UNIVERSITÉ YAHIA FARÈS DE MÉDÉA
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DES SCIENCES DE LA MATIÈRES

Mémoire

Présenté pour obtenir le diplôme de :

Master en Physique

Spécialité : Physique Théorique

Par : SALAH EDDINE BOUKHARI

Thème :

Aspects de la théorie de mécanique analytique non commutative

---

Evalué par le jury composé de:

M. Mekhtiche Abdelhalim	MCB	Universté de Médéa	Président
M. Cherroud Othmane	MCB	Universté de Médéa	Examinateur
Mme. Hattou Souad	MAA	Universté de Médéa	Examinatrice
M. Bouchachia Karim	MCB	Universté de Médéa	Encadreur

Année universitaire : 2020 / 2021

ملخص

في هذه الأطروحة، درسنا مفهوم تشوه فضاء الطور الكلاسيكي من خلال إدخال الهندسة غير التبادلية. يمكن تنفيذ بناء ميكانيكا تحليلية غير تبادلية من خلال ديناميكيات أقواس يواسون ، من بين أمور أخرى. نتيجة لذلك ، يتم تعديل المعادلات الديناميكية لحركة الأنظمة الفيزيائية وتتلقى ما يسمى بالتصحيحات غير التبادلية.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudier la notion de déformation de l'espace des phases classique à travers l'introduction de la géométrie non commutative. La construction d'une mécanique analytique non commutative peut être réalisée à travers entre autres à travers la dynamique des crochets de Poisson. En conséquence, les équations dynamiques de mouvement des systèmes physiques sont modifiées et recoivent descorrections dites non commutatives.

Abstract

In this thesis, we have studied the notion of deformation of the classical phase space through the introduction of non-commutative geometry. The construction of a non-commutative analytical mechanics can be carried out through, among other things, the dynamics of Poisson brackets. As a result, the dynamic equations of motion of physical systems are modified and receive so-called non-commutative corrections.

Remerciement

Je remercie tout d'abord Dieu de m'avoir aidé à réaliser ce travail.

Je tiens à remercier le Dr. Bouchachia Karim d'avoir accepté de m'encadrer pour ce mémoire de fin de cycle, pour son aide et ses conseils durant cette période.

Je remercie Dr. Mekhtiche Abdelhalim d'avoir accepter de présider l'honorable jury de ma soutenance. Je remercie également les membres du jury, le Dr. Cherroud Othmane et Madame Hattou Souad, pour avoir accepter d'examiner et d'évaluer mon travail.

Je voudrais exprimer ma reconnaissance envers mes amis et mes collègues qui m'ont apporté leur soutien moral et intellectuel tout au long de ma démarche.

Enfin, je tiens également à remercier les membres de ma famille et tous ceux qui ont contribué à ce travail de près ou de loin.

Table des Matières

Introduction **6**

1 Mécanique Analytique **8**

1.1 Principe de moindre action et équation de Lagrange 9

1.2 Le principe de Hamilton 11

1.2.1 Principe variationnel de Hamilton 11

1.3 Crochets de poisson 16

1.4 L'espace des phases 17

1.4.1 Oscillateur harmonique 18

1.4.2 Oscillateur harmonique amortie 18

1.4.3 Potentiel exponentiel 18

1.4.4 Potentiel sinusoïdal 18

2 Géometrie non commutative **20**

2.1 rappel historique sur la Géometrie non commutative en Physique 20

2.2 La géométrie non-commutative 21

2.3 Mécanique quantique sur le plan non commutative 24

2.4 Algèbre non- commutative 26

2.5 les origines de la géométrie non commutative 27

3 Mecanique Analytique non commutative **30**

3.1 Limite classique de la mécanique quantique non commutative 30

3.2 Loi de Newton sur l'espace non commutative 37

4 Applications de la mécanique analytique dans l'espace non commutative 39

4.1 Equation du mouvement d'un oscillateur harmonique en espace des phases non commutative 40

4.2 Champ central 42

4.3 L'Atome d'hydrogène 44

4.4 Particule libre 46

Conclusion 48

Introduction

La mécanique analytique est branche fondamentale de la physique et son formalisme constitue la base de la physique théorique. La quasi-totalité des théories physiques modernes sont formulées, d'une façon ou d'une autre, sur la base de la mécanique analytique, d'où l'importance majeur de cette théorie. La formulation de la mécanique analytique a été initié au dix-huitième siècle par le mathématicien et physicien J. L. De Lagrange

Au début du vingtième siècle, la physique fondamentale a subi deux révolutions majeures qui ont changé les concepts et la vision de la mécanique classique ce sont : la théorie de la relativité générale et la théorie quantique. Si la première est l'oeuvre d'Albert Einstein, la deuxième a connu son essor grâce aux travaux de Planck, Bohr, Schrödinger, Heisenberg et bon nombre d'autres physiciens. Ces deux théories ont profondément changé notre manière d'appréhender le monde qui nous entoure.

La relativité générale est la théorie qui décrit les phénomènes physiques à très grande échelle. Elle a réussi à expliquer les phénomènes physiques gravitationnels régissant les planètes et les galaxies en termes de notions purement géométriques. La mécanique quantique, de son coté, décrit les phénomènes physiques à l'échelle microscopique, elle explique ainsi le comportement des constituants les plus infimes de la matière tels que les atomes, les électrons, les quarks, ... La description mathématique de la théorie se fait à travers des algèbres d'opérateurs hermiciens, dits de Von Neumann, agissant sur l'espace de Hilbert.

La notion de non-commutativité de l'espace est l'une des conséquence de la mécanique quantique, c'est aussi une tentative pour concilier la description microscopique et macroscopique de la physique. C'est W. Heisenberg qui a été le premier à proposé le concept de mécanique quantique non-commutative (MQNC) dans les années 30, puis son idée a été

consolidé par M. Born et P. Jordan et par H. Snyder à la fin des années 40. Il s'avère que les traits les plus fondamentaux de la mécanique quantique, tels que l'existence de l'algèbre des opérateurs quantiques et le principe d'Heisenberg et bien d'autres, résultent de l'aspect non commutative de l'espace des phases quantique. La généralisation de cette notion a donnée naissance à la théorie de géométrie non commutative.

Sachant que la mécanique quantique a été formulée sur la base du formalisme hamiltonien, il serai impossible de parler de la mécanique quantique sans passer par le formalisme de la mécanique analytique. d'où l'idée d'introduire la notion de non commutativité à l'espace de phase classique. Ainsi, toute modification dans le formalisme de base de la mécanique analytique va avoir des conséquencessur toutes les braches de la physique telles que la mécanique quantique, la physique statistiques, la théorie des champs,...

Nous allons voir dans ce mémoir comment les équations dynamiques de movement sont modifiées suite à la déformation de l'espace de phase. Dans les deux premiers chapitres du mémoir on introduit séparément les notions de base de la mécanique analytique et celles de la géometrie non commutative. Le troisième chapitre est consacré à la formulation de la mécanique analytique non commutative à tavers la mécanique quantique non commutative. Le quatrième chapitre est une application de la mécanique analytique et quantique non commutatives pour l'étude de certain systèmes physiques simples.

Chapitre 1

Mécanique Analytique

La mécanique analytique à été introduite par Joseph-Louis Lagrange, dans un traité de deux volumes et publié 100 ans après Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica d'Isaac Newton. Le traité expose une grande méthode analytique générale qui permet d'économiser du travail et de la pensée, par laquelle chaque question mécanique peut être énoncée dans une seule équation différentielle.

Cette discipline est alors devenue une branche de la mécanique classique, dont elle constitue une formulation très mathématisée et de portée très générale. La mécanique analytique s'est avérée un outil très important en physique théorique. En particulier, la mécanique quantique emprunte énormément au formalisme de la mécanique analytique.

Contrairement à la mécanique de Newton qui s'appuie sur le concept de point matériel, la mécanique analytique se penche sur les systèmes arbitrairement complexes, et étudie l'évolution de leurs degrés de libertés dans ce qu'on appelle un espace de configuration. Les lois du mouvement sont quant à elles déduites d'un principe variationnel qui, appliqué à une grandeur appelée action, donne le principe de moindre action. En substance, le principe de moindre action énonce que parmi toutes les trajectoires possibles pour relier deux points de l'espace de configuration, celle qui est effectivement parcourue par le système est celle qui donne une valeur extrémale à l'action.

Lagrange a écrit dans l'introduction de son traité : "Aucun schéma ne sera trouvé dans ce travail. Les méthodes que j'explique ne nécessitent ni constructions ni raisonnements

géométriques, ni mécaniques, mais seulement des opérations algébriques selon une procédure régulière et uniforme. Ceux qui aiment l'Analyse verront avec plaisir que la Mécanique en est devenue une branche, et me sauront gré d'en avoir ainsi étendu le domaine".

1.1 Principe de moindre action et équation de Lagrange

En mécanique analytique, on peut déterminer l'état d'un système à un instant t si nous connait les N coordonnée généralisées $q(t) = (q_1(t); q_2(t); \ldots; q_N(t))$ ainsi que ses N vitesse généralisée $q(t) = \frac{dq}{dt} = (\dot{q}_1(t); \dot{q}_2(t); \ldots; \dot{q}_N(t))$,et on définit N comme le nombre dimension de système qui est aussi le même nombre de degrés de Liberté, pour étudié l'évolution de ce système, on lui associe une action $S(q)$ qui est une fonctionnelle de $q(t)$ qui définit par ce intégral suivante :

$$S(q) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1(t), ..., q_N(t), \dot{q}_1(t), ..., \dot{q}_N(t); t) \tag{1.1}$$

Ou $L(q, \dot{q}, t)$ est le Lagrangien de ce système est $(t_1; t_2)$ sont les instant initial et final.

