République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université
De Médéa

Faculté des sciences et
de la technologie
Département de génie
mécanique

Mémoire de magistère

Spécialité : Génie Mécanique
Option : Energétique Numérique

Sujet

Développement d'un algorithme
de régularisation de maillage dans les problèmes
d'éléments finis bidimensionnels

Présenté par **BOUZAIR Mourad**

Soutenu le 28 février 2013 devant le jury d'examen :

Dr M.ANNOUN	Maître de conférences A U .de Médéa	Président
Pr M.TAHAR ABBES	Professeur U .de Chlef	Examinateur
Pr M.N.BOUAZIZ	Professeur U .de Médéa	Examinateur
Dr Dj. AMAR BOUZID	Maître de conférences A U .de Médéa	Rapporteur

Année universitaire : 2012-2013

Dédicace

Je dédie ce travail à :

Mes très chères mère et père,

A Ma chère femme Hayette pour son aide

et sa patience et à ma chère fille wissal.

A Mes frères : Ahmed, Toufik, Redhouane et Faiza,

Sabiha et Linda.

A Mohamed Nazim, Loubna, Iman et Nabil.

A la mémoire de mes grands parents et à ommi et à toute la famille.

M.B.

Remerciements

Je remercie avant tout Dieu d'avoir éclairé notre route et nous avoir donné la force, le courage, santé, sagesse et la volonté qui ont permis de réaliser ce travail..

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes respectueux remerciements à mon directeur de recherche, monsieur ***El Djilali AMAR BOUZID****, Maître de Conférences A, à l'université de Médéa qui a dirigé ce mémoire, merci pour ses conseils et ses orientations qui m'ont été précieux tout au long de ce travail.*

Merci également au président du jury monsieur ***Mohamed ANNOUN*** *Maître de Conférences A, à l'université de Médéa d'avoir accepté d'examiner ce travail et d'avoir présider le jury de ce mémoire.*

Je suis sensible à l'honneur que m'ont fait les membres de jury : monsieur ***Miloud TAHAR ABBES****, Professeur à l'université de Chlef et monsieur* ***Mohamed Nadjib BOUAZIZ****, Professeur à l'université de Médéa, d'avoir accepter de faire parti du jury et d'avoir accepté d'examiner le présent mémoire et m'enrichir de leurs remarques et critiques objectives et l'évaluation de ce mémoire ainsi que leur soutient moral et leurs encouragements, et pour leur déplacement et le temps qu'ils ont consacré à l'étude de ce document.*

Je suis très reconnaissant a mon ami monsieur ***Sofiane HAIRECHE****, enseignant à l'université de Médéa, ses conseils et son soutien mon beaucoup aider pour l'élaboration de ce travail.*

Je tiens aussi à remercier tous les enseignants qui ont assuré notre formation au cours de l'année théorique, messieurs : professeur ***Abd Ellah El Hadj****, docteur* ***Korichi****, docteur* ***Dekkar****, et tout nos profs, mes reconnaissances vont également à tout le personnel du département de Génie mécanique, université de Médéa, ainsi qu'a tous nos professeurs.*

*Je remercie très sincèrement mes anciens enseignants messieurs :**ABROUS,** et mes enseignants de la graduation de l'université de Blida,*

Je tien à remercier aussi mes collègues de travail en commençant par : Monsieur K. Halaoui , Monsieur M.Ben Salem, Monsieur M.Khalef, S.Kourta , R.Chaaban, S.Gallil, M.Tali, S.Azouzi, pour leurs aides inestimable à tout point de vue et leurs soutient réconfortant, qu'ils trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Il m'est particulièrement agréable de remercier Rachid Bakhti qui ma beaucoup aider, merci.

Il m'est particulièrement agréable de remercier toutes les personnes qui ont contribué de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à mes collègues de la promotion 2007/2008 et à tous ceux qui, par leurs travaux, leurs idées, leurs présentations, leurs collaborations, ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

Résumé :

Ce mémoire a été fait afin de surmonter les difficultés des maillage déformés, qui surviennent parfois dans des maillages effectués par des mailleurs, plusieurs éléments sont fortement distordus.

En raison de la relation non linéaire entre la charge et la déformation plusieurs incréments de charge doivent être envisagé afin de juger correctement le comportement en déformation du système étudier , et par nécessité de régénérer périodiquement le maillage entier, on utilisent le remaillage adaptatif par amélioration-h ou amélioration-p qui a des calculs plus lourds du au nombre de degrés de liberté, ou à l'augmentation des calculs dans chaque élément, et pour régler ce problème, on présente une approche qui se base essentiellement sur le déplacement physique des nœuds, en résolvant un problème d'optimisation et en réduisant au minimum une mesure de distorsion avec des applications.

Mots-clés : Génération de maillage, éléments finis, lissage et régularisation de maillage.

Abstract ;

This memory has been made to overcome the difficulties of mesh deformed, which lead naturally to meshes of finite elements strongly twisted,

Because of the nonlinear relationship between load and deformation several load increments should be considered in order to judge correctly the deformation behavior of the system studied, and need to periodically regenerate the entire mesh, engineers use the h-adaptive and P-adaptive remeshing improvement which has heavier calculations of the number of degrees of freedom, or the increase in each element calculations, and for resoling this problems, we present an approach that is mainly based on the physical movement of nodes, solving an optimization problem and minimizing a distortion measure in applications.

Keywords : Mesh generation, finites elements, smoothing and regularization meshs.

ملخص :

هذه المذكرة جاءت من أجل التغلب على الصعوبات التي تواجه التشوهات في التقسيمات، والتي تؤدي بطبيعة الحال إلى لا انسجام في العناصر المنتهية و التي تأثر بقوة في النتائج،

وبسبب العلاقة غير الخطية بين القوة المؤثرة و عدة زيادات تشوه ينبغي النظر في النظام للتحكم في سلوك التشوه بشكل صحيح من نظام الدراسة، وتحتاج إلى تجديد دوري لشبكة بأكملها، يستخدم المهندسون تحسين من نوع méthode h أو من نوع méthode P -الذي أثقل حسابات عدد من درجات الحرية، أو زيادة في حسابات كل عنصر، ومن أجل إجاد الحل لهذه الصعوبات نقدم هذا النموذج و البرنامج و هو يقوم أساسا على الحركة المادية للعقد، التحسين وتقليل التشويهللعنصر المنتهي و بعض التطبيقات

الكلمات المفتاحية:. التجديد الشبكي ،العناصر المنتهية، التحسين و التنظيم الشبكي,

Table des matières

Dédicace		i
Remercîments		i
Liste des nomenclatures		ii
Liste Des Figures		iii
Introduction		1
Chapitre I :	Génération et construction des maillages en éléments finis : Considérations générales.	6
I.1.	Introduction	7
I.2.	Analyse par éléments finis.	7
I.3.	Considérations pour la Génération de maillage.	13
I.3.a.	Définition d'un maillage géométrique	14
I.3.b.	Un bon maillage.	15
I.3.c.	Les conditions de maillage.	15
I.3.d.	Limitations d'élément.	17
I.3.e.	Déformation d'élément.	17
I.4.	Types d'éléments.	19
I.4.a.	Elément linéaire.	18
I.4.b.	Elément surfacique.	21
I.4.c.	Elément volumique.	22
I.5.	Méthode des éléments finis.	23
I.6	Maillage structurées et non structurées	24

I.7	Maillage hybrides	26
I.8	Méthodes de maillage	28
Chapitre II :	Des maillages et méthodes de lissage : synthèse bibliographique	31
II.1.	Introduction	32
II.2.	Procédures et simplification de maillage.	47
II.2.1	Procédure de lissage	47
II.2.2	Simplification géométrique de maillage	49
II.3	Méthodes de régularisation et lissage de maillage	50
II.3.1	Introduction	50
II.2.a.	la méthode d'établissement d'une moyenne.	51
	• Algorithme de lissage de Laplace.	51
II.2.b.	la méthode a base d'optimisation.	53
	• Algorithme de lissage de Gauss-Newton.	53
II.2.c.	la méthode a base physique.	60
	• Algorithme d'optimisation de Zhou et Shimada.	56
Chapitre III :	Lissage d'un maillage à base d'éléments triangulaires : Mise au point d'une approche itérative.	67
III.1	Introduction	68
III.2	Explication de la méthode	68
III.3	Les différentes équations	70
III.4	L'organigramme	74
III.5	Le Programme	75

Chapitre IV : Résultats et discussions. 89

Conclusion. 105

Perspectives et travaux futur. 107

Liste des nomenclatures

Symbole	*Quantité*	*Unité*
A	Surface d'un triangle	
A_i	domaine de la i-ième face (dans un tétraèdre A_i se trouve en face v_i, le i-ème-sommet)	
A	surfaces chargée	
A	Surface de la section droite	mm^2
A^{ϑ}	surface de l'élément	mm^2
$[B]$	matrice des déformations composée généralement des dérivées des fonctions de forme.	
$d(X,Y)$	la distance euclidienne usuelle	
E	module de YOUNG	MPa
e	Epaisseur	mm
{F}	sollicitations connues (second membre)	
G	Module de cisaillement	N/mm^2
H	Hauteur du triangle	mm
L	La base du triangle	mm
P,F	une charge linéique	N/mm
h	plus courte hauteur	
H	la plus longue hauteur	
[K]	matrice caractérisant le système	
l	Longueur du bord le plus court	m
L	Longueur du bord le plus long	m
l_i	Longueur du i'eième point	
$[N]$	matrice des fonctions d'interpolation nommées aussi fonctions de forme.	
N, N'	fonction de forme, la matrice des fonctions d'interpolation	
n	nombre de noeuds liés au noeud interne	
N_i	fonction de forme	
$\{p\}$	vecteur forces de volume	
$\{q\}$	vecteur forces de surface	
r	rayon du cercle inscrit du triangle	
R	rayon du cercle circonscrit d'un triangle	
S	Ensemble de nœuds	
T	La température	°C
{U}	variables inconnues du problème	

$u = (u^1, u^2, u^3)$	Les coordonnées dans l'espace paramétrique	m
V	volume d'un tétraèdre	
v_n^e	Coordonnées des nœuds	
v_e	le vecteur unitaire dans la direction	
V	volume de la structure	
v^{ϑ}	volume de l'élément	
$v_k(k)$	la normale unitaire à la surface au sommet *k*	
V	volume de la structure	
Z, ω	fonction d'une variable complexe	
y_{max}	La flèche maximale de la poutre	mm
x_i et y_i	les coordonnées du *i*e nœud de l'élément	m
$x=(x_1,x_2,x_3)$	Coordonnées dans l'espace physique	m
$y(\xi,\eta)$ et	les coordonnées d'un point de l'élément réel	m
$x(\xi,\eta)$		
x	Coordonnée axiale de tout point	
Ω	Le domaine de recherche des solutions	
Ω^e	Le sous-domaine de recherche	
θ	petit angle plane	
Θ	le plus grand angle plan	
ϕ	le plus petit angle solide	
Φ	le plus grand angle solide	
ψ	plus petit angle de dièdre	
ψ	plus grand angle de dièdre	
τ_2	triangle	
$\{\sigma\}$	vecteur contraintes	
$\{\varepsilon\}$	vecteur déformations	
$\{\delta\}$	vecteur déplacements	
$\{\delta^{\vartheta}\}$	vecteur de champ des déplacements nodaux de l'élément.	
Π^{ϑ}	l'énergie potentielle totale de l'élément ϑ	
σ	L'écart type de la distribution	
ξ et η	les coordonnées d'un point de l'élément de référence	m
ν	coefficient de Poisson	
λ	La conductivité thermique	W/m².°C

Liste des figures et tableaux

Figure 1.1.	Méthodologie de la méthode des éléments finis de mécanique des structures	9
Figure 1.2.	Comparaison des deux méthodes de résolution	10
Figure 1.3.	Elément linéique	19
Figure 1.4.	Des éléments finis en 1D , 2D et 3D	19
Figure 1.5.	Exemples d'éléments triangulaires	21
Figure 1.6.	(a) Elément triangulaire, (b,c) élément quadrilatéral.	21
Figure 1.7.	(a) Elément tétraèdre, (b) élément de prisme, (c) élément hexaèdrique	22
Figure 1.8.	Discrétisation du domaine : éléments nodales numérotés	23
Figure 1.9.	Exemple de maillage structuré	25
Figure 1.10.	Exemple de maillage non structurée	26
Figure 1.11.	Exemple de maillage hybride	27
Figure 1.12.	Des points representant le diagramme de voronoy	28
Figure 1.13.	La triangulation de Delaunoy	29
Figure 2.1.	(a) configuration initiale du maillage suivant une triangulation de Delaunay. (b) configuration déformée en foncé et rappel de la configuration initiale en gris (c) déconnection et (d) reconnections des nœuds suivant une triangulation de Delaunay. Yutaka Ohtake	34
Figure 2.2.	dessin des flux de matière illustrant les zones ou un maillage grossier suffit	35
Figure 2.3.	Sur la gauche des triangles dans une triangulation de points aléatoires à l'intérieur d'un rectangle et son lissage de Laplace sur la droite, respectivement	36
Figure 2.4.	exemple de maillage hybride avec des grilles en 3D et en 2D (a) régulier, (b) cartésien, (c) rectiligne, (d,e) curviligne	37
Figure 2.5.	Un graphe du temps de calcule en fonction du nombre d'éléments dans le maillage	39
Figure 2.6	maillage de qualité médiocre obtenu suite aux déformations excessives	40
Figure 2.7	Etapes générales avec a la fin évaluations des équations	41
Figure 2.8	méthode par arbre en 2D	42
Figure 2.9	méthode frontale en 2D	43

Figure 2.10	Illustration du lissage de Laplace	52
Figure 2.11	illustration de l'angle θ_{2i-1}, l'angle θ_{2i}.	61
Figure 2.12	La nouvelle position par l'algorythme de Zhau et Shimada	64
Figure 2.13.	Comparison entre les resultants obtenues après lissage et le maillage initiale:(a) maillage initial; (b) résultat du premier lissage; (c) résultat du lissage par algorithme modied ; (d) détails du maillage initile ; (e) détails du maillage obtenue après lissage par la méthode modied	65
Figure 3.1.	domaine d'influence du nœud *i* sur le maillage en deux dimensions	69
Figure 3.2.	montre un élément générer dans le domaine de l'influence pour le nœud *i*	69
Figure 3.3.	domaine d'influence du nœud *i* nœud de frontière	73
Figure 3.4.	la fenêtre d'exécution	77
Figure 3.5.	importer les coordonnées des Nœuds et les Afficher	78
Figure 3.6	la triangulation et l'affichage	78
Figure 3.7	La suppression des éléments en plus	79
Figure 3.8	affichage après suppression	79
Figure 3.9.	Après la régularisation du maillage et l'application de l'algorithme	80
Figure 4.1	fichier de résultats	83
Figure 4.2	fichier de résultats obtenus par un code mesh_2D	84
Figure 4.3	un exemple de géométrie complexe	85
Figure 4.4	Maillage généré par la triangulation et raffiner	85
Figure 4.5	Poutre encastrée avec une charge répartie constante	89
Figure 4.6	Poutre supportée aux extrémités sous l'effet d'une charge constante	90
Figure 4.7	Poutre encastrée soumise à une charge constante	92
Figure 4.8	une photos d'un four	95
Figure 4.9	une représentation en 2 D d'un four après une symétrie.	95
Figure 4.10	la distribution de la température nodale en utilisant l'élément triangulaires avec NN=15et NE=16	97
Figure 4.11	la distribution de la température nodale en utilisant l'élément triangulaires avec NN=45 et NE=64	98
Figure 4.12	le maillage avant la régularisation	102
Figure 4.13	representation des enciennes coordonnées	103
Figure 4.14	la triangulation et la nouvelle régularisation	103

Figure 4.15 représentation de la triangulation avant la régularisation 104
Figure 4.16 la nouvelle triangulation avec l'algorithme 104
Figure 4.17 represente la triangulation avant l'utilisation de l'algorithme. 105
Figure 4.18 la triangulation après l'utilisation de l'algorithme. 105

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1. quelques exemples des éléments en 2 D et en 3D. 49
Tableau 1.2. description des éléments par leurs numéros et les nœuds qui les entours 23
Tableau 2.1 Comparatif des méthodes de génération de maillage 44
Tableau 4. 1 les résultats de déplacements d'une poutre en acier soumise à une charge répartie constante qui utilise l'élément triangle 87
Tableau 4.2 Les résultats de déplacements d'une poutre en acier encastrée soumise à une charge répartie constante qui utilise l'élément triangulaire 88
Tableau 4.3 les résultats de déplacements d'une poutre en acier encastrée soumise à une charge constante qui utilise l'élément triangle 91
Tableau 4.4 comparaison de 2 élément (triangle) la variation de température en fonction de la distance y et x=0 93
Tableau 4.5 Distribution de la température T en °C Pour la distance y varie et x = 0 94
Tableau 4.6 Distribution de la température T en °C Pour la distance y varie et x = 0 99
Tableau 4.7 Distribution de la température T en °C Pour la distance y varie et x = 0 . 99
Tableau 4.8 Distribution de la température T en °C Pour la distance y varie et x = 0 100
Tableau 4.9 Distribution de la température T en °C Pour la distance y varie et x = 0 101

Introduction

CHAPITRE I

Génération et construction des maillages en éléments finis : Considérations générales

CHAPITRE II

Des maillages et des méthodes de lissage

CHAPITRE III

Lissage d'un maillage à base d'éléments triangulaires : Mise au point d'une approche itérative

CHAPITRE IV

Résultats et discussions

CONCLUSION

Introduction générale :

Dans de nombreuses applications issues de domaines industriels, scientifiques ou médicaux, il est souvent nécessaire d'utiliser des méthodes numériques pour aboutir à des résultats satisfaisantes a ces applications.

Les équations aux dérivées partielles (EDP) provenant de la modélisation de problèmes physiques très variés (mécanique du solide, thermique, chimie, électromagnétisme, aérodynamique et problèmes de mécanique des fluides, …) sont approchées numériquement par la méthode des éléments finis.

Cette méthode consiste à faire des calculs approchés du champ cherché (températures, déplacements, contraintes, pressions, vitesses, champs magnétiques, …) en certains points du domaine de définition du calcul associé au problème traité ; ces points de calcul sont des nœuds. Par la suite, il est possible de déduire de ces valeurs la solution en tout point du domaine, pour ce faire l'interpolation est utilisée.

La méthode des éléments finis est actuellement de plus en plus utilisée pour la simulation numérique dans de nombreux problèmes physiques. Elle nécessite, dans une première étape, la réalisation d'un maillage du domaine considéré.

Cette étape constitue une part importante de la simulation (en particulier en temps) et s'avère délicate quand il s'agit de traiter des géométries complexes. Par ailleurs, la qualité des résultats numériques de la simulation est fortement liée à la qualité du maillage support du calcul.

En plus, dans le domaine industriel, les maquettes numériques sont de plus en plus détaillées et les concepteurs proposent des versions toujours plus riches au fur et au mesure des projets.

Aussi il faut dire que les maillages sont largement répandus dans les applications graphiques en grande partie parce qu'ils permettent de représenter virtuellement tout type de géométrie et de topologie pour des surfaces de complexité quelconque [1].

Aujourd'hui, la construction d'algorithmes de maillages fait appel à un ensemble de disciplines scientifiques incluant notamment la géométrie euclidienne, différentielle, discrète….

Pour pouvoir utiliser une base de données numérique dans une application dans un temps réel il est nécessaire de la simplifier en diminuant la quantité de cette dernière, qui va certes influencer sur la qualité du maillage.

Les aspects de complexité d'algorithme est la minimisation des ressources mémoire et les problèmes engendré sont celles de la précision numérique qui doivent être pris en compte.

Par ailleurs, les contraintes exercées sur ces diffèrent maillages d'un domaine d'application à un autre sont le domaine de recherche actuel [2-4], dans pas mal de cas, les algorithmes de simplification de maillage montrent qu'ils sont conçus pour générer des niveaux de détails pour atteindre des résultats très acceptables.

Pour les simulations numériques, l'accent est mis sur la précision ainsi que sur le contrôle de la qualité des éléments. Un compromis est cherché entre le nombre de sommets (*i.e.,* le nombre de degrés de liberté) et la qualité de l'approximation géométrique de la surface, Et les maillages sont souvent considérés comme un format pratique d'échange de données.

Dans chaque domaine d'application, c'est l'utilisation finale du maillage qui guide les algorithmes et les simplifications en fonction des exigences et besoins de cette application à avoir une marge d'erreurs optimale [5].

La motivation principale de la régularisation et lissage de maillage est de créer un maillage optimal, et ceci représente une approximation précise de la géométrie pour une surface à l'aide d'un nombre réduit d'éléments réguliers (afin d'obtenir un maillage qui a une bonne qualité).

Le contrôle de la qualité en taille et en forme des éléments et la décimation de sommets sont deux exigences souvent contradictoires derrière le processus de la modification [6], de fait, pour préserver la géométrie de la surface.

La résolution des problèmes d'identification de champs de propriétés d'un domaine matériel est toujours une tâche délicate du fait qu'elles caractérisent cette classe de problèmes, le recours à divers moyens de régularisation ou lissage de maillage est généralement indispensable pour parvenir à aboutir à la résolution du problème étudié.

La régularisation et le lissage de maillage a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche, et ça depuis les années soixante, les articles de Winslow et al [7], et de Barlow J et al [8], qui ont utilisées les équations de poisson pour leurs modèles numériques pour chercher les solutions dans les cas des triangles non-uniformes, et ont utiliser la méthode des éléments finis et leurs approche étés par l'optimisation.

Les problèmes de grandes déformations mènent naturellement aux maillages d'éléments finis fortement déformé, si aucune procédure de régularisation et remaillage n'est appliquée.

En outre, en raison de la relation non linéaire entre la charge et la déformation, plusieurs incréments de charge doivent être envisagés afin de juger le comportement en déformation du système étudié. Ces deux aspect rendent les calculs par éléments finis non linéaires fortement exigeant.

L'analyse par éléments finis se base fondamentalement sur un maillage qui est habituellement produit en appliquant des algorithmes de génération de maillage. Pour obtenir des résultats

suffisamment précis le maillage doit être d'une haute qualité. Spécifiquement, il ne doit comprendre aucun élément mal formé, et doit se conformer aux exigences des conditions aux frontières du domaine analysé.

Par conséquent, la qualité du maillage est un aspect crucial pour le bon déroulement du processus numérique de la méthode. Ainsi il est nécessaire de développer un procédé qui optimise le maillage existant.

Ce processus doit pouvoir lisser et désembrouiller les éléments du maillage. Un certain nombre de méthodes de lissage et régularisation ont été proposées dans un chapitre, Ces méthodes incluent des approches pour produire des maillages de qualité acceptable.

Afin de surmonter les difficultés des maillages déformés, il est nécessaire de régénérer périodiquement le maillage entier, parmi les approches permettant de traiter les maillages, on cite le remaillage adaptatif. Ce dernier permet la simulation de grandes déformations sans aucune interposition de l'utilisateur.

Le remaillage adaptatif est habituellement effectué selon deux manières differentes, l'amélioration-h et l'amélioration-p.

Ce remaillage mène à des calculs plus lourds dus à l'augmentation du nombre de degrés de liberté, ou à l'augmentation des calculs dans chaque élément.

Dans les maillages, n'importe quel élément avec une largeur beaucoup plus petite que sa longueur est mal formée ainsi, un élément est mal formé s'il y-a au moins un sous petit angle [9]. Les deux types d'éléments malformés de triangle sont connus comme poignards et lames (qui vont être montré dans le chapitre III.

Il y a deux manières a la base pour atteindre ce but ;

- la technique de maquillage, est concentrée sur l'amélioration de la topologie de maillage,
- la régularisation et lissage de maillage, c'est l'amélioration de la forme des éléments en modifiant la position des nœuds intérieurs une fois que la topologie est fixe.

En plus, beaucoup de problèmes dans les Algorithmes de génération de maillage, il est nécessaire d'utiliser pour perfectionner la qualité afin d'amélioré le maillage globale.

L'intention particulière doit être donnée à l'algorithme de régularisation et comment il agit sur les éléments du maillage existant habituellement produits en appliquant des algorithmes de génération de maillage, pour obtenir des résultats plus précis.

Le processus doit pouvoir régulariser et lisser tous les éléments du maillage.

Au lieu de s'appuyer sur l'optimisation des algorithmes d'acquisition de données (ce qui constitue sans doute un autre champ de recherches prometteur), on s'intéresse ici aux méthodes d'optimisation de maillages par la méthode des éléments finis à partir du déplacement des nœuds

selon plusieurs propriétés, sans hypothèse sur la géométrie ou la topologie du domaine. Ceci étant posé.

Dans ce mémoire on présente une approche qui se base essentiellement sur le déplacement physique des nœuds, en résolvant un problème d'optimisation ou simplement en réduisant au minimum une mesure de distortion.

Dans le premier chapitre on présente l'approche pour générer des maillages géométriques. Dans le deuxième chapitre, on trouve brièvement des définitions de bases, pour la construction des maillages par la méthode des éléments finis, aussi la Considérations générales de reconstruction de surface pour des données discrètes.

Le chapitre 3, introduit une approche globale au lissage de maillage pour des surfaces géométrique à partir d'une triangulation (la triangulation de Delaunay) [10-13].

Au même chapitre, on détaille la stratégie adoptée pour différentes méthodes de régularisation de maillage, en prenant en compte des exigences relatifs à la taille et à la forme des éléments.

Dans le chapitre 4, on propose une nouvelle approche dans un algorithme qui va repositionner et faire le déplacement des nœuds avec des conditions précis affin d'avoir un maillage plus conforme, et le problème que nous cherchons plus particulièrement à résoudre concerne la régularisation des éléments males formés à l'aide d'une méthode de lissage du maillage existant et cela avec un passage successif de plusieurs itérations, la méthode utilisé est celle des éléments finis, on déduit le déplacement vertical et horizontale de chaque nœud de la surface du domaine étudier, cherchant toujours une meilleure précision possible.

Nous voulons à partir de ces données améliorer aux maximum les éléments et être en mesure d'avoir de bonnes résultats,

Afin de surmonter les difficultés des maillages déformés, il est nécessaire de régénérer périodiquement le maillage entier.

Parmi les approches permettant cela, on cite le remaillage adaptatif, qui permet la simulation pour les grandes déformations sans aucune interposition de l'utilisateur.

Il est habituellement effectué selon deux manières différentes, l'amélioration-h et l'amélioration-P, ce remaillage mène à des calculs lourds dus à l'augmentation du nombre de degrés de libertés, ou à l'augmentation de calculs dans chaque élément.

On va viser a partir de notre algorithme, la localisation et la création de nouvelles positions pour changer le maillage existant afin d'aboutir a notre but. Une approche qui se base essentiellement sur le déplacement physique des nœuds, en minimisant une distorsion métrique. Les résultats seront discutés dans le dernier chapitre.

Une amélioration dans les maillages qui nous mène à avoir des éléments de bonne qualité, cela va influencer sur les maillages qui ont des géométries complexes, ou on trouve beaucoup de difficultés et des erreurs de calculs.

Le développement cet algorithme qui utilise un processus itératif pour régulariser et améliorer les éléments mal formés, et qui ne va pas changer le nombre d'éléments mais seulement les positions des nœuds dans chaque élément.

I.1. Introduction :

Les modèles numériques sont employés partout pour simuler des phénomènes physiques courants. De plus, les prototypes virtuels sont un avenir prometteur puisqu'ils sont moins couteux et moins longs à traiter que des prototypes réels. Dans cette partie du travail on discutera sur les considérations générales de la génération de maillage.

I.2. Analyse par éléments finis :

La méthode des éléments finis à été mise au point et utilisée par les ingénieurs à partir des années 50. La méthode des éléments finis est une technique numérique qui, à partir de la forme variationnelle continue du problème étudié, permet d'écrire un système d'équations appelé forme variationnelle discrète. Les inconnues de ce système sont les degrés de liberté nodaux.

Dans la bibliographie plus de détails sur la méthode des éléments finis, on peut consulter déférents ouvrages [14,15].

Le comportement réel du système plaque sur fondation élastique est très complexe. Pour simplifié ce problème, différents modèles ont été développés par plusieurs chercheurs pou décrir un comportement de la fondation aussi proche que possible de la réalité.

Nous nous limitons à l'étude des milieux élastiques de type *WINKLER* pour lesquels la réaction du sole est normale à la plaque et proportionnelle au tassement de cette dernière. Ce modèle présente une simplicité pratique qui est d'ailleurs prouver par son utilisation fréquente dans de nombreux articles de recherche. [16,17].

Une structure sous la forme d'une plaque sera analysée par la méthode des éléments finis ou sera inclus les effets du cisaillement transversale. Plusieurs types d'éléments finis ont été introduits pour tester leurs convergences en tenant compte de leur ordre d'intégration numérique.

I.2.1 Procédure de discrétisation par éléments finis :

Dans le principe de base de la méthode des éléments finis, le milieu continu (structure) est discrétisé en sous domaines de forme relativement simple appelés « élément fini ».

Une approximation de solution (déplacement et /ou contrainte) est définie non pas pour l'ensemble de la structure mais pour chacun de ses éléments qui la constituent . les conditions de continuité de la solution

entre les éléments voisins (adjacents) ainsi que les conditions d'équilibre inter-éléments seront exprimées en se basant sur un choix approprié des coordonnées généralisées de paramètres physiques.

Il y a plusieurs sortes de formulations d'éléments finis.[18] :

1. Formulation Déplacements : le champ de déplacement est pris comme inconnue du problème. Le critère variationnel étant celui de l'énergie potentielle totale.

2. Formulation Contraintes : Le choix d'un champ de contraintes en équilibre est pris comme inconnue du problème. Le critère variationnel utilisé est celui de l'énergie potentielle complémentaire.

3. Formulations Hybrides : Dans ces formulations un champ de contraintes en équilibre à l'intérieur de l'élément est défini ainsi qu'un champ de déplacements sur la frontière de l'élément. Le critère variationnel utilisé est une variante de l'énergie potentielle complémentaire.

4. Formulations Mixtes : Dans ces formulations les deux champs de contraintes et de déplacements sont définis indépendamment. Le critère variationnel utilisé est alors généralement basé sur la fonctionnelle de *REISSNER*.

Les différentes formulations variationnelles. Les modèles élémentaires et les méthodes de résolution globale sont récapitulés sur le tableau (1.1) :

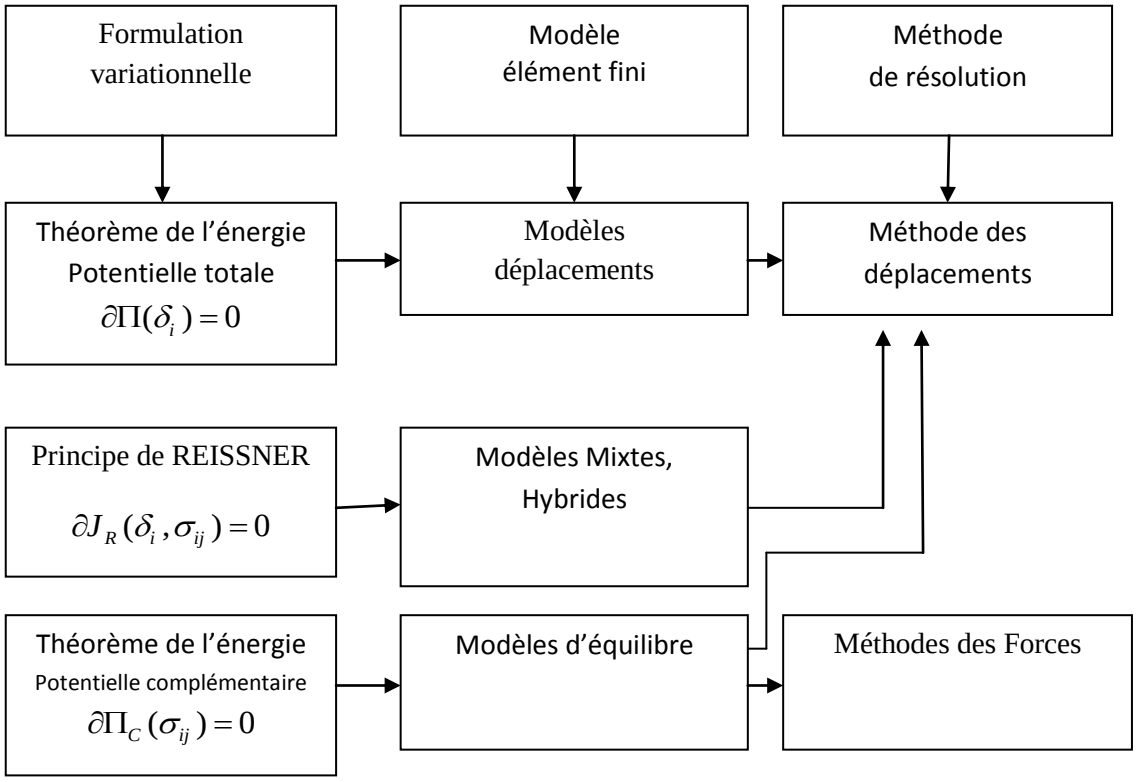


Figure (1.1) : Méthodologie de la méthode des éléments finis de mécanique des structures.

