t,x,i}) \mid \\ &\leq \parallel H_t^{-1} \parallel\parallel \dot{H}_{t,i} - \dot{H}_{t,x,i} \parallel + \parallel H_t^{-1} - H_{t,x} \parallel\parallel \dot{H}_{t,x,i} \parallel \\ &\leq \sqrt{d}\, K \parallel \frac{\partial\mathcal{H}_t}{\partial\theta_i} - \frac{\partial\mathcal{H}_{t,x}}{\partial\theta_i} \parallel + N(H_t^{-1})N(H_{t,x}^{-1}) \parallel H_t - H_{t,x} \parallel\parallel \frac{\partial\mathcal{H}_t}{\partial\theta_i} \parallel \\ &\leq \sqrt{d}K \parallel \frac{\partial\mathcal{H}_t}{\partial\theta_i} - \frac{\partial\mathcal{H}_{t,x}}{\partial\theta_i} \parallel + K^2 \parallel H_t - H_{t,x} \parallel\parallel \frac{\partial\mathcal{H}_t}{\partial\theta_i} \parallel \end{aligned} \tag{4.2.47}$$

par le lemme (4.2.2), $\mathbb{E}(\parallel \frac{\partial\mathcal{H}_t}{\partial\theta_i} \parallel^2) < \infty.\mathbb{E}^{1/2}(\parallel H_t - H_{t,x} \parallel^2)$ est intégrable. pour un notre de terme de (4.2.47) a voir que

$$\frac{\partial\mathcal{H}_t}{\partial\theta_i} - \frac{\partial\mathcal{H}_{t,x}}{\theta_i}\partial = \frac{B^t}{\partial\theta_i}(\mathcal{H}_0 - \mathcal{H}_{0,x}), \tag{4.2.48}$$

alors en utilisant lemme (4.2.3)

$$\parallel \frac{\partial\mathcal{H}_t}{\partial\theta_i} - \frac{\partial\mathcal{H}_{t,x}}{\partial\theta_i} \parallel \leq \Psi^2 t^{d_0+1}\rho_0^{t-1}N\left(\frac{\partial B}{\partial\theta}\right) \parallel \mathcal{H}_0 - \mathcal{H}_{0,x} \parallel$$

■

Bibliographie

[1] T. Amemiya, Advanced Econometrics, Blackwell, Oxford, 1985.

[2] I.V. Basawa, P.D. Feigin, C.C. Heyde, Asymptotic properties of maximum likelihood estimators for stochastic processes, Sankhya Ser. A 38(1976)259 − 270.

[3] P. Billingsley, The Lindeberg-Levy theorem for martingales, Proc. Amer. Math. Soc.12(1961)788 − 792.

[4] T. Bollerslev, Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, J. Econometrics 31(1986) 307 − 327.

[5] T. Bollerslev, Modelling the coherence in short run nominal exchange rates: a multivariate generalized ARCH model, in: R.F. Engle (Ed.), ARCH Selected Readings, Oxford University Press, Oxford,1995, pp.300 − 313.

[6] F. Boussama, Ergodicity, mixing and estimation in GARCH models, Ph.D. Dissertation, University of Paris 7, 1998.

[7] L. Elie, T. Jeantheau, Estimation in conditionally heteroskedastic models, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I 320(1995)1255 − 1258.

[8] R.F. Engle, Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, Econometrica 50(1982)987 − 1007.

[9] R.F. Engle, K.F. Kroner, Multivariate simultaneous generalized ARCH, Econometrics Theory 11(1995)122 − 150.

[10] E. Hansen, A. Rahbek, Stationarity and asymptotics of multivariate ARCH time series with an application to robustness of cointegration analysis, preprint, University of Copenhagen, December 1998.

[11] T. Jeantheau, Modèles autorégressifs à erreurs conditionnellement heteroscedastiques, Ph.D. Thesis, University of Paris 7, 1993.

[12] T. Jeantheau, Strong consistency of estimators for multivariate ARCH models, Econometrics Theory 14(1998)70 − 86.

[13] R.L. Lumsdaine, Consistency and asymptotic normality of the quasi-maximum likelihood estimator in IGARCH(1,1) and covariance stationary GARCH(1,1) models, Econometric Theory 64(1996)575 − 596.

[14] J.R. Magnus, H. Neudecker, Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics, Wiley, New York, 1988.

[15] S.P. Meyn, R.L. Tweedie, Markov Chains and Stochastic Stability, Springer, London, 1993.

[16] A. Mokkadem, Propiétés de mélange des processus autorégressifs polynomiaux, Ann. Inst. Henri

[17] A.A. Weiss, Asymptotic theory for ARCH models: Estimation and testing, Econometric Theory 2(1986)107 − 131.

[18] C. Francq and J.M. Zakonian,GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications,Wiley-Interscience,Wiley-Interscience,2010.

[19] F.Comte et O.Lieberman, Asymptotic theory for multivariate $GARCH$ processes, journal of multivariate Analysis 84(2003)61 − 84.

[20] JR.Magnus ,H.Neudecker. Matrux differential calculs with applications in statictics and econometrics,ISBN0 − 471 − 98632 − 1 (alk.paper)

[21] Bollerslev T, Engle RF, Woolridge JM. 1988. A capital pricing model with time varying covariances. *JOURNAL OF POLITICAL ECONOMY* 96*:* 116 − 131

[22] Bollerslev. 1990 . Modeling the coherence in short-run nominal exchange rates: A multivariate generalized ARCH model. Review of Economics and Statistics 72 : 498505

[23] Engle RF .2002. Dynamic conditional correlation - a simple class of multivariate GARCH models. Journal of Business and Economic Statistics 20 : 339350.