Le système peut prendre une infinité de chemins pour aller d'un point $q(t_1)$ d'un instant t_1 vers un autre point $q(t_2)$ d'un instant final t_2 , mais le principe de moindre action veut que la trajectoire physique soit le chemin qui rend l'action extrémale (minimale, maximale)

Autrement dit que la variation doit être

$$S(q) = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_1(t), ..., q_N(t), \dot{q}_1(t), ..., \dot{q}_N(t); t) = 0 \tag{1.2}$$

Ce principe sert à nous fournir les équations du mouvement de notre système. En effet

$$\begin{aligned} S(q) &= \int_{t_1}^{t_2} L(q_1(t), ..., q_N(t), \dot{q}_1(t), ..., \dot{q}_N(t); t) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} (\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i)dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} (\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \frac{dq_i}{dt})dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} [\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i) - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})\delta q_i]dt \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\Longrightarrow \delta S(q) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} [\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}]\delta q_i dt + \sum_{i=1}^{N} [\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i] \tag{1.4}$$

Le dernier terme est nul car $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ (toutes les trajectoires passent par les points $q(t_1)$ et $q(t_2)$, donc elles ne subissent pas de variations en ces points) ; est nous donne :

$$\delta S(q) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} [\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}]\delta q_i dt \tag{1.5}$$

On sait que les coordonnée généralisée $q(t)$ sont indépendantes, donc les variations $\delta q(t)$ sont aussi indépendantes, et pour que l'action $S(q)$ soit stationnaire ($\delta S(q) = 0$) il suffit que

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

$i = 1, ..., N$

Ces équations différentielles de deuxième degré sont les équations d'Euler-Lagrange qui donné l'évolution de système. N'oubliant pas que grâce au principe de moindre action et son utilisation on accède aux équations du mouvement. En mécanique classique, on définit le lagrangien par la différence entre l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle U.

*dans le cas d'une seul particule de masse m repérée par les coordonnée (x, y, z)

$$L = T(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) - U(x, y, z) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z) \tag{1.6}$$

*dans le cas où il Y a un présence d'un potentiel électromagnétique $(A \rightarrow (x, y, z, t), V(x, y, z, t))$,

le Lagrengien d'un charge q_e est :

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + q_e(\vec{v}.\vec{A} - V) \tag{1.7}$$

Avec ; $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ le vecteur vitesse, est le point (.) indiquer le produit scalaire. [[1]]

1.2 Le principe de Hamilton

Dans la mécanique de Lagrange, on a décrit l'état d'un système mécanique à « n» degrés de liberté, à chaque instant t, des n coordonnés généralisée $q_i(t)$ à un instant quelconque on peut représenter l'état de ce système par un point dans un espace cartésienne de dimension n, appelé « espace de configuration », dans chaque axe on a un coordonnée q_i, et dans tout système mécanique subissant une évolution de temps entre t_1 et t_2 va obliger de designer une courbe dans cette espace (de configuration) qu'on appelle (trajectoire), donc le temps peut être pris comme paramètre de cette courbe.

La trajectoire réelle est qui correspond à la dynamique suivie par le système, est c'est ne résolvent les équations de Lagrange, on utilise le principe d'Alembert pour le obtenir, et considéré le travail d'un déplacement virtuels entre deux point très minimise, est en revient à considérer des chemins très proches, est cette constatation qui nous amène au principe de Hamilton.

Énoncé :

Le mouvement d'un système réel, entre un instant t_1 et t_2 c'est un intégral de forme :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \tag{1.8}$$

Avec $L = T - V$ c'est le Lagrangien du système.

1.2.1 Principe variationnel de Hamilton

Le mouvement d'un système mécanique est complétement déterminer par le principe de moindre action, en résolvent les équation du mouvement qui décrient de ce principe, n'oubliez

pas que c'est un principe fondamental stipule que l'action d'un système mécanique est stationnaire le long d'une trajectoire entre les instant initial est final, autrement dit du point vue mathématique qu'on effectue une variation infinitésimale de la trajectoire réelle, contient des variations indépendantes $\delta q_i(t)$ et $\delta p_i(t)$, et ont fixé les point initial est final fixés dans l'espace des phases, la variation correspondante de cette action s'annule au première ordre, ce principe peut être exprimé dans la formulation de Hamilton et on peut déduire les équation canonique du mouvement[[3]].

Qu'on a exprimé le lagrangien en fonction de Hamiltonien, l'action devient :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt(\sum_{i=1}^{N} p_i\dot{q}_i - H(q_i, p_i, t) \tag{1.9}$$

D'après le principe de moindre action, cette variation est nulle, on calcule d'abord pour une variation infinitésimal des chemins dans l'espace des phases$q_i + \delta q_i$ et $p_i + \delta p_i$:

$$\delta S = S[q_i + \delta q_i, p_i + \delta p_i] - S[q_i, p_i]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ p_i\delta\dot{q}_i + \dot{q}_i\delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q\dot{i}}\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i \right\} \tag{1.10}$$

Et on sait ; par l'intégrale par partie que :

$$\int_{t_1}^{t_2} p.\delta\dot{q} = -\int_{t_1}^{t_2} \dot{p}.\delta q + [p.\delta q]_{t_1}^{t_2}$$

Donc, on trouve :

$$\delta S = \sum_{i=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ -\dot{p}_i.\delta q_i + \dot{q}_i.\delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i \right\} + \sum_{i=1}^{N} p_i.\delta q_i \mid_{t_1}^{t_2}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ (-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i})\delta q_i + (\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i})\delta p_i \right\} \tag{1.11}$$

Comme les accroissements infinitésimaux δq_i etδp_isont arbitraires et indépendant, alors cette variation est nulle c'est les coefficients sous l'intégrale est nuls, ce qui nous mène au

« $2n$» équation canonique de Hamilton.

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; pi = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{1.12}$$

avec :$i = 1, \ldots .., N$

Hamiltonien et équation canonique de Hamilton :

Dans la formulation de Lagrange, un système mécanique peut être décrit un ensemble de « n » grandeurs indépendantes « q_i » appelles coordonnée généralisée, et « $\dot{q}_i$ » leur vitesse généralisé, le « n » grandeur qu'il faut se donner pour déterminer la position d'un système est appelé le nombre de degrés de liberté.

Il est possible de développer une autre formalisation de la mécanique en prenant comme couple de variable : q_i coordonnée généralisée, et $p_i$leur moment associes :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{1.13}$$

L : fonction de Lagrange

on peut passer de la fonction de Lagrange dépendant des coordonnée généralisée, a une nouveau fonction $H(q_i, p_i, t)$ dépendent des coordonnée généralisée est des moment généralisée, à travers de la transformation de Legendre.

Transformation de legendre

C'est un transformation qui utilise dans la thermodynamique qui permet de calculer le potentiel thermique, ce transforme définie un fonction d'un autre variable d'après une autre fonction, de cette façon il permet de passe de « lagrangien » vers « Hamiltonien » par :

On a :

$f \to g : v.w - f$

Et on définit : $g(u, w)$ et$f(u, v)$

Avec :

$$w = \frac{\partial f}{\partial v} = w(u; v) \tag{1.14}$$

Par définition :

$dg = w.dv + v.dw - df$

et :

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}\partial u + \frac{\partial f}{\partial v}\partial v = \frac{\partial f}{\partial u}\partial u + w.\partial v \tag{1.15}$$

Qu'on remplace (1.14) dans (1.15) on a :

$$dg = wdv + vdw - \frac{\partial f}{\partial u} - wdv$$

$$= v.dw - \frac{\partial f}{\partial u}\partial u \tag{1.16}$$

Par analogie o peut dire que la fonction « f» c'est de « L » Lagrangien.. et « g » c'est « H » de Hamiltonien, dans ce cas, et a la place de w on définit p par :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{1.17}$$

(Moment généralisée)

D'après ça on trouve la fonction Hamiltonien qui définit par :

$$H = \sum_i^N p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i; t) \tag{1.18}$$

Avec H : la fonction de Hamilton (Hamiltonien du système).

La différentielle total de cette dernière est donnée par :

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i^N \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i^N \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \tag{1.19}$$

$$= \sum_i^N (\dot{q}_i \dot{p}_i + p_i \ddot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$= \sum_{i}^{N}(-\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \dot{q}_i\dot{p}_i) - \frac{\partial L}{\partial t} \tag{1.20}$$

D'après (1.20) et (1.18) on trouve :

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}; \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{1.21}$$

Avec les équations d'Euler-Lagrange on trouve les équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) = 0 \Leftrightarrow \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{1.22}$$

De cette façon o va aux « $2n$» équation différentielle du 1^{er} ordre suivant :

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \tag{1.23}$$

Ce sont les équations du mouvement pour les fonction inconnue $q_i(t)$ et $p_i(t)$.