Les modèles ‘ contraintes’ sont rarement utilisés en pratique vu que leur principale intérêt réside dans une approche duale c'est-à-dire faisant appel aux modèles déplacements par une utilisation conjointe. Le comportement de l'élément est exprimé sous forme de relations matricielles ‘Forces-Déplacements’ aux nœuds. De plus, la méthode des déplacements est utilisée pour la résolution finale. Cette dernière se prête si bien au calcul automatique que la méthode des forces car la constitution du système linéaire est simple et la structure cinématiquement déterminée est unique. D'une manière qualitative, on peut avoir le diagramme de la figure (1.1),

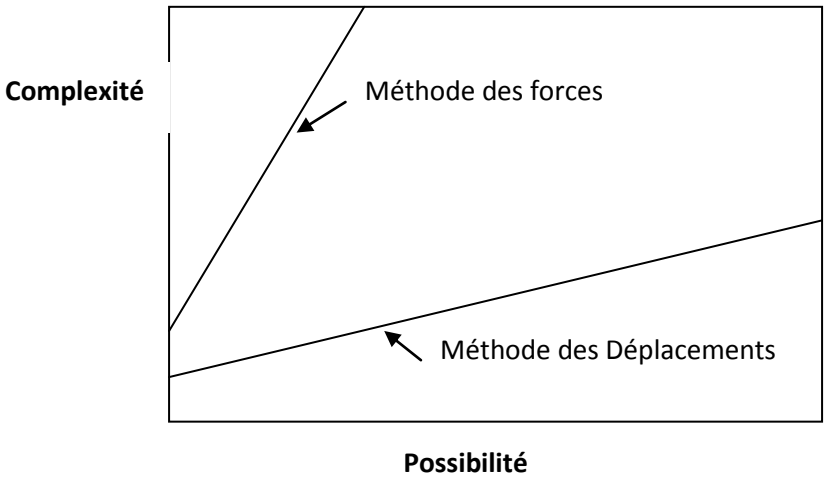


Figure (1.2) : Comparaison des deux méthodes de résolution.

Pour notre travail, on adoptera pour la formulation élémentaire le modèle déplacements et pour la méthode de résolution la méthode des déplacements.

I.2.2 Principe de l'énergie potentielle totale :

Dans les applications structurales et plus précisément dans les problèmes d'équilibre linéaire les équations d'équilibre peuvent être obtenues en utilisant une formulation variationnelle de type énergie potentielle totale. Elle peut avoir la forme suivante :

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_v \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dv - \int_v \{\delta\}^T \{p\} dv - \int_A \{\delta\}^T \{q\} dA \qquad (1.1)$$

Ou $\{\sigma\}$: vecteur contraintes

$\{\varepsilon\}$: vecteur déformations

$\{\delta\}$: vecteur déplacements

$\{p\}$: vecteur forces de volume

$\{q\}$: vecteur forces de surface

V : volume de la structure

A : surfaces chargée

Dans cette partie il ne traite que le cas 2D, ou il élimine de la relation (1.1) le deuxième terme qui caractérise la contribution du travail externe des forces de volume. La relation (1.1) devient :

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_{v} \{\sigma\}^{T} \{\varepsilon\} dv - \int_{A} \{\delta\}^{T} \{q\} dA \tag{1.2}$$

Le premier terme de la relation (1.2) correspond à l'énergie de déformation interne, tandis que le deuxième terme représente le travail des forces de surface imposées à la structure.

En utilisant la méthode des déplacements en éléments finis, le déplacement est supposée avoir des valeurs inconnues dans chaque point nodal. Les variations à l'intérieur de l'élément peuvent être écrites à l'aide des termes des valeurs nodales par le moyen de fonctions d'interpolation comme suite :

$$\{\delta\} = [N]\{\delta^{g}\} \tag{1.3}$$

Ou $[N]$: matrice des fonctions d'interpolation nommées aussi fonctions de forme.

$\{\delta^{g}\}$: vecteur de champ des déplacements nodaux de l'élément.

Les déformations à l'intérieur de l'élément sont exprimées en termes des déplacements nodaux par la relation suivante :

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta^{g}\} \tag{1.4}$$

$[B]$: La matrice des déformations composée généralement des dérivées des fonctions de forme.

Les contraintes peuvent être reliées aux déformations en utilisant une matrice d'élasticité [D] d'où :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \tag{1.5}$$

L'énergie potentielle totale de la structure peut être obtenue par sommation des énergies potentielles totales élémentaire si les éléments ont la compatibilité requise c'est-à-dire un bon choix des fonctions de forme avec la non existence de singularité dans les termes de la fonctionnelle Π

On a la relation suivante :

$$\Pi = \sum_{éléments} \Pi^{\vartheta} \tag{1.6}$$

Ou Π^{ϑ} : l'énergie potentielle totale de l'élément ϑ

En combinant les relations (1.2) et (1.5) on trouve :

$$\Pi^{\vartheta} = \frac{1}{2}\int_{v^{\vartheta}} \{\delta^{\vartheta}\}^T [B]^T [D][B]\{\delta^{\vartheta}\} dv - \int_{A^{\vartheta}} \{\delta^{\vartheta}\}^T [N]^T \{q\} dA \tag{1.7}$$

v^{ϑ} : volume de l'élément

A^{ϑ} : surface de l'élément

I.2.3 Formulation de la matrice de rigidité élémentaire et le vecteur des forces nodales équivalentes :

Pour un état d'équilibre stable, les déplacements cinématiquement admissibles qui satisfont les conditions d'équilibre sont ceux qui minimisent l'énergie potentielle réciproquement. Par ailleurs, la minimisation de l'énergie totale de tous les éléments correspond à :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{\delta\}} = 0 \tag{1.8}$$

D'où les équations globales et les relations (1.7) et (1.8) :

$$\left(\int_{v^{\vartheta}} [B]^T [D][B] dv\right)\{\delta^{\vartheta}\} = \int_{A^{\vartheta}} [N]^T \{q\} dA \tag{1.9}$$

Ou encore :

$$[K^{\vartheta}]\{\delta^{\vartheta}\} = \{F^{\vartheta}\} \tag{1.10}$$

Ou $[K^{\vartheta}] = \int_{v^{\vartheta}} [B]^T [D][B] dv$ (1.11)

$$\{F^{\vartheta}\} = \int_{A^{\vartheta}} [N]^T \{q\} dA \tag{1.12}$$

Qui sont respectivement la matrice de rigidité et le vecteur des forces équivalentes de l'élément ϑ

Approximation nodale par sous-domaines :

Le domaine Ω sur lequel une solution est cherchée, est divisé en sous-domaines Ω^e, aussi appelés éléments finis, tels que :

$$\Omega = \sum_e \Omega^e \quad \text{et} \qquad \bigcap_e \Omega^e = \Phi \tag{1.13}$$

A l'intérieur de chaque élément Ω^e , d´élément finis par des nœuds de coordonnées v_n^e , la position de tout point *x* est repérée par :

$$x(\xi) = N'(\xi) v_n^e \tag{1.14}$$

ou *N'* est la matrice des fonctions d'interpolation, nous nous plaçons dans le cas d'une représentation isoparamétrique, c'est-a-dire que les fonctions d'interpolation sont les même que les fonctions de forme, soit *N*≡*N'*. Ce choix est souvent utiliser dans la méthode des éléments finis.

L'assemblage permet de calculer le déplacement. Dans la méthode des éléments finis, les valeurs des solutions des équations sont les valeurs nodales.

A l'intérieur d'un élément, la fonction de forme est un polynôme qui prend la valeur zéro sur les autres nœuds et la valeur 1 sur le nœud considéré.

I.3. Considérations pour la Génération de Maillage :

La génération de maillage regroupe de nombreuses techniques. Il n'est pas évident de fournir un travail de référence incluant toutes les méthodes disponibles. Par contre, on cite quelques algorithmes fondamentaux pour la génération de maillages pour les non-structurés.

L'analyse d'un problème par des techniques d'Éléments Finis (FEA) est devenue une étape essentielle pour la conception et l'analyse de systèmes complexes. FEA, dans son sens le plus large, inclut la modélisation mathématique, la discrétisation, les méthodes de résolutions et la visualisation.

Dans le passé, la discrétisation était une tâche fastidieuse qui faisait appel de manière constante à l'utilisateur. De nos jours, la discrétisation est un processus automatisé, qui inclut la génération de maillage et des procédures adaptatives. La régularisation et le lissage, qu'on va traité dans ce travail, avec une technique permet de spécifier automatiquement la bonne finesse du maillage.

Tout d'abord il faut préciser que le terme "Génération de Maillage" regroupe plusieurs tâches différentes.

Les principales tâches peuvent généralement être identifiées comme :

Génération de maillage initial

Remaillage

Raffinement

Nous allons discuter les facteurs qui décrivent la qualité d'un maillage on utilisant les éléments finis.

I.3.a Définition d'un maillage géométrique :

Soit un domaine fermé borné de R^3 décrit par sa frontière. Un maillage régulier est un maillage dont tous les éléments sont réguliers (équilatéraux lorsqu'il s'agit de triangles).

Comme l'existence d'un tel maillage n'est pas démontrée, on considère comme régulier le maillage qu'il est possible de construire. En pratique, deux types de maillages de surfaces peuvent se concevoir :

– les maillages uniformes, dans lesquels la taille des éléments est constante dans tout le domaine et,

– les maillages géométriques, dans lesquels la taille des éléments est adaptée localement aux courbures de la surface.

Remarquer : qu'avoir un maillage uniforme n'offre aucune garantie quant à la qualité de l'approximation de la surface, sauf à être infiniment fin. En revanche, un maillage géométrique est un maillage adapté à la géométrie de la surface, la taille des éléments étant étroitement liée aux courbures de la surface.

Dans le contexte du maillage des surfaces, assurer une continuité d'ordre un est généralement considéré comme une condition suffisante.

Définitions :

- Un maillage de surface est dit géométrique à l'ordre 0 si chaque triangle est Proche de la surface (propriété d'approximation P_0).

- Un maillage de surface est dit géométrique à l'ordre 1 si le plan support de chaque triangle est proche du plan tangent en chaque point de proche du triangle (propriété de rugosité P_1).

On utilise la méthode des éléments finis pour déférents problèmes physiques : elle nécessite la réalisation de maillage (une part très importante de la simulation), Elle est délicate pour les géométries complexes, la

qualité des résultats sont liés à la qualité du maillage, on peut citer les méthodes de maillage suivantes [17] :

- Méthodes manuelles et semi-automatiques.
- Méthode de transport projection.
- Méthode de blocs.
- Méthode frontale.
- Méthode de voronoi et extension.

On remarque que ces méthodes traitent les aspects suivants :

- Définition de l'ensemble des informations composant un maillage de manière à le rendre adéquat à un traitement par éléments finis.
- La méthodologie de la conception d'un maillage, cité les notions d'analyse descendante et de réalisations ascendantes associée.
- La description des algorithmes de maillage dans les cas Bidimensionnelles.
- Les méthodes de transformations de maillages et de leurs nombreuses applications.

I.3.b Conditions de maillage :

L'analyse par éléments finis exige quelques conditions pour la maille elle même.

D'abord, la maille doit être valide. C'est-à-dire, il ne devrait y avoir aucun trou, aucunes intersections d'individu, …etc.

Deuxièmement, la maille produite doit se conformer à la frontière du domaine donné. Certains algorithmes de génération de maillage tels que l'algorithme d'Octrée [18], ne remplissent pas la condition de conformité de frontière très bien à moins qu'il utilise une maille plus fine, qui augmentera le temps de calcul. Ainsi, pour que les utilisateurs puissent chercher la différence la plus appropriée entre l'exactitude et le moment de solution, il est souvent nécessaire de rendre la densité (c.-à-d., résolution) du maillage contrôlable, d'une part, le soin spécial doit être donné au maillage, densité locale due aux conditions locales d'exactitude.

Il est nécessaire de s'assurer que les variations de densité sont assez lisses de sorte qu'il n'y ait pas les changements soudains de la taille d'élément. Les changements soudains de la taille d'élément peuvent

causer des équations qui feront des difficultés dans l'analyse par éléments finis, causant l'instabilité numérique.

Troisièmement, les formes des éléments devraient être approximativement identiques. cela pour réaliser la forme semblable est de rendre les éléments finis aussi isagones que possible.

D'autre part, les différents types d'éléments ont également de différentes possibilités variables pour adapter des frontières irrégulières, Puisque quelques types d'éléments ne peuvent pas adapter des frontières irrégulières tandis que d'autres peuvent les adapter, mais le résultat et l'exactitude de solution dans les éléments formés peut être effectuée par le choix des éléments.

Comme exemple, utilisant une maille volumétrique de tétraèdre linéaire n'est pas bien adapté à réaliser une analyse précise parce qu'un tétraèdre linéaire, qui est un élément d'ordre réduit, des bas seulement quatre noeuds. Ainsi, l'analyse par éléments finis utilisant des mailles de tétraèdre linéaire exige d'une densité élevée d'élément de produire des résultats acceptables. Cependant, l'utilisation d'une maille dense augmentera également le moment pour le calcul de solution. Pour augmenter l'exactitude de solution, les variations de déplacement sur les bords d'un tétraèdre peuvent être définies avec une fonction quadratique. Le coût d'employer informatique des variations quadratiques de déplacement est plus haut que le coût d'employer des variations linéaires de déplacement.

I.3.c Déformation d'Elément :

Habituellement, le maillage par les éléments finies commencent en créant plusieurs éléments avec une taille grande qui sont alors subdivisés en plus petits éléments. Cette subdivision crée souvent de plus petits éléments qui sont semblables dans la forme à l'élément de parent. Par exemple, un élément triangulaire peut être encore divisé en plusieurs plus petits éléments triangulaires. Cependant, la subdivision peut faire pour produire quelques éléments étroits (c.-à-d., rubans) à la frontière d'une maille due à la nécessité de confiner le maillage dans la limite du modèle. Ces rubans peuvent réduire l'exactitude de solution du problème parce que la grande variation de la forme d'élément peut causer de grandes erreurs dans l'analyse par éléments finis [19].

I.3.d Un bon maillage :

Un bon maillage permettra à l'analyse par éléments finis de trouver une solution précise à un problème dans relativement une courte durée. Un facteur qui détermine la précision de calcul de solution est la résolution de maillage.

La résolution de maillage est déterminée par la forme et l'ordre des éléments finis. Par exemple, si une certaine solution de précision était exigée, la résolution d'un maillage avec des éléments linéaires devrait être meilleure que la résolution d'un maillage avec des éléments quadratiques, puisque les mailles quadratiques ont une plus haute précision que les mailles linéaires. De même, les éléments quadratiques exigeraient une maille plus fine que les éléments cubiques.

Pour quelques problèmes, il est possible que les différentes régions auront besoin de différentes résolutions de mailles. Régions avec des gradients plus élevés,

(Comme des régions avec les changements rapides des efforts) peut exiger une maille plus fine parce qu'une maille brute (qui décrivent les changements rapides) peut resuit dans une solution qui est une approximation pauvre (ou même resuit dans une solution incorrecte) [20,21]. Une région avec un changement soudain des propriétés de géométrie (telles que des changements de taille ou de forme d'une section transversale) peut également exiger un plus fin maillage.

I.3.e Limitations d'Elément :

Utilisant les éléments finis d'ordre polynôme inférieur peut exiger une densité plus élevée d'élément, donnée une précision fixe. Cependant, utilisant des éléments finis d'un polynôme plus élevé.

L'ordre a besoin de plus de temps de calcul pour la méthode d'élément fini. Ainsi, en choisissant un type d'élément pour un problème spécifique, la différence entre l'ordre d'élément et le moment de calcul doit être soigneusement considérée, d'une part, les différents types d'éléments ont également des possibilités variables pour adapter des frontières irrégulières.

La facilité pour l'obtention d'éléments se produit graduellement et se traduise par la taille également pour différents types d'élément. Puisque quelques types d'élément ne peuvent pas adapter des frontières irrégulières tandis que d'autres peuvent adapter les mêmes frontières mais le résultat dans les éléments males formés differe, l'exactitude de la solution peut être effectuée par le choix d'élément. par

exemple, en utilisant une maille volumétrique de type tétraèdre linéaire n'est pas bien adapté à réaliser une analyse précise parce qu'un tétraèdre linéaire, est un élément d'ordre réduit, seulement quatre nœuds [22].

Ainsi, l'analyse par les éléments finis utilise des mailles de tétraèdre linéaire exige d'une densité élevée d'élément pour donner des résultats acceptables. Cependant, l'utilisation d'une maille dense augmentera également le temps de calcul pour atteindre la solution.

Pour augmenter l'exactitude de la solution, les variations de déplacement sur les nœuds d'un tétraèdre peuvent être définies avec une fonction quadratique méthode-h. Le coût d'employer le processus informatique (des variations quadratiques de déplacement) est plus grand que le coût d'employer des variations linéaires de déplacement méthode-P.

I.4 Types d'Elément :

Il y a trois types d'éléments finis : éléments linéique 1D, éléments surfacique 2D, et les éléments volumique 3D. Le choix du type d'élément fini dépend du problème à résoudre. Pour un objet linéaire-formé, un type linéaire d'élément devrait être choisi. Dans cette section, chacun des trois types d'éléments est discuté.

I.4.a Eléments linéiques :

La ligne est un élément d'une forme linéaire. Un élément 1D a deux nœuds, dépendant de l'ordre de l'élément [23].

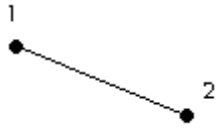
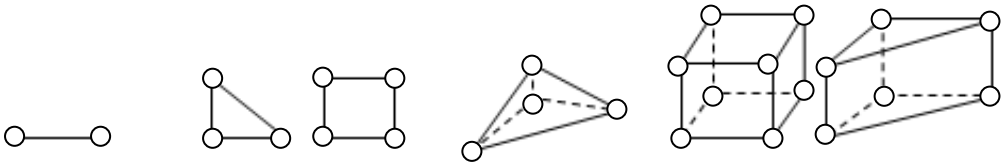


figure (1.3) : Elément linéique.



1D 2D 3D

figure (1.4) : Des éléments finis en 1D , 2D et 3D

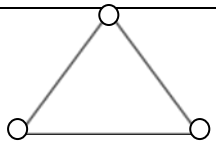
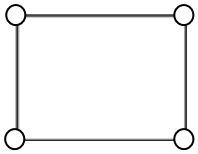
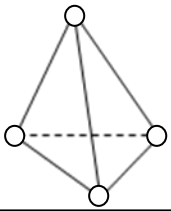
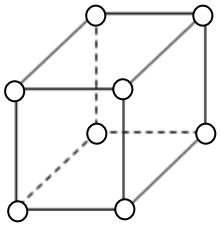
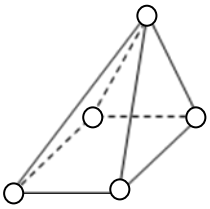
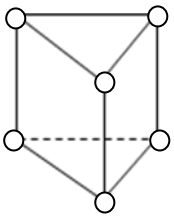
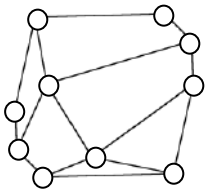
élément triangle	
élément quadriangle, rectangle	
élément tetraèdre a 4 nœuds	
élément héxahidrique a 8 nœuds	
élément pyramidale	
un prisme a base triangle (w)	
un polyhedron arbitraire	

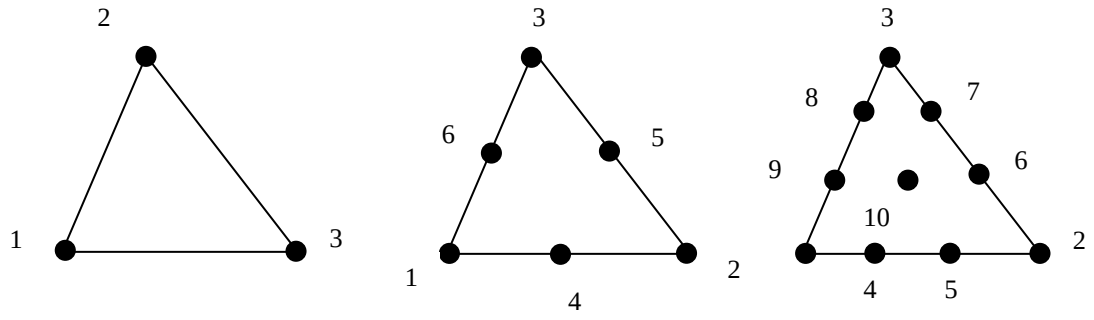
tableau (1.1) : Quelques exemples des éléments en 2 D et en 3D.

Les degrés de liberté (c.-à-d., le nombre de variables de déplacement) qui décrivent le déplacement à un nœud diffèrent pour différents ordres des éléments. Exemples de ligne éléments sont les 2D barres et poutres 3D. Un élément de tige est un exemple d'un élément linéique qui permet l'application des forces dans seulement la direction axiale. Ainsi, il n'est pas conçu pour l'application des forces de rotation ou des forces de recourbement, et il est seulement employé dans les cas où une force agit exactement mais être répartie axialement.

Dans une direction, un élément est utilisé pour l'application des forces de rotation, des forces de recourbement, et des forces axiales.

I.4.b Éléments surfaciques :

Un autre type d'élément fini est utiliser dans quelques exemples d'un élément 2D, les éléments triangulaires et quadrilatéraux. Il y a trois types d'élément de domaine de base : la membrane, et les éléments de coquille [24-26] en mécanique des solides. Les éléments de membrane n'ont aucune épaisseur.



Elément linéique élément Quadratique Elément Cubique

Figure (1.5) : Exemples d'éléments triangulaires.

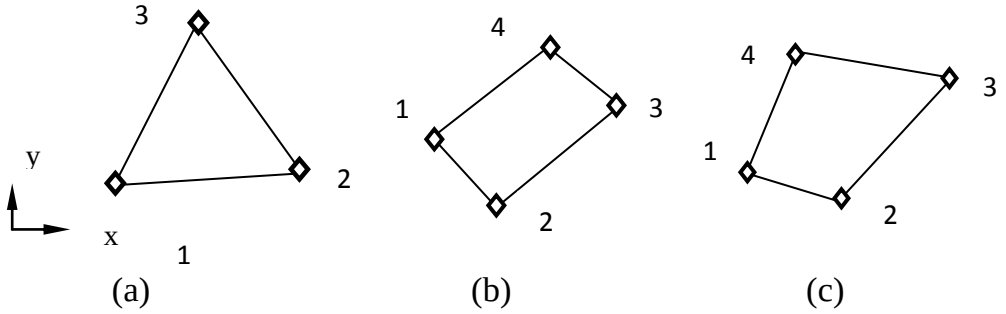
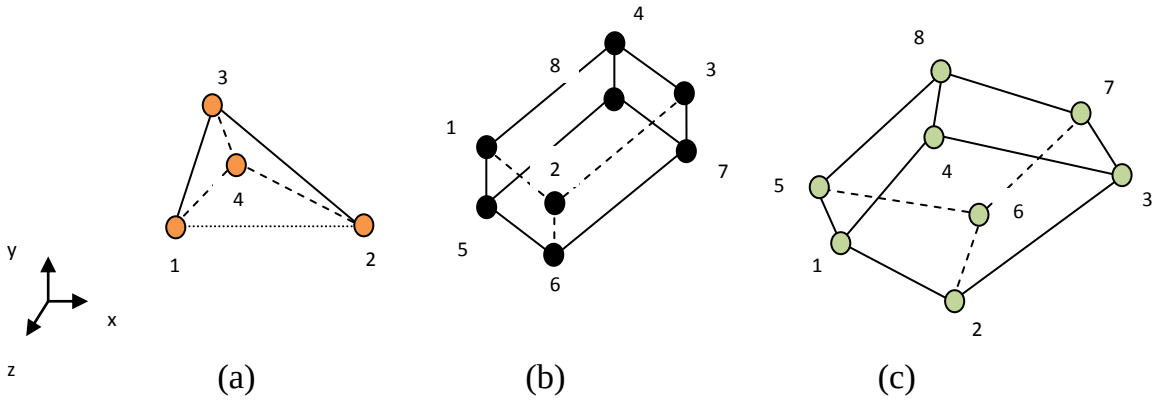


Figure (1.6) : (a) Elément triangulaire, (b,c) élément quadrilatéral.

Ainsi, l'application des charges de recourbement pour des éléments dans une membrane, les charges peuvent seulement agir dans une direction pour ces éléments. Des éléments qui sont employés pour modeler les objets minces dans l'espace 3D. Ces éléments prennent seulement les charges de recourbement Et par conséquent, ils ont calculer les forces sur la membrane [27-29]. Aussi les résultats dans ces éléments peuvent être appliqués aux cas où le déplacement est en dehors-de l'avion (c.-à-d., le déplacement qui se produit dans une direction hors de l'avion qui contient ces éléments). Des éléments de coque sont employés pour modeler les objets malformés, qui peuvent prendre le recourbement.

I.4.c Eléments volumiques:

Pour un objet 3D avec la forme arbitraire, des éléments de volume peuvent être employés pour l'analyse par éléments finis. Les formes communes d'élément de volume incluent l'hexaèdre et le tétraèdre [30].



(a) (b) (c)

figure (1.7) : (a) Elément tétraèdrique, (b) élément de prisme, (c) élément hexaèdrique.

Encore, le choix de la forme d'élément utilisée pour une application dépend de l'application' ; les besoins de l'analyse utilisant des éléments 3D est souvent lente parce que l'analyse d'un élément de volume implique un grand calcul. Puisque le nouvel algorithme produit des mailles, le type d'élément de volume n'est pas élaboré. Les lecteurs intéressés peuvent trouver des détails correspondants dans la référence [31].

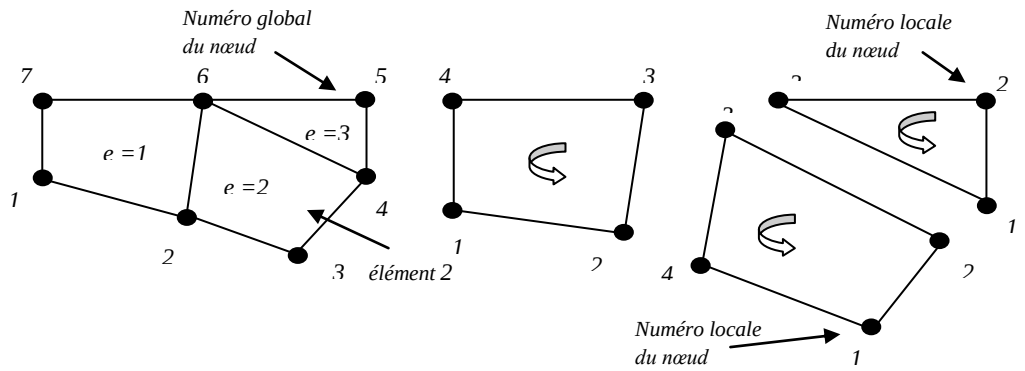


Figure (1.8) : Discrétisation du domaine : éléments nodales numérotés

Suivant les éléments et la numérotation des nœuds et de ces éléments le tableau (1.2)

Numéro de l'élément	Nœud 1	Nœud 2	Nœud 3	Nœud 4
1	**1**	**2**	**6**	**7**
2	**2**	**3**	**4**	**6**
3	**4**	**5**	**6**	

Tableau (1.2) : Description des éléments par les nœuds.

Il y a beaucoup des méthodes de génération de maille. Dans cette section, trois méthodes communes sont décrites : la méthode d'Octrée [32], la méthode de Delaunay [33], et la méthode avant d'avancement [35].

I.5 La méthode des éléments finis :

La méthode des éléments finis a été appliquée en premier dans le domaine du calcul des structures dans les années soixante.

L'arrivée de l'informatique a permis d'exploiter rapidement la puissance de cette méthode et de l'appliquer par la suite dans pratiquement tous les domaines du génie et de la physique [36].

Le principe de la méthode des éléments finis est la discrétisation d'un domaine en plusieurs sous-domaines appelés éléments finis, sur chacun desquels une fonction, la fonction est approchée sur chaque élément en un certain nombre de points appelés nœuds. Les équations d'équilibre des éléments finis sont

formées a partir du principe variationnel. Des fonctions d'interpolation, ou fonctions de forme, approcher le champ de variation sur chaque élément, et les équations locales sont ensuite assemblées pour former les équations globales. Les fonctions d'interpolation sont développées à l'aide de termes sélectionnés rigoureusement à l'intérieur du triangle de Pascal [37].présenté à la figure(1.1).

Deux formes géométriques sont principalement utilisées pour la discrétisation d'un domaine en deux dimensions 2D en éléments, ce sont les triangles et les quadrangles .chaque forme à ses avantages et ses inconvénients.

Pour commencer, les triangles s'adaptent très facilement aux géométries complexes, En plus, la génération de maillage avec des éléments triangulaires bénéficie de méthodes éprouvées telle la triangulation de Delaunay[38-41]. Pour des éléments a trois nœuds, puisque les fonctions d'interpolation sont linéiques [42], ce qui est plus faisable lors de la résolution c'est d'essayer d'obtenir des solutions analytiques,. En revanche, la précision obtenue avec des éléments triangulaires à trois nœuds est faible.

I.6 Maillages structurés et non structurés :

Définition :

Maillage structuré :

Un maillage structuré est un maillage qui peut être généré en reproduisant plusieurs fois une maille élémentaire.

Dans ce type de maillage, tout nœud peut être repéré par un doublet ou un triplet (i,j,k).

en 2D un nœud (i,j) de quatre a six voisins (i+-1,j) et (i,j+-1), et appartient à plusieurs mailles.

Le maillage structuré tire profit de la numérotation et la topologie est implicite :

Avantages	Inconvénients
- Bon contrôle de l'épaisseur des mailles (au voisinage des parois à courbure régulière) *- Facilité pour mailler des géométries très allongées (nombre de nœuds dans une direction privilégiée)*	*- limitation d'emploi aux domaines descriptibles par un quadrilatère (2D) et un triangle (2D).* *- Possibilité minimum de raffiner le maillage sans augmentation de la taille.*

Maillage non-structuré :

En 2D, c'est un maillage dont les éléments sont des triangles ou des quadrilatères assemblés de manière quelconque.

La topologie est complètement arbitraire.

Avantages	Inconvénients
- Création de maillages triangulaires ou tétraédriques dans des géométries quelconques. *- Economie de nœuds par rapport aux maillages structurés.*	*- Parfois il y a des difficultés pour contrôler la densité des nœuds dans une zone précise.* *- Contrainte de stockage (quantité de données).*

Dans une maille non structurée, tout nombre d'éléments peut se réunir à un noeud de corde. Un avantage des mailles non structurées est qu'ils peuvent être automatiquement produits avec les moteurs de maillage. Un autre avantage est leurs possibilités d'étroitement conformément à la frontière d'un domaine donné [43]. Les mailles triangulaires et tétraédriques sont les formes communes de mailles non structurées soutenues par beaucoup de progiciels (UNSYS et GEOM, par exemple).

Il existe trois classifications des maillages structurés, les maillages non structurés et les maillages hybrides.

Un maillage structuré se caractérise par un patron qui se répète, un nombre identique d'éléments autour de chaque nœud interne et une numérotation ordonnée des éléments [44].

Les maillage structurés ont moins de risque de contenir des éléments distordus. Alors, il y a une meilleure continuité des résultats à travers le maillage. Certains exemples de maillages structurés sont illustrés à la figure (2.5), le logiciel TrueGrid [45] s'est penché particulièrement sur le maillage structuré de surface aux arêtes courbes tel le cercle.

Les fonctions d'interpolation sont développées à l'aide de termes sélectionnés rigoureusement à l'intérieur du triangle de pascal Le maillage adapté de Bathe [46] et du Schaum [47] comme exemple. Les équations globales sont ensuite résolues avec les conditions aux limites appropriées [48-50]. Les principaux avantage , [51,52] de la méthode des éléments finis sont :

(a) la possibilité d'obtenir des solutions détaillées des mécanismes de déformations des corps, c'est-à-dire, les formes, les déformations, les contraintes, les distributions de pression de contact etc…

(b) Une fois que la méthode d'analyse est programmée, elle peut être utilisée pour une grande variété de problèmes seulement en changeant les données d'entrée.

Cependant, une décision majeure doit être prise au départ : « comment modéliser la pièce et quel genre de sous-domaines utilisés pour discrétiser une géométrie complexe ? »

On va décrire dans le prochain chapitre quelques caractéristiques utilisées pour le développement du maillage.

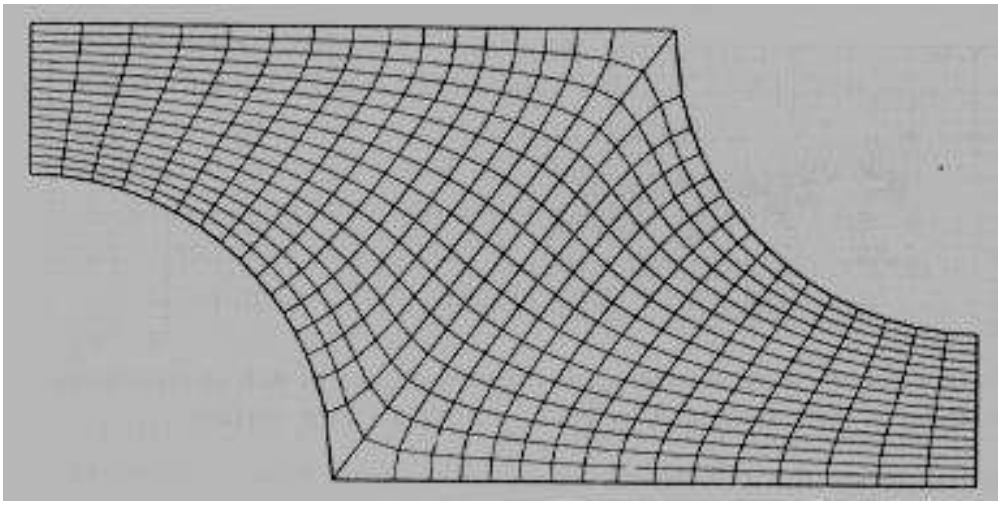


Figure (1.9) : Exemple de maillage structuré [50].

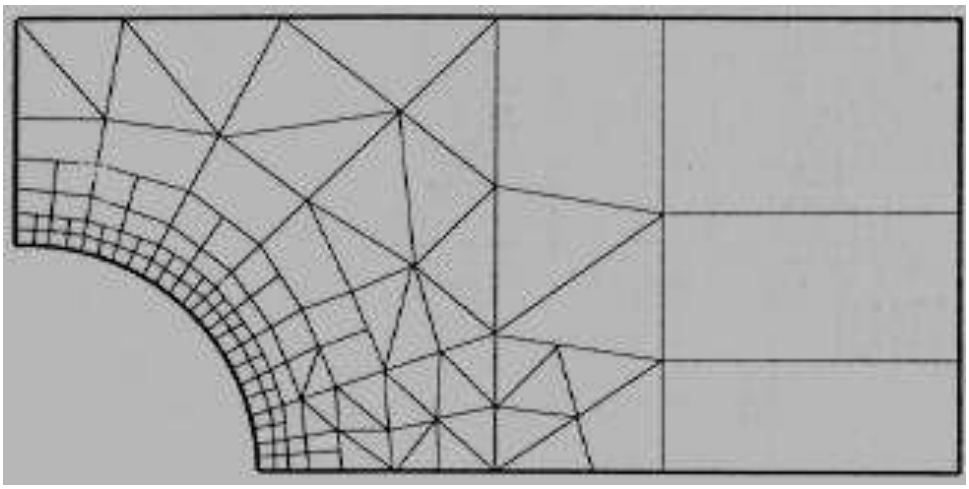


Figure (1.10) : Exemple de maillage non structurée[50] .

I.7 Maillages Hybrides :

Les maillages hybrides comprennent plusieurs types d'éléments, par exemples un combinaison d'éléments triangulaires et quadrangulaires, ce type de maillage est surtout utilisé pour discrétiser des problèmes complexes de la mécanique des fluide.

Les éléments a quatre nœuds couvrent les régions prés des surfaces de contactes et les triangles discrétisent le reste du domaine d'analyse [53].

Ce dernier point confirme encore une fois le choix des éléments quadrangulaires pour une précision accrue, comme sur le voisinage d'un solide en mécanique des fluide, les maillages hybrides comprennent aussi certaines régions structurées et d'autres non, [54,55], il arrive que les maillages deviennent non structurées pour mieux représenter les frontières , il est montrer dans la figure .Ou encore pour augmenter la précision en diminuant la taille des éléments en raffinant localement.

.

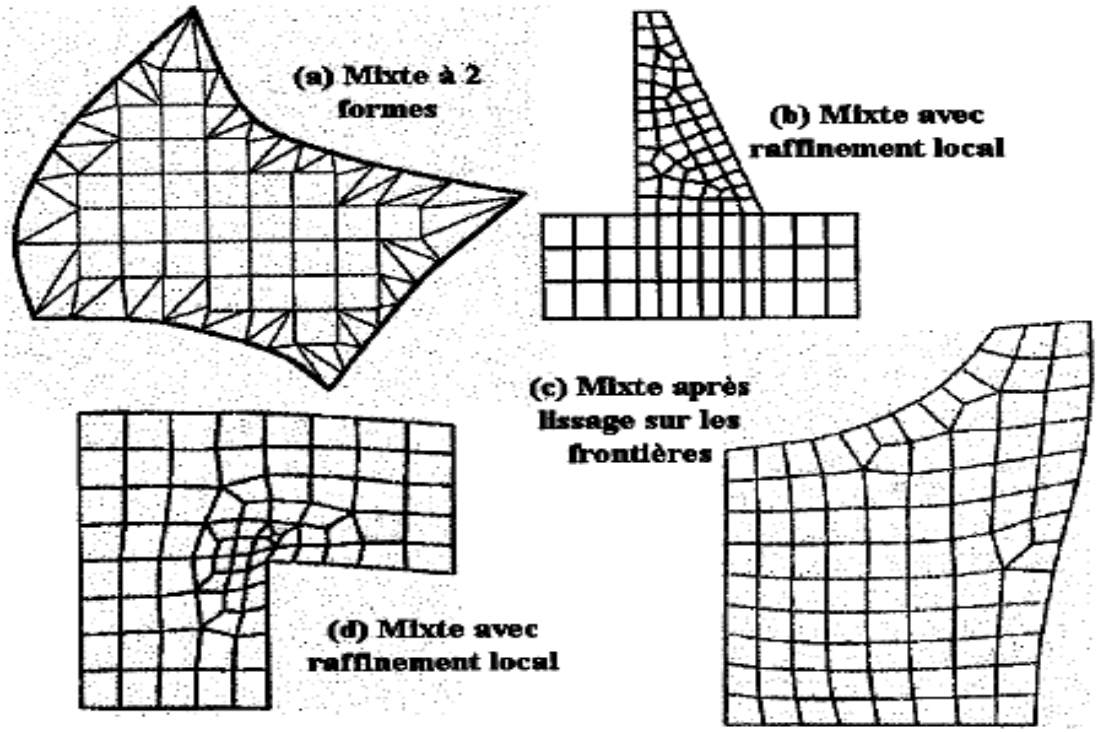


Figure (2.11) : Exemple de maillage hybride[55] .

Une grande partie de calcul scientifique dans la technologie est la solution des équations différentielles partielles de divers type (pour la mécanique des solides, les caractéristiques aérodynamiques, la modélisation thermique,…) au moyen de la méthode d'élément fini. Cette méthode exige un maillage du domaine pour lequel les équations sont formulées. Ainsi, les algorithmes de maillage sont d'une importance majeure dans chaque simulation numérique basée sur la méthode des éléments finis. En particulier, l'exactitude et même la validité d'une solution est fortement attachée aux propriétés du maillage fondamentale du domaine à étudié. Quelques méthodes fournissent une extension du domaine d'applications vers des domaines ou le cout du maillage est prépondérant par rapport au cout de la résolution numérique (géométrie très complexe), ainsi que vers les problèmes faisant appel à des solutions

discontinues et des méthodes de régularisations (Belytschko and Tabbara, 1996) et (Belytschko et al. 1995).

Nous exposons dans ce chapitre L'intérêt de la régularisation des maillages dans les domaines d'applications . Ces applications ont fait une concurrence très intensive entres plusieurs chercheures.

La régularisation est parmi les méthodes les plus utilisés dans les simulations numériques pour ses propriétés d'approche aux résultats réels [56-59].

I.8 Méthode de maillage :

I.8.1 La méthode d'Octrée :

Une grande répartition se fait avec une subdivision jusqu'à ce qu'une certaine spécificité soit obtenue. La méthode d'octrée est employé dans le domaine de recherche, une carte de cette espace ou on trouve les charges qui déforme la structure. Chaque nœud spécifie un point du domaine, l'ensemble des nœuds spécifient la région de l'espace ou tout le domaine ou on veut avoir des résultats de calcul (une petite tolérance est cherché), ce modèle a un objectif c'est de minimiser l'erreur. Chaque tranche de la zone ou on a appliquer la subdivision donne un résultat par la suite continuer jusqu'à ce que les résultats convergent décrivant la résolution du problème. Une maille produite par la méthode d'Octrée habituellement n'est pas conforme car elles se composent de cubes (les cubes ne peuvent pas former les géometrie complexes et ne peuvent pas se conformer aussi aux coins étroits à moins d'utiliser des cubes très petits qui seront employés. Un autre inconvénient de la méthode d'octrees est que si une orientation différente de cube est employée dans la construction on aura des élément malform.

I.8.2 La méthode Delaunay :

La méthode de Delaunay est basée sur le critère de la triangulation en 2D, l'ensemble de points qui constitue le domaine (ensemble de nœuds) avec trois nœuds formant un triangles, le critère exige qu'aucun nœud ne soit en dehors de la frontière du cercle, n'importe quel élément ou la maille et constituer de trois éléments, soit un triangle a trois nœuds (aucun nœud ne peut être a l'intérieur du cercle c-a-dire les nœuds de la maille), la figure (1.12) représente le domaine ou on veut appliquer la triangulation, la figure (1.13) montre la triangulation :

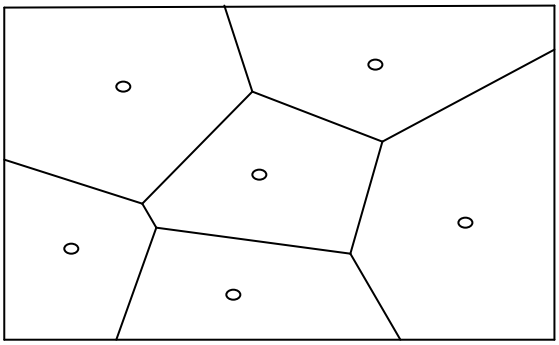


Figure (1.12) : Des points représentant le diagramme de voronoy.

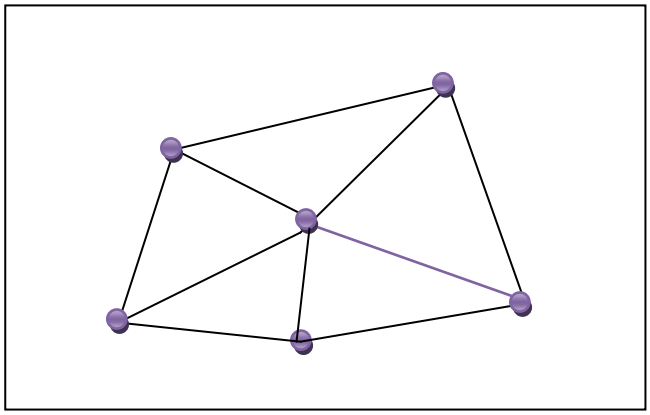


Figure (1.13) : La triangulation de Delaunoy.

Le cercle contient un triangle, ce cercle traverse les trois sommets du triangle. Ce critère peut être satisfaisant pour touts les éléments du domaine. La triangulation de Delaunay maximise l'angle minimum de chaque triangle dans le domaine (la base du triangle ainsi l'angle minimum global qui est plus grand que dans tout autre triangle) [61].

L'angle minimum d'un triangle est son plus petit angle interne. Cette propriété rend la méthode de Delaunay employée efficace dans l'analyse par éléments finis car la minimisation tend à produire des triangles qui ne sont pas très égue. Beaucoup d'algorithmes ont été développés et qui sont basé sur le critère de Delaunay pour définir la connectivité d'un ensemble de points en 2D ou en 3D [62,63].

I.8.3 Méthode frontale avancée :

Cette partie décrit les trois principales méthodes de génération de maillage en 2D. Pour chaque méthode l'algorithme et un exemple sont présentés.

Algorithme de la méthode frontale avancée :

Dans la méthode de génération de maillage par couche, des éléments en triangles sont produits. La méthode commence à partir de la frontière du domaine. Les triangles les plus petits sont crées en premier. Le domaine est ensuite maillé par couche d'éléments jusqu'à ce que le domaine soit entièrement recouvert de triangles. Une fois que tous les éléments ont été créés, le maillage est ensuite régularisé.

La méthode frontale avancée [64] est employée pour la génération de maillage. Dans la génération de maillage triangulaire, le long de la frontière et puis vers l'intérieur pour garder le centre.

Le procéssus du création des triangles est essentiellement un processus qui avance vers le centre de l'objet aa étudier. Les éléments sont maintenus jusqu'à ce que le processus de maillage soit fini.

À chaque étape, un nouveau sommet de triangle est produit, le nouveau nœud sera d'une qualité diferente. Le nouveau nœud change en fusionnant des éléments dans des régions qui ne sont pas mailler. Dans le processus de maillage, on ne permet pas que les éléments s'intersectés ou se croisent pendant que le déplacement se fait à l'intérieur. En empêchant des intersections, les nouveaux éléments ne peuvent pas remplacer les éléments qui sont déjà produit, aussi la taille d'élément est commandée avec une fonction de classement par taille pour garantir l’application du critère de la méthode.

II .1. Introduction

Dans cette partie de ce mémoire, nous présentons le concept des singularités des maillages et les différentes méthodes de lissage, qui peuvent être considéré comme une version de travaux de références, parmi les méthodes de lissage ceux qui offrent les mêmes garanties topologiques et qui donnent de bons résultats avec des marches d'erreurs différentes.

Plusieurs problèmes se projettent et ne trouvent solutions qu'à travers l'utilisation des méthodes numériques, et pour pouvoir obtenir des solutions permettant d'approcher les solutions exactes, on utilise la méthode des éléments finis qui a été appliquée dans les années soixante. Ceci a permis d'exploiter les géométries complexes, cette méthode est appliquer dans pratiquement tous les domaines, Huerta [66].

(*Le principe de base de la méthode des éléments finis est la discrétisation d'un domaine en plusieurs sous-domaines appelés éléments finis, sur chacun desquels une fonction représente un comportement, par la suite cette dernière est approximée sur chaque élément dans des points appelés nœuds. Les équations d'équilibre des éléments finis sont formées à partir du principe variationnel. Des fonctions d'interpolation, ou fonctions de formes, approximent le champ de variation sur chaque élément, et les équations locales sont ensuite assemblé pour former les équations globales, Les fonctions d'interpolation sont développées à l'aide de termes sélectionnés rigoureusement à l'intérieur du triangle de pascal, Sarrate J [67] présenté à la figure (2.1). Les équations globales sont ensuite résolues avec les conditions aux limites appropriées* [70,71], *les principaux avantages de la méthode des éléments finis sont :*

- *la possibilité d'obtenir des solutions détaillées des mécanismes de déformations des corps, c'est-à-dire, les vitesses, les formes, les déformations, les contraintes, les distributions de pression de contact*
- *une fois que la méthode d'analyse est programmée, elle peut être utilisée pour une grande variété de problèmes seulement en changeant les données d'entrée.*)

Cependant, la question qu'il faux poser est : comment modéliser la pièce et quel genre de sous-domaines utilisés pour discrétiser une géométrie complexe ?

On va décrire quelques caractéristiques qui étés utilisées pour le développement du maillage. dans les figures des exemples de maillage structurée, non structurée, et hybride,

beaucoup de travaux ont été consacré à l'élaboration d'une méthodologie pour apporter des améliorations aux maillages de surface (*les méthodes de lissage et de régularisation*).

Aboutir à des résultats qui assurent une bonne reconstruction d'une surface donnée malgré sa complexité. Il est possible à partir de la triangulation de Delaunay de faire des mailles qui rapproche la topologie et améliore la précision.

L'avantage principal de l'utilisation de ces méthodes est qu'il est plus facile d'approcher aux résultats et aux temps de calcule.

Nous prolongeons plus loin nos résultats au cas de notre lissage en présentant une nouvelle quantité mesurable, en utilisant le centre de gravité, qui joue un rôle semblable à celui dans l'arrangement de Giuliani qui s'avère être bien positif sur une classe beaucoup plus grande des formes.

Pour montrer le caractère pratique de notre concept, nous présentons un algorithme qui construit les mailles qui semblent complexe extérieures ou intérieures dans notre domaine.

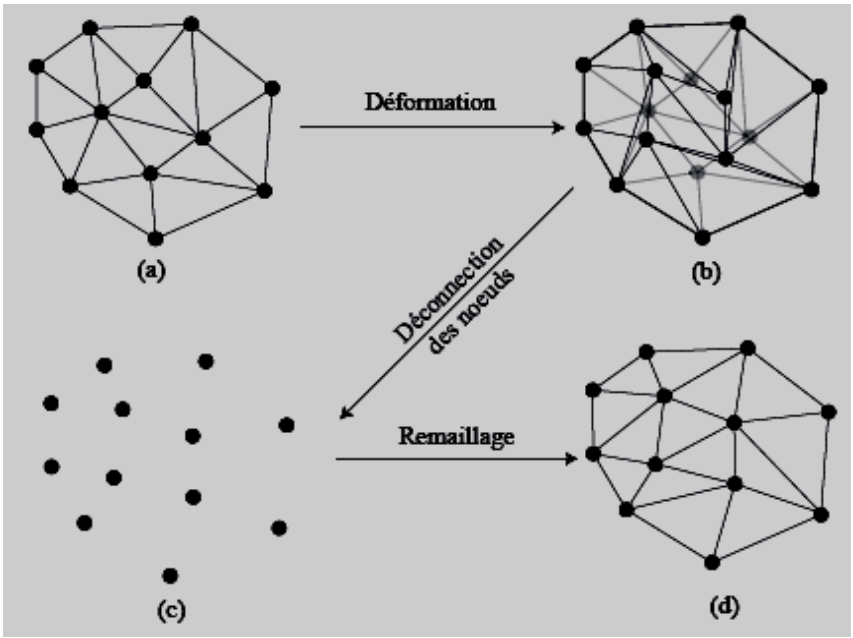


figure (2.1) : (a) configuration initiale du maillage suivant une triangulation de Delaunay. (b) configuration déformée en foncé et rappel de la configuration initiale en gris (c) déconnection et (d) reconnections des nœuds suivant une triangulation de Delaunay. Yutaka Ohtake [72] .

L'approche commence à partir de la géométrie d'entrée d'un élément triangulaire approximatif qui doit être régularisé afin d'obtenir une maille tout en projetant une densité désirée. On propose plusieurs densités spécifiant les géométries pour spécifier la distribution désirée des mailles dans une forme close. Pour réduire l'erreur géométrique qui est inévitable dans ces cas, les bords de frontière sont interpolés par les courbes de cannelure de troisième ordre. La méthode est utilisée en calculant la densité désirée du maillage avec des points arbitraires.

Afin d'améliorer la qualité du maillage, les éléments triangulaires sont périodiquement modifiés par les processus locaux de transformation comprenant la division, les résultats ainsi que le processus sont montrés.

L'optimisation de la qualité locale du maillage est effectuée par un arrangement doux nodal optimal. Plusieurs exemples d'application sont donnés pour montrer les caractéristiques de l'approche présentée.

ainsi, les zones ou très peu de déformations apparaissent, ne nécessitent pas un maillage fin , on le constate dans la figure (2.2).

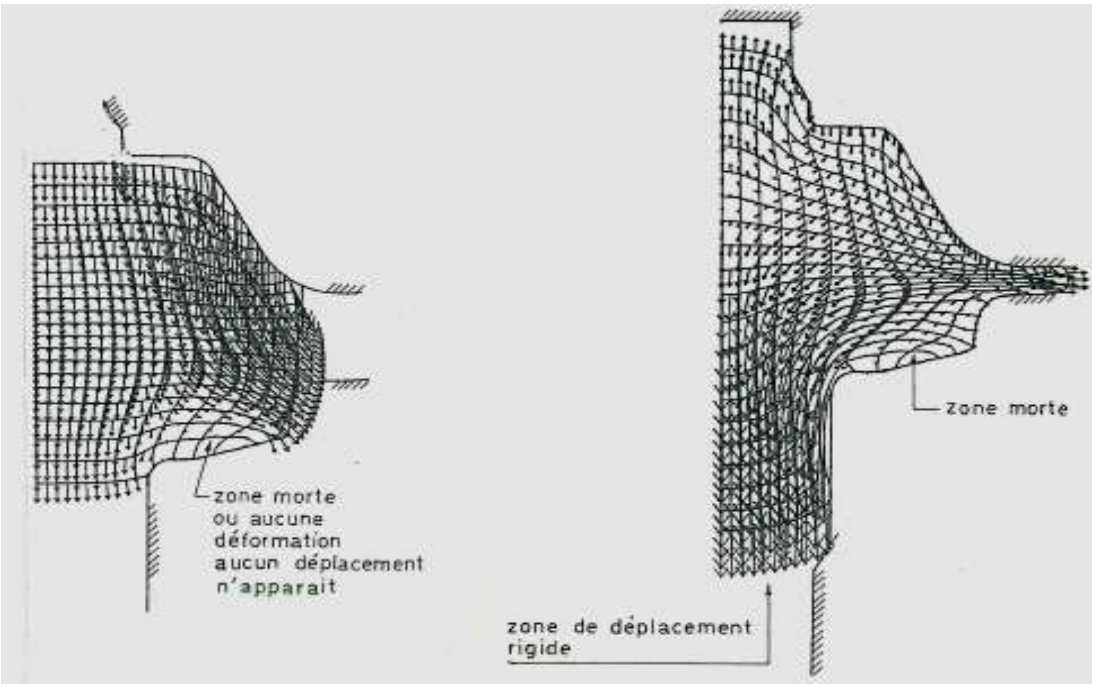


figure (2.2) : dessin des flux de matière illustrant les zones ou un maillage grossier suffit.[73]

Le concept de génération de maillage basée sur la métrique et de l'adaptation, la première fois par Ho Y. and Randolph M.F. en 1998 [74], est largement utilisée car elle se généralise, d'une manière naturelle, le processus de générer une grande variété de domaines [75].

La métrique peut être definite a priori, ou peut être le résultat d'une estimation d'erreur. produire un maillage simplifier dans l'espace métrique.

Les applications de ce concept à la génération de maillage et de l'adaptation sont discutées dans plusieurs etudes.

En 1998, George P.L and Borouchaki [76] a proposé un maillage bidimensionnel de type Delaunay algorithme de génération régi par une carte de métriques.

L'algorithme inserts les points avec un Noyau de Delaunay et utilise l'échange de bord afin d'obtenir un maillage souhaité qui se conforme avec un apriori une métrique riemannienne, Une autre illustration en deux dimensions est la solution adaptée de maillages présenté par Giraud-Moreau [77].

En d'autres termes, bien que les maillages non structurés fournir les l'environnement le plus approprié pour l'adaptation de maillage, il n'est pas toujours facile de définir un efficace métrique pour le problème d'optimisation que la métrique est définie à partir de l'interpolation. il n'est pas clair , cela affecte le système d'équations aux dérivées partielles avec plusieurs variables de flux. Pour résoudre ce problème, Dez [78] a suggéré que l'on utilise deux propriétés d'écoulement, la densité et le nombre de Mach, pour un débit de canal visqueux et non visqueux dans les applications.

La régularisation de maillage joue un rôle très important dans les vies industrielles des personnes dans le monde actuel, Perronnet [79]. Cela est du aux limites qui sont imposés par le développement et le cout de la réalisation des prototypes dans les différents domaines.

La demande intensive sur le développement de l'industrie, l'énergie dans le monde oblige les chercheurs à trouver des solutions rapide et précis son prendre beaucoup de temps. Cependant il est clair que l'utilisation des simulations numérique par les éléments finis restes parmi les méthodes les plus efficaces et prend une place axiale dans les pensées des chercheurs.

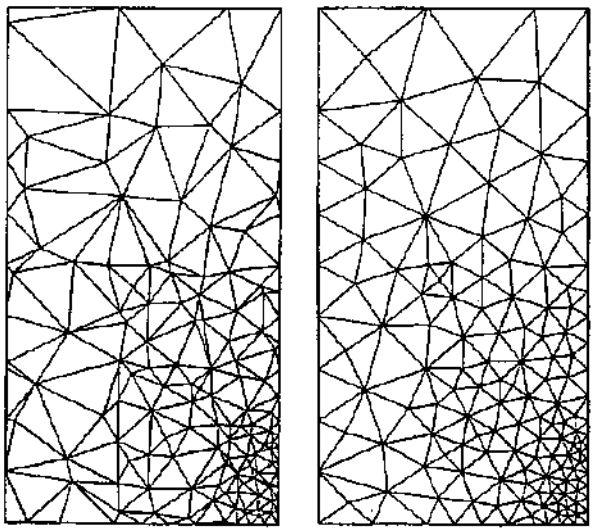


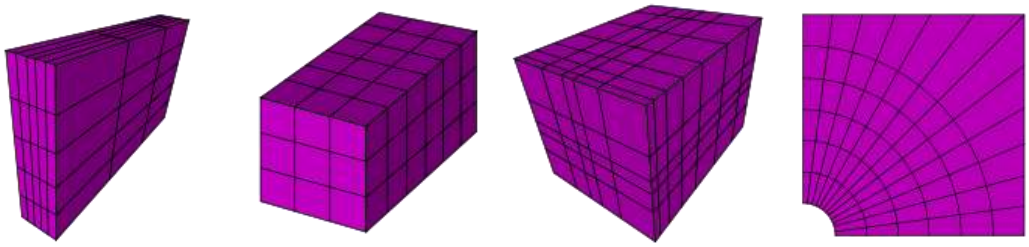
figure (2.3) : Sur la gauche des triangles dans une triangulation de points aléatoires à l'intérieur d'un rectangle et son lissage de Laplace sur la droite, respectivement.

On trouve dans l'article de Jordan [80], un exemple de travail qui examine le géo-comportement métrique de la transformation des éléments finis.

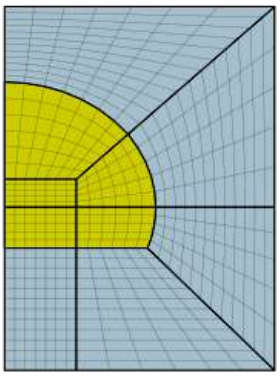
La méthode de Jordan a démontré que pour des éléments triangulaires isoparamétrique bidimensionnels le déplacement d'un nœud sur une frontière du domaine linéaire doit être au milieu. Connu comme le quart de la règle de point, il a été prolongé aux éléments de quadrilatère . Jordan a basé son travail sur l'analyse du déterminant jacobien de la transformation isoparamétriques et a inauguré une série de recherches sur l'acceptation du nouveau élément, voir [81].via les analyses de son déterminant Jacobien.

Les analyses par le déterminant Jacobien a fourni des résultats mixtes. D'une part, le programme et le contrôle d'éléments triangulaires est devenu disponible, et facile, mais Pour des éléments quadratiques il est rester indisponibles.

Les indicateurs d'éléments mal formés si en se Base sur la forme géométrique d'éléments pour plus d'aspect pratique en termes d'informatique et programme, ces indicateurs ont l'avantage d'être facilement utilisé pendant la génération de maillage. Néanmoins, les tests sur le déterminant Jacobien ne peuvent pas être remplacés quand des résultats numériques deviennent précis et sensibles en raison de la physique, des mathématiques, la géométrie complexe ou un certain autre aspect fondamental de la méthode d'élément finie.



(a) (b) (c) (d)



(e)

figure (2.4) : exemple de maillage hybride avec des grilles en 3D et en 2D (a) régulier, (b) cartésien, (c) rectiligne, (d,e) curviligne.

Donc, le développement sur les bases d'un maillage grossier, une interface graphique est créée affin d'accroitre l'interaction avec l'utilisateur et le choix de la méthode. Le développement des méthodes utiliser pour régulariser le maillage contribue à augmenter la précision des résultats.

les nouveaux schémas doivent présenter une bonne zone de transition entre les petits éléments et les éléments males former du maillage existant, afin de conserver une bonne continuité des résultats entre les éléments.

Ce sont des méthodes pour plus de précision dans de nombreux cas, l'inconvénient est probablement le temps de calcul qui peut être simplement prohibitif dans des cas réalistes. figure (3.5)

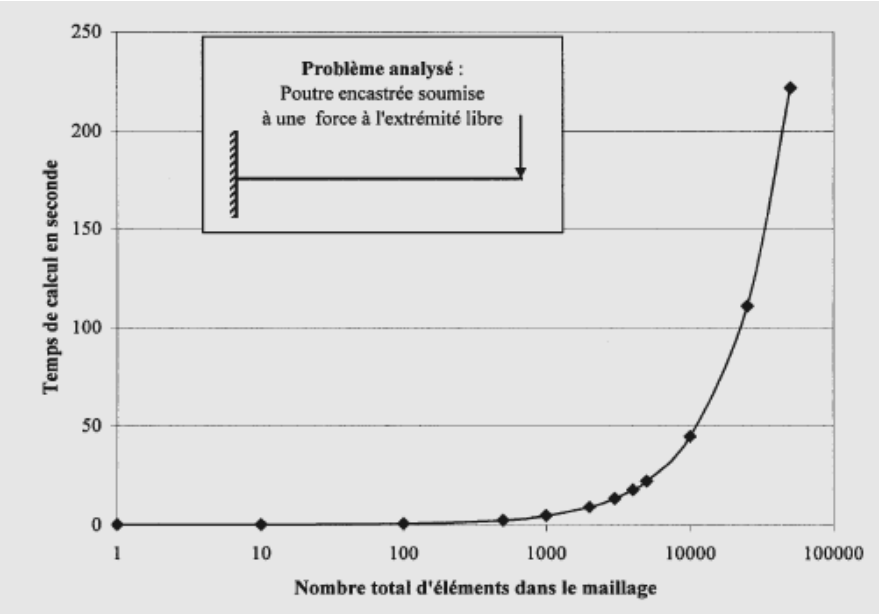


Figure (2.5) : Le temps en fonction du nombre d'éléments dans le maillage 2D [81].