Le nom d'équation canonique pour focalisé sur leur simplicité, Elle consistante une formulation équivalente des lois de la mécanique. [[2]]

Exemple Dans la coordonnée cartésienne ;

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_x^2 + p_z^2) \\ H &= T + V \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \\ p &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F_x \end{aligned} \tag{1.24}$$

1.3 Crochets de poisson

Soit une grandeurs dynamique $F(q, p, t)$ qui définit dans l'espace des phases a $2n$ dimension, ça dérivée par rapport au temps est donnée par :

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^{N} (\frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i) + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{1.25}$$

D'après les équations de Hamilton(1.23) on obtient :

$$= \sum_{i=1}^{N} (\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}) + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{1.26}$$

Donc :

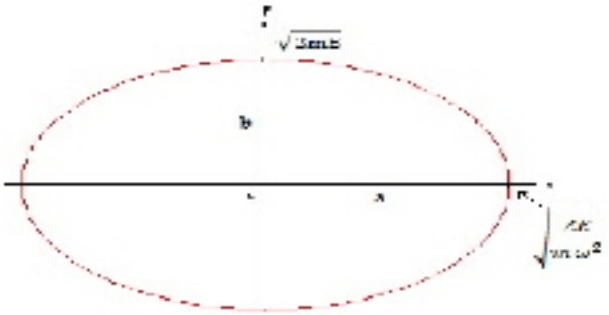
$$\frac{dF}{dt} = \{f; H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{1.27}$$

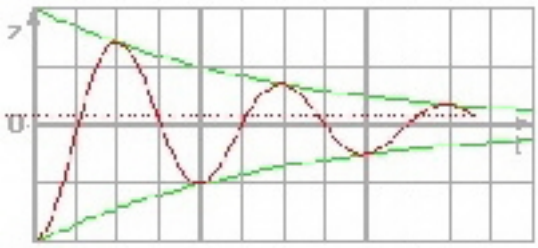
Avec la notation conventionnelle définissant crochet de poisson de$F$ et H par :

$$\{f; H\} = \sum_{i=1}^{N} (\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}) \tag{1.28}$$

L'équation (1.27) décrit l'évolution temporelle de la grandeur F, noté que cette évolution est régie par l'Hamiltonien du système qui est associés à l'énergie total du système.[[3]]

Note : Si la grandeur F ne dépend pas explicitement du temps et son crochet de poisson avec l'Hamiltonien est nul, alors$F$ est une intégrant première.







1.4 L'espace des phases

L'état d'un système à un instant aléatoire t peut être représenté par un point :

$X(q_1, \ldots., q_N, p_1, \ldots, p_N)$

L'espace des phases est définie dans un espace à $2n$ dimensions, et il est un outil essentiel en physique théorique et physique statistique, il est associé à tout un ensemble de propriétés formelles des systèmes dynamique, qui occupera chacun des couples des variables canonique (q_i, p_i), qu'il est possible de visualise sur un portrait de phase, c'est-à-dire un graphique des valeurs possible de (q_i, p_i).

D'autre façon on peut dire que l'espace des phases c'est que d'un courbe de p en fonction de q à partir de l'Hamiltonien du système ou ça énergie.

1.4.1 Oscillateur harmonique

1.4.2 Oscillateur harmonique amortie

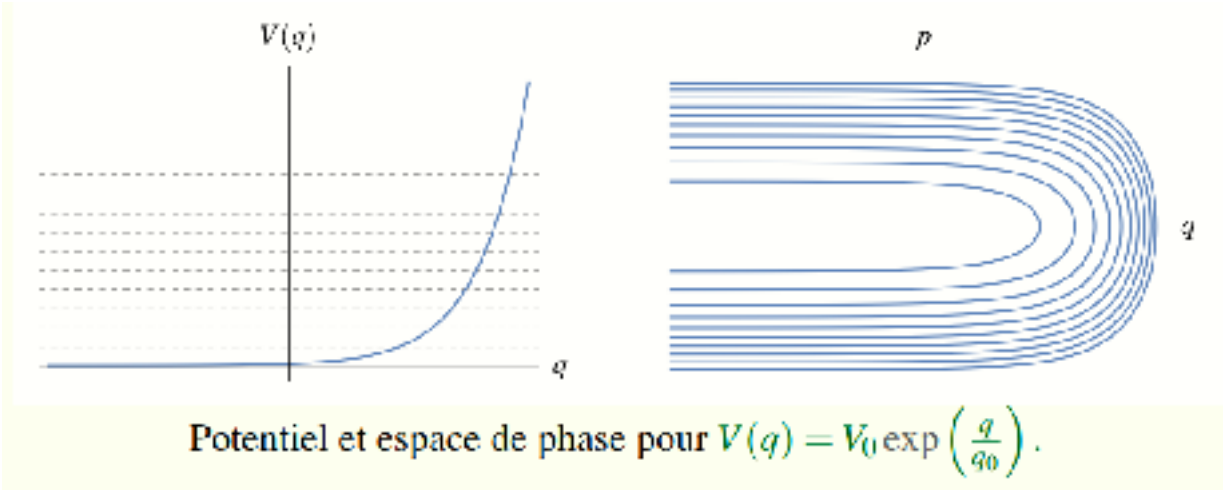
1.4.3 Potentiel exponentiel

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V_0 \exp(\frac{q}{q_0}) \tag{1.29}$$

Tant que il est indépendantes du temps ; donc $H = E$ avec E est une constante du mouvement.

Posons $m = 1$; $V_0 = 1$ et$q_0 = 1$.. On obtient :[[4]]

$$p = \pm\sqrt{2m(E - V_0 \exp(\frac{q}{q_0})} \tag{1.30}$$



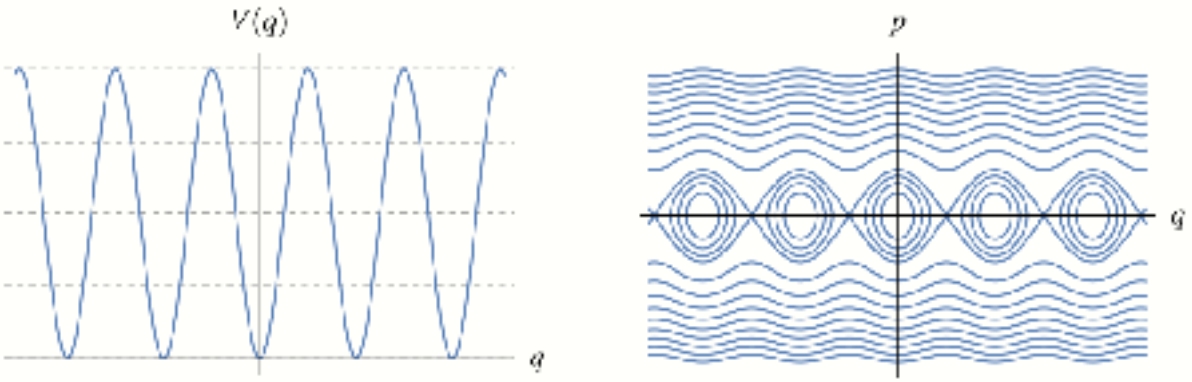
Potentiel et espace de phase pour $V(q) = V_0 \exp\left(\frac{q}{q_0}\right)$.

1.4.4 Potentiel sinusoïdal

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V_0 \sin^2(\frac{q}{q_0})$$

De la même façon, $H = E$ est E une constant du mouvement, et pour $m = 1$ et $V_0 = 0$ et $q_0 = 1$, on obtient les courbes pour des valeurs arbitraires de l'énergie E.[[4]]

$$p = \pm\sqrt{2m(E - V_0 \sin^2(\frac{q}{q_0})}$$



Potentiel et espace de phase pour $V(q) = V_0 \sin^2\left(\frac{q}{q_0}\right)$.

Chapitre 2

Géometrie non commutative

2.1 rappel historique sur la Géometrie non commutative en Physique

Le besoin d'introduire les coordonnées non commutatives a son origine depuis la naissance de la mécanique quantique et la théorie quantique des champs, malgré les prédictions extraordinaires de l'électrodynamique quantique, ces théories malgré leurs grand succès à décrire le monde atomique et subatomique présentent des difficultés intrinsèques qui surviennent à très hautes énergies ou à très courtes distances.

En effet, dans sa première formulation, la mécanique quantique apparaît sous une forme comparable à la mécanique Hamiltonienne où les coordonnées de l'espace des phases sont remplacées par des opérateurs qui ne commutent pas entre eux. **Dirac** lui-même sembla être fasciné par cette idée et suggéra la possibilité d'interpréter la mécanique quantique dans un formalisme géométrique non commutatif. Enfin, les travaux de **Von Neumann** sur la mécanique quantique furent à l'origine du domaine des mathématiques que nous appelons aujourd'hui les algèbres d'opérateurs.

L'idée que les coordonnées de l'espace-temps puissent ne pas commuter fut émise par **Heisenberg** en 1930. Pour se débarrasser des divergences qui apparaissent dans ces théories, **Heisenberg** a proposé d'introduire la notion de coordonnées non commutatives compatibles

aux relations d'incertitudes pour fournir un « cut-off » naturel, cela a pour conséquence la modification de la structure de l'espace-temps à très courtes distances.

. Cette idée fut ensuite reprise et concrétisée dans un article de **Snyder** en 1947. Il a introduit les coordonnées non-commutatives et par conséquent une incertitude sur les coordonnées d'espace se manifeste directement et d'une manière naturelle. Le but était de pouvoir se débarrasser des divergences ultraviolettes de la théorie quantique des champs tout en conservant la covariance de **Lorentz.** Mais, comme parallèlement à cela, la théorie de la renormalisation produisait des résultats remarquables, la théorie de **Snyder** tomba dans l'oubli.

Le terme de "géométrie non commutative" (**GNC**) fut introduit par **Alain Connes** dans les années 1980 comme étant un programme visant à généraliser différents concepts empruntés à la géométrie ordinaire en des concepts équivalents pour des algèbres non commutatives et en particulier les concepts venant de la géométrie différentielle. Il montra qu'il est possible de généraliser un certain nombre de notions.

En 1999, une autre approche a été proposée par **Seiberg** et **Witten** et qui consiste à remplacer l'espace-temps ordinaire par un espace non commutatif, cette notion de coordonnées non commutatives a émergé de la théorie des cordes, et la théorie des D-brane, en présence d'un champ magnétique antisymétrique.

Aujourd'hui, les concepts de coordonnées non-commutatives sont apparus dans le cadre de la théorie des cordes et de la gravité quantique. Une telle théorie doit, à très petite échelle, prendre en compte les fluctuations quantiques de la matière, c'est pourquoi on cherche à discrétiser l'espace-temps en petites cellules (et abandonner la notion de point).

2.2 La géométrie non-commutative

La géométrie non commutative est une géométrie où les coordonnées de l'espace-temps ne commutent pas, elle a été conçue à la fois pour répondre à des besoins en mathématiques et pour permettre d'aborder certains problèmes de physique théorique.

En mathématique, la géométrie non commutative est une reformulation et une général-

isation de la géométrie ordinaire en des termes algébriques et d'analyse fonctionnelle. Elle représente un ensemble de techniques sur les algèbres d'opérateurs permettant de traiter des problèmes mathématiques très variés tels quelles représentations de groupes ou encore l'étude d'espace . Ces constructions mathématiques sont désormais largement utilisées en physique théorique, et l'essentiel des théories modernes (le Modèle Standard des particules élémentaires, la Relativité Générale, la théorie quantique des champs) se fondent sur des propriétés mathématiques fines élaborées dans ce contexte

La plus simple forme de non commutativité des opérateurs des positions est donnée par cette relation de commutation

$$[X^u, X^v] = i\theta^{uv} \tag{2.1}$$

θ^{uv} ; constant réels aura la dimension de longeur carré

Puisque les coordonné des position ne commutent plus, la variété de l'espace –temps est remplacé pour un espace d'hilbert d'états, meme si tout les dimensions n'ont pas commuter entre elles on pert séparé en une composition de plans non commutatifs et de dimension commutation avec une transformation de l'espace, comme on peut dire que tout espace non commutative peut réduire a un ensemble de plans non commutatif (de dimensions complètement commutative)[[19]]

Dans le cas d'un plan bidemensionelle spatial, la matrice θ^{uv} aura la forme suivantes :

$$\theta^{uv} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\theta & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Avec $[X^1, X^2] = i\theta$, et on pose que le c-nombre $\theta > 0$

La cas de $\theta < 0$ est obtenu devient une reflexions de parité qui est brisée par la non commutativité

Toutes paires d'opératuers ne commutant pas un principe d'incertitdue, dans notre cas :

Avec

$$\triangle X^1 \triangle X^2 \geq \frac{|\theta|}{2} \tag{2.3}$$

A une certaine distance($\sim \sqrt{\theta}$) l'espace devient flou

Les dérivées par raport a les opérateur X^1 et X^2 doivent eégalement des opérateurs puisque

$$\left[\partial_i, X^j\right] = \delta_i^j \tag{2.4}$$

Est la relation de commutation des opérateurs de dérivés :

$$\partial_1 = i\frac{X^2}{\theta} \tag{2.5}$$

$$\partial 2 = -i\frac{X^2}{\theta} \tag{2.6}$$

il en découle la relation de commutation des opérateurs de dérivés:

$$[\partial_u, \partial_v] = iw_{uv} \tag{2.7}$$

Il est évident que w_{uv} est l'inverse de θ^{uv} sur le complément de son noyeau (sa partie spatial)

Malgré tout ca les dérivés ne commutent pas, leur action sur les fonction est commutative par l'identité de jacopi, c'est pour ça les composantes de w_{uv} sont des c-nombres, en peut le voir ça par un appliquation du commutation des deux opérateurs de dérivée sur une fonction quelconque

$$[\partial_1, [\partial_2, f(X^u)]] - [\partial_2, [\partial_1, f(X^u]] = [f(X^u), [\partial_1, \partial_2]] = [f(X_u), w_{12}] \tag{2.8}$$

Il est toujours déformé desliens entre la non commutativité de l'implusion et laposition en mécanique quantique, on choisir le cas d'un oscillatuer harmonique pour un cas très simple qui nous permet de déformer des opérateurs de création et d'annihilation :

$$A = \frac{X^1 + iX^2}{\sqrt{2\theta}}$$

$$A^\dagger = \frac{X^1 - iX^2}{\sqrt{2\theta}}$$

Qui implique

$$\left[A, A^\dagger\right] = 1$$

Ces opérateur engendrant à l'espace de Fock, dont les état sont caractérisés par l'opérateur nombre $N \Rrightarrow A^\dagger A$et ses effets. Voici quelques caractéristiques de ces états :[[18]]

$$A^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

$$A |n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

$$N |n\rangle = A^\dagger A |n\rangle = n |n\rangle$$

ou $n \in 0, 1, 2, 3..$

2.3 Mécanique quantique sur le plan non commutative

Le mouvement d'une particule sur un plan non commutative est un relation dirent avec les coordonnéeX^1 et X^2 et leur impulsion respectif, est donnée alors l'équation suivante :

$$\left[X^1, X^2\right] = i\theta \tag{2.9}$$

$$\left[X^j, p^k\right] = i\delta^{jk} \tag{2.10}$$

Telle que $\hbar = 1$

On peut utiliser les X^i comme des opérateurs de translation d'après la relation de commutation ce qui implique une existence d'un champ magnétique effectif puisque le commutateur des impulsions est proportionnelle au champ magnétique, alors dans le cas de la dynamique d'une particule chargée, le résultat serait grandement influencé, et on peut réaliser les formules des impulsions en définissant les opérateurs aussi :[[18]]

$$P^1 = \frac{1}{\theta}(X^2 + K^1)$$

$$P2 = \frac{1}{\theta}(-X^1 + K^2) \tag{2.11}$$

Ou

$$\left[K^1, K^2\right] = -i\theta \tag{2.12}$$

$$\left[K^i, X^j\right] = 0 \tag{2.13}$$

Ce qui donne

$$\left[P^j, P^k\right] = 0 \tag{2.14}$$

Cette espace des phases sera alors engendrée par deux espaces orthogonaux eux-mêmes engendré par les K^i et X^i. Dans ce cas on à un problème d'un faiblesse de représentation dans la divergence de la limite $\theta \to 0$qui nous permet de réglé par une modification de la représentation (2.11), par exemple :

$$X^1 = x \tag{2.15}$$

$$X^2 = \left(1 + \frac{\theta}{\hbar}\right) y + \frac{\theta}{\hbar} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} P^1 &= p^x + y \\ P^2 &= p^y + x \end{aligned} \tag{2.17}$$

Ou (x, p^x) et (y, p^y) sont deux copies qui (commutent l'une avec l'autre)de l'algèbre de **heisenberg**.[[17]]

2.4 Algèbre non- commutative

Les relations de commutation canonique dans l'espace de phase dans le cas de la mécanique quantique ordinaire prennent la forme :[[21]]

$$\begin{aligned} [\hat{x}_i, \hat{x}_j] &= 0 \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_j] &= 0 \\ [\hat{x}_i, \hat{p}_j] &= i\hbar\delta_{ij} \end{aligned}$$

La géométrie espace-temps non commutative est une géométrie où les coordonnées de l'espace-temps ne commutent pas, dont la forme générale des commutateurs:

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] \neq 0 \quad \text{et} \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] \neq 0$$

Et l'algèbre non commutative dans la forme générale présente par les relations suivantes:

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij}$$

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = i\sigma_{ij}$$

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$$

Les quantités θ_{ij} et σ_{ij}sont des paramètres antisymétriques réelles pouvant dépendre des opérateurs $\hat{x}$ et $\hat{p}$ et satisfaisant à :

$$\theta_{ij} = \epsilon_{ij}\theta$$

$$\sigma_{ij} = \epsilon_{ij}\sigma$$

Avec ;

$$\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji} = 1$$

Lorsque on pose $\theta \to 0$ ou $\sigma \to 0$ nous trouvons les relations de la mécanique quantique ordinaire (commutative

2.5 les origines de la géométrie non commutative

Pour avoir les origines de la géométrie non commutative et son évolution il faut reviens au début de la mécanique quantique, beaucoup d'aspects fondamentaux de la mécanique quantique résultant de l'existence d'une géométrie non commutative dans l'espace des phases associé. Ce fait a été mis en évidence, en 1925 par **W. Heisenberg** puis consolidé par **M. Born** et **P. Jordan** dans leurs recherches communes sur la formulation matricielle de la mécanique quantique. Ces travaux ont conduit à des concepts plus fondamentaux en physique et ont directement contribué l'émergence et au développement de la géométrie non commutative

1−L'explication de la stabilité des atomes et les coordonnées de l'espace et l'ensemble des grandeurs physique doit être représentés par une forme matricielle, qui par défaut ne commutent pas entre elles, et la notion de « point d'espace » indéfinie. Ce dernier sera con-

firmé par **Schrödinger** en 1934 puis repris plus tard en 1947 par **H. Snyder** qui quantifier l'espace-temps de **Minkowski**. L'approche de **Snyder** est de considérer explicitement le non commutativité des coordonnées, à l'échelle de Planck, à travers la relation de commutation [[20]]

$$[x^{\mu}, x^{\nu}] = i\kappa M^{\mu\nu} \tag{2.18}$$

Avec : k est un paramètre réel

$M^{\mu\nu}$ sont les générateurs du groupe de Lorentz

Il a pu démontrer directement la possibilité d'une discrétisation de la structure de l'espace-temps ($\kappa = 0$) au niveau microscopique tout en respectant la covariance relativiste de Lorentz et indirectement la nécessité d'envisager une structure non commutative de l'espace-temps à l'échelle de Planck. Ainsi a été introduite la notion d'espaces quantiques ou espaces à coordonnées déformées qui sont essentiellement des espaces non commutatifs.