La difficulté c'est que pour des géométries complexes [82] il faut utiliser des méthodes de régularisation pour améliorer les maillages utiliser, dans la partie qu'on va présenter, des travaux de plusieurs chercheurs qui ont été fait pour l'obtention des résultats plus a travers des maillages de régularisations. En trouve les différentes méthodes de régularisations et lissage de maillage :

1. la méthode de relocalisation des nœuds (r-version)
2. la subdivision des éléments (h-version)
3. Augmentation du degré polynomial de la fonction d'interpolation (p-version)
4. Le remaillage avec maillage indépendants

Un exemple d'un maillage de mauvaise qualité obtenu suite aux déformations excessives figure (2.6) [81].

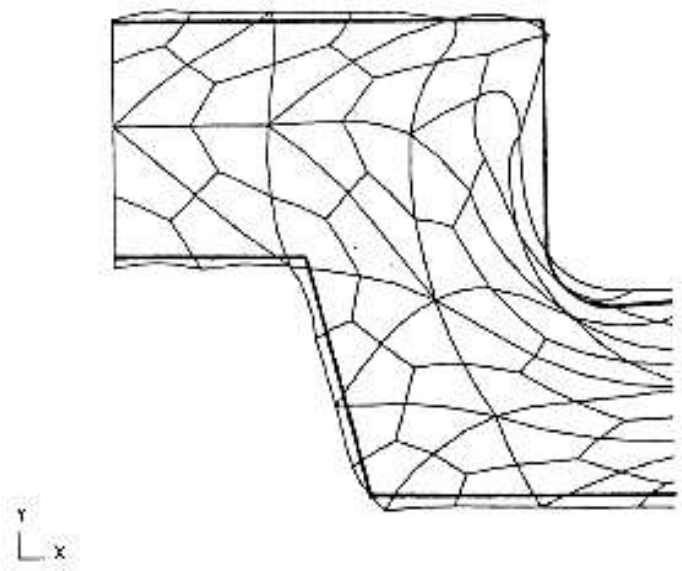


Figure (2.6) : Maillage de mauvaise qualité obtenu suite aux déformations excessives[81].

Une grande partie de calcul scientifique dans la technologie est la solution des équations différentielles partielles de divers type (pour la mécanique des solides, les caractéristiques aérodynamiques, la modélisation thermique,…) au moyen de la méthode d'élément fini. Cette méthode exige un maillage du domaine pour lequel les équations sont formulées. Ainsi, les algorithmes de maillage sont d'une importance majeure dans chaque simulation numérique basée sur la méthode des éléments finis. En particulier, l'exactitude et même la validité d'une solution est fortement attachée aux propriétés du maillage fondamentale du domaine à étudié.

Quelques méthodes fournit une extension du domaine d'applications vers des domaines ou le cout du maillage est prépondérant par rapport au cout de la résolution numérique (géométrie trés complexe), ainsi que vers les problèmes faisant appel à des solutions discontinues et des méthodes de régularisations (Belytschko and Tabbara, 1996)[84] et (Belytschko 1995)[85].

Nous exposons dans ce chapitre L'intérêt de la régularisation des maillages dans les domaines d'applications [85]. Ces applications ont fait une concurrence très intensive entres plusieurs chercheures.

La régularisation est parmi les méthodes les plus utilisés dans les simulations numériques pour ses propriétés d'approche aux résultats réels.

Les scientifiques s'intéressent aux calculs des solutions d'équations aux dérivées partielles très variées (en mécanique du solide, en mécanique des fluides, en modélisation de problèmes

thermiques, ...) par la méthode des éléments finis. Cette méthode utilise comme support spatial des calculs un maillage du domaine sur lequel les équations sont formulées.

Par suite, les algorithmes de construction de maillages occupent un rôle important dans toute simulation par la méthode des éléments finis d'un problème modélisé en équations aux dérivées partielles. En particulier, la précision, voire la validité, des solutions calculées est liée aux propriétés du maillage utilisé comme support.

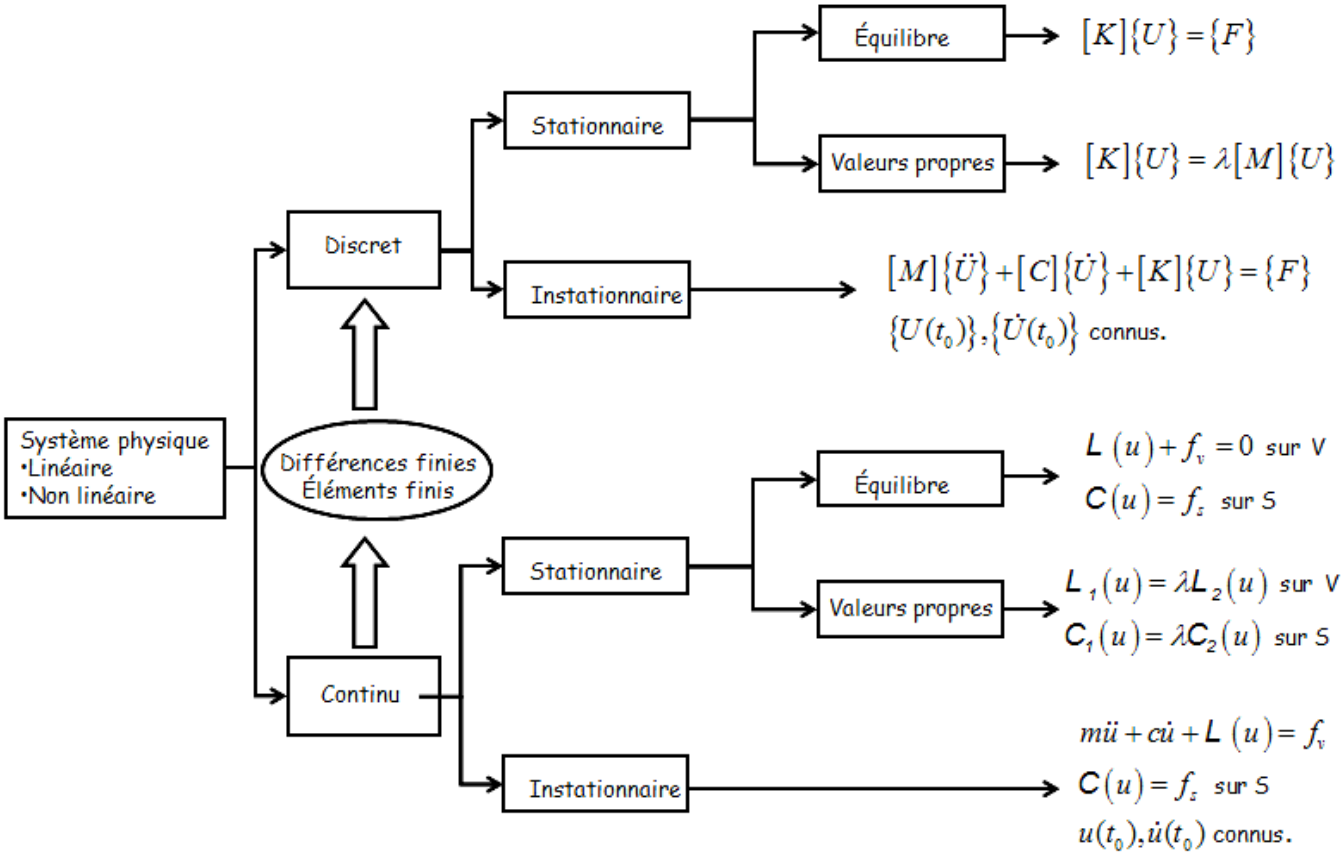


Figure (2.7) : Etapes générales avec a la fin évaluations des équations.

Ces maillages sont amélioré par des méthodes de régularisations et lissage de maillage.

La régularisation et le lissage des maillages, un mode qui a été considérer parmi les moyens les plus efficaces pour aboutir a des améliorations des résultats et avoir plus de précision et cela a travers plusieurs méthodes, Plusieurs chercheurs ont fait l'objet de leurs travaux les différentes méthodes de régularisation de maillage, et nous relatons dans ce qui suit quelques travaux relatifs à ces problèmes.

Bathe [86], en 1989**,** ont proposé une approche valable pour la génération automatique des maillages par les éléments finies. L'approche comporte, premièrement, une première construction de maillage, et deuxièmement, une version d'amélioration-h adaptative basées sur une analyse d'erreur.

Pour la construction initiale de maillage, un arrangement robuste de triangulation pour l'analyse bidimensionnel et un autre arrangement pour l'analyse de tétraèdre en 3D, dans les éléments des frontières extérieures, et Pour le processus d'amélioration adaptatif, un indicateur d'erreur est employé avec un facteur de relaxation pour obtenir les solutions efficaces.

Les arrangements de construction initiaux de maillage ont été mis en application pour les problèmes bidimensionnels tendis que le procédé auto-adaptatif d'amélioration de maillage a été seulement mis en application pour l'analyse en 2D.

Cyril Gruau a efectuer un travail en 2004 et a présenté le modèle dans la figure (2.8),

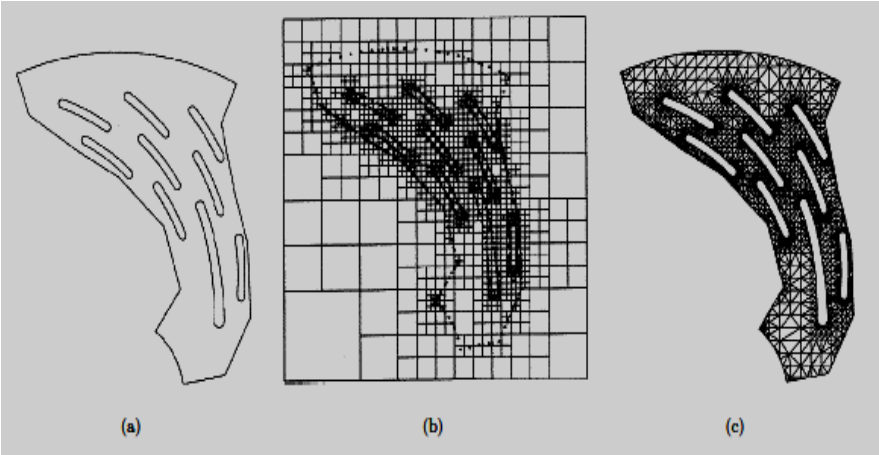


Figure (3.8) : méthode par arbre en 2D (Frey et George 1999)[87]

L'avantage principal de cette technique est la structure d'arbre qui est tr`es utile (*pour faire des localisations dans le maillage par exemple*). Son inconvénient majeur est le quasi impossibilité de générer des éléments anisotropes.

Et a présenté aussi la figure (2.9)

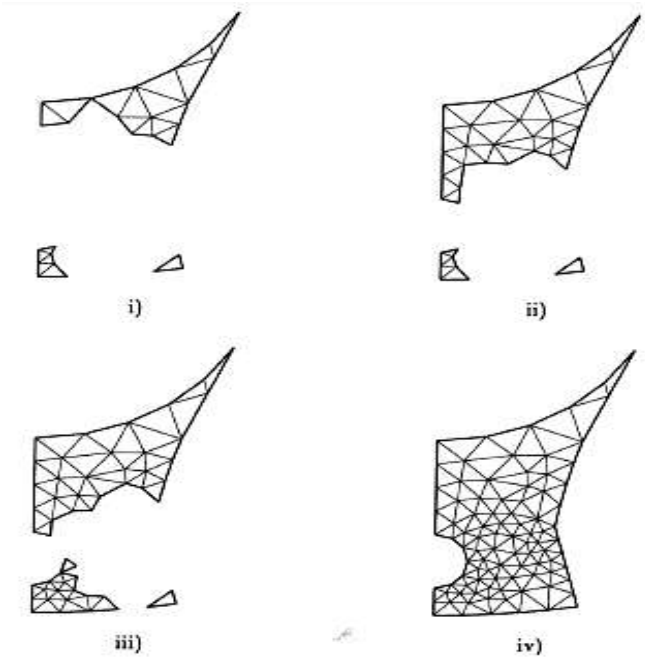


Figure (2.9) : méthode frontale en 2D (Frey et George 1999)

Des solutions d'exemple sont données pour démontrer les procédures et les solutions après la régularisations de ces maillages..

En octobre 1991, Yuan-Chong Zhang a effectuer dans un travail, l'approche quadrilatérale, il a remarqué que la numérotation a été faite par une méthode montante débutant par la droite, puis a progressé une autre c'est en partant par la gauche, ils ont fait par la suite, une subdivision des éléments en quatre éléments ,cela donnée plus de précision et une qualité de maillage plus fin et une approche rapide au résultats exactes [88].

L'approche commence à partir de la géométrie d'entrée d'un élément triangulaire approximatif qui doit être régularisé afin d'obtenir une maille tout en projetant une densité désirée. On propose plusieurs densités spécifiant les géométries pour spécifier la distribution désirée des mailles dans une forme close. Pour réduire l'erreur géométrique qui est inévitable dans ces cas, les bords de frontière sont interpolés par les courbes de cannelure de troisième ordre. La méthode est utilisée en calculant la densité désirée du maillage avec des points arbitraires. Un tableau qui représente les avantages et inconvénients des méthodes,

Mailleurs	avantages	inconvénients
Méthode par arbre	-structure en arbre très utile -bon maillage a l'intérieur	-Introduction de beaucoup de nœuds -mauvais maillage en peau -peu d'anisotropie possible
Méthode trontale (marche libre)	-excellente qualité géométrique Des éléments générés	-problèmes de convergence (front choatique)
Méthode de Delaunay	Très rapide	Frontière parfois difficile à régénérer Génération d'éléments de mauvaise q géométrique (slivers)
Optimisation topologique	Très robuste Dimension indépendant (4D) Simple à implémenter	Relativement lent

Tableau (2.1) : Comparatif des méthodes de génération de maillage.

Afin d'améliorer la qualité du maillage, les éléments triangulaires sont périodiquement modifiés par les processus locaux de transformation comprenant la division, les résultats ainsi que le processus sont montrés.

L'optimisation de la qualité locale du maillage est effectuée par un arrangement doux nodal optimal. Plusieurs exemples d'application sont donnés pour montrer les caractéristiques de l'approche présentée.

Ainsi, les zones ou il y a très peu de déformations qui apparaissent, ne nécessite pas un maillage fin figure (2.8)

La régularisation de maillage joue un rôle très important dans l'industrie et dans la vie de beaucoup de personnes au monde. Cela est du aux limites qui sont imposés par le développement dans les différents domaines.

La demande intensive sur le développement de l'industrie, l'énergie dans le monde oblige les chercheurs à trouver des solutions rapide et précis sans prendre beaucoup de temps. Cependant il est clair que l'utilisation des simulations numérique par les éléments finis restes parmi les méthodes les plus efficaces et prend une place axiale dans les pensées des chercheurs.

A. El-Hamalawi [89], en May 2000 a fait un travail ou a travers ce document, il explique les méthodes principales utilisées pendant la génération de maillage et la déformation d'élément, il a présentés ces résultats et quelques synthèses.

De nouveaux facteurs de déformation sont alors discutés, et a trouvé qu'il y a deux simples facteurs pour les mettre en application et aller a son l'allongement, en fournissent une mesure rapide de la qualité d'un élément. Quelques mailles démontrant leur utilisation sont finalement obtenues par cette présentation.

Un autre travail qui a été fait par Yutaka , en septembre 2001, son travail explique et présente un ensemble d'outils développés pour la régularisation de maillage en lissant par l'augmentation, ou la réduction des lignes [90].

La maille lissée avec la méthode proposé est réalisée en combinant l'ensemble des critères de Laplace et une évolution de maillage par une fonction de la courbure moyenne.

Pour augmenter les structures ou en trouve des éléments mal formés, une relation non linéaire est employé entre les normales et les sommets de ces mailles, les résultats sont données et présentées figure (2.10)

En septembre 2003, M. Aiffa a étudié le problème pour régulariser et lisser les mailles des triangles et du tétraèdre par les éléments finies, où des sommets sont périodiquement déplacés pour améliorer la qualité globale des éléments par l'optimisation pour une forme métrique [91].

Il propose une approche géométrique pour résoudre le problème local d'optimisation.

Des ensembles de niveau métrique indiqué sont employés pour caractériser l'ensemble de points optimaux. Ils ont présenté également une nouvelle qualité de maillage métrique pour le tétraèdre qui données de bonnes résultats.

Hongtao Xu, **e**n 2006, a travailler sur un algorithme de lissage et de régularisation qui a améliorer les maillages de mauvaise qualité c-a-d qui a des éléments mal formés [92].

De telles mailles font des problèmes pour l'analyse par les éléments finis puisque la présence de ces éléments déformés dans les maillages réduit l'exactitude de l'analyse.

L'algorithme est fait dans le but a améliorer la qualité du maillage en ajustant la position des nœuds internes de la maille avec une méthode d'optimisation pour un système de ressort de torsion.

La méthode de Gauss-Newton est employée pour optimiser la fonction objective de ce système pour avoir l'endroit optimal de chaque nœud interne. La démonstration de l'amélioration offerte par l'application de l'algorithme à de bons résultats.

M.C. Lee, **e**n 2008, exprime dans sont contenue une approche systématique à la génération de maillage par la triangulation d'élément et après le lissage aussi basé sur l'optimisation, (*le modèle pris est celui d'un avion avec les résultats présentée en ce document*) [93].

Notre travail tombe dans cette voie et essaye de contribuer à l'amélioration des maillages, cette amélioration sera directement liée à la diminution du temps de calcules, et aussi pour plus de précision, Parmi les méthodes, nous avons choisi celle qui se base sur la distance métrique, une partie de ce travail sera consacrée au développement de l'algorithme de la régularisation.

Les maillages par élément fini et la régularisation pour les applications a travers les diffèrent domaines de l'industrie constitue un objective essentiel dans plusieurs domaines tel que la médecine, aéronautique, génie civile, robotique … [94,95]. Dans la recherche actuelle, nous soulignons le développement intense des méthodes de régularisation de maillage par le déplacement des nœuds [96,97].

D'après les travaux publiés sur les propriétés d'un maillage , nous avons trouvé aussi que la régularisation d'un maillage reflète a avoir plusieurs améliorations des résultats.

Les travaux de recherches sont intéressés par ces domaines.

Nous avons décrit, dans cette partie une petite par de l'historique de la régularisation et lissage de maillage dont la configuration de quelques revue et travaux, d'autre informations sont dans les annexes.

II.2. procédures et simplification de maillage:

Les maillages polygonaux sont largement répandus dans les applications graphiques et les simulations numériques en grande partie parce qu'ils permettent de représenter virtuellement tout type de géométrie et de topologie pour des surfaces de complexité quelconque.

Toutefois, les contraintes exercées sur ces maillages diffèrent largement d'un domaine d'application à un autre. Arrivé a simplifié un maillage es l'une des taches issue de ce travail de recherche, les algorithmes de simplification de maillage sont conçus pour générer les niveaux de résultats pour les différentes applications, dans les simulations numériques, on projette pour une précision ainsi que pour un contrôle de la qualité des éléments.

L'un des compromis est de cherché entre le nombre de sommets (*i.e. le nombre de degrés de liberté*) et la qualité de l'approximation géométrique de la surface. Dans chaque domaine d'application, c'est l'utilisation finale du maillage qui guide les algorithmes de simplification en fonction des requis et besoins de cette application. La motivation principale de la simplification de maillage est de créer un maillage optimal, vers une approximation très proche du réel. Dans cette partie on va essayer de faire une approche sur le lissage, et qui va être présenté par deux points :

II.2.1. Procédure de lissage :

La plupart des triangulations de surfaces générées par un algorithme de reconstruction d'iso-surfaces sont souvent facéties. Il est donc nécessaire de lisser la surface avant de regénérer un maillage géométrique sinon la procédure de simplification peut s'avérer inefficace à supprimer les déformations.

La plupart des procédures de lissage souffrent de plusieurs défauts, l'un des plus pénibles est lié à la contraction de la surface initiale qui résulte après plusieurs étapes de lissage.

Comme les techniques de lissage sont appliquées plusieurs fois, un triangle peut tout à fait dégénérer en un sommet. Par exemple, le filtrage de Gauss consiste à faire appel à une fonction vectorielle utilisant les paramètres de surface avec un noyau de Gauss. Cette technique peut s'étendre au cas des surfaces discrètes. Dans ce cas, la complexité de l'algorithme est linéaire en nombre de sommets. La nouvelle position d'un sommet est calculée comme un barycentre pondéré

des positions de ses voisins de premier ordre (*c.a.d les sommets connectés au sommet par des arêtes*) et la procédure est répétée un grand nombre de fois.

Pour prévenir toute contraction, deux passages de filtrage gaussien sont appliqués. Après une première étape effectuée avec un facteur positif, une deuxième étape est appliquée sur tous les sommets, mais cette fois avec un facteur négatif , cette procédure est équivalente à un filtre de passage pour lequel la courbure de la surface joue le rôle de la fréquence. Il convient toutefois de faire attention à la préservation des lignes caractéristiques (*arêtes vives, coins, etc*).

Autre résultat par la procédure de Gauss sur un maillage [98].

II.2.2. Simplification géométrique de maillage :

Le maillage de référence initial n'est, en général, pas adapté à une description précise de la géométrie, pour au moins deux raisons :

il contient généralement :

(i) un nombre d'éléments redondants (*c.a.d qui ne contribuent pas réellement à l'approximation géométrique de la surface*).

(ii) des artéfacts géométriques (*petits détails*) qui doivent être éliminés. Pour résoudre ces problèmes, l'approche qu'on suggère souvent dans les rapports consiste à simplifier la triangulation de surface à l'aide de modifications locales du maillage.

A cette effet, il introduit une bande de tolérance globale autour de la surface (*à une distance dite d'Hausdorff donnée*) pour contrôler les opérations de simplification, de manière similaire à l'approche proposée initialement par plusieurs chercheurs.

L'objectif été de supprimer les éléments redondants, ainsi que les détails insignifiants, tout en préservant la géométrie de la surface sous-jacente. Dans ce qui va suivre quelques explications sur la distance de Hausdorff discrète $d_H(F_1, F_2)$:

la Distance de Hausdorff discrète $d_H(F_1, F_2)$:

L'algorithme de simplification décrit ci-dessous est basé sur l'évaluation de la distance

de Hausdorff entre la triangulation initiale et le maillage géométrique de référence.

On rappelle que la distance d'un point X de R^3 à un domaine fermé borné F est donnée par :

$$d(X,F) = \inf_{Y \in F} d(X,Y)$$

Où $d(X,Y)$: représente la distance euclidienne usuelle.

Soient F_1 et F_2 deux domaines fermés de R^3, si (F_1, F_2) mesure la quantité sup X_2F_1 $d(X,F_2)$, alors la distance de Hausdorff $d_H(F_1, F_2)$ entre F_1 et F_2 est définie comme :

$$d_H(F_1, F_2) = \sup(\rho(F_{1,}F_2), \rho(F_1, F_2).$$

Cette mesure continue est plutôt chère à calculer (car elle doit être calculée pour tous les points appartenant aux triangles), ils propose donc une approximation discrète de cette mesure de Hausdorff, basée sur les idées suggérées qu'ont trouve dans [98].

Pour garantir la propriété de proximité P_0, une bande de tolérance globale autour de la surface (à une distance de Hausdorff) est introduite des deux côtés du maillage de référence *Mref.* Alors, il est suffisant de tester que chaque triangle résultant de la procédure d'optimisation du maillage reste contenu dans cette bande, en outre, pour garantir la propriété de rugosité P_1, une autre contrainte est ajoutée de manière à satisfaire les deux requis de proximité et de rugosité :

$d_H(k, M_{ref}) \leq \delta$ et $\langle v_k(k), v(k) \rangle \geq \cos(\theta)$

avec $v_k(k)$ est la normale unitaire à la surface au sommet k du triangle K

et $v_k(k)$ est la normale unitaire à K, (h , i représentant le produit scalaire usuel de R^3).

II.3. méthodes de régularisation et Lissage de maillage :

II.3.1 Introduction :

Les différents maillages produits par des algorithmes de génération de maillage peuvent souvent être optimisées avec un algorithme de lissage de maillage qui corrige la déformation d'élément dans la maille.

Un algorithme de lissage replace des nœuds de sorte que la maille soit de plus de haute qualité. Le lissage de maillage est habituellement fait dans un processus itératif qui ne change pas la connectivité d'élément.

Parmi ces méthodes ont cite :

II.3.2. la méthode d'établissement d'une moyenne :

Une classe d'approches sans heurt est la méthode d'établissement d'une moyenne. Beaucoup de méthodes d'établissement d'une moyenne sont itératives.

Pendant le procédé d'itération, chaque nœud interne est déplacé à l'endroit moyen de ses nœuds environnants (*c.-à-d ces nœuds reliés à lui par un bord*). Plusieurs itérations sont habituellement nécessaires afin de déplacer des nœuds par une distance spécifique. L'algorithme le plus connu et le plus employé est celui de Laplace [99].

La raison pour laquelle le lissage de Laplace est employé couramment est que son exécution est facile et ses résultats sont souvent satisfaisants. Cependant, l'inconvénient parfois est qu'il produit des rubans dans des éléments.

Dans certaines situations, il peut également créer des éléments inadmissibles d'une manière générale. Beaucoup de travaux utilisant une moyenne dans de divers géométries d'appui les nœuds environnants, tels que des sommets, et pour replacer ces nœuds, et Pour surmonter le problème des rubans et des éléments inadmissibles résultant de la relocalisation de nœuds, il est possible de contraindre la génération de maillage par certains facteurs limitatifs d'élément, tels que la forme, à une gamme qui permet d'empêcher l'augmentation de la déformation d'élément au-dessus d'un certain seuil.

On peut montré la méthode d'établissement d'une moyenne a travers l'algorithme de lissage de Laplace :

L'algorithme de lissage de Laplace :

L'algorithme de lissage de Laplace [99] est une méthode itérative employée pour le lissage de maillage. Il est employé couramment à sa simplicité dans l'application, bien qu'il puisse générer des rubans et aussi des éléments inadmissibles dans certains cas.

Dans l'algorithme de lissage de Laplace, n'importe quel nœud interne (le nœud D sur le figure (2.13), par exemple) relié par un ensemble de nœuds de N est déplacé au centre de surface du polygone es constitué par l'ensemble de nœuds qui l'entour.

Dans les mailles bidimensionnelles, le nouvel coordonnées (X_0, Y_0) du nœud interne peut être calculé avec les équations (2.1) et (2.2) :

$$x_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad . \qquad (2.1).$$

$$y_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \quad . \qquad (2.2).$$

Avec (X_0, Y_0) sont les coordonnées du centre de surface du polygone constitué par l'ensemble des N nœuds reliés au nœud interne

Et (X_i, Y_i) sont les coordonnées des nœuds qui sont autours,.

La figure (2.13) montre la position du centre pour le polygone; ou le nœud D sera déplacé à cette position.

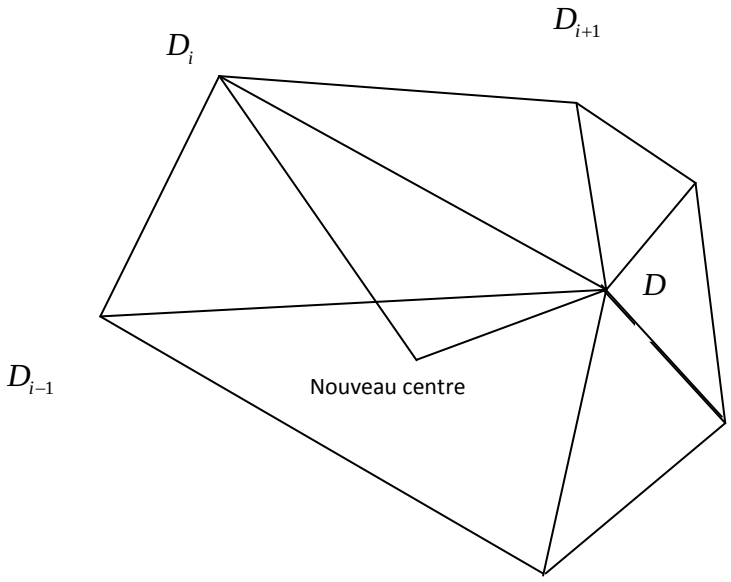


Figure (2.10) : Illustration du lissage de Laplace.

Il est possible de montrer que l'équation (2.1) et l'équation (2.2) peuvent être dérivées en réduisant au minimum l'énergie d'un système de translation de ressort.

L'énergie E d'un système de translation de ressort est exprimée en équation (2.3) :

$$E = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} K (L_i)^2 \quad . \qquad (2.3).$$

Où K : est une constante,

L_i : est le déplacement du ressort de translation .

et, n : est le nombre de nœuds liés au nœud interne.

Une autre méthode est celle basée sur l'optimisation,

II.3.3. la méthode à base d'optimisation :

Un deuxième type de méthode de lissage de maillage a base d'optimisation, L'optimisation de quelques facteurs importants qui affectent la qualité d'élément ou combinent plusieurs algorithmes d'une manière a permettre de collecter la bonne qualité de chaque algorithme d'être employée dans le même processus sans heurt .

Par exemple, les angles intérieurs des éléments finis peuvent être employés comme facteurs qui sont optimisés .

Habituellement, les techniques de lissage basées sur l'optimisation peuvent fournir la qualité élevée de la maille. Comment étant, la qualité obtenue dépend d'un coût informatique très élevé .

Cette méthode peut être montrer comme suite :

Description de la Méthode à base d'optimisation :

Afin de construire une évaluation de densité des données observées il est nécessaire de choisir une valeur d'un paramètre de lissage.

Dans cette section le choix asymptotique optimal pour certaines valeurs, discuter les stratégies les plus efficaces et les plus pratiques, pour une mesure globale d'efficacité dans l'estimation/est fournie par l'erreur carrée intégrée , moyenne décrite dans au paravent.

Les expression approximative donne des valeurs pour prouver que la valeur de h est réduit au minimum dans un sens asymptotique est :

Cette valeur optimale pour h ne peut pas immédiatement être employée dans la pratique puisqu'elle implique la fonction de densité inconnue. Cependant, elle est très instructive en montrant comment le lissage des paramètres devrait diminuer avec la dimension de l'échantillon, à savoir proportionnellement à n~1/5, et en mesurant l'effet du de courbure/par le facteur

Le développement du lissage basé sur l'optimisation qui utilise le maillage par triangulation a été fait par M.Pourazady and M.Radhakrishman En May 1990[100].

Dans ce cas il existe deux types de lissage optimale :

II.3.3.a Lissage optimal normal :

L'évaluation de la formule optimale pour h quand/est une densité normale rapporte la formule simple

$$h = (\frac{4}{3n})^{1/5}\sigma \qquad (2.4)$$

où **σ** l'écart type de la distribution.

L'acceptation de la normalité est potentielle mais peut nous tromper en essayant d'estimer une densité non-paramétrique .

mais, pour des distributions uni-nodale au moins, elle donne un choix utile du paramètre de lissage qui exige de très petit calcul. Cette approche au lissage a le mérite potentiel d'être prudente et conservateur.

Si ceci est alors appliqué aux données non-normales il tendra à induire. La réduction conséquente du désaccord a au moins le mérite de l'over interprétation discontinue des dispositifs qui peuvent en fait être dus à la variation de prélèvement. Toutes les évaluations bidimensionnelles un et de densité basées sur des données continues sans restriction en chapitre 1 ont été produites avec la normale paramètres doux optimaux. Afin de s'adapter longtemps a coupé la queue les distributions et les annexes possibles, a évaluation robuste est parfois préférable à l'écart type de témoin habituel. Un choix simple est l'estimateur médian de déviation absolue

$$\tilde{\sigma} = median\left\{\left|y_i - \tilde{\mu}\right|\right\} / 0.6745 \qquad (2.5)$$

On a (*échantillon ; voir Hog 1979*) des paramètres doux optimaux normaux peuvent également être trouvés dans le cas multidimensionnel, ceux-ci sont donnés près

$$h_i = \left\{ \frac{4}{(p+2)n} \right\}^{1/(p+4)} \sigma_i \qquad (2.6)$$

Rudemo 1982, et archer 1984, appliqué ces idées au problème du choix de largeur de bande, par l'évaluation de l'erreur carrée intégrée (ISE)

$$\int \{\hat{f}(y) - f(y)\}^2 dy = \int \hat{f}(y)^2 dy - 2\int f(y)\hat{f}(y) dy + \int f(y)^2 dy \qquad (2.7)$$

La dernière période du côté droit n'implique pas le H, les autres limites peuvent être estimées près

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \int \hat{f}_{-i}{}^2(y) dy - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{f}_{-i}(y_i) \qquad (2.8)$$

dans ses limites et résultats constitutifs d'application sur la convolution des densités normales. Le panneau gauche de figure (2.3) montre la fonction B.5 de contre-vérification) pour données de résultats. Ceci montre un minimum a peut prés h = 0.018. Le panneau droit de la figue la figure montre l'évaluation de densité produite par cette valeur de paramètre doux.