2− La mise en évidence d'une limite minimale sur la continuité de la structure de l'espace des phases qui définit par le principe d'**Heisenberg** (le principe d'incertitude). Par conséquent, tout formulation de la mécanique quantique sur l'espace des phases est contrainte de respecter est suivez ce principe fondamentale. Cette tâche a été entreprise, en tenant compte de l'aspect probabiliste et statistique de la mécanique quantique par **H.Weyl** en 1927 puis développé e successivement par **E. Wigner**, **H. Groenewold** et **J. Moral**. Ces recherches ont conduit à des résultats les plus importantes en lien avec la géométrie non commutative qui dit : la quantification des fonctions décrivant des grandeurs physiques sur l'espace des phases est équivalente au remplacement du produit ordinaire entre les fonctions par un produit non commutatif noté « $*$ ». Ce produit appelé par la suite produit étoile de Moyal, a été travaillé sur l'espace euclidien pour exprimer la non commutativité des coordonnées.(Il a ainsi donné naissance à ce qu'on appelle aujourd'hui l'espace non commutatif de Moyal).[[20]]

3− La généralisation de la représentation matricielle d'**Heisenberg** a conduit à la notion d'observables. Ces dernières sont essentiellement des opérateurs hermitiens, agissant

sur l'espace de Hilbert et associés à des grandeurs physiques mesurables. En 1929, **J. Von Neumann** a mis en évidence l'existence d'une structure algébrique liée à ces observables. Cette algèbre d'opérateurs hermitiens est appelée $W*-$**algèbre**, elle sera par la suite nommée en son honneur. L'apport de Von Neumann fut crucial aussi bien pour la formulation algébrique la mécanique quantique, et pour le développement mathématique de la théorie des algèbres elle-même.[[20]]

Chapitre 3

Mecanique Analytique non commutative

Nous allons étudier dans ce chapitre la construction de la mécanique analytique non commutative à partir de la limite classique de la mécanique quantique non commutative sur l'espace des phases et nous allons déduire l'équation dynamique classique dans le cas non-commutative.

3.1 Limite classique de la mécanique quantique non commutative

Soit $\hat{x}_i, \hat{p}_j$ les opérateurs de position et de quantité de mouvement qui génèrent l'algèbre de **Heisenberg** de mécanique quantique :

$$\begin{aligned} [\hat{x}_i, \hat{x}_j] &= 0, \\ [\hat{x}_i, \hat{p}_j] &= i\hbar\delta_{ij}1, \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_j] &= 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Où la dynamique est décrite par les équations canoniques :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= [x_i, H], \\ \dot{p}_i &= [p_i, H] \end{aligned} \tag{3.2}$$

avec H l'opérateur Hamiltonien du système quantique décrit sur l'espace des phases.

Le produit $*_a$ ci-dessus nous permet de déduire d'algèbre de Heisenberg déformée qui définit la mécanique quantique non commutative général

$$\begin{aligned} [x_i, x_j]_\alpha &= i\hbar\theta_{ij}1 \\ [x_i, p_j]_\alpha &= i\hbar(\delta_{ij} + \sigma_{ij})1 \\ [p_i, p_j]_\alpha &= i\hbar\beta_{ij}1 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Passant par une quantification de Dirac généralisée :

$$\{,\}_\alpha = \frac{1}{i\hbar}[,]_\alpha \tag{3.4}$$

Et avec une dynamique quantique non commutative régie par les équations du mouvement :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= [x_i, H]_\alpha \\ \dot{p}_i &= [p_i, H]_\alpha \end{aligned} \tag{3.5}$$

Ici, nous soutenons qu'en introduisant une non-commutativité paramétrée par θ sur le secteur spatial de « QPS », nous introduisons automatiquement une non-commutativité paramétrée par un autre paramètre, disons β, sur le secteur de quantité de mouvement de « QPS », puisqu'ils sont liés par les relations d'incertitudes de Heisenberg, puis, le paramètre σ qui apparaît dans *étoile*-commutateur d'un opérateur spatial avec un opérateur impulsion

doit être lié aux deux paramètres θ et β. Ci-dessous, nous allons donner une explication plus précise à ce point.

Considérons une transformation linéaire générale sur les variables de l'espace des phases quantiques :

$$\begin{aligned} x_i' &= a_{ik}x_k + b_{ik}p_k \\ p_i' &= c_{ik}x_k + d_{ik}p_k \end{aligned} \tag{3.6}$$

On remarque que pour le choix particulier suivant des paramètres matriciels a, b, c et d:

$$\begin{aligned} a &= d = 1 \\ c &= \frac{1}{2}\beta \\ b &= \frac{1}{2}\theta \end{aligned} \tag{3.7}$$

les nouvelles variables quantiques x_i' et p_i' et:

$$\begin{pmatrix} x_i' \\ p_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{ik} & -\frac{1}{2}\theta_{ik} \\ \frac{1}{2}\beta_{ik} & \delta_{ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ p_k \end{pmatrix} = T_{ik} \begin{pmatrix} x_k \\ p_k \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

ou, d'une autre manière

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \vec{x} - \frac{1}{2}\vec{p} \wedge \vec{\theta} = \vec{x} - \frac{1}{2}\vec{p}\theta \\ \vec{p}' &= \vec{p} + \frac{1}{2}\vec{x} \wedge \vec{\beta} = \vec{p} + \frac{1}{2}\vec{x}\beta \end{aligned} \tag{3.9}$$

satisfaire des relations de commutation qui ressemblent à 3.3 :

$$\left[x'_i, x'_j\right] = i\hbar\theta_{ij}1 \tag{3.10}$$

$$\left[x'_i, p'_j\right] = i\hbar(\delta_{ij} + \sigma_{ij})1 \tag{3.11}$$

$$\left[p'_i, p'_j\right] = i\hbar\beta_{ij}1 \tag{3.12}$$

et σ sigma satisfaire cette condition :

$$\sigma = -\frac{1}{8}(\theta\beta + \beta\theta) \tag{3.13}$$

Et donc, il peut être ignoré puisque nous sommes intéressés par les termes du premier ordre on θ et β.

Ensuite, au lieu d'utiliser des variables quantiques avec le produit $*_\alpha$, il est plus approprié d'utiliser les variables quantiques transformées (x'_i, p'_i) avec le produit opérateur habituel. [12]

En étudiant la transformation 3.8, nous voyons que son Jacobien est donné par:

$$J = \det(T) = (1 + \frac{1}{8}\rho)^2 \neq 0 \tag{3.14}$$

Où:

$$\rho = tr(\theta, \beta) = tr(\beta, \theta) = -2\vec{\theta}.\vec{\beta} \tag{3.15}$$

En imposant à J d'être égal à 1, le paramètre ρ est contraint de remplir la condition suivante :

$$\rho = -16 \Longrightarrow \vec{\theta}.\vec{\beta} = 8 \tag{3.16}$$

A partir des relations 3.10, nous voyons que la dimension de θ_i, est la même que $(\frac{(\triangle x_i)^2}{\hbar})$ et la dimension de β_i, comme $(\frac{(\triangle p_i)^2}{\hbar})$ et alors la condition ci-dessus ressemble à l'incertitude de Heisenberg:

$$\triangle x_i . \triangle p_i \geq \hbar \tag{3.17}$$

Il s'ensuit que la perturbation non commutative au long des type espaces et moments doit vérifier le même type de relations d'incertitude que les opérateurs de position et de moment. Le membre de droite de l'équation 3.16 donne en fait la borne inférieure du produit des deux paramètres θ et β De plus, imposant à la transformation matricielle T d'être orthogonale :

$$TT^t = T^tT = 1 \tag{3.18}$$

On en déduit que les paramètres de déformation θ_i, dans le secteur de type spatial de l'espace des phases quantique sont de même **"amplitude"**, à un facteur de dimension près dépendant du système physique étudié, que le paramètre de déformation β_i dans le secteur d'impulsion est :

$$\theta_i \sim -\beta_i \tag{3.19}$$

En effet, cette transformation orthogonale spéciale sur l'espace des phases quantique exprime que, si l'on introduit une non-commutativité comme une perturbation sur le genre d'espace secteur de l'espace des phases quantique, ceci conduit automatiquement à introduire une non-commutativité comme une perturbation équivalente opposée sur le secteur de genre d'implusion. En fait, T ressemble à une transformation infinitésimale sur l'espace des phases quantique:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

Pour décrire un espace des phases non commutatif, les relations de commutation dans l'équation 3.10 devrait être modifié comme suit :

$$
\begin{aligned}
[\hat{x}_i, \hat{x}_j] &= i\hbar\theta_{ij} \\
[\hat{p}_i, \hat{p}_j] &= i\hbar\eta_{ij} \\
[\hat{x}_i, \hat{p}_j] &= \hbar_{eff}\delta_{ij} \qquad i,j = 1,2 \\
\hbar_{eff} &= \hbar(1+\xi), \qquad \xi = \frac{Tr\left[\theta\eta\right]}{4\hbar^2}
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

Où θ_{ij} ,η_{ij} sont des éléments matriciels réels et antisymétriques, représentant respectivement la non-commutativité des coordonnées et des impulsions.

Dans le cadre de la « Quantification par déformation », [22], il a été montré que cet opérateur algèbrique est équivalent au remplacement du produit ordinaire entre les observables quantiques par le produit non-commutative $*_\hbar$ entre leurs équivalents classiques

$$
\hat{f}.\hat{g} \equiv \left(f *_\hbar g\right)(u) = \exp\left[\frac{i\hbar}{2}\omega^{ab}\partial_a^{(1)}\partial_b^{(2)}\right] f(u_1)g(u_2) \mid_{u_1=u_2=u} \tag{3.22}
$$

Où u_a sont des variables d'espace de phase, $a = 1, ..., 2N$, et ω est la structure symplectique.

Un espace non commutatif peut être réalisé par des opérateurs de coordonnées satisfaisant :

$$
[x_\mu, x_\nu] = i\hbar\theta_{\mu\nu} \tag{3.23}
$$

où est le paramètre θ de non-commutativité représenté par une matrice antisymétrique comme nous définie dans le chapitre précédent.[12]

Dans la limite classique le commutateur de mécanique quantique est remplacé par cette crochet de Poisson :

$$
\frac{1}{i\hbar}\left[\hat{A}, \hat{B}\right] \longrightarrow \left\{\hat{A}, \hat{B}\right\} \tag{3.24}
$$

Considérons une déformation générale à travers le produit non commutative $*_\alpha$ sur l'algèbre

de Poisson des observables classiques

$$(f *_\alpha g)(u) = \exp\left[\frac{i\hbar}{2}\alpha^{ab}\partial_a^{(1)}\partial_b^{(2)}\right] f(u_1)g(u_2) \mid_{u_1=u_2=u} \tag{3.25}$$

où α généralise la structure symplectique classique usuelle sa forme générale peut être donnée par :

$$\alpha = \begin{pmatrix} \theta & 1+\sigma \\ 1-\sigma & \beta \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

où θ et β sont des matrices 3×3 antisymétriques et σ une matrice 3×3 symétrique, telles que :

$$\begin{aligned} \theta_{ij} &= \varepsilon_{ij}^k \theta_k \\ \beta_{ij} &= \varepsilon_{ij}^k \beta_k \end{aligned} \tag{3.27}$$

L'algèbre de Poisson déformée en $\alpha - \textit{étoile}$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \{x_i, x_j\}_\alpha &= \theta_{ij} \\ \{x_i, p_j\}_\alpha &= \delta_{ij} + \sigma_{ij} \\ \{p_i, p_j\}_\alpha &= \beta_{ij} \end{aligned} \tag{3.28}$$

Il est facile de voir que la limite commutative correspond à $\theta = \beta = \sigma = 0$.

Considérant la non-commutativité comme une petite perturbation sur la structure de l'espace des phases, les paramètres réels θ_i et β_i, et sont pris très petits et nos calculs sont pris au premier ordre on θ et β. Nous verrons que σ peut être ignoré puisqu'il est de second ordre.

3.2 Loi de Newton sur l'espace non commutative

Dans la discussion suivante, $\tilde{F}$ désigne les variables dans l'espace des phases non commutatif afin de les distinguer des variables F dans l'espace commutatif. Notant ξ qu'il est du second ordre sur les paramètres non commutatifs θ et η, (soit $\xi \lll 1$), la limite classique de l'Equation. 3.21 est :

$$\begin{aligned} \{\tilde{x}_i, \tilde{x}_j\} &= \theta_{ij} \\ \{\tilde{x}_i, \tilde{p}_j\} &= \delta_{ij} \\ \{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\} &= \eta_{ij} \end{aligned} \tag{3.29}$$

Comme mentionné dans les Référence. [11], les crochets de Poisson doivent posséder les mêmes propriétés que les commutateurs de mécanique quantique ; à savoir, ils doivent être bilinéaires, antisymétriques, satisfaire aux règles de Leibniz et à l'identité de Jacobi. La forme générale des crochets de Poisson pour cette version déformée de la mécanique classique peut être redéfinie comme :

$$\left\{\hat{A}, \hat{B}\right\} = \left(\frac{\partial A}{\partial x_i}\frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial x_j}\right)\{x_i, p_j\} + \frac{\partial A}{\partial x_i}\frac{\partial B}{\partial x_j}\{x_i, x_j\} + \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial p_j}\{p_i, p_j\} \tag{3.30}$$

En substituant l'équation 3.29. Dans l'Équation 3.30.

Les crochets de Poisson peuvent s'écrire comme suit :

$$\left\{\hat{A}, \hat{B}\right\} = \left(\frac{\partial A}{\partial x_i}\frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial A}{\partial x_i}\frac{\partial B}{\partial x_j}\theta_{ij} + \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial p_j}\eta_{ij} \tag{3.31}$$

Considérons maintenant un Hamiltonien bidimensionnel de la forme :

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + V(x_1, x_2) \tag{3.32}$$

Les équations du mouvement correspondant à cette structure symplectique sont données

par

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \{x_i, H\} = \frac{p_i}{m} + \theta_{ij}\frac{\partial V}{\partial x_j} \\ \dot{p}_i &= \{p_i, H\} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \eta_{ij}\dot{x}_j \end{aligned} \tag{3.33}$$

Qui peut s'écrire comme:

$$m\ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \eta_{ij}\dot{x}_j + \theta_{ij}m\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial x_j}\right) \qquad i = 1, 2. \tag{3.34}$$

cette forme d'équation dynamique est concidérée comme la loi de Newton sur l'espace non commutative, le deuxième terme de l'équation. 3.34 est une correction non-commutative à l'impulsion du système alors que le troisième terme est une correction non-commutative à sa position. Ces nouveaux termes dépendent des facteurs de non-commutativité θ_{ij} et η_{ij}, mais aussi de la variation du potentiel. Les champs externes produisent une perturbation dans l'espace, induisant ainsi des nouvelles forces non conservatives.

Chapitre 4

Applications de la mécanique analytique dans l'espace non commutative

Commençons par étudier le cas général d'un système quantique avec un opérateur Hamiltonien :

$$H(\vec{x},\vec{p}) = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{x}) \tag{4.1}$$

Où $\vec{x}$ et $\vec{p}$ satisfont (3.1). Sa dynamique quantique est régie par l'équation du mouvement (3.2). Nous avons montré que l'étude de ce système quantique sur un espace des phases non-commutative où les opérateurs de position et de quantité de mouvement obéissent aux relations de commutation non triviales (3.3) équivaut à l'étudier sur l'espace des phases quantique habituel soumis à la transformation (3.8), où la nouvelle position et la nouvelle quantité de mouvement les opérateurs $x\prime$ et $p\prime$ obéissent aux relations de commutation (3.10). Dans ce contexte, l'opérateur Hamiltonien varie comme:

$$\triangle H = H(\vec{x}',\vec{p}') - H(\vec{x},\vec{p}) = -\frac{1}{2m}\beta_{ik}x_i p_k + [V(\vec{x}') - V(\vec{x})] = -\frac{1}{2m}\vec{L}.\vec{\beta} + \triangle V \tag{4.2}$$

où $L = \vec{x} \wedge \vec{p}$ est le moment cinétique du système quantique. Il est clair qu'il existe un terme de correction $\triangle E_{NC}$ au spectre d'énergie de notre système dynamique quantique en raison de la présence de non-commutativité dans l'espace des phases quantique reflétée par les deux termes supplémentaires du côté droit de l'équation (4.2).

4.1 Equation du mouvement d'un oscillateur harmonique en espace des phases non commutative

Le modèle d'oscillateur harmonique joue un rôle important non seulement en mécanique classique, mais aussi en mécanique quantique non commutative. Il a fait l'objet de nombreuses enquêtes !. Afin de prouver l'exactitude des parenthèses de Poisson redéfinies et de nouvelles corrections de la deuxième loi de Newton, prenons l'oscillateur harmonique bidimensionnel comme exempe:

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}k \sum_{i=1}^{2} x_i^2 \tag{4.3}$$

La substitution de l'équation. 4.3 dans l'équation. 3.34 donne

$$m\ddot{x}_i = -kx_i + \eta_{ij}\dot{x}_j + \theta_{ij}mk\dot{x}_j \tag{4.4}$$

C'est la nouvelle deuxième loi de Newton pour l'oscillateur harmonique. Le premier terme de droite de l'équation. 4.4 est l'élasticité, les deuxième et troisième termes sont les analogues de la force d'amortissement due à la non-commutativité des impulsions et des coordonnées respectivement.