Exemple d'algorithme

L'algorithme de Gauss-Nweton :

L'algorithme de Gauss-Newton [100] est un algorithme d'optimisation non linéaire itératif employé pour résoudre problèmes des moindres carrés non linéaires. Cette algorithme sera employé dans le nouvel algorithme de lissage . Dans cette partie, une description de l'algorithme de Gauss-Newton est donnée.

Formulation de problème :

Supposez que nous avons une fonction objective s à réduire au minimum dans le modèle suivant :

$$\min \quad s(x) = \frac{1}{2} f(x)^T f(x) \ . \tag{2.9}$$

où x est un vecteur, son transposent est $x^T = (x_1, ..., x_n)$, n est le nombre de composants dans le vecteur x, $f(x)$ est un vecteur de fonction, $f(x)^T = (f_1(x), ..., f_m(x))$ et m est le nombre de composants dans le vecteur de fonction $f(x)$.

La formulation (2.6) est un problème d'optimisation. L'optimisation trouve la solution au problème qui réduit au minimum la fonction objective s (x}. Quand m= n, ce problème devient un ensemble d'équations non linéaires sous la forme suivante :

$$f(x) = 0 \quad . \tag{2.10}$$

II.3.3.b **Dérivation de système d'équation linéaire** :

En prenant le dérivé de s dans l'équation (2.6), l'équation suivante peuvent être obtenus :

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial f_i}{\partial x} = \frac{\partial f^T}{\partial x} f. \tag{2.11}$$

Nous assumons cela

$$J^T = \frac{\partial f^T}{\partial x} \quad . \tag{2.12}$$

là où le J^T est la transposée de la matrice de Jacobi.

La matrice de Jacobi peut être augmentée comme :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

et nous avant :

$$P = \frac{\partial s}{\partial x} \quad . \tag{2.14}$$

ou, d'une manière équivalente, cela est :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial x_1} \\ \frac{\partial s}{\partial x_2} \\ \cdots \\ \frac{\partial s}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

Des équations (2.12).(2.13) et (2.15), nous avons :

$$P = J^T f \, . \tag{2.16}$$

Pour réduire au minimum la fonction objective dans l'équation (2.9), nous devrions avoir :

$$P = 0 \quad . \tag{2.17}$$

En augmentant P au point $x=x^n$ avec les series de Taylor ,

nous obtenons

$$P(x) = P(x^n) + \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x^n} (x - x^n) \qquad (2.18)$$

Puis, en substituant les équations (2.16) dans équation (2.17), nous avons

$$0 = P(x^n) + \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x^n} (x - x^n) \quad . \qquad (2.19)$$

A partir de l'équation (2.19), nous obtenons

$$x = x^n - (\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x^n})^{-1} P(x^n) \quad . \qquad (2.20)$$

Clairement,

$$\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x^n} = \left.\frac{\partial (J^T f)}{\partial x}\right|_{x^n} \quad . \qquad (2.21)$$

Supprimant les dérivés du deuxième et au-dessus de l'ordre comme est fait dans (2.16), nous obtenons

$$\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x^n} = J_n{}^T J_n \qquad (2.22)$$

où J a la valeur de J_n pour $x = x^n$.

Par la substitution des équations (2.20) et (2.14) dans l'équation (2.18), et l'utilisation pour la prochaine étape la valeur x^{n+1},

l'équation suivante peuvent être obtenus :

$$x^{n+1} = x^n - (J_n{}^T J_n)^{-1} J_n{}^T f_n \quad . \qquad (2.23)$$

Nous avons

$$d^n = -(J_n{}^T J_n)^{-1} J_n{}^T f_n \quad . \tag{2.24}$$

et aussi

$$x^{n+1} = x^n + d^n \quad . \tag{2.25}$$

Dans l'équation (2.25), il est possible de montrer que le d^n est toujours négatif. Ainsi, le x^n est toujours décroissant avec le n croissant.

Pour optimiser plus loin l'équation (2.25), une grandeur scalaire λ^n est présentés dans l'équation (2.25).

Le domaine du paramètre λ^n est [0, 1]. Puis, nous obtenons l'équation suivante :

$$x^{n+1} = x^n + \lambda^n d^n \quad . \tag{2.26}$$

Le pas dans la direction décroissante la plus raide peut être obtenu en exécutant une recherche unidimensionnelle de λ^n ; avec l'équation (2.26). Après que des bas spécifiques d'une précision atteint pendant la recherche, le vecteur variable x soit obtenus.

Substitution de la valeur x dans équation (2.9), nous trouvons la valeur optimale s, de ce fait, résoudre le problème.

En ce chapitre, trois algorithmes qui sont étroitement liés avec le nouvel algorithme doux ont été présentés en détail. Ces algorithmes étaient de Laplace, et de Zhou et Shimada, et aussi l'algorithme de Gauss-Newton.

II.2.3. la méthode a base physique :

Un troisième type de méthode douce est lissage a base physique. les méthodes Physique-basés replacent des nœuds basés sur les règles du système physique qu'ils simulent. une méthode physiquement basée qui simule une maille comme système de translation de ressort dans lequel les forces agissent sur les nœuds. Zhou et Shimada ont présenté un autre algorithme physiquement basé sur un système de ressort de torsion. Leur algorithme est limité à triangulaire, à quadrilatéral, et mailles mélangées de triquad (*c.-à-d., les mailles mélangées de triquad se composent de mélange des éléments triangulaires et des éléments quadrilatéraux*). Dans le cas des mailles triangulaires et des mailles quadrilatérales, parce que dans le cas chaque noeud de maille l'algorithme doux de Zhou et de Shimada compare indisposent les paires d'angles (c.-à-d., angles des éléments adjacents) qui sont formés au noeud et puis ajustent la position du noeud pour faire la différence dans les angles adjacents être aussi petite comme possible. Zhou et Shimada' ; l'algorithme discute en plus détail par la suite.

l'algorithme de lissage de Zhau et Shimada :

Zhou et Shimada [111] ont présenté un autre algorithme de lissage à base physique, Leur algorithme est basé sur le concept d'un système de ressort de torsion et est employé pour le lissage de maillage. Dans ce qui va suivre,on va présenté la formulation et les étapes de l'algorithme. On peut trouver Plus de détail dans [112].

La Formulation :

Un système de ressort de torsion est un système qui se compose de ressorts, qui peuvent seulement être appliqués avec la force de torsion. La force de torsion est une force de rotation qui fait tordre un objet, l'énergie d'un système de ressort de torsion pour un polygone peut être exprimée comme :

$$E = \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{2} K(\theta_i)^2 \quad . \qquad (2.27).$$

Où n est le nombre de sommets du polygone qui sont liés au noeud interne (par exemple, noeud D sur la figure (2.2)) par une arrête,

K est une constante,

et D_i de sommet qui a un angle associé ,

θ_{2i} qui est l'angle constitué par la ligne d'un noeud interne avec le sommet et l'arrête du polygone.

La figure (2.2) contient une illustration de l'endroit de l'angle θ_{2i-1} pour un noeud n_i de l'angle θ_{2i-1} du sommet D_i, et l'angle θ_{2i-1} du sommet D aux D_i constitués par L'arrête $\overline{D_iD}$ et l'arrête $\overline{D_{i-1}D_i}$.

L'angle θ_{2i} est l'angle au sommet D_i formé par l'arrête $\overline{D_iD}$ et par l'arrête $\overline{D_iD_{i+1}}$.

II.2.3. b Étapes d'algorithme :

Les quatre étapes pour calculer les nouvels coordonnées de n'importe quel noeud interne dans l'algorithme de lissage de Zhou et de Shimada sont comme suit. Des symboles relatifs sont illustrés sur la figure (2.3).

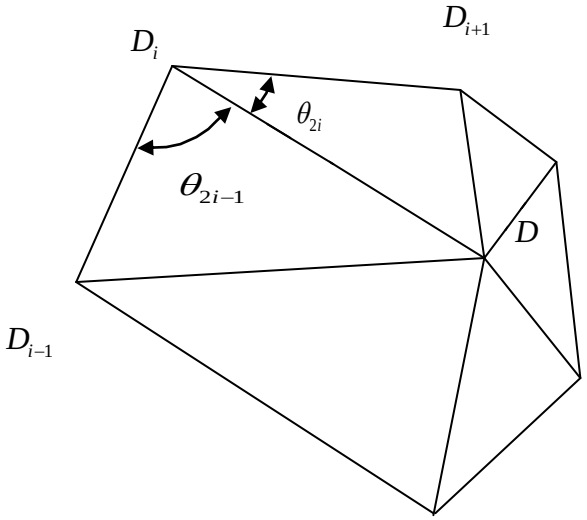


Figure (2.11) : illustration de l'angle θ_{2i-1}, l'angle θ_{2i}.

Étape 1

Deux angles, θ_{2i} et θ_{2i-1}, sont calculés pour chaque D_i interne de noeud. Ces angles sont définis dans les équations (2.27) et (2.28) :

$$\alpha_1 = \cos^{-1}\left(\frac{v_j . v_{j+1}}{\|v_j\| \|v_{j+1}\|}\right) \quad . \qquad (2.28).$$

$$\alpha_2 = \cos^{-1}\left(\frac{v_j . v_{j-1}}{\|v_j\| \|v_{j-1}\|}\right) \quad . \qquad (2.29).$$

Ou v_{j-1}, v_j , v_{j+1} sont des vecteurs qui proviennent du même sommet D_j .c.a., et D_j est relié aux autres noeuds, suivant les indications du schéma 2.3 pour le noeud interne D_j du polygone.

Étape 2.

Le α d'angle ; (défini ci-dessous) tourner le bord v, est calculée. L'angle est calculé comme exprimé en équation. (2.30) :

$$\beta_i = (\alpha_2 - \alpha_1)/2 \quad . \qquad (2.30).$$

Comme nous montrons dans dans ce qui va suivre, tournant le bord par le β_i i,, qui est conçu pour rapporter $\alpha_1 = \alpha_2$, est équivalent à optimiser le système de ressort de torsion.

Étape 3.

L'arrête v_j est tourné par θ_i au sujet du sommet D_j. Cette rotation fait l'arrête v_j à situer sur la ligne bisannualité du sommet D_j d'aie. (La ligne bisannualité d'un sommet est la ligne qui traverse le sommet tels qu'elle bissecte l'angle interne au sommet.)

Étape 4

De même, parce que sommet s'est relié au décollement interne de noeud, la nouvelle position du noeud peut être trouvée en appliquant l'étape 1 à l'étape 3. Le resuit est un ensemble de nouvelles positions de noeud. En prenant à OIE la position moyenne de l'ensemble de ces nouvelles positions avec les équations (2.31).et (2.32). l'endroit (X_0, Y_0) du nouveau noeud D (est trouvé. Cette position remplace le noeud Dj' ; position originale de s. (Le Di est déplacé à (X_0, Y_0)) le nouveau position' ; les coordonnées de s sont (2.31). (2.32).

:

$$x_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x'_i \quad . \qquad (2.31).$$

$$y_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y'_i \quad . \qquad (2.32).$$

là où(x'_i , y'_i)sont les coordonnées du noeud qui est atteint par la rotation du bord v_i , (X_0, Y_0) est le nouvel endroit du noeud D, et n est le nombre de noeuds liés au noeud interne.

:

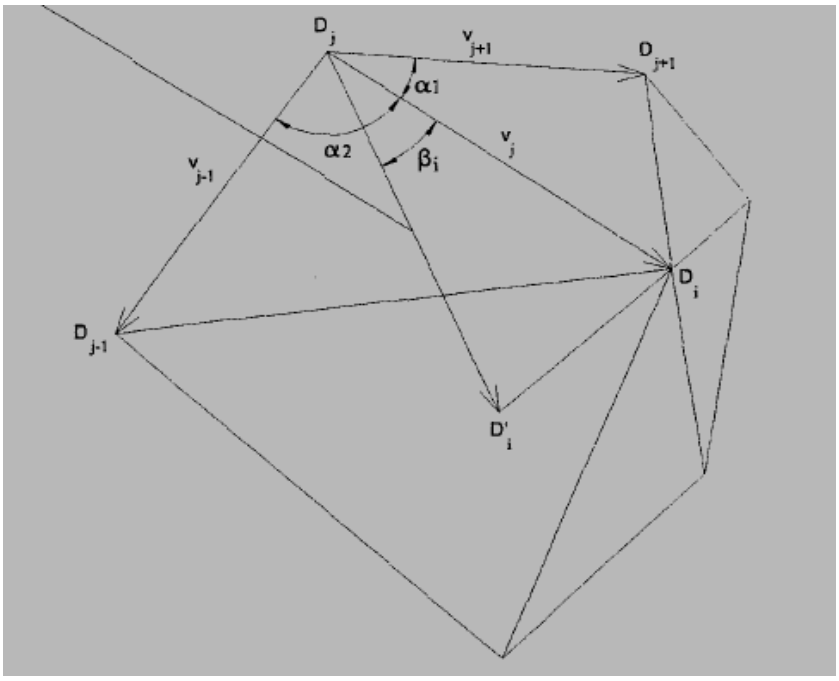


Figure (2.13) : La nouvelle position par l'algorythme de Zhau et Shimada

L'algorithme d'optimisation de Gauss-Newton.On va voir quelques exemples et la comparaison :

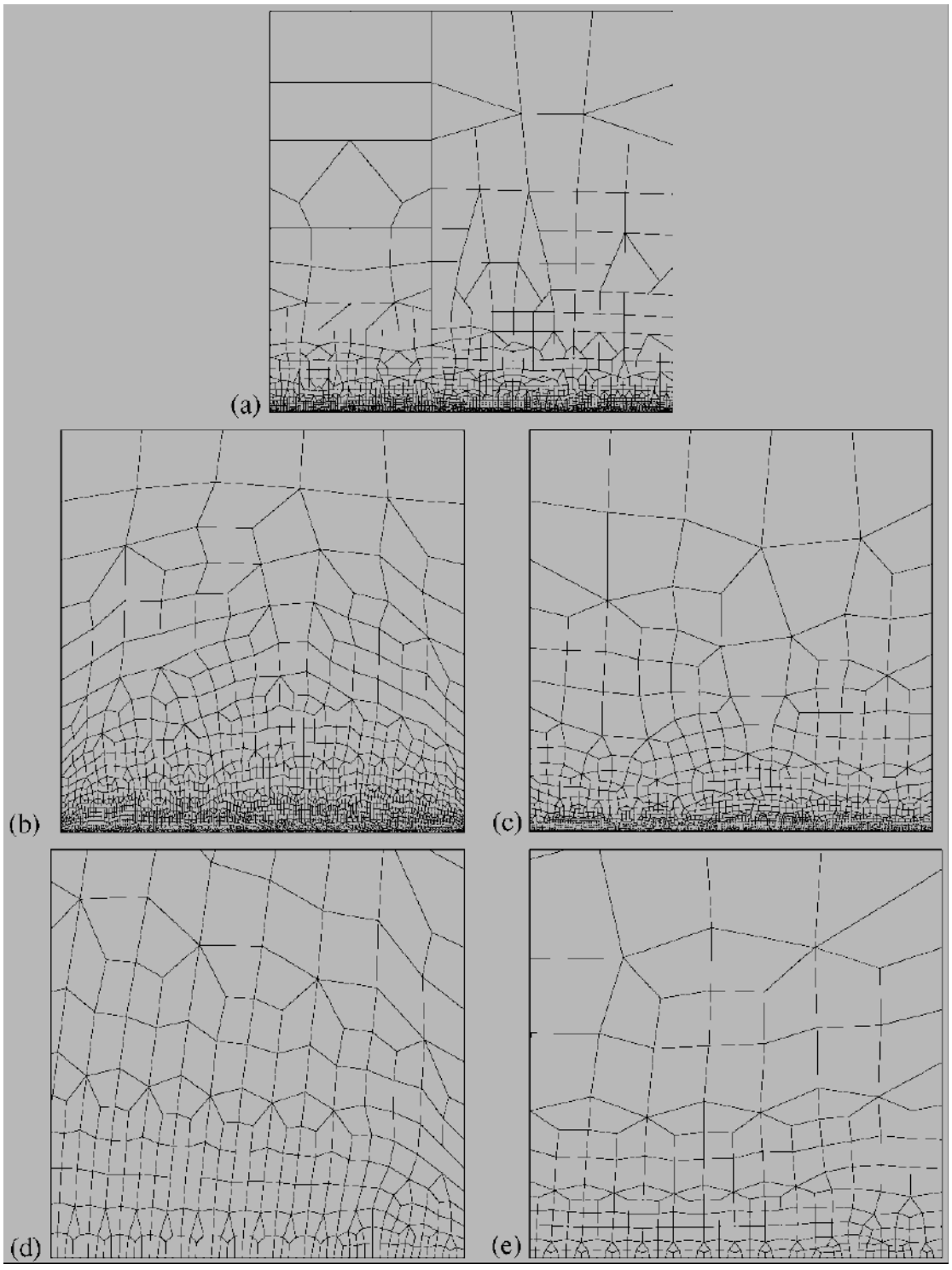


Figure (2.13) : Comparison entre les resultants obtenues après lissage et le maillage initiale:(a) maillage initial; (b) résultat du premier lissage; (c) résultat du lissage par algorithme modied ; (d) détails du maillage initile ; (e) détails du maillage obtenue après lissage par la méthode modied.

Nous avons vu que la régularisation de maillage par les éléments finis est très compétitive dans beaucoup de domaines et même dans le futur domaine de la recherche du génie.

L'étude bibliographique montre que l'utilisation des différentes méthodes de régularisation de maillage dans les géométries complexes ont évoluée avec l'évolution des modes utilisé dans le choix des facteurs.

Des difficultés pour avoir des résultats précis avec les méthodes classiques de résolution des équations aux dérivées partielles existent encore.

L'utilisation des maillages non structurés type éléments finis avec une mise en œuvre sur des géométries complexes est avérer indispensable.

Une nouvelle approche reste cependant une technique de choix de facteurs pour être a la base de la méthode en raison de la précision des résultats qu'elle produit et de la simplicité relative a la mise en œuvre dans les différents problèmes pour les cas complexes ce qui la qualifiera comme une méthode de référence de validation.

III. 1. Introduction :

La simulation numérique par la méthode des éléments finis pour tous les problèmes physiques s'appuie sur le maillage associé à la géométrie du domaine de calcul. Dans le cadre des problèmes de la mise en forme des matériaux, le maillage qui suit les grandes déformations de la pièce dégénère rapidement. La simulation de tels problèmes nécessite donc la génération de maillage de manière automatique, et par la suite de nombreuses régularisations de maillages dont la qualité conditionne la précision des calculs.

L'objectif de cette étude est le développement d'une procédure de régularisation et d'adaptation de maillage permettant le contrôle et la modification avec une optimisation de l'erreur sur tous les éléments malformés et faire la régularisation au cours des calculs.

Nous allons faire un programme afin de faire le point sur les problèmes dans les maillages qui ont des mailles d'une mauvaises qualités, cela faira la régularisation de ces dernières.

III. 2. Explication de la méthode [103]:

La nouvelle position va être définie par un algorithme et une technique basée complètement par un critère géométrique.

Cette méthode modifie la position de chaque nœud en ordre en minimisant au maximum la distorsion de l'élément. On va faire la modification avec une procédure itérative explicite, les détails vont être expliqués.

La figure (3.1) permettra de voir une portion en 2D les éléments finis qui constituent un élément triangulaire et le déplacement Guliani [103]:

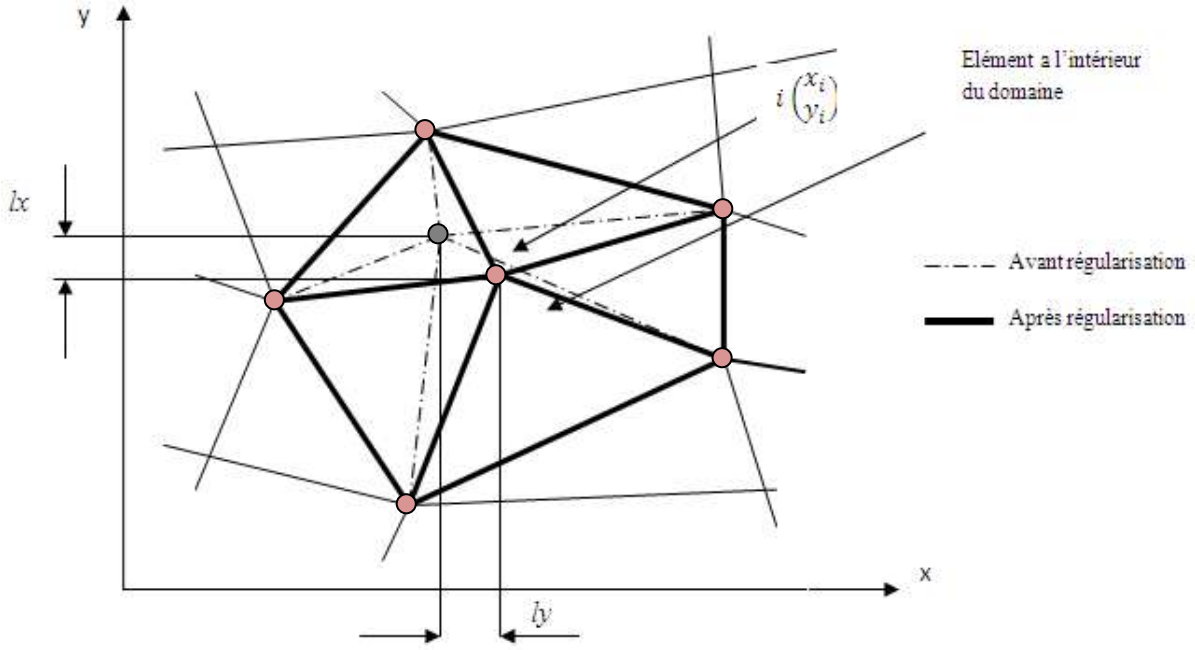
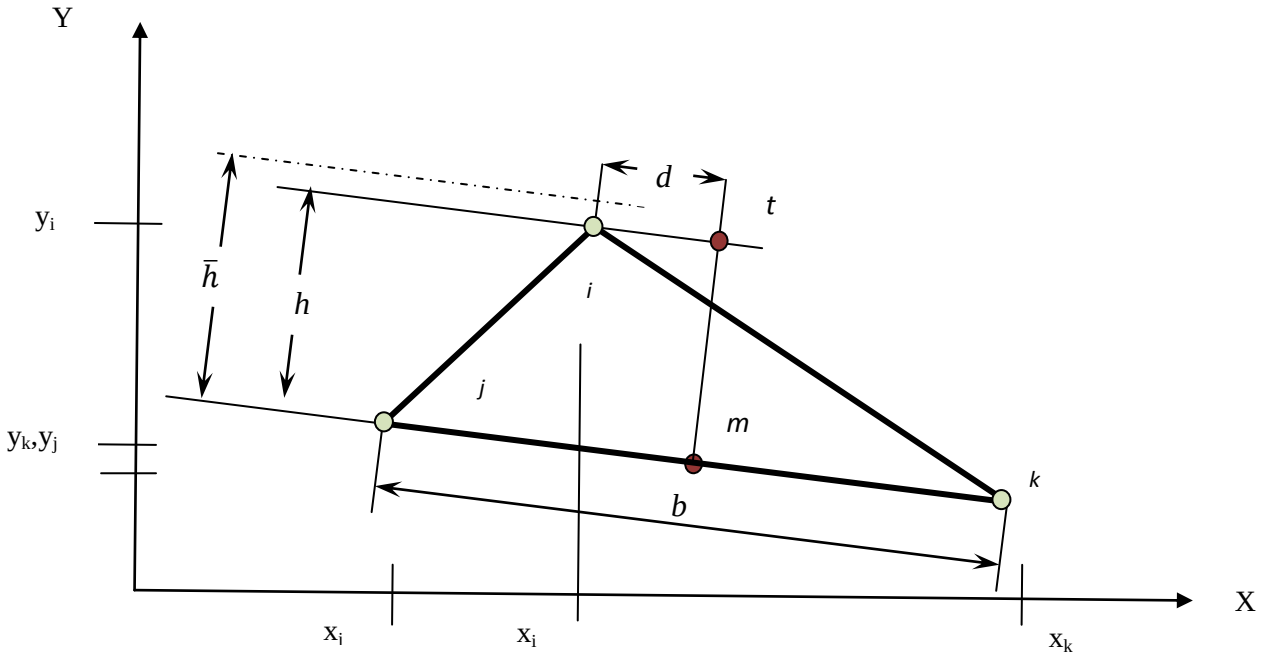


Figure (3.1) : Domaine d'influence du nœud *i* sur le maillage à deux dimensions.



La figure (3.2) : Un élément dans le domaine de l'influence avec un déplacement du nœud *i*.

III. 2.a. Les différentes équations :

La régularisation dans un nœud interne,

La surface du triangle a' est :

$$a' = \frac{1}{2}(px_i + qy_i + r) \tag{3.1}$$

avec

$$\left.\begin{aligned} p &= y_j - y_k \quad , \\ q &= x_k - x_j \quad , \\ r &= x_j y_k - x_k y_j \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

et la base est :

$$b = (p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} \tag{3.3}$$

La surface totale du domaine d'influence qui aura une base globale *B* indépendant du nœud *i* ; si le nombre total des triangles N_{id} dans le domaine d'influence, on a :

$$A = \sum_{N_{id}} a' \tag{3.4}$$

$$B = \sum_{N_{id}} b \tag{3.5}$$

La nouvelle hauteur et base du triangle sont :

$$\bar{h} = \frac{2A}{B} \tag{3.6}$$

$$\bar{b} = \frac{B}{N_{id}} \tag{3.7}$$

Après la régularisation :

La surface du triangle s'écrit :

$$a = \frac{1}{2}\left(pl_x + ql_y\right) + a' \tag{3.8}$$

$$h = \frac{2a}{b} \tag{3.9}$$

Le point *t* dans la figure (4.2) génère un triangle isocèle avec des coordonnées :

$$x_t = x_m + \frac{p}{b^2}2a \qquad \text{et} \qquad y_t = y_m + \frac{q}{b^2}2a \tag{3.10}$$

$$\text{Avec } x_m = \frac{(x_j + x_k)}{2} \qquad \text{et } y_m = \frac{(y_j + y_k)}{2} \tag{3.11}$$

La distance entre le point *i* et le point *t* se calcule par :

$$d = \left[(x_i + l_x - x_t)^2 + \left(y_i + l_y - y_t\right)^2\right]^{1/2} \tag{3.12}$$

La distance *d* mesure la distorsion du triangle,

Giuliani [103] définie la distorsion métrique par :

$$D = \left(\frac{h-\bar{h}}{\bar{h}}\right)^2 + \left(\frac{2d}{\bar{b}}\right)^2 \tag{3.13}$$

Il est clair de l'équation (4.12) que la différence $(h - \bar{h})$ mesure l'écart de hauteur du triangle.

Dans le domaine de l'influence sur le point *i* on considère la distorsion métrique :

$$D^* = \sum_{N_{id}} D = \sum_{N_{id}} \left(\frac{h - \bar{h}}{\bar{h}}\right)^2 + \sum_{N_{id}} \left(\frac{2d}{\bar{b}}\right)^2 \; doit\ etre\ minimum \tag{3.14}$$

Ce critère de minimisation globale pour la distorsion du triangle dans le domaine d'influence prend toujours le respect de l_x et l_y avec l'optimisation du déplacement du nœud *i* et aussi :

$$\begin{cases} \frac{\partial D^*}{\partial l_x} = 0 \\ \frac{\partial D^*}{\partial l_y} = 0 \end{cases} \tag{3.15}$$

on a $l_x = \frac{s_3 s_4 - s_2 s_5}{s_1 s_4 - s_2^2}$, $l_y = \frac{s_1 s_5 - s_2 s_3}{s_1 s_4 - s_2^2}$ (3.16)

avec :

$w_1 = \frac{1}{\bar{h}^2}$ et $w_2 = \frac{4}{\bar{b}^2}$ (3.17)

$$s_1 = \sum_{N_{id}} \frac{1}{b^2}(w_1 p^2 + w_2 q^2) \tag{3.18}$$

$$s_2 = \sum_{N_{id}} \frac{pq}{b^2}(w_1 - w_2) \tag{3.19}$$

$$s_3 = \sum_{N_{id}} \frac{1}{b^2}\{w_1 p(\bar{h}b - 2a') - w_2 q[(x_i - x_m)q - (y_i - y_m)p]\} \tag{3.20}$$

$$s_4 = \sum_{N_{id}} \frac{1}{b^2}(w_1 q^2 + w_2 p^2) \tag{3.21}$$

$$s_5 = \sum_{N_{id}} \frac{1}{b^2}\{w_1 q(\bar{h}b - 2a') - w_2 p[(y_i - y_m)p - (x_i - x_m)q]\} \tag{3.22}$$

En imposant la direction on a :

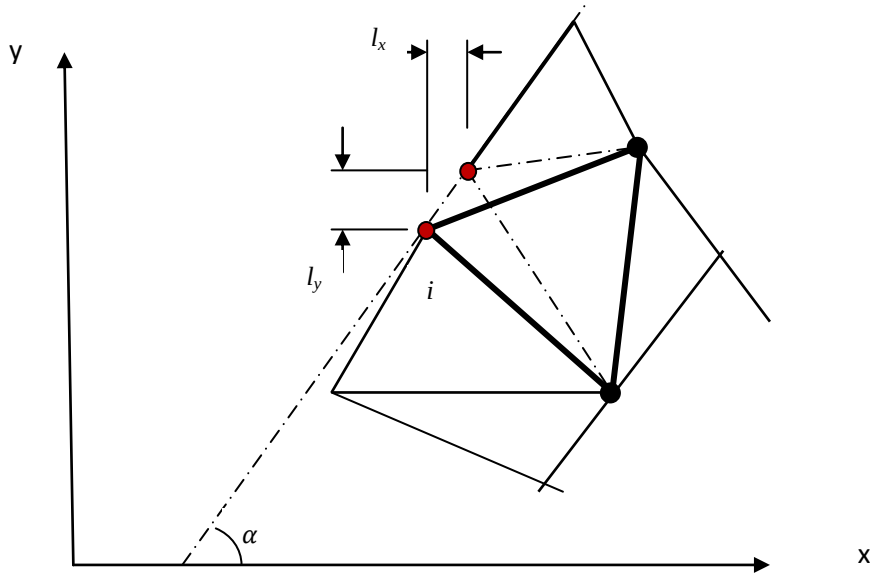


Figure (3.3) domaine d'influence du nœud *i* nœud de frontière.