Il convient de noter que l'Equation 4.4. montrent tous les deux des corrélations entre différents degrés de liberté, c'est-à-dire que le degré de liberté d'accélération i est corrélé avec le degré de liberté de vitesse j dans l'espace des phases non commutatif, et cette corrélation dépend de paramètres non commutatifs.

Enfin, afin de prouver l'exactitude des crochets de Poisson redéfinis et de la deuxième

loi modifiée de Newton, nous allons résoudre l'équation du mouvement de l'oscillateur harmonique par des transformations linéaires [5] dans l'espace des phases non commutatif.

L'Hamiltonien d'un oscillateur harmonique dans l'espace des phases non commutatif a la forme suivante :

$$H = \frac{1}{2m}(\tilde{p_1^2} + \tilde{p_2^2}) + V(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \tag{4.5}$$

Où les variables d'espace des phases non commutatives $\{\tilde{x}_1, \tilde{p}_1, \tilde{x}_2, \tilde{p}_2\}$ satisfont les relations de commutation de l'Equation. 3.29.

Selon Réf. [5], une manière possible d'implémenter l'algèbre de l'Equation. 3.29 Consiste à construire les variables non commutatives $\{\tilde{x}_1, \tilde{p}_1, \tilde{x}_2, \tilde{p}_2\}$ à partir des variables commutatives $\{x_1, p_1, x_2, p_2\}$ au moyen des transformations linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i &= x_i - \frac{1}{2}\theta_{ij}p_j \\ \tilde{p}_i &= p_i + \frac{1}{2}\eta_{ij}x_j \end{aligned} \tag{4.6}$$

La substitution de l'Equaion. 4.6 en 4.5 donne :

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + \eta x_1 p_2 - \eta x_2 p_1) + \frac{1}{2m}(x_1^2 + x_2^2 + \theta x_1 p_2 - \theta x_2 p_1) \tag{4.7}$$

où les variables commutatives $\{x_1, p_1, x_2, p_2\}$ satisfont aux relations de commutation usuelles :

$$\begin{aligned} \{x_i, x_j\} &= 0 \\ \{x_i, p_j\} &= \delta_{ij} \\ \{p_i, p_j\} &= 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Les équations du mouvement de l'oscillateur harmonique sont données par

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \{x_1, H\} = \frac{p_1}{m} + \frac{1}{2m}\eta x_2 + \frac{1}{2}k\theta x_2 \\ \dot{p}_1 &= \{p_1, H\} = -kx_1 + \frac{1}{2}\eta \dot{x}_2 + \frac{1}{2}k\theta m\dot{x}_2 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Cela peut s'écrire comme

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 + \eta\dot{x}_2 + \theta km\dot{x}_2 \tag{4.10}$$

et similaire

$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 - \eta\dot{x}_1 - \theta km\dot{x}_1 \tag{4.11}$$

L'équation.4.10 peut également être obtenu à partir de l'équation. 4.4 en prenant $i = 1$ et Équation 3.34 en prenant $i = 2$. Il est évident que l'équation du mouvement obtenue par la deuxième méthode est cohérente avec celle obtenue par la deuxième loi modifiée de Newton. Ainsi nous avons montré que les crochets de Poisson ainsi redéfinis et les nouvelles corrections à la seconde loi de Newton sont correctes en non espace des phases commutatif.

4.2 Champ central

Dans le cas d'un potentiel central $V(x) = V(r)$ la correction de la deuxième loi de Newton peut être écrite sous une forme plus suggestive. Considérons le tenseur $\theta^{ij} = \varepsilon^{ijk}\theta^k$, qui a été utilisé pour étudier les systèmes non commutatifs au niveau de la mécanique quantique [6]. Alors, pour le cas de potentiel central, les impulsions, définies par l'équation 3.33de la forme

$$p^i = m\dot{x}^i + m\varepsilon^{ijk}\Omega_j x_k \quad \text{avec: } \Omega_j = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\theta_j \tag{4.12}$$

Cette équation représente les moments d'une particule vue d'un système non inertiel avec Ω_j la vitesse angulaire ; [8]. L'équation 3.34 pour le cas que nous considérons est donnée par

:

$$m\ddot{x}^i = -\frac{x^i}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + m\varepsilon^{ijk}\dot{x}_j\Omega_k + m\varepsilon^{ijk}x_j\dot{\Omega}_k \tag{4.13}$$

Le deuxième terme du membre de droite de cette équation est l'analogue d'une force d'inertie produite par la non-uniformité de la rotation, tandis que le troisième c'est la force de Coriolis provoquée par la même rotation. Les termes de correction cassent clairement l'invariance rotationnelle sous le champ central.

Considérons maintenant deux exemples de champ central. Considérons d'abord le potentiel d'un oscillateur harmonique tridimensionnel $V(r) = \frac{\omega^2}{2}r^2$. Afin de simplifier les calculs prendre $\theta_i = \delta_{i3}\theta$. Alors

$$m\ddot{x}^i = -\omega^2 x^i + m\omega^2\theta\varepsilon^{ijk}\dot{x}_j \tag{4.14}$$

Par le théorème de Larmor, nous pouvons voir comment la perturbation dans l'espace, causée par le potentiel externe, produit une sorte de champ magnétique constant dans la direction du vecteur θ_i. L'équation 4.14 a une solution bien connue : sur l'axe x_3 on a des oscillations de fréquence ω, alors que dans le plan perpendiculaire à cet axe la fréquence des oscillations au premier ordre en θ a la forme $\omega_\theta = \omega(1 \pm \frac{\theta m\omega}{2})$. Cette situation est similaire au cas quantique [9].

Dans le cas du potentiel de Kepler $V(r) = \frac{\alpha}{r}$, la vitesse angulaire prend la forme

$$\Omega_i = -\frac{\alpha}{r^3}\theta_i$$

et les équations du mouvement sont données par

$$m\ddot{x}^i = \frac{x^i}{r}\frac{\alpha}{r^2} - \frac{\alpha}{r^3}m\varepsilon^{ijk}\dot{x}_j\Omega_k + m\varepsilon^{ijk}x_j\dot{\Omega}_k \tag{4.15}$$

En notant la dépendance r de la vitesse angulaire, nous voyons que la force de **Coriolis** résultante est analogue à celle produite par un champ gravitationnel d'un objet en rotation massif , où le vecteur θ_i, joue un rôle similaire aux moments angulaires de l'objet, alors que

la dernière correction peut être vue comme une force produite par une rotation non uniforme de celui-ci [10]. Une analyse perturbative de 4.15 a été obtenue très récemment dans[11].

En utilisant l'équation du mouvement 4.15, nous pouvons voir que les moments angulaires $L^i = m\varepsilon^{ijk}x_j x_k$ ne sont pas conservés. De plus, à partir de 3.29 il est possible de montrer qu'il ne génère pas de rotations. Néanmoins, nous pouvons construire par :

$$L_\theta = \theta^{ij}x_i p_j + \frac{1}{2}\theta^{ij}p_j\theta_{ik}p^k$$

Celui-ci génère les transformations :

$$\begin{aligned} \delta x_i &= \{x_i, L_\theta\} = \theta^{ik}x_k \\ \delta p_i &= \{p_i, L_\theta\} = -\theta_{ik}p^k \end{aligned} \tag{4.16}$$

Dans le cas du champ central, L_θ est conservé. De plus, nous pouvons générer des rotations dans les directions θ_i par remplaçant $\theta^{ij} = \theta\varepsilon^{ijk}\theta_k$dans les transformations 4.16 .

Notons que l'équation 4.15 est également correcte dans le cas où le paramètre non commutatif dépend des coordonnées. Par exemple, il n'y a pas de corrections aux équations du mouvement dans le cas classique de la sphère floue, où nous avons

$$\left\{x^i, x^j\right\} = \theta\varepsilon^{ijk}x_k \tag{4.17}$$

Au-delà de ce cas particulier, nous progressons actuellement dans cette direction.

4.3 L'Atome d'hydrogène

Cet exemple peut être traité de deux manières différentes. La première consiste à considérer ce système comme un système à une particule (Electron) dans un potentiel coulombien externe (Nucléus). Dans cette approche, on peut directement utiliser la relation (4.2) pour déduire la correction non commutative de l'Hamiltonien en injectant le potentiel :

$$V(x) = -\frac{Ze^2}{\sqrt{x_i x^i}} \tag{4.18}$$

La seconde méthode consiste à le considérer comme un système à deux particules dont le traitement est développé dans la sous-section précédente.

En utilisant la première méthode, nous trouvons que la variation du potentiel s'écrit :

$$\triangle V = -\frac{Ze^2}{2x^3}\vec{L}.\vec{\theta} = -\frac{e}{2}(\vec{\theta} \wedge \vec{p}).(\frac{-Ze\vec{x}}{x^3}) \tag{4.19}$$

Où $x = \sqrt{x_i x^i}$ puis, la correction non commutative de l'Hamiltonien est donnée par :

$$\triangle H = \frac{1}{2m}\left(\vec{\beta} \wedge \vec{p}\right).\vec{x} - \frac{e}{2}(\vec{\theta} \wedge \vec{p}).\left(\frac{-Ze\vec{x}}{x^3}\right) = -\frac{1}{2m}\vec{L}.\vec{\eta} \tag{4.20}$$

Avec :

$$\vec{\eta} = \vec{\beta} + \frac{mZe^2}{x^3}\vec{\theta}$$

Le premier terme de $\triangle H$ correspond à l'existence d'un champ magnétique déjà obtenu dans les cas précédents. Il s'agit d'un terme de correction cinétique. Le second qui vient comme un terme de correction potentiel ressemble à un terme de couplage spin-orbite où le moment de spin induit par la non-commutativité $\vec{S}$ est donné par :

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{\lambda_e^2}\vec{\theta}$$

Où λ_e est la longueur d'onde Compton habituelle de l'électron,[7].

En suivant la deuxième approche, nous devons d'abord calculer $\triangle V$:

$$\triangle V = -\frac{e}{2}(\vec{\theta} \wedge \vec{P}).(\frac{-Ze^2\vec{X}}{\vec{X}}) = \frac{-Ze^2}{2X^3}\vec{L}.\vec{\theta} \tag{4.21}$$

où $X = \sqrt{X_i X^i}$ et $\vec{L} = \vec{X} \wedge \vec{P}$.

Alors, la correction non-commutative de l'Hamiltonien est maintenant donnée par :

$$\triangle H = \left[\frac{1}{2m_b}\vec{L}^{(b)} - \frac{1}{2m_a}\vec{L}^{(a)}\right].\vec{\theta} - \frac{Ze^2}{2X^3}\vec{L}.\vec{\theta} \tag{4.22}$$

Il est facile de voir que ce résultat se réduit au précédent, si l'on considère le noyau (*particule*"b") comme localisé à l'origine et possédant une masse infinie. Enfin, en plus du changement de niveau d'énergie au niveau fondamental pour l'atome d'hydrogène obtenu en [7], il existe un autre terme qui prend en compte la non-commutativité dans le secteur de l'mpulsion de l'espace des phases non-commutative de telle sorte que :

$$\triangle E_{NC}^{H--atome} = -\frac{1}{2m}\left\langle \vec{L}.\vec{\eta}\right\rangle = -\frac{1}{2m}\left[\left\langle \vec{L}.\vec{\beta}\right\rangle + \left\langle \frac{Ze^2}{2X^3}\vec{L}.\vec{\theta}\right\rangle\right] \tag{4.23}$$

4.4 Particule libre

Dans le cas d'une particule libre quantique ($V(\vec{x}) = 0$), l'Hamiltonien se transforme comme (4.2) :

$$H'(\vec{x},\vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{1}{2m}\beta_{ik}x_i p_k = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{1}{2m}\vec{L}.\vec{\beta} \tag{4.24}$$

Où:

$$\vec{p}' = \vec{p} + \frac{1}{2}(\vec{x}\wedge\vec{\beta}) \tag{4.25}$$

Ceci montre que l'étude de la dynamique d'une particule sur un espace des phases quantique non-commutative est équivalente à l'étude de la dynamique de cette particule de charge q sur l'espace des phases habituel en présence d'un champ magnétique. Cette interprétation est justifiée par l'identification du terme supplémentaire en (4.25) comme un potentiel vecteur $\vec{A}$ associé à un champ magnétique $\vec{B}$:

$$q\vec{A} = -\frac{1}{2}(\vec{x}\wedge\vec{\beta}) \qquad / \ \vec{\beta} = q\vec{B} \tag{4.26}$$

Considérant le cas simple $\beta 1 = \beta 2 = 0$ et $\beta 3 = \beta = qB$, et définissant par :

$$z = \sqrt{\frac{|\beta|}{2\hbar}}(x + iy)$$

Et les opérateurs d'annihilation et de création :

$$a = \partial_{\bar{z}} + \frac{1}{2}z \qquad , \qquad a^{+} = \partial_{z} + \frac{1}{2}\bar{z} \tag{4.27}$$

On constate que notre particule quantique ressemble à un système oscillateur harmonique :

$$\begin{aligned} [a, a] &= \left[a^{+}, a^{+}\right] = 0 \\ \left[a, a^{+}\right] &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

Avec l'opérateur Hamiltonien:

$$H(a, a+) = \hbar\omega_{\beta}(a^{+}a + \frac{1}{2}\mathbf{1}) \tag{4.28}$$

Nous donnant un spectre formé par des niveaux de Landau dégénérés infinis :

$$E_t = \hbar\omega_{\beta}(l + \frac{1}{2}) \qquad ,l \in Z$$

Où $\omega_{\beta} = \frac{|\beta|}{m} = \frac{|qB|}{m}$ est la fréquence de Larmor.

Enfin, nous concluons qu'en introduisant une non-commutativité sur l'espace des phases quantique, la partie quantique libre se comporte comme un oscillateur harmonique avec une fréquence (très petite) dépendant de la perturbation non-commutative β sur l'impulsion.

Conclusion

Nous avons vu dans ce mémoir la formulation de la mécanique analytique non commutative comme résultat de la limite classique de la mécanique quantique non commutative. L'étude sur l'espace des phases signifie principaleemnt qu'on a utilisé le formalisme d'Hamilton dans notre étude où les variables dynamiques sont les coordonnées généralisées et les impultions.

Nous avons revu brièvement dans ce mémoir les notions de base de la mécanique analytique et de la géometrie non commutative. Nous avons présenté la méthode de construction de la mécanique analytique non commutative à travers la modification de la dynamique des crochets de Poisson qui jouent le rôle des commutateurs de la mécanique quantique. Nous avons à la fin appliqué ces résltats pour l'étude de certains systèmes physiques simples tel que l'oscillateur harmonique pour voir comment les équations dynamiques du mouvement sont modifiée par la non commutativité sur l'espace de phase.

Nous avons souhaiter aller plus loin dans le calcul, dans la discussion des résultats et dans l'étude des conséquence de la modification du formalisme de la mécaniqe analytique sur les autres branches de la physique, mais faute de temps nous n'avons pas pu réaliser cet objectif. Nous espérons que des sujets futures seront proposés sur le même thème pour remédier à cette situation.

Bibliographie

[1] mécanique analytique F. Mila et P.de Los Rios

[2] Amiot, P., and L. Marleau. "Mécanique Classique II." Département de physique, de génie physique et d'optique. Université de Laval, Québec, Canada (2002).

[3] Ferreira, Jonathan. "Cours de mécanique analytique." Licence et Magistère de Physique Université Joseph Fourier (2008).

[4] Amiot, P., and L. Marleau. "Mécanique Classique II." Département de physique, de génie physique et d'optique. Université de Laval, Québec, Canada (2019).

[5] bertolami O, rosa J G phys. Rev D, 2005, 72 : 025010

[6] Chaichian, Masud, M. M. Sheikh-Jabbari, and A. Tureanu. "Comments on the hydrogen atom spectrum in the noncommutative space." arXiv preprint hep-th/0212259 (2002).

[7] Chaichian, Masud, M. M. Sheikh-Jabbari, and A. Tureanu. "Hydrogen atom spectrum and the Lamb shift in noncommutative QED." Physical Review Letters 86.13 (2001): 2716.

[8] Landau, L. D., and E. M. Lifshitz. "Fluid Mechanics. Pergamon Press, Oxford." Section 92, problem 2 (1959).

[9] Nair, V. P., and A. P. Polychronakos. "Quantum mechanics on the noncommutative plane and sphere." Physics Letters B 505.1-4 (2001): 267-274.

[10] Iorio, Lorenzo. "A gravitomagnetic effect on the orbit of a test body due to the Earth's variable angular momentum." International Journal of Modern Physics D 11.05 (2002): 781-787.

[11] Mirza, B., and M. Dehghani. "Noncommutative geometry and classical orbits of particles in a central force potential." Communications in Theoretical Physics 42.2 (2004): 183.

[12] Djemai, A. E. F., and H. Smail. "On quantum mechanics on noncommutative quantum phase space." Communications in Theoretical Physics 41.6 (2004): 837.

[13] Romero, Juan M., J. A. Santiago, and J. David Vergara. "Newton's second law in a non-commutative space." Physics Letters A 310.1 (2003): 9-12.

[14] Mirza, B., and M. Dehghani. "Noncommutative geometry and classical orbits of particles in a central force potential." Communications in Theoretical Physics 42.2 (2004): 183.

[15] Gao-Feng, Wei, et al. "Classical mechanics in non-commutative phase space." Chinese Physics C 32.5 (2008): 338.

[16] Szabo, Richard J. "Quantum field theory on noncommutative spaces." Physics Reports 378.4 (2003): 207-299.

[17] Rajotte, Jean-François. "Aspects de géométrie non commutative." (2005).

[18] Nair, V. P., and A. P. Polychronakos. "Quantum mechanics on the noncommutative plane and sphere." Physics Letters B 505.1-4 (2001): 267-274.

[19] Polychronakos, Alexios P. "Noncommutative Chern-Simons terms and the noncommutative vacuum." Journal of High Energy Physics 2000.11 (2000): 008.

[20] Bouchachia, Karim. Déformation de la théorie de Yukawa. Diss. 2018.

[21] Cohen-Tannoudji, Claude, Bernard Diu, and Franck Laloë. "BIBLIOGRAPHIE DES TOMES I ET II." Mécanique Quantique-Tome 2. EDP Sciences, 2021. 1565-1586.

[22] Moyal, José E. "Quantum mechanics as a statistical theory." Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 45. No. 1. Cambridge University Press, 1949.