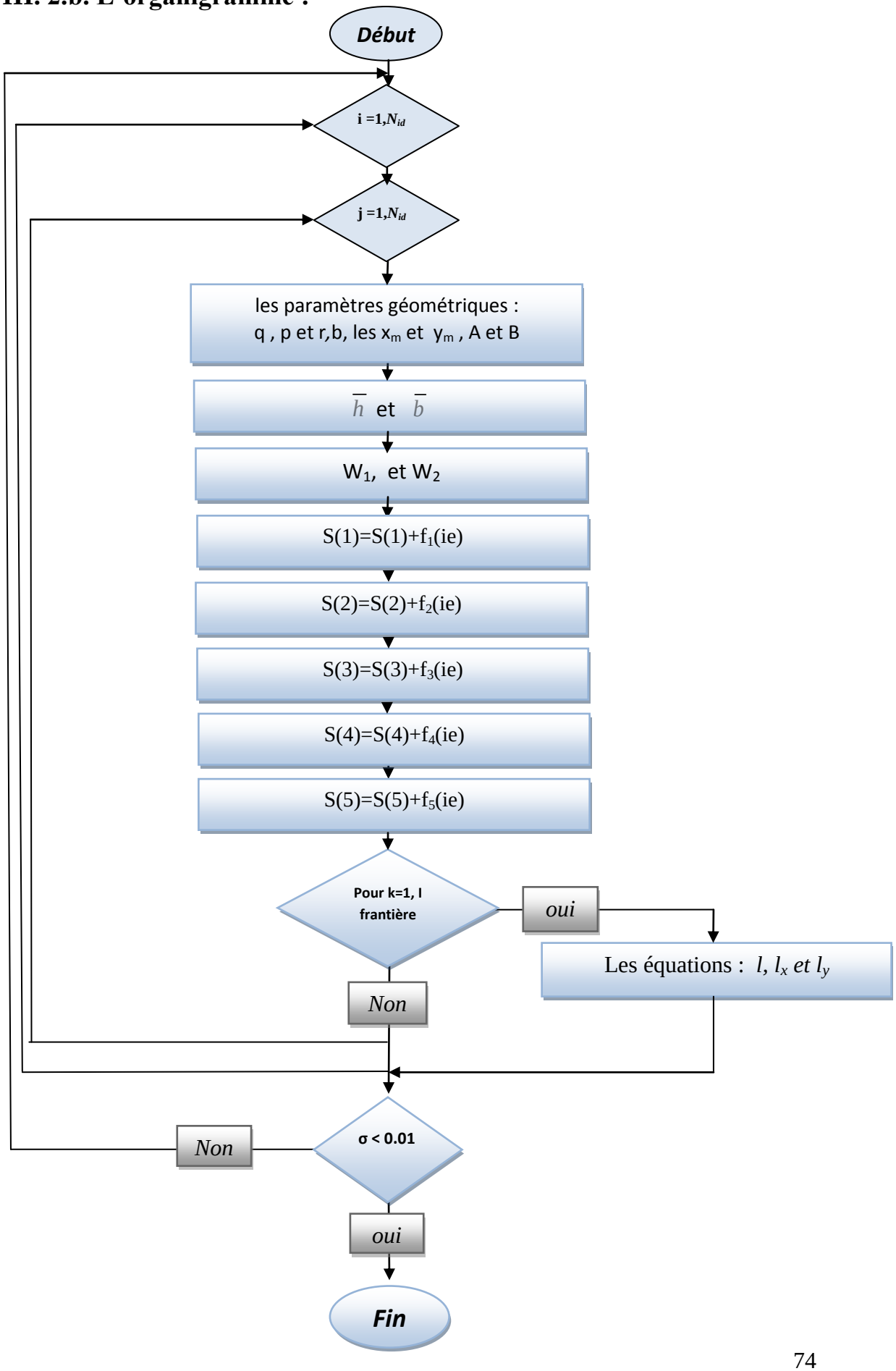
$$l = \frac{s_3 \cos\alpha + s_5 \sin\alpha}{s_1 \cos^2\alpha + s_2 \sin 2\alpha + s_4 \sin^2\alpha} \tag{3.23}$$

$$l_x = l\cos\alpha \quad \text{, et} \quad l_y = l\sin\alpha \tag{3.24}$$

avec $l^2 = l_x^2 + l_y^2$

L'organisation de notre algorithme est montrée par l'organigramme qui suit :

III. 2.b. L'organigramme :



III. 2.c. Le programme initial de la triangulation:

Ce programme est écrit sous visuel Basic 06, c'est le programme de la triangulation , qui va nous donnée un premier maillage qu'on va par la suite faire succéder d'un nouveau programme écrit en (V.B 06) aussi, et qui va développer et décrire notre algorithme, les détails de la partie déclarative du programme est comme suite :

```
'Points
Private Type tVertex
   x As Long
   y As Long
   z As Long 'z-coordinate will not be used
End Type

'Triangles, v# are the vertex pointers
Private Type tTriangle
   V1 As Long
   V2 As Long
   V3 As Long


End Type
Private Type letringle
   p As Single
   q As Single
   aprim As Single
   B As Single
   R As Single
   XM As Single
   YM As Single
   A As Single
   H As Single
   XT As Single
   YT As Single
 D As Single
 GD As Single

End Type
Dim triang() As letringle
Dim N_id As Single
Dim GA As Single
Dim GB As Single
Dim HBR As Single
Dim BBR As Single
Dim W1 As Single
Dim W2 As Single
Dim S(5) As Single
Dim LX As Single
Dim LY As Single
Dim L As Single
```

Et aussi :

```
Dim Triangles() As tTriangle
Dim maxx As Double
Dim maxy As Double
Dim maxz As Double
Dim minx As Double
Dim miny As Double
Dim minz As Double
Dim maxxr As Double
Dim maxyr As Double
Dim minxr As Double
Dim minyr As Double
Dim xmax As Double
Dim ymax As Double
Dim zmax As Double
Dim pas As Double
Dim echell As Double
Dim DayArray(10000, 4) As Double
Dim xre As Single
Dim yre As Single
Dim pask As Double
Dim ss As Single
Private Sub cmdRandom_Click()
  Dim I, iMax, LastCheck
```

III. 2.c. Le programme de la régularisation:

Le deuxième programme développe notre méthode, il est considérer sous VB 06, la partie déclarative est comme suite :

```
Private Sub Command2_Click()
Dim POINT() As Integer
Dim NOEUD1 As Single
Dim NOEUD2 As Single
Dim NOU1 As Boolean
Dim NOU2 As Boolean
Dim trian() As tTriangle
ReDim POINT(0) As Integer
Dim I As Long
Dim J As Integer
Dim K As Integer
Dim XGLO As Single
Dim YGLO As Single
Dim PK As Single
Dim PJ As Single
Dim nit As Integer
For I = 1 To N_id
'For J = 1 To N_id
'MsgBox Triangles(J).v1 & " " & Triangles(J).v2 & " " & Triangles(J).v3
```

La partie des équations est montrer par :

```
S(1) = S(1) + (1 / (triang(I).B ^ 2)) * (W1 * triang(I).p ^ 2 + W2 * triang(I).q ^ 2)
S(2) = S(2) + (triang(I).p * triang(I).q / (triang(I).B ^ 2)) * (W1 - W2)
S(3) = S(3) + (1 / (triang(I).B ^ 2)) * (W1 * triang(I).p * (HBR * triang(I).B - 2 * triang(I).aprim) - W2 * triang(I).q *
((Vertices(II).X - triang(I).XM) * triang(I).q - (Vertices(II).Y - triang(I).YM) * triang(I).p))
S(4) = S(4) + (1 / (triang(I).B ^ 2)) * (W1 * triang(I).q ^ 2 + W2 * triang(I).p ^ 2)
S(5) = S(5) + (1 / (triang(I).B ^ 2)) * (W1 * triang(I).q * (HBR * triang(I).B - 2 * triang(I).aprim) - W2 * triang(I).p *
((Vertices(II).Y - triang(I).YM) * triang(I).p - (Vertices(II).X - triang(I).XM) * triang(I).q))
Next

LX = (S(3) * S(4) - S(2) * S(5)) / (S(1) * S(4) - S(2) * S(2))
LY = (S(1) * S(5) - S(2) * S(3)) / (S(1) * S(4) - S(2) * S(2))
Dim XXP As Single
Dim YYP As Single
L = (LX * LX + LY * LY) ^ 0.5
For I = 1 To UBound(trian)
If II = trian(I).V1 Then
PJ = trian(I).V2
PK = trian(I).V3
End If

'triang(I).A = 0.5 * (triang(I).p * LX + triang(I).q * LY) + triang(I).aprim
'triang(I).H = 2 * triang(I).A / triang(I).B
'triang(I).XT = triang(I).XM + 2 * triang(I).A * triang(I).p / triang(I).B ^ 2
'triang(I).YT = triang(I).YM + 2 * triang(I).A * triang(I).q / triang(I).B ^ 2
'triang(I).D = ((Vertices(II).X + LX - triang(I).XT) ^ 2 + (Vertices(II).Y + LY - triang(I).YT) ^ 2) ^ 0.5
'triang(I).GD = ((triang(I).H - HBR) / HBR) ^ 2 + ((2 * triang(I).D) / HBR) ^ 2
Next
```

La figure (3.4) montre la fenêtre d'exécution du programme :

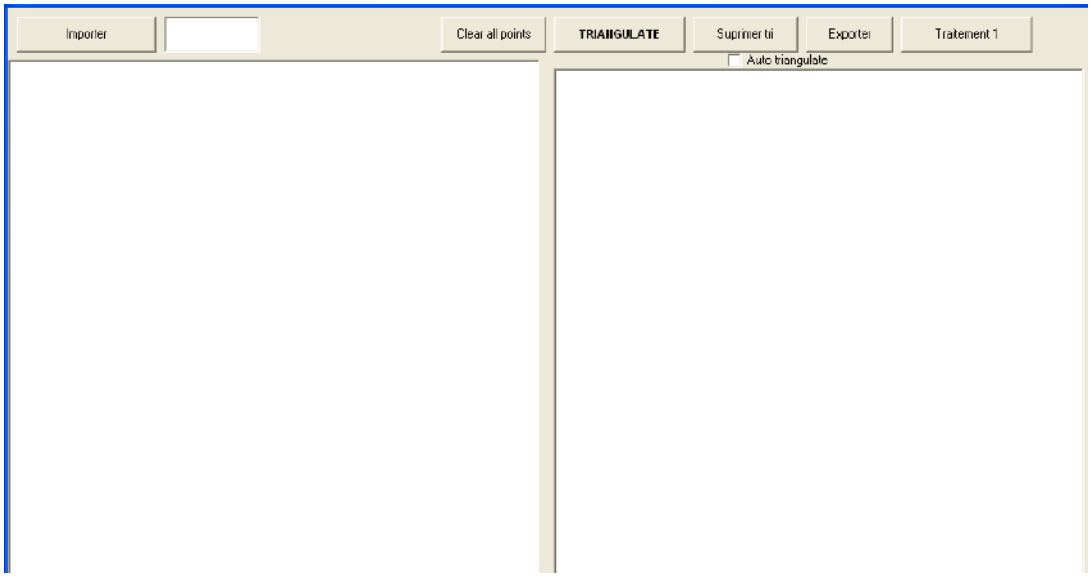


Figure (3.4) : Fenêtre d'exécution

Par cette fenêtre de la figure (3.4) et on utilisant les boutons de commande on peut obtenir le maillage a l'état initial, soit par les données existants, appelé **import a partir TXT**, soit par la création du modèle existant, sur la base des coordonnées données.

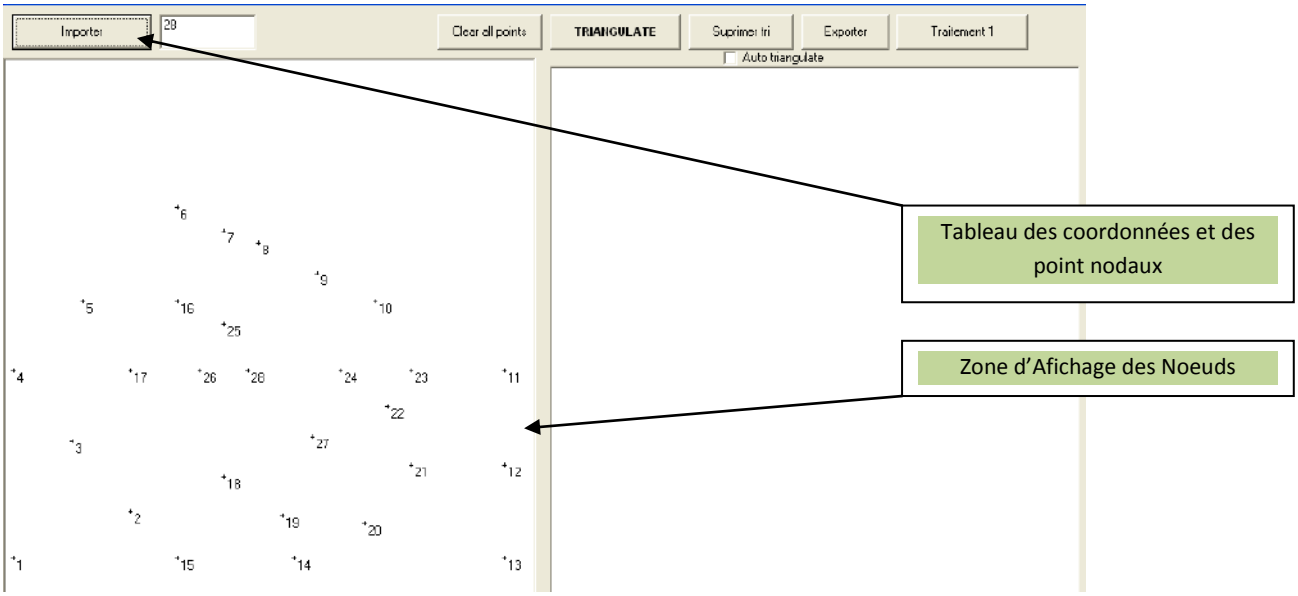


Figure (3.5) :Importer les coordonnées des nœuds et les afficher.

Par la suite établir la triangulation à partir du deuxième bouton appeler **TRIANGULATE**, pour faire la triangulation par la méthode de Delaunay sur tout le domaine.

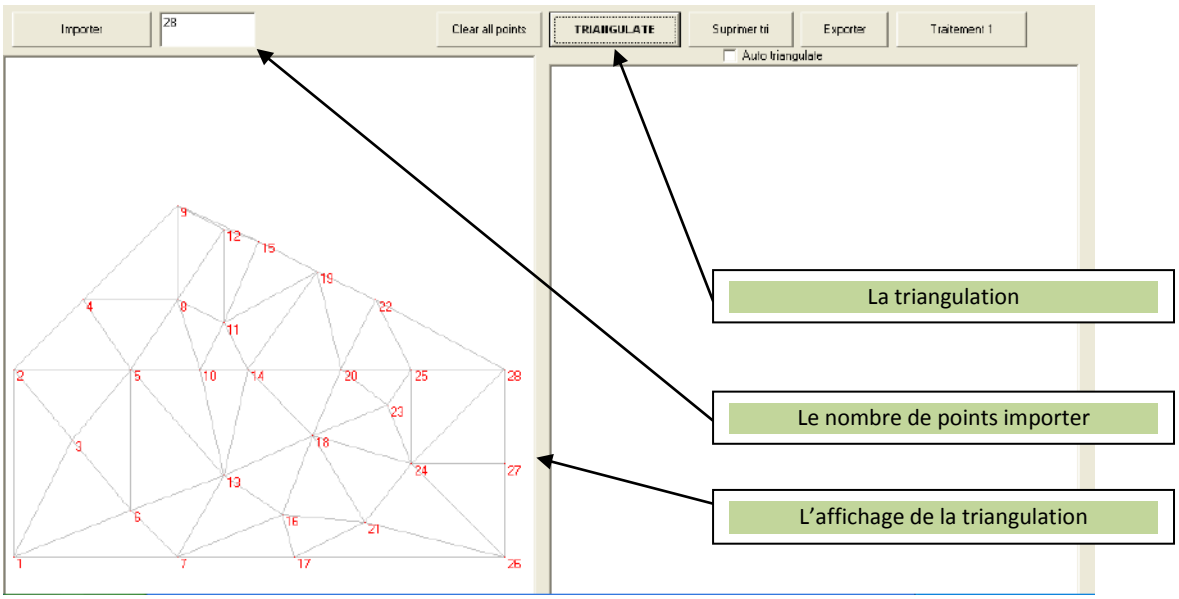


Figure (3.6) : La triangulation et l'affichage

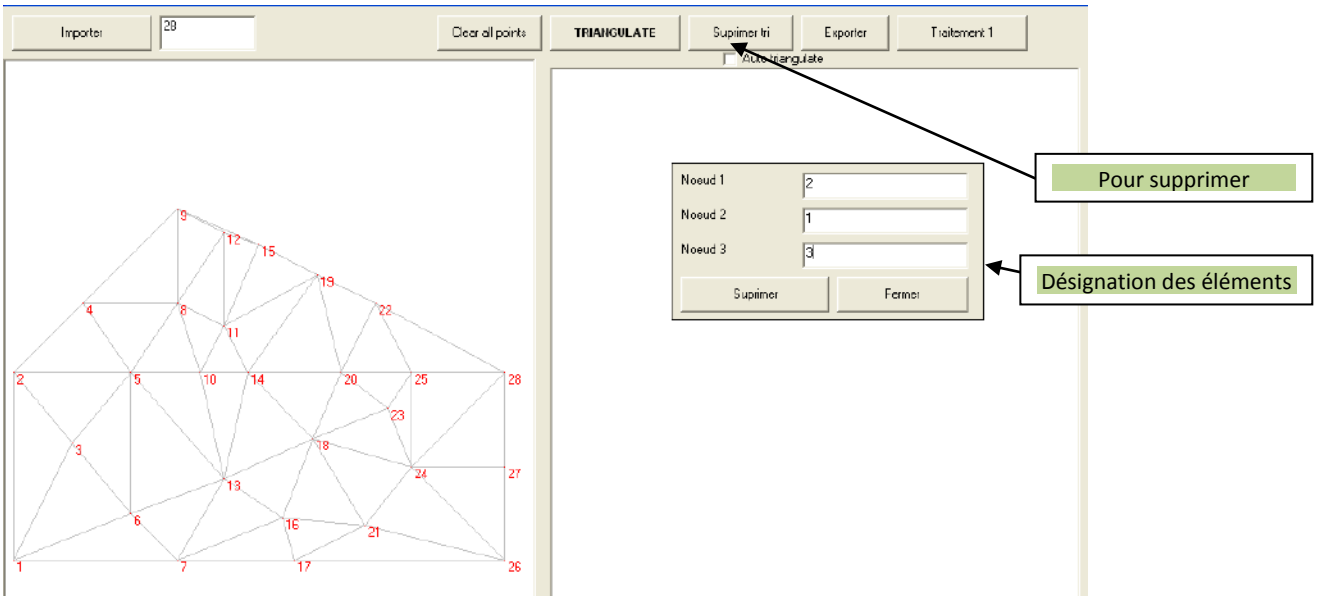


Figure (3.7) : La suppression des éléments.

La suppression est une commande en plus si on a un problème pour suprimer un élément ou plusieurs.

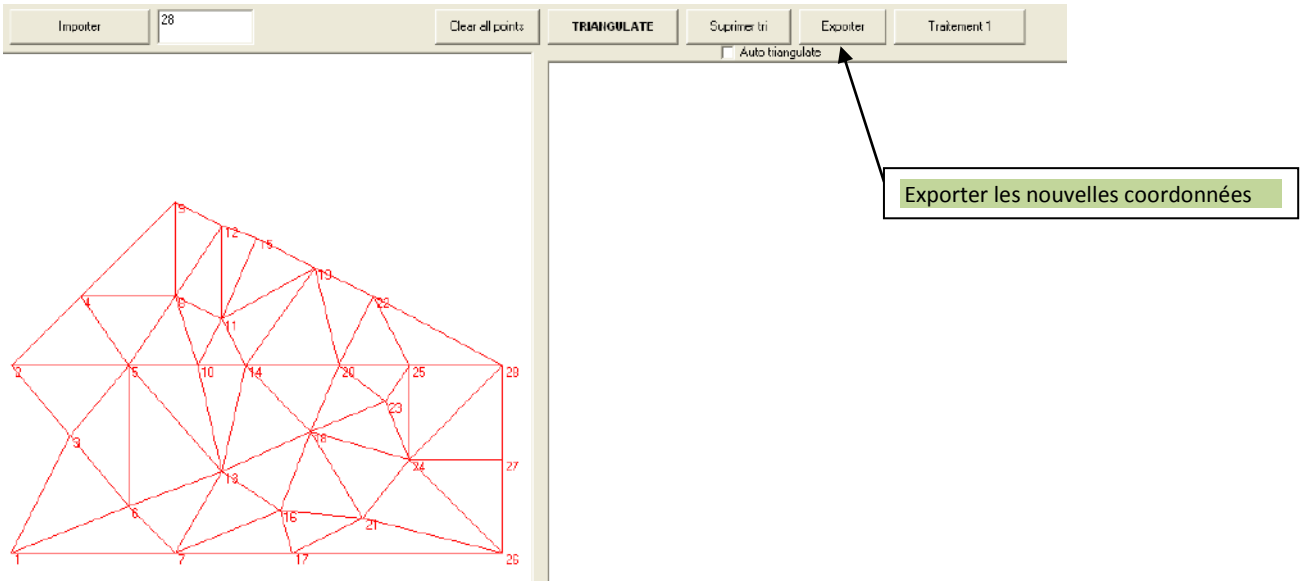


Figure (3.8) : Affichage après suppression.

La dernière étape est celle de faire la régularisation et le lissage par le troisième bouton appelé **TRAITEMENT**, ensuite la visualisation du résultat par une autre triangulation.

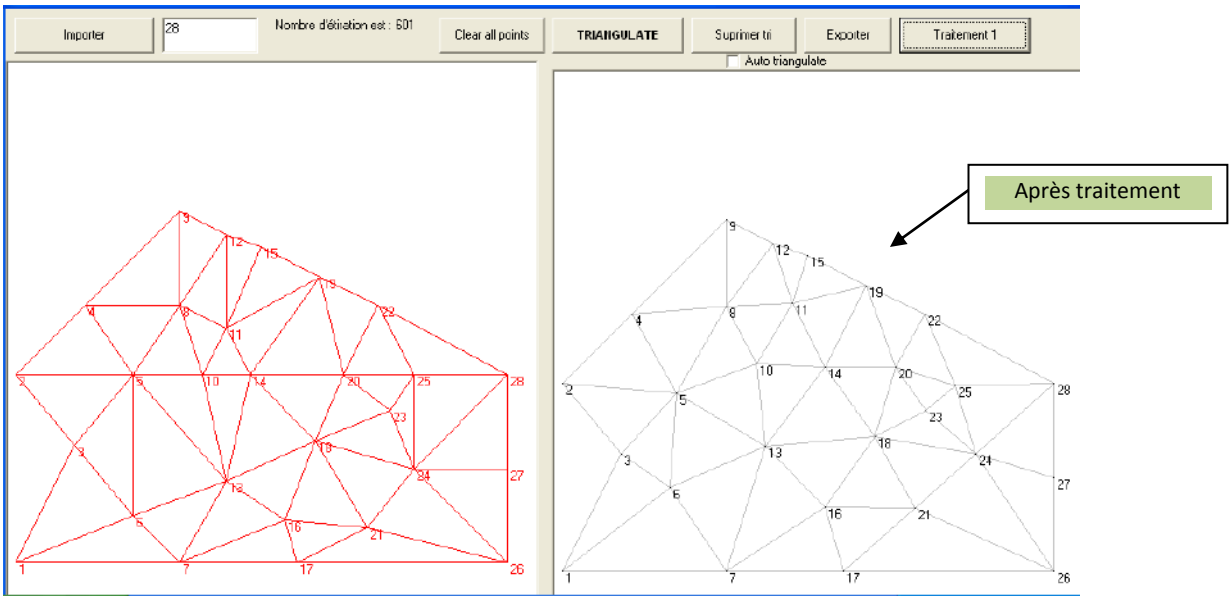


Figure (3.9) : Après la régularisation du maillage et l'application de l'algorithme.

Dans le chapitre V, on va voir quelques exemples et comparer les résultats, on utiliser un cas pour montrer un exemple ou on découvre chaque bouton.

IV. Applications et résultats:

Après avoir présenté, le programme de la régularisation en 2D (c.à.d. le lissage de maillage en deux dimensions), nous allons proposer maintenant une application et des résultats aux problèmes rencontrés en génie mécanique.

Calculer les contraintes et les déformations dans la majorité des problèmes ou les températures et les flux de chaleur dans les problèmes thermique par exemple.

Dans cette partie, nous allons voir l'application par la méthode des éléments finis. Pour cela, on va suivre les étapes suivantes :

- On cherche à montrer la performance du code développé en utilisant les éléments triangulaires, on remarque l'effet du type d'élément.
- On expose la régularisation de maillage on utilisant l'algorithme pour quelques géométries complexes.
- Et à la fin, on montre la différence entre les anciens résultats et les nouveaux dans un exemple (*problème thermique*).

On a les figures (4.1) et (4.2) :

```
VARIABLES = "X", "Y"
ZONE N=   19, E=   10 , F=FEPOINT , ET=QUADR
    -4.000000     2.000000
    -2.000000     2.000000
    -4.000000  0.000000E+00
    -2.000000  0.000000E+00
-7.071068E-01  7.071068E-01
    -1.000000  0.000000E+00
 0.000000E+00     2.000000
 0.000000E+00     1.000000
    -4.000000     4.000000
    -2.000000     4.000000
 0.000000E+00     4.000000
     2.000000     4.000000
     2.000000     2.000000
 7.071068E-01  7.071068E-01
     4.000000     4.000000
     4.000000     2.000000
     2.000000  0.000000E+00
     4.000000  0.000000E+00
     1.000000  0.000000E+00
     3   4   2   1
     4   6   5   2
     5   8   7   2
     1   2  10   9
     2   7  11  10
     7  13  12  11
     8  14  13   7
    13  16  15  12
    17  18  16  13
    19  17  13  14
```

Figure (4.1) fichier de résultats[104]

```
VARIABLES = "X", "Y"
ZONE N=    19, E=    10 , F=FEPOINT , ET=QUADRILATERAL
    -4.000000      2.000000
    -4.000000   0.000000E+00
    -2.000000   0.000000E+00
    -2.000000      2.000000
    -2.000000      4.000000
    -4.000000      4.000000
  0.000000E+00     4.000000
    -1.000000   0.000000E+00
 -7.071068E-01   7.071068E-01
  0.000000E+00      1.000000
  0.000000E+00      2.000000
     2.000000      2.000000
     2.000000      4.000000
  7.071068E-01   7.071068E-01
     4.000000      2.000000
     4.000000      4.000000
     2.000000   0.000000E+00
     4.000000   0.000000E+00
     1.000000   0.000000E+00
      2   3   4   1
      3   8   9   4
      9  10  11   4
      1   4   5   6
      4  11   7   5
     11  12  13   7
     10  14  12  11
     12  15  16  13
     17  18  15  12
     19  17  12  14
```

Figure (4.2) fichier de résultats obtenus par un code mesh_2D [104]

Pour montrer la capacité du code et sa richesse en types d'éléments finis au choix de l'utilisateur, on propose quelques exemples de formes simples, à savoir : structure en forme d'un angle , on a utilisé l'élément triangulaire simple,

On présente ici un maillage à des structures complexes souvent rencontrés en génie mécanique.

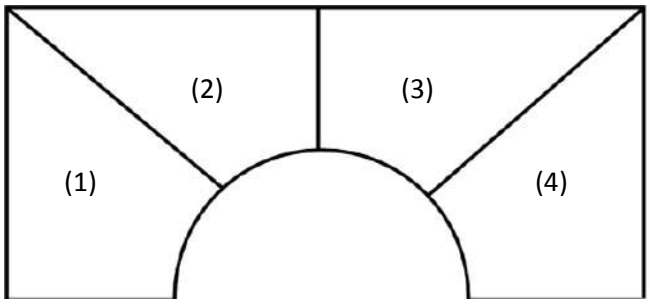


Figure (4.3) : Exemple d'une géométrie répartie en 4 partie.

Le Nombre d'éléments est égal à 4,

Le Nombre de nœuds est égal à 10

En utilise l'élément triangulaire

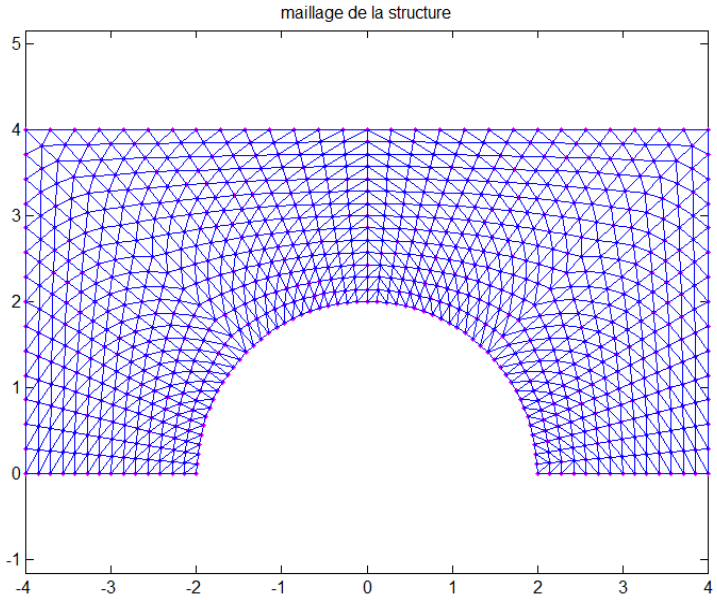


Figure (4.4) : Maillage généré par la triangulation et raffiner [104]

N= 855, E= 1568

A travers les figures (4.3) et (4.4) on veut montrer des exemples de géométrie complexes, un travail effectué par le groupe au niveau du laboratoire de l'université de Médéa, l'approche et la performance des éléments triangulaires en 2D, cela par l'application à la solution des problèmes dans l'élasticité plane.

Pour simuler la flexion d'une poutre dont l'une des extrémités est encastrée soumise à une charge constante.

On considère un cas pratique (figure (4.5)) de poutre en acier simple appuie soumise à une charge répartie constante p = 100 N/mm. On considère également que :

E=210000 MPa

$\nu = 0{,}28$

Epaisseur e = 10 mm

Longueur L = 90 mm

Hauteur H = 30 mm

font varier des paramètres du maillage : la densité des éléments. …

Différents maillages (suivant x, suivant y) : le tableau (4. 1) qui montre les résultats des déplacements d'une poutre en acier soumise à une charge répartie constante qui utilise l'élément triangulaire.

Nature des éléments		Nombre de nœuds	Nombre d'éléments	Valeur absolue du déplacement suivant y en mm $\times 10^{-3}$	La solution analytique correspond à $\times 10^{-3}$ Y max L=90mm
Triangle		**8**	3	0134.44	197
Triangle		**21**	12	0171.39	197
Triangle		**40**	27	0182.68	197
Triangle		**65**	64	0187.26	197
Triangle		**96**	75	0189.55	197
Triangle		**133**	108	0190.85	197
Triangle		**176**	147	0191.66	197
Triangle		**225**	192	0192.21	197
Triangle		**280**	243	0192.59	197

Table (4. 1) : Les résultats de déplacements d'une poutre en acier soumise à une charge répartie uniforme qui utilise l'élément triangle [104].

Nature des éléments		Nombre de nœuds	Nombre d'éléments	Valeur absolue du déplacement suivant y en mm $\times 10^{-3}$	La solution analytique correspond à $\times 10^{-3}$ Y max L=90mm
Triangle		**8**	3	0056.009	197
Triangle		**21**	12	0109.80	197
Triangle		**40**	27	0142.65	197
Triangle		**65**	64	0160.57	197
Triangle		**96**	75	0170.86	197
Triangle		**133**	108	0187.13	197
Triangle		**176**	147	0191.22	197
Triangle		**225**	192	0194.00	197
Triangle		**280**	243	0195.95	197

Table (4.2) : Les résultats de déplacements après régularisation d'une poutre en acier encastrée soumise à une charge répartie uniforme qui utilise l'élément triangle.

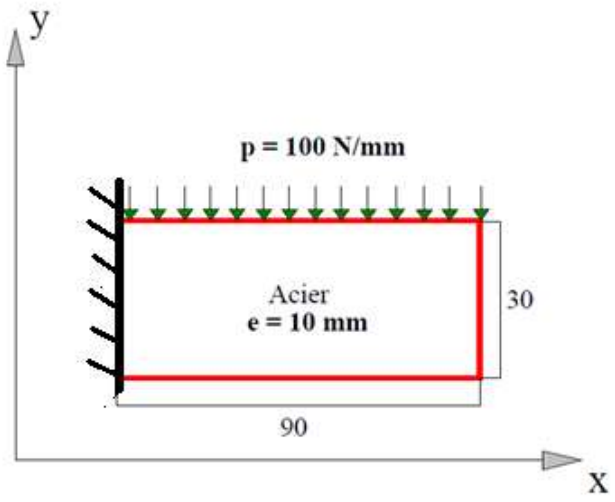


Figure (4.5) : Poutre encastrée avec une charge répartie uniforme.

Les éléments triangulaires qui donnent la solution tendent vers la solution exacte, et les éléments après la régularisation qui est légèrement plus performante.

On peut donc conclure de cette partie que l'application de la régularisation est indispensable.

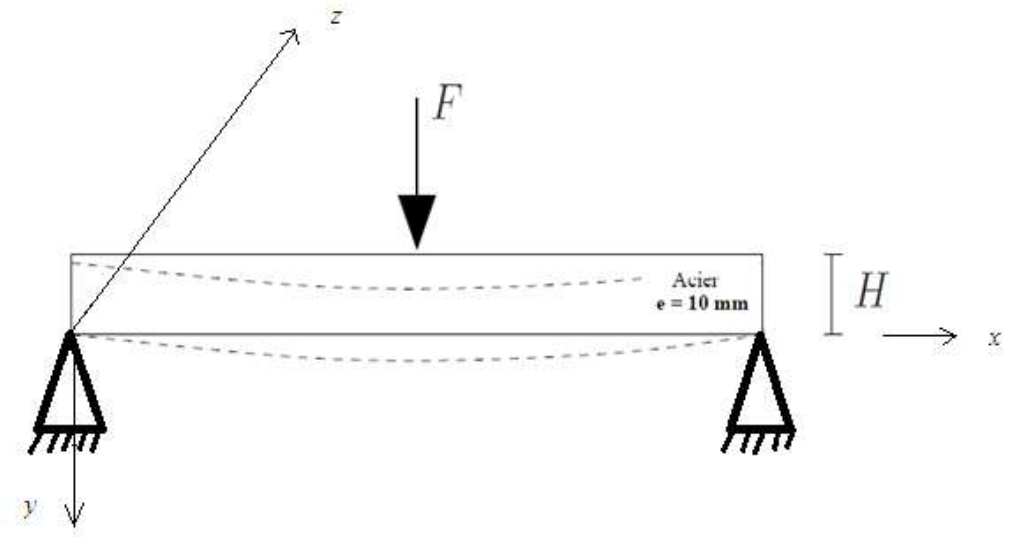


Figure (4.6) : Poutre supportée aux extrémités sous l'effet d'une charge constante

Cette figure montre que la triangulation est toujours utilisée et guide la solution aussi vers une convergence, on peut donc dire qu'il est important, de faire appliquer l'algorithme, et qu'en flexion, un triangle est un élément performant.

Solution analytique :

En appliquant la formule utilisée dans la résistance des matériaux, on aura:

$$y_{max} = \frac{FL^3}{48EI_Z} + \frac{FL^2h^2}{40GI_Z}$$ et vaut y_{max} =0.43114 mm

I_Z= moment quadratique suivant *z*

E = module de YOUNG

$$G = \frac{E}{2(1+v)}$$ Module de cisaillement

v = coefficient de Poisson

Type D'éléments		Nombre de nœuds	Nombre d' éléments	Valeur absolue du déplacement suivant y en mm $\times 10^{-3}$ Ymax	La solution analytique correspond à $\times 10^{-3}$ Ymax
Triangle		**15**	16	0264.09	0558.17
Triangle		**27**	32	0332.40	0558.17
Triangle		**65**	96	0460.29	0558.17
Triangle		**85**	128	0472.85	0558.17
Triangle		**147**	240	0512.06	0558.17
Triangle		**175**	288	0516.18	0558.17
Triangle		**261**	448	0532.10	0558.17
Triangle		**297**	512	0533.96	0558.17
Triangle		**407**	720	0541.93	0558.17
Triangle		**451**	800	0542.95	0558.17

Table (4. 3): Les résultats de déplacements d'une poutre en acier sur appui simple soumise à une charge constante après régularisation qui utilise l'élément triangle exemple [104]

Problème thermique :

On présente des exemples, dont un exemple de transfert thermique afin de voir l'effet des éléments triangulaires. En traite le problème de conduction dans le domaine thermique d'un four qui a fait l'objet d'une application, on présente les résultats avant et après régularisation :

Type d'élément Y en (m)		élément triangulaire avant régularisation température en (C°)
0,5		0
0,45		8,35135
0,4		16,8438
0,35		25,6112
0,3		34,7719
0,25		44,419
0,2		54,6081
0,15		65,3453
0,1		76,577
0,05		88,186
0		100

Tableau (4. 4) : Comparaison de 2 élément (triangle) la variation de température en fonction de la distance y et x=0 [104].

Type d'élément Y en (m)		élément triangulaire après régularisation température en (C°)
0,5		0
0,45833		6,95813
0,41667		13,9983
0,375		21,1997
0,33333		28,6352
0,29167		36,368
0,25		44,4469
0,20833		52,9017
0,16667		61,7378
0,125		70,9327
0,08333		80,4333
0,04167		90,1575
0		100

Table (4.5) : La température T en °C pour la distance y varie et x = 0 .

On remarque l'approche tend vers la solution après la régularisation qui converge rapidement.

Maillage d'une structure soumise à un champs thermique :

Nous modélisons le transfert thermique d'un four en 2D. En utilisant la symétrie, nous pouvons limiter le champ d'application de la modélisation d'un coté du four (1/4 du four), comme il est montré (figure (4.8) et figure (4.9)).

Le modèle est défini par une coupe en 2D, par la figure (4.8), le flux thermique interne par Dérichlet, on a aussi l'homogénéité de la température interne dans ¼ de la structure, cela est montré par la figure (4.9), et on va choisir la partie inferieur dans le cas N° 01 :

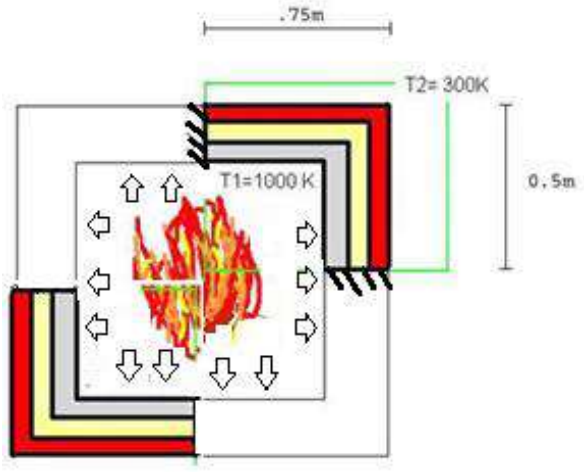


Figure (4. 8) : Représentation en 2 D une coupe d'un four, répartition de la température.

Conditions aux limites:

Conditions de type Dirichlet :

On impose une condition de Dirichlet lorsqu'on fixe une valeur à l'inconnue du problème.

Problème thermique, l'inconnue : températures sont fixées par les données du problème. On a donc ici des conditions de Dirichlet.

1) Les conditions du système thermique.

2) La frontière extérieure a une température constante de 300 K=27 °C.

3) L'intérieure a une température constante de 1000 K=727 °C.

Propriétés des matériaux :

Conductivité λ (Brique terre crue pleine) = 1,1W/m².°C ·

Les dimensions :

Longueur = 1,5 m, largeur = 1 m.

Objectif : cherche la distribution de la température nodale et le flux de chaleur du four.

On fait varier :

La densité de maillage : 4×4, 5×5, 6×6, 8×8, 10×10, 12×12,

l'élément (**T1** et **T2**)

-**T1 :** triangle avant régularisation

- **T2 :** tiangle après régularisation

-1 et 2 : type (traitement).

-**NN** : nombre de nœuds, **NE** : nombre d'éléments.

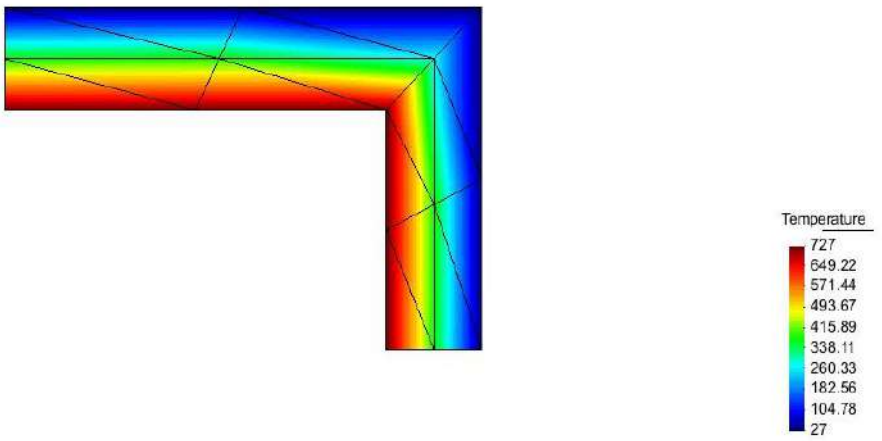


Figure 5. 10 : Distribution de la température nodale en utilisant l'élément triangulaire avec un maillage NN=15et NE=16 [104].

Type d'élément		l'élément triangulaire avant régularisation
Y en (m)		température en (C°)
0,5		27
0,425		377
0,35		727

Table (4. 6) : Température T en °C Pour la distance y.

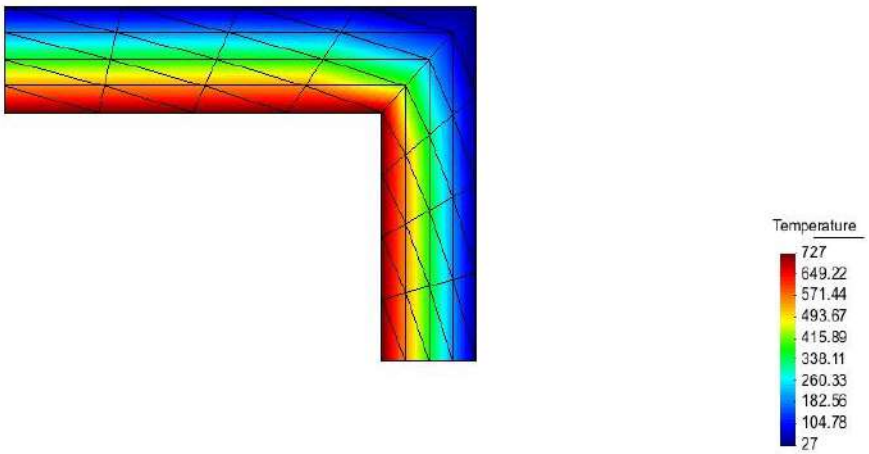


Figure 5. 11 : Distribution de la température nodale en utilisant l'élément triangle avec un maillage NN=45 et NE=64[104]

Type d'élément Y en (m)		l'élément triangulaire avant régularisation température en (C°)
0,5		27
0,475		143,66701
0,45		260,33401
0,425		377
0,4		493,66699
0,375		610,33301
0,35		727

Table (4. 7) : Température T en °C Pour une distance y.

Type d'élément Y en mètre		l'élément triangulaire après régularisation température en (C°)
0,5		26
0,4625		202,00201
0,425		377,00199
0,3875		552,00101
0,35		726

Table (4. 8) : Température T en °C Pour la distance y.

Type d'élément Y en (m)		l'élément triangulaire après régularisation température en (C°)
0,5		26
0,4875		85,3322
0,475		143,665
0,4625		201
0,45		260,33201
0,4375		318,66499
0,425		376,99699
0,4125		435,33101
0,4		493,66399
0,3875		551
0,375		610,33201
0,3625		668,66599
0,35		726

Table (4. 9) : Température T en °C Pour une distance y.

L'analyse de ces résultats obtenus nous permet de conclure que :

- Plus la densité de maillage est grande, plus on observe de grandes variations dans la distribution de température (plus le maillage est raffiné, plus la température est constante dans la plaque et le four), et on remarque que l'utilisation de l'algorithme converge la solution.
- La triangulation mène le calcul et converge la solution rapidement a une valeur approchée,

même avec un faible nombre de nœuds, le nombre d'itération est défirent, en utilisant l'algorithme il a une valeur inferieur.

Pour le cas 01 étudié, et avant d'utiliser l'algorithme, la figure (4.12)

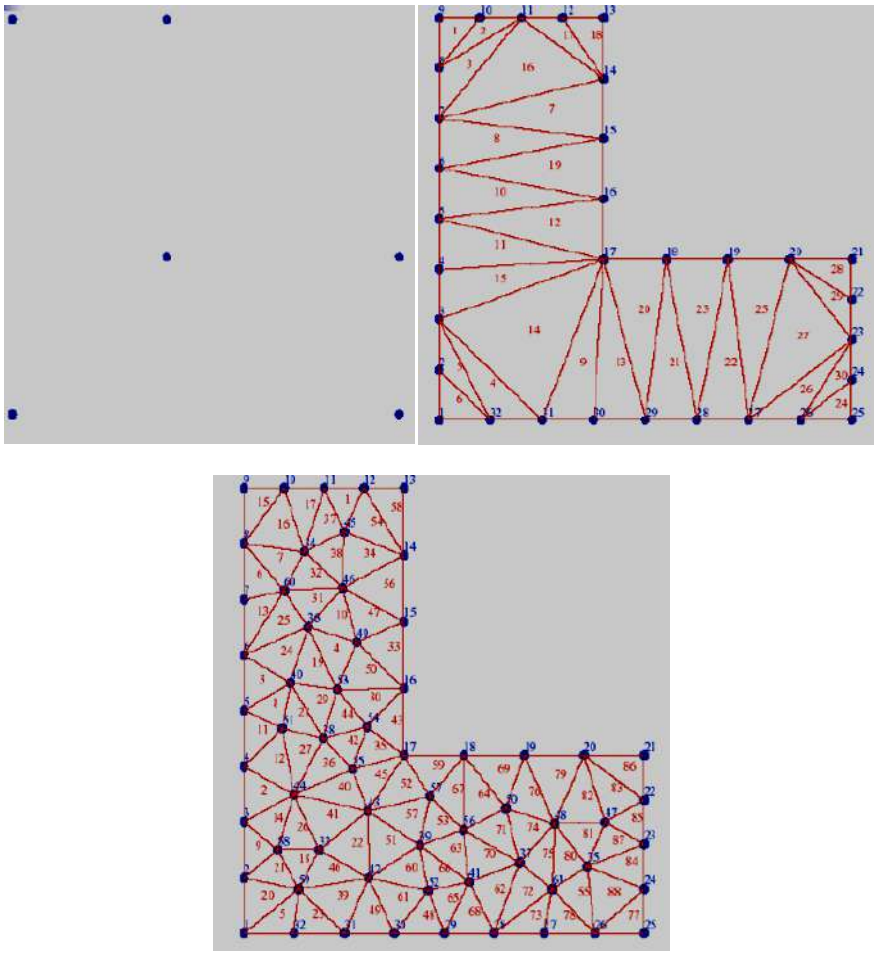


Figure (4 .12) : Maillage avant la régularisation

Aprésl'utilisation de l'algorithme de la régularisation on trouve :

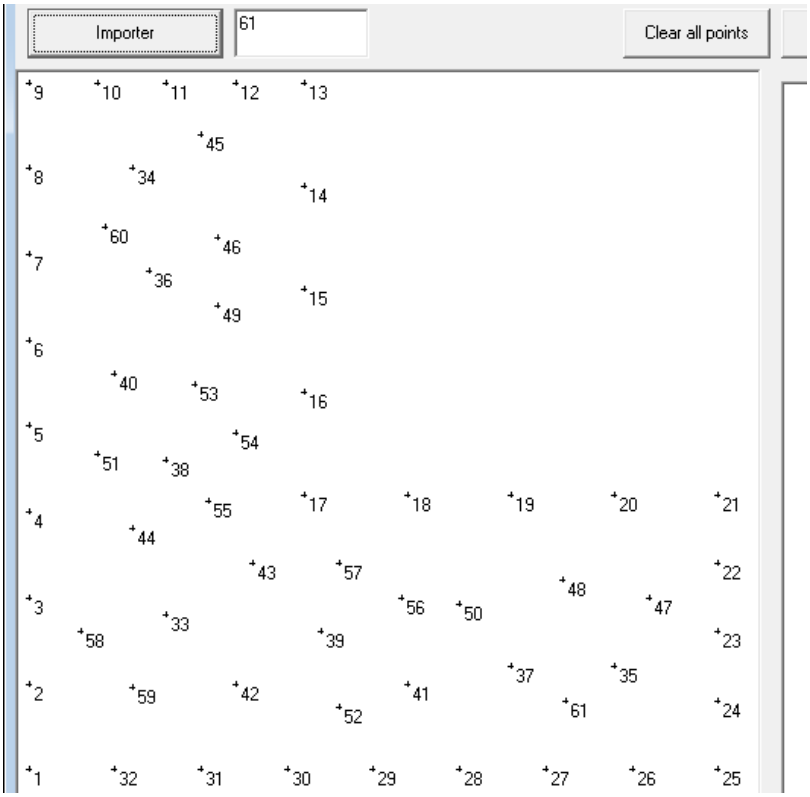


Figure (4.13) : Representation des coordonnées importées.

Après avoir importer les coordonnées et apliqué la régularisaion qui est appeler traitement, la figure (4.14) :

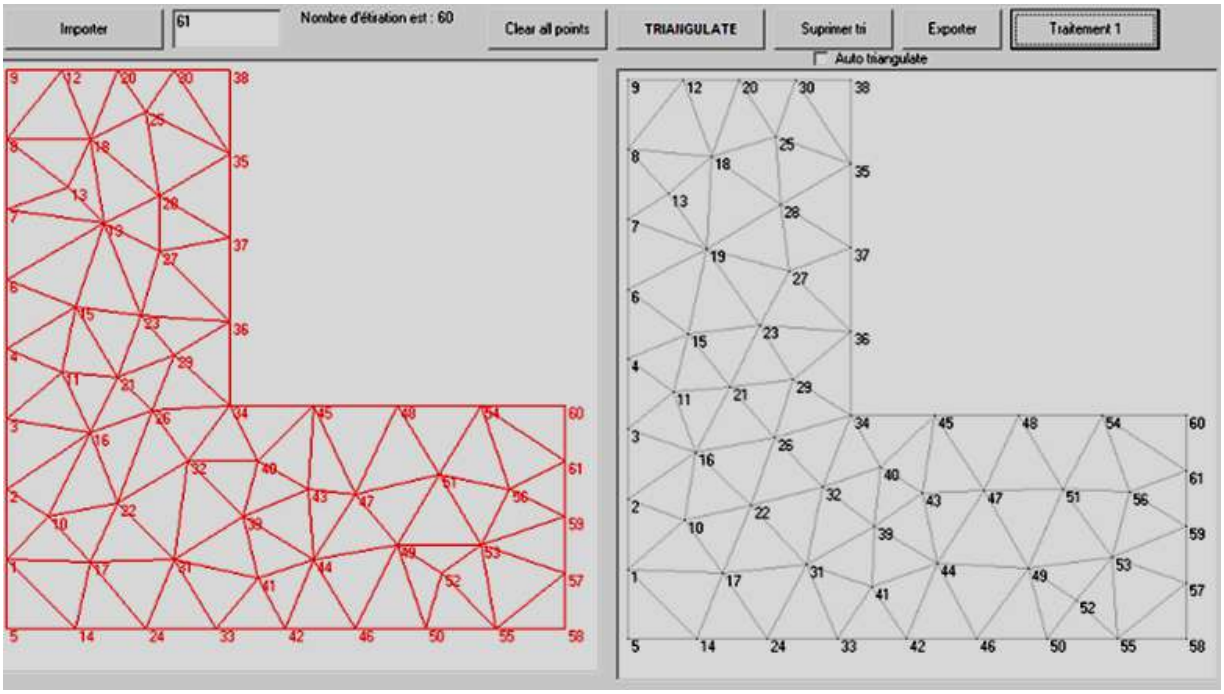


Figure (4.14) : Traitement par la régularisation

Pour le cas (02) étudié aussi la figure (4.15) :

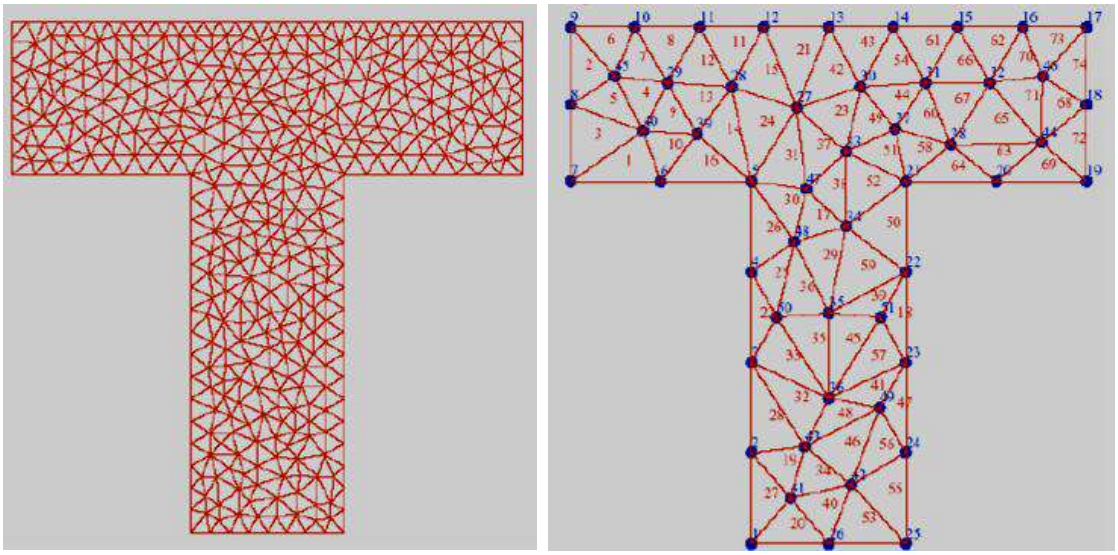


Figure 5.15 : représentation de la triangulation avant la régularisation.

On utilisant l'algorithme et on appliquant le traitement on trouve :

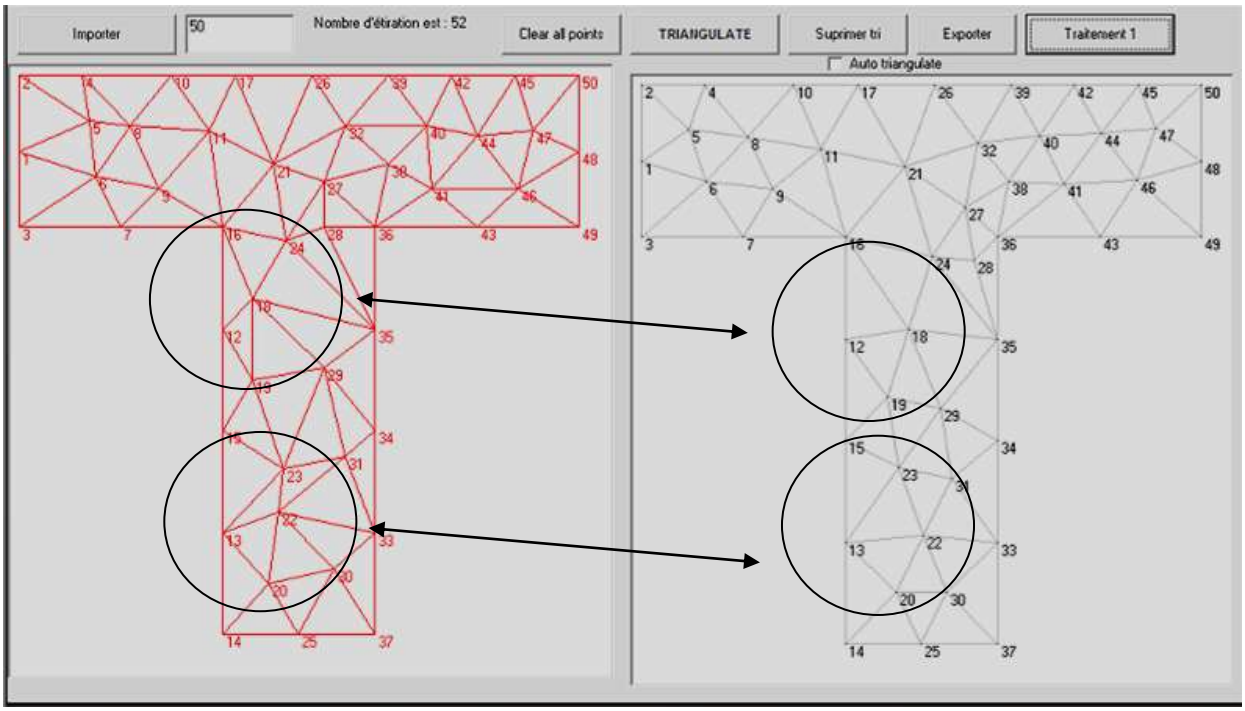


Figure (4.16) : Triangulation avec le traitement de régularisation.

Et pour le cas (03) presenté par la figure (4.17) :

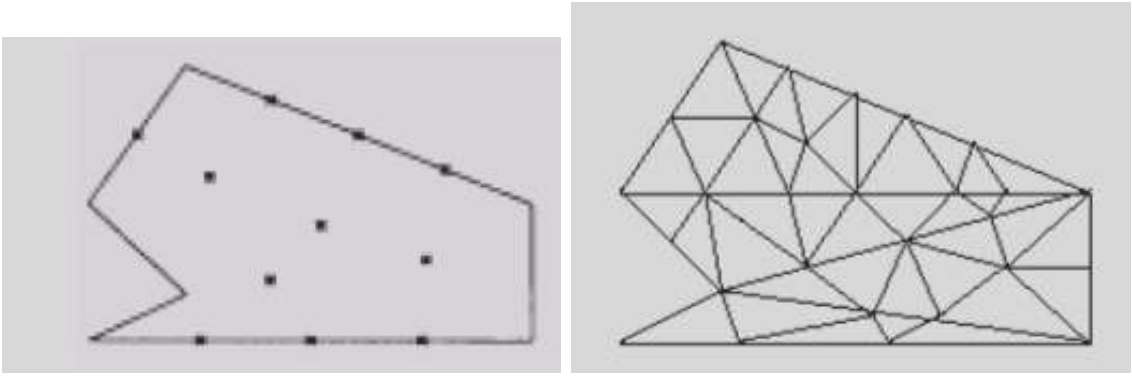


Figure (4.17) : Triangulation initiale.

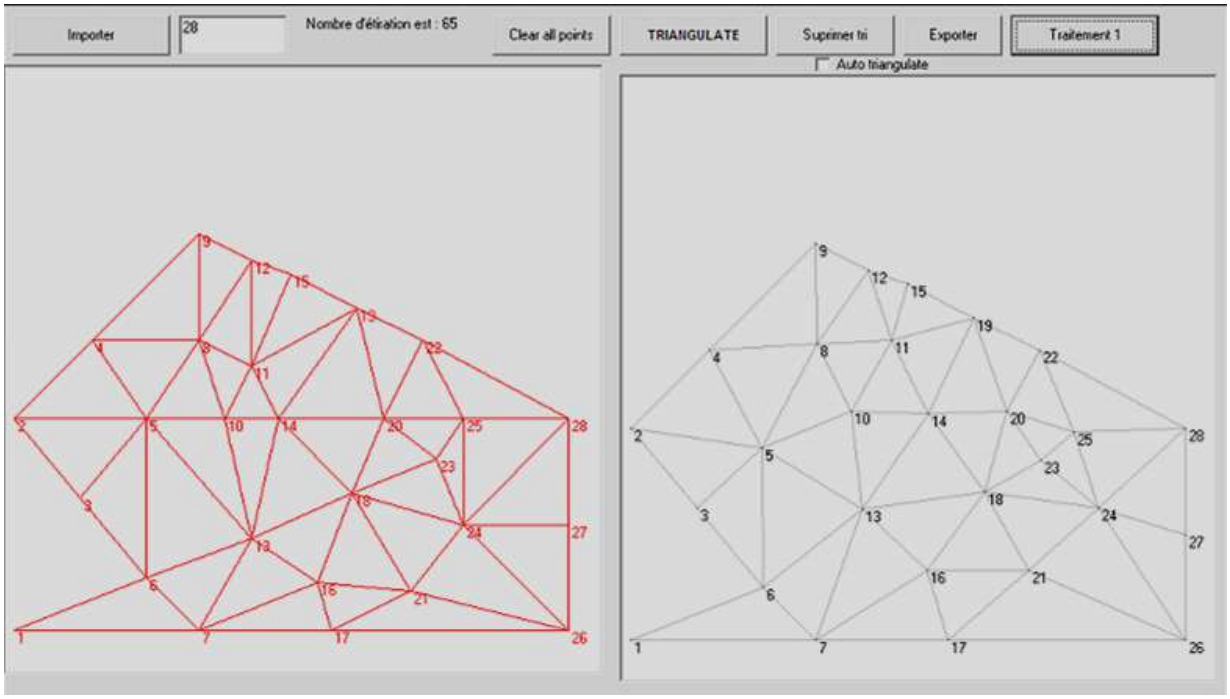


Figure (4.18) : Traitement de la régularisation.

Les résultats des nouvelles coordonnées par le traitement de régularisation sont beaucoup mieu et reflete ce qu'on cherche, on trouve a la fin ces résultats, comme annexes (02).

Conclusions :

En conclusion, la formulation proposée est numériquement fiable, rapide et offre des solutions pour des problèmes qui ont des difficultés et qui impliquent de grandes déformations. Les résultats obtenus reflètent bien l'objectif énoncé en introduction de ce travail. C'est-à-dire l'efficacité et l'élégance des propriétés mathématiques d'une méthode utilisant la triangulation de Delaunay avec la stratégie de déplacement du point optimal et le respect de la frontière caractérisant la géométrie.

Cette analyse pour ces problèmes nous a mené a impliquer des formulations assez complexes, le but est d'aboutir a des maillages adaptés en utilisant une procédure de repositionnement de nœuds, dans le domaine des cas proposés, qui nous a permet d'avoir à travers les nouvelles mailles, l'élimination des déformations et par la suite avoir des maillages a donner des résultats avec une précision cherché.

L'approche que nous avions utilisé, qui change et introduit de nouvelles coordonnées et qui na pas changer le nombre de nœuds mais surtout la forme des éléments dans le même domaine d'influence, sans conditions supplémentaires. Les exemples présentés sont montrer avec la sauvegarde de la géométrie, mais sans la nécessité de modifier les équations de base.

Cette approche par sa simplicité, un remaillage, avec qui on ne perd pas du temps supplémentaire pour les calculs, une stratégie avec un nombre d'itération toujours moins, avec un facteur de forme qui donne toujours de bonne résultats.

L'avantage de cette algorithme est entre la simplicité, et la rapidité par rapport à des techniques plus longues , moins précises mais qui aurait beaucoup plus apporté des calculs avec des temps généralement important et aussi un changement de nombre d'élément.

La méthode a été appliquée aux problèmes de mécanique, thermiques, et il est montré que la bonne qualité est obtenue avec des erreurs pour atteindre une convergence.

On a choisi d'offrir une tolérance d'environ 10%. Pour des problèmes qui ont une géométrie peut complexe, et pour la mécanique des fluide où dans d'autre études.

Les résultats obtenus remettent bien l'objectif énoncé en introduction de ce rapport, c'est a dire associer l'efficacité et apporté avec la triangulation de Delaunay avec une stratégie de déplacement des nœuds et avec un respect de la frontière caractérisant une approche de la géométrie réel.

Bibliographie

Livres

[1] George.P.L,1991, « Génération Automatique de maillages Applications aux méthodes d'éléments finis ». Masson.

[2] Debiane. L. 2004, Applications de l'adaptation de maillage en mécanique des fluides, traitement d'images et controle, Ph. D. Thesis, Université de Montpellier.

[3] George P L, Borouchaki H, 1998, ' Delaunay Triangulation and Meshing Application to Finite Elements' Editions HERMES, Paris.

[4] Ho Y, Randolph M.F . 1998, «A practical numerical approach for large deformation problems in soil » . Masson.

Articles

[5] YaoWu Liut and Kuan Chen . Atwo Dimensional mesh generator for variable order triangular and rectangular element , Computers and Structures. 1988. Vol 29, 6, pp 1033-1053.

[6] Rank E, Schweingruber M, Sommer M. Adaptive mesh generation and transformation of triangular to quadrilateral meshes. Communications in Numerical Methods in Engineering, 1993, 9,pp121-129.

[7] Winslow. A. Numerical solution of the quasilinear Poisson equation in nonuniform triangle mesh. journal of computational physics, 1967; 2:149-172.

[8] Barlow, J., Optimal stress locations in finite element models. Int. J. Numer. Methods Eng. , 1976, 10: 197–209.

[9] Huerta A. A unied approach to remeshing strategies for finite element h adaptivity. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1999; 176 (1- 4):215-229.

[10] Shi W, Tian Z, 2006, « A hybrid interpolation method for the refinement of a regular grid digital elevation model ». International journal of geographical information science.

[11] Alauzet F, Frey P. George P.L. 2004, Anisotropic Mesh Adaptation for Rayleigh-Taylor instabilities, in "European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Eccomas, Jyvaskyla, Finland".

[12] Hongtao Xu, 2003, «An Optimization Approach for 2D finite element mesh smoothing », Huntsville, Alabama.

[13] Zhu JZ, Zienkiewicz O, Hinton E, Wu J. A new approach to the development of automatic quadrilateral meshes Generation. International Journal for Numerical Methods in Engineering; 1991, 32, pp849-866.

[14] Laug P, Borouchaki H, Curve linearization and discretization for meshing composite parametric surfaces, in "Communications in Numerical Methods in Engineering (CNME)" , 2004, vol. 20, pp 869-876.

[15] Talbert A, Parkinson AR. Development of an automatic two-dimensional finite element mesh generator using quadrilateral elements and Bezier curve boundary definition. International Journal for Numerical Methods in Engineering,1990; 29:pp1551-1567.

[16] Borouchaki H, George P. L, Hecht F, Laug P, Delaunay mesh generation governed by metric specifications Part I, Algorithms ,1997,25, pp61–83.

[17] P.G. Ciarlet, 1978, The Finite Element Method, North Holland,

[18] W.Fritz, 1987, Two Dimensional block structured grid generation techniques, in conf.on automated mesh generation and adaption,Grenoble, France.

[19] P.L.George .Génération des maillages pour la simulation par éléments finis de problèmes physiques, in 'Revue de physique appliquée',1990, Vol 25, N° 7.

[20] P.L.George, 1989. Construction et modification de maillages Rapport technique n°104, INRIA.

[21] Debiane. L. 2004, Applications de l'adaptation de maillage en mécanique des fluides, traitement d'images et controle, Ph. D. Thesis, Université de Montpellier.

[22] Sarrate .J and Huerta .A. An improved algorithm to smooth graded quadrilateral meshes preserving the prescribed element size. Communications in Numerical Methods in Engineering, 2001, 17, pp89-99.

[23] Babuska . L and Rheinboldt .W. Error estimates for adaptive finite element computations. SIAM Jour.Anal,1978,15,pp736-754.

[24] Baart ML, Mulder EJ. A note on invertible two-dimensional quadratic finite element transformations. Communications in Applied Numerical Methods 1987,3,pp535-539.

[25] O.C. Zienkiewicz and J.Z. Zhu. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. Int. J. Num. Meth. Eng. ,1987, 24, pp.337-357.

[26] O.C. Zienkiewicz and Y.C. Liu and G.C. Huang. Error estimation and adaptivity in flow formulation for forming problems. Int. J. Num. Meth. Eng. ,1988, 25, pp.23-42.

[27] OJ.H. Cheng. Automatic Adaptive remeshing for finite element simulation of forming processes. Int.J.Num.Meth.Eng. ,1988,26.pp.1-18.

[28] O M.J.M. Barata Marques and P.A.F. Martins. An Algorythm for remeshing in metal forming.Journal of Materiels Processing Tecnology,1990,24,pp.157-167.

[29] Debiane. L. , 2004 , Applications de l'adaptation de maillage en mécanique des fluides, traitement d'images et controle, Ph. D. Thesis, Université de Montpellier.

[30] Cherouat A, Borouchaki H, Laug P, Saanouni K. , 2004 Damage Effect in Metal Forming Processes using Adaptive Remeshing, in "The Fourth International Conference on Engineering Computational Technology, Lisbon, Portugal".

[31] Giraud-Moreau L, et al, 2004, New Adaptive Remeshing Technique for the Numerical Simulation of Thin Sheet Metal Forming, in "European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS, Jyvaskyla, Finland.

[32] Giuliani S. An algorithm for continuous rezoning of the hydrodynamic grid in Arbitrary Lagrangian-Eulerian codes. Nuclear Engineering and Design,1982; 72(2):pp205-212.

[33] George P. L and Borouchaki H, 1998,Delaunay triangulation and meshing, Application to finite elements methods, Hermes, Paris.

[34] Borouchaki H, Laug P. Simplification of Composite Parametric Surface Meshes, in "Engineering with Computers (EWC), Springer-Verlag", 2004, vol. 20, pp176-183.

[35] H. Xu and T.S. Newman. An angle-based optimization approach for 2D finite element mesh smoothing. Finite Elements in Analysis and Design, 2006, 42, pp1150-1164.

[36] M.A. Gutierrez, R. de Borst, J.C.J. Schellekens and L.J. Sluys. An algorithm for mesh rezoning with application to strain localization problems. Computers and Structures,1995, 55, pp237-247.

[37] génération de maillage par la Méthodes des éléments finies : une revue et une classification Conception assistée par ordinateur, 1988, volume 20, pp 27-38.

[38] Debiane. L. 2004, Applications de l'adaptation de maillage en mécanique des fluides, traitement d'images et controle, Ph. D. Thesis, Université de Montpellier.

[39] Sarrate .J and Huerta .A. An improved algorithm to smooth graded quadrilateral meshes preserving the prescribed element size. Communications in Numerical Methods in Engineering, 2001, 17, pp89-99.

[40] Babuska . L and Rheinboldt .W. Error estimates for adaptive finite element computations. SIAM Jour.Anal,1978,15,pp736-754.

[41] T.J. Baker , 1988, Unstructured mesh generation and its application to the calculation of flows over complete aircraft, Tennessee Univ. Space Institute Workshop.

[42] Baart ML, Mulder EJ. A note on invertible two-dimensional quadratic finite element transformations. Communications in Applied Numerical Methods 1987,3,pp535-539.

[43] O.C. Zienkiewicz and J.Z. Zhu. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. Int. J. Num. Meth. Eng. ,1987, 24, pp.337-357.

[44] O.C. Zienkiewicz and Y.C. Liu and G.C. Huang. Error estimation and adaptivity in flow formulation for forming problems. Int. J. Num. Meth. Eng. ,1988, 25, pp.23-42.

[45] OJ.H. Cheng. Automatic Adaptive remeshing for finite element simulation of forming processes. Int.J.Num.Meth.Eng. ,1988,26.pp.1-18.

[46] O M.J.M. Barata Marques and P.A.F. Martins. An Algorythm for remeshing in metal forming.Journal of Materiels Processing Tecnology,1990,24,pp.157-167.

[47] Cook R.D., Malkus, D.S. Plesha, M.E. and Witt, R.J. , 2001, Concepts and Applications of Finite Element Analysis, 4th edition, (Wiley) ,UK.

[48] Giffort L.N.. More on distorted isoparametric elements. Int.J. Number. Methods Eng. 1979, 14,pp, 290-291.

[49] M.J.M. Barata Marques and P.A.F. Martins. An algorithm for remeshing in metal forming. Journal of Materials Processing Technology, 1990, 24, pp. 157-167.

[50] O.C. Zienkiewicz and J.Z. Zhu. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. Int. J. Num. Meth. Eng. , 1987, 24, pp. 337-357.

[51] O.C. Zienkiewicz, Y.C. Liu and G.C. Huang. Error estimation and adaptivity in flow formulation for forming problems. Int. J. Num. Meth. Eng. ,1988, 25, pp. 23-42.

[52] J. H. Cheng. Automatic adaptive remeshing for finite element simulation of forming processes. Int. J. Num. Meth. Eng. ,1988, 26. pp. 1-18.

[53] Babuska and W. Rheinboldt. Error estimates for adaptive finite element computations. SIAM Jour. Num. Anal. ,1978, 15, pp. 736-754.

[54] H. Borouchaki, P. Laug. Simplification of Composite Parametric Surface Meshes, in "Engineering with Computers (EWC), Springer-Verlag", vol. 20, p. 176-183, 2004.

[55] S. A. Canann, M.B. Stephenson and T. Blacker. Optismoothing-driven approach to mesh smoothing. Finite Elements in Analysis and Design,1993, 13, pp. 185-190.

[56] Finite element mesh generation methods: a review and classification, Computer-Aided Design, 1988, Volume 20, Issue 1, January-February, pp.27-38.

[57] Frey. P , 2004. Anisotropic Metric for Mesh Adaptation, in "European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS , Jyvaskyla, Finland".

[58] suhara J, Fukuda J. Automatic mesh generation for _nite element analysis. In Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, Oden JT, Clough RW, Yamamoto Y. (eds). University of Alabamal Press: Tuscaloosa, AL, 1972; 607{624.

[59] Lindholm DA. Automatic triangle mesh generation on surfaces of polyhedra. IEEE Transactions on Magnetics MAG 1983, 19(6),pp.2539-2542.

[60] Bank. R, Mesh smoothing using a posteriori estimates, 1997, SIAM J Numer Anal 34,pp 979–997.

[61] Oddy A, Goldak J, McDill M, Bibby M. A distortion metric for iso-parametric finite elements. CSME . 1988,12(4):213-217.

[62] H. Borouchaki, P. L. George, F. Hecht, P. Laug, and E. Saltel, Delaunay mesh generation governed by metric specifications Part I, Algorithms,1997, 25 ,61–83.

[63] H. Borouchaki and P. Frey, Adaptive triangular-quadrilateral mesh generation, Int J Numer Methods Eng, 1998, 41 ,915–934.

[64] G. Buscaglia and E. Dari, Anisotropic mesh optimization and its application in adaptivity, Int J Num Methods Engrg,1997, 40, 4119–4136.

[65] Dez P, Arroyo M, Huerta A. Adaptivity based on error estimation for viscoplastic softening materials. Mechanics of Cohesive and Frictional Materials,2000; 5:87-112.

[66] Huerta A, Rodrguez-Ferran A, Dez P, Sarrate J. Adaptive finite element strategies based on error assessment. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999; 46:pp1803-1818.

[67] Sarrate J, Huerta A. Encient unstructured quadrilateral mesh generation. International Journal for Numerical Methods in Engineering,2000; 49:pp1327-1350.

[68] Lee CK, Lo SH. A new scheme for the generation of a graded quadrilateral mesh. Computers and Structures , 1994 ; 52(5):pp847-857.

[69] Blacker TD, Stephenson MB. Paving: a new approach to automated quadrilateral mesh generation. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1991; 32:811-847.

[70] Barlow, J., More on optimal stress points – reduced integration, element distortions and error estimation. Int. J. Numer. Methods Eng., 1990. 28: 1457-1501.

[71] Babuska I, Aziz AK. On the angle condition in the finite element method. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1976; 13:214-226.

[72] Yutaka Ohtake, Alexander Belyaev, Ilia Bogaevski " Mesh regularization and adaptive smoothing" Computer-Aided Design, 2001, Volume 33, Issue 11, , Pages 789-800.

[73] M. Aiffa, J. E. Flaherty" A geometrical approach to mesh smoothing" , Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003, Volume 192, Issues 39-40, , Pages 4497-4514.

[74] Shi W**.** and Tian Z. , Y. 2006, « A hybrid interpolation method for the refinement of a regular grid digital elevation model **»**. international journal of geographical information science.

[75] Ho Y. and Randolph M.F. .1998,«A practical numerical approach for large deformation problems in soil ».

[76] George P.L and Borouchaki . H, 1998,' Delaunay Triangulation and Meshing Application to Finite Elements' Editions HERMES, Paris.

[77] Giraud-Moreau L, Borouchaki H, Cherouat A, Laug . , 2004. New Adaptive Remeshing Technique for the Numerical Simulation of Thin Sheet Metal Forming, in "European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS, Jyvaskyla, Finland".

[78] Dez P, Huerta A. A uni_ed approach to remeshing strategies for _nite element h adaptivity. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1999; 176(1-4),pp.215-229.

[79] Perronnet A. ,1992.Triangulation par arbre-4 de triangles équilatéraux et maximisation de la qualité. Publication du Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre Marie Curie et Centre National de la Recherche Scientifique.

[80] A. El-Hamalawi , 2000, A simple and effective element distortion factor, Computers & Structures, Volume 75, Issue 5.

[81] Wilson FW, Goodrich RK, Spratte W. Lawson's triangulation is nearly optimal for controlling error bounds. Journal on Numerical Analysis, SIAM 1990; 27:pp190-197.

[82] P. Laug, H. Borouchaki. Curve linearization and discretization for meshing composite parametric surfaces, in "Communications in Numerical Methods in Engineering (CNME)", 2004.vol. 20, pp 869-876.

[83] Barlow, J. 1990:, Critical Tests for Element Geometric Distortions. In 6th World Congress on Finite Element Analysis. Robinson & Associates.

[84] Talbert A, Parkinson AR. Development of an automatic two-dimensional _finite element mesh generator using quadrilateral elements and Bezier curve boundary de_nition. International Journal for Numerical Methods in Engineering,1990; 29: pp1551-1567.

[85] H. Borouchaki, P. L. George, F. Hecht, P. Laug, and E. Saltel, Delaunay mesh generation governed by metric specifications Part I, Algorithms ,1997,25, pp61–83.

[86] Daniel Rypl, Zdeněk Bittnar, Triangulation of 3D surfaces reconstructed by interpolating subdivision, Computers & Structures, Volume 82, Issues 23-26, September-October 2004, Pages 2093-2103

[87] Chae Soo-Won, Klaus-Jürgen Bathe " On automatic mesh construction and mesh refinement in finite element analysis", Computers & Structures, 1989, Volume 32, Issues 3-4, Pages 911-936.

[88] MacNeal, R.H., Finite Elements: Their Design and Performance. 1993: Marcel Dekker, ISBN 0824791622.

[89] Pascal Jean Frey, Paul Luis George,2003. Le maillage facile , Lavoisier, paris

[90] Paul Luis George . 2001, Maillage et Ataptation , Lavoisier, Paris

[91] Cherouat A, Borouchaki H, Laug P, Saanouni K. , 2004 Damage Effect in Metal Forming Processes using Adaptive Remeshing, in "The Fourth International Conference on Engineering Computational Technology, Lisbon, Portugal".

[92] Giraud-Moreau L, et al, 2004, New Adaptive Remeshing Technique for the Numerical Simulation of Thin Sheet Metal Forming, in "European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS, Jyvaskyla, Finland.

[93] Giuliani S. An algorithm for continuous rezoning of the hydrodynamic grid in Arbitrary Lagrangian-Eulerian codes. Nuclear Engineering and Design,1982; 72(2):pp205-212.

[94] George P. L and Borouchaki H, 1998,Delaunay triangulation and meshing, Application to finite elements methods, Hermes, Paris.

[95] Borouchaki H, Laug P. Simplification of Composite Parametric Surface Meshes, in "Engineering with Computers (EWC), Springer-Verlag", 2004, vol. 20, pp176-183.

[96] H. Xu and T.S. Newman. An angle-based optimization approach for 2D finite element mesh smoothing. Finite Elements in Analysis and Design, 2006, 42, pp1150-1164.

[97] M.A. Gutierrez, R. de Borst, J.C.J. Schellekens and L.J. Sluys. An algorithm for mesh rezoning with application to strain localization problems. Computers and Structures,1995, 55, pp237-247.

[98] génération de maillage par la Méthodes des éléments finies : une revue et une classification Conception assistée par ordinateur, 1988, volume 20, pp 27-38.

[98] Zheng X, Lowengrub J, Anderson A, Cristini V. Adaptive unstructured volume remeshing II: Application to two- and three-dimensional level-set simulations of multiphase flow. J Comput Phys 2005;208(2):626–50.

[99] Ito Y, Nakahashi K. Surface triangulation for polygonal models based on CAD data. Int J Numer Methods Fluids 2002;39(1):75–96.

[100] Ruppert J. A Delaunay refinement algorithm for quality 2-dimensional mesh generation. J Algorithm 1995;18(3):548–85.

[101] Secchi S, Simoni L. An improved procedure for 2D unstructured Delaunay mesh generation. Adv Eng Softw 2003;34(4):217–34.

[102] Talbert JA, Parkinson AR. Development of an automatic, twodimensional finite element mesh generator using quadrilateral elements and Bezier curve boundary definition. Int J Numer Methods Eng 1990;29(7):1551–67.

[103] L. L. Durocher and A. Gasper, (1979). A versatile two- dimensional mesh generator with automatic bandwidth reduction. Comput. Struct. 10, 561-575

[104] An algorithm for continuous rezoning of the hydrodynamic grid arbitrary lagrangian-eulerian computer codes 1982 Nuclear engineering and design 72(1982) 205-212 North-Holland publishing company

ANNEXE (01)

A.1 Principe de la méthode des éléments finis :

On a vu dans le chapitre précédent les difficultés rencontrées quand on résout, par les méthodes d'approximation de résidus pondérés ou des méthodes variationnelles, un problème régis par des équations aux dérivées partielles. Les difficultés apparaissaient principalement au niveau des points suivants

a) La solution est recherchée pour des problèmes ayant un domaine d'intégration à géométrie simple. Pour des géométries complexes, le calcul de la solution devient difficile sinon impossible
b) La difficulté de construction de la fonction d'approximation $\tilde{\phi}$ ainsi que le calcul correspondant des intégrales de résidus pondérés ou variationnelles
c) La difficulté de répéter la méthode sur différents types de problèmes.

Le champ d'application de ces méthodes se voit ainsi très réduit.

La méthode des éléments finis surmonte ces difficultés par l'établissement d'une théorie qui apporte des réponses à chacun des points a) ,b) et c).

a) La difficulté de prendre en charge la complexité du domaine est résolue en introduisant la notion de discrétisation géométrique du domaine par des éléments, qui sont en nombre fini, appelés éléments finis, dont la géométrie standard est conservée pour tous les problèmes. La solution est alors approchée sur cet élément. Les formulations de résidus pondérés ou variationnelles sont alors exprimées sur cet élément fini. On obtient des formes élémentaires. La solution globale est obtenue par la résolution d'un système d'équations algébriques obtenu grâce à une technique d'assemblage des formes élémentaires sur tout le domaine d'intégration, procédure propre à la méthode des éléments finis.

C'est là la clé de méthode des éléments finis. En adoptant cette discrétisation géométrique la méthode apporte les réponses nécessaires aux points a) b) et c).

Avec cette conception, la méthode devient programmable et trouve un large champ d'application. La méthode ne cesse de se développer et de s'étendre à des domaines très diversifiés. Aujourd'hui son utilisation se fait industriellement grâce à des codes de calculs tels que ANSYS, FLUENT, etc...

A.2 Procédure explicite pour la méthode :

La formulation d'un problème par la méthode des éléments finis se fait selon les étapes suivantes :

A.2.a Choix de l'élément fini et discrétisation :

On choisit l'élément selon le type de problème étudié, la géométrie du domaine d'intégration et la précision demandée de la solution. Selon le type de problème par exemple en mécanique du solide la compression des barres et la flexion des poutres est étudié respectivement par des éléments linéaires à deux nœuds à un seul degré de liberté chacun pour assurer seulement la continuité des déplacements axiaux de la barre (Continuité C^0) et des

éléments de poutre à deux degrés de liberté qui puissent assurer en plus de la continuité des déplacements celle des déformations (Continuité C^1). Pour respecter la géométrie du domaine on choisit par exemple les éléments donnés par les figures A1 Pour augmenter la précision de la solution on choisit des éléments d'ordre supérieur (éléments hiérarchiques).

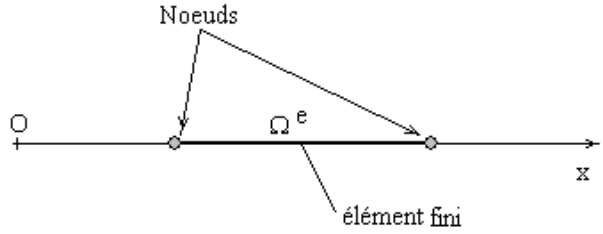


Figure A.1– Discrétisation d'un domaine 1D

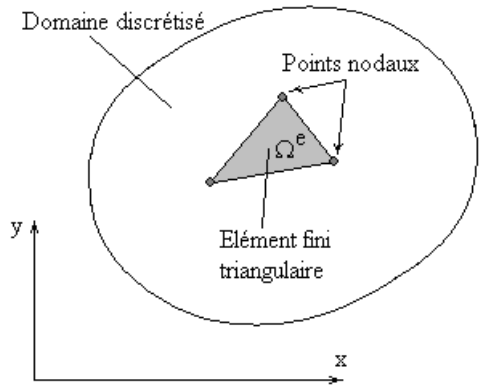


Figure A.2– Discrétisation d'un domaine 2D

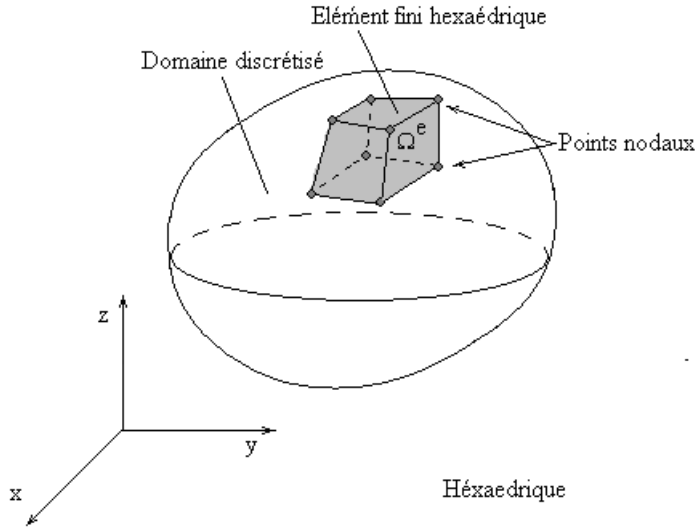


Figure A.3– Discrétisation d'un domaine 3D

Un fois l'élément choisit on discrétise le domaine en un nombre finis d'éléments interconnectés par les points nodaux appartenant aux frontières communes. La discrétisation en éléments finis est faite selon la précision demandée, ainsi que les zones locales où l'on voudrait ressortir la solution. Le modèle comprenant un nombre fini d'éléments, de points nodaux, de variables nodales[1] ainsi obtenu est le modèle numérique d'éléments finis.

A.2.b Formulation intégrale élémentaire

A.2.b.1 L'approximation de la solution par éléments finis

La méthode des éléments finis est une méthode d'approximation de type Galerkin. La solution , donnée sous forme polynomiale, a une allure plus simple. Ainsi au niveau des polynômes $P_i(x)$ et des paramètres α_i on a:

a) Au polynôme $[P(x)] = [P_1(x) \quad P_2(x) \quad \ldots \quad P_n(x)]$ d'ordre n, apparaissant dans la formulation de Galerkin correspond a une fonction normée $[N(x)] = [N_1(x) \quad N_2(x) \quad \ldots \quad N_n(x)]$ appelée fonction de forme de l'élément. Les termes $N_i(x)$ sont les fonctions de formes associées aux points nodaux i de l'élément

b) Aux paramètres α_i de l'approximation correspondent les variables nodales ϕ_i de l'élément.

L'approximation définie sur un élément s'écrit alors

$$\tilde{\phi}^e(x) = [N(x)]\{\phi^e\} \tag{A.1}$$

C'est une approximation de *type nodale* c'est-à-dire qu'en un point nodal, on a:

$$\tilde{\phi}^e(x_i) = \phi_i \tag{A.2}$$

Des relations (4.1) et (4.2), on déduit la propriété importante des fonctions de forme

$$N_i(x_j) = \delta_{IJ} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{A.3}$$

δ_{ij} est le symbole de Kronecker

Exemple : Approximation sur un élément linéaire unidimensionnel

Représenter l'approximation $\tilde{\phi}^e(x)$, les variables nodales ϕ_i et les fonctions de forme sur un élément linéaire à deux nœuds 1 et 2.

Les fonctions de formes sont $N_1(x)$ et $N_2(x)$. L'élément étant linéaire on a :

$N_1(x) = ax + b$

Utilisant la propriété (A1) on obtient deux équations à deux inconnues a er b

En utilisant l'équation, on a : $\tilde{\phi}^e = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = N_1(x)\phi_1 + N_2(x)\phi_2$. La représentation de l'approximation et des variables nodales est donnée alors par la figure A.4

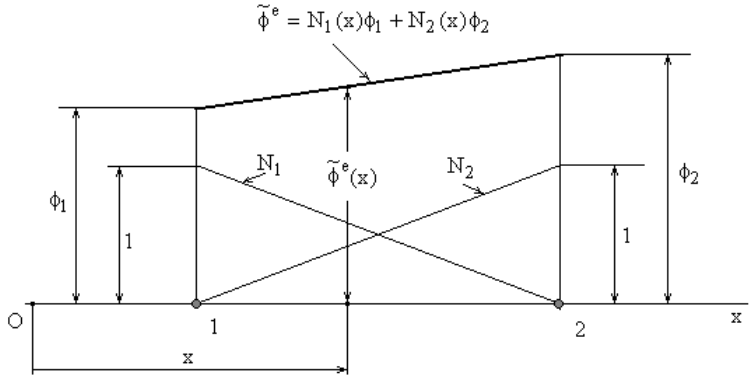


figure A.4 Approximation nodale sur un élément linéaire 1D

A.b.2 Construction des fonctions d'interpolation sur l'élément de référence :

Par la suite on aura à calculer des intégrales sur des domaines réels représentant les éléments finis. Le calcul intégral sur les éléments, ayant des domaines différents, ne sera pas pratique. Il est préférable d'utiliser un élément de référence ayant un domaine normé. Cet élément, de coordonnée ξ, (dans le cas général ξ,η,ζ) est obtenu par transformation de l'élément réel de coordonnée x (dans le cas général x, y,*z*) à l'aide de la relation bijective

$$\xi \rightarrow x(\xi) = \left[\overline{N}(\xi)\right]\left\{x^e\right\} \qquad (A.4)$$

où :

$\left[\overline{N}(\xi)\right] = \left[\overline{N}_1(\xi) \quad \overline{N}_2(\xi) \quad \ldots \quad \overline{N}_{nne}(\xi)\right]$ est la fonction d'interpolation géométrique

$\left\{x^e\right\} = \left[x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_{nne}\right]^T$ est le vecteur coordonnée nodal de l'élément

Sur l'élément de référence l'approximation s'écrit

$$\tilde{\phi}^e(\xi) = \left[N(\xi)\right]\left\{\phi^e\right\} \qquad (A.5)$$

A partir des relations (A.3) et (A.5), on montre que chaque fonction d'interpolation est fonction de la base polynomiale $\left[P(\xi)\right]$:

$$N_i(\xi) = \left[P(\xi)\right]\left\{\bar{a}\right\} \qquad (A.6)$$

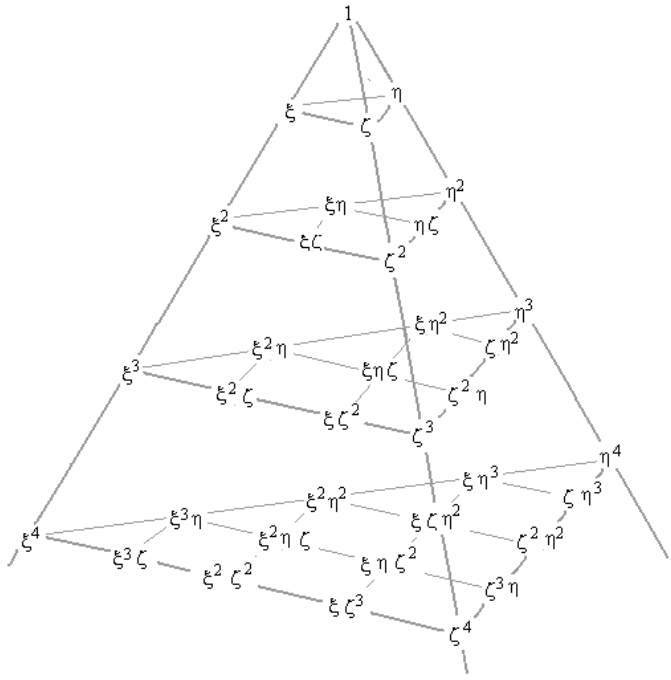
où :

$\left[P(\xi)\right] = \left[P_1(\xi) \quad P_2(\xi) \quad \ldots \quad P_{nne}(\xi)\right]$ est la base polynomiale

$\left\{\bar{a}\right\} = \left[\bar{a}_1 \quad \bar{a}_2 \quad \ldots \quad \bar{a}_{nne}\right]$ sont des coefficients à déterminer. La relation (A.6) montre que les fonction N_i sont construites *à partir de la base polynomiale [P(□)]*.Les fonctions d'interpolation sont construites en tenant compte des principaux critères suivants :

a) Choix de la base polynomiale

Les fonctions $P_i(\xi)$ de la base polynomiale sont choisies en utilisant le triangle de Pascal tridimensionnel (Figure A.6)



	Nombre total de termes requis	Degré du polynôme
Polynome constant	1	0
Polynome linéaire	4	1
Polynome quadratique	10	2
Polynome cubique	20	3
Polynome quartique	34	4

Figure. A.6–Triangle tridimensionnel de Pascal- base polynomiale

b) **Nombre de termes de la base polynomiale**

Nous utilisons souvent des éléments finis à base polynomiale complète. La figure A.6 précise le nombre de termes ou monômes $P_i(\square)$ nécessaires pour construire des bases complètes. *Le nombre de termes de la base polynomiale doit être égal au nombre de variables nodales ou nombre de degrés de liberté n_d de l'élément.*

Nous utilisons le plus souvent une base polynomiale complète: ceci n'est valable que pour certains degrés de liberté. A titre d'exemple le tableau suivant précise les bases polynomiales complètes et incomplètes les plus utilisées.

Dimension	Degré du polynôme	Base polynomiale $[P(\xi)]$	n_d
bases complètes			
1	1	$[1 \quad \xi]$ (linéaire)	2
	2	$[1 \quad \xi \quad \xi^2]$ (quadratique)	3
2	1	$[1 \quad \xi \quad \eta]$ (linéaire)	3
	2	$[1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2]$ (quadratique)	6
3	1	$[1 \quad \xi \quad \eta \quad \zeta]$ (linéaire)	4
	2	$[1 \quad \xi \quad \eta \quad \zeta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \quad \eta\zeta \quad \zeta^2 \quad \xi\zeta]$ (quadratique)	10
bases non complètes			
2	2	$[1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi\eta]$ (bi-linéaire)	4
3	3	$[1 \quad \xi \quad \eta \quad \zeta \quad \xi\eta \quad \eta\zeta \quad \xi\zeta \quad \xi\eta\zeta]$ (tri-linéaire)	8

Tableau. A.1 Bases polynomiales complètes et incomplètes

b) **Ordre de la fonction d'interpolation**
Le degré de la fonction d'interpolation est donné par l'ordre de la base polynomiale (Figure A.6 et tableau A.1)

c) **Critère de convergence de l'approximation** : L'ordre de la fonction d'approximation doit être choisi de façon à satisfaire les critères de convergence de l'approximation donnés au paragraphe A*

Exemple A.2 :
Construire les fonctions d'interpolation N_i d'un élément quadrilatéral de la figure A.7.
Pour un élément quadrilatéral à quatre nœuds l'équation (A.6) donnant les fonctions d'interpolation N_j s'écrit :

$$N_i(\xi,\eta) = \sum_{j=1}^{4} P_j(\xi,\eta)\bar{a}_{i,j} \qquad i=1, n$$

Puisque nd=4, la base polynomiale est formée de 4 termes et constitue une base incomplète d'après la tableau A.1. On a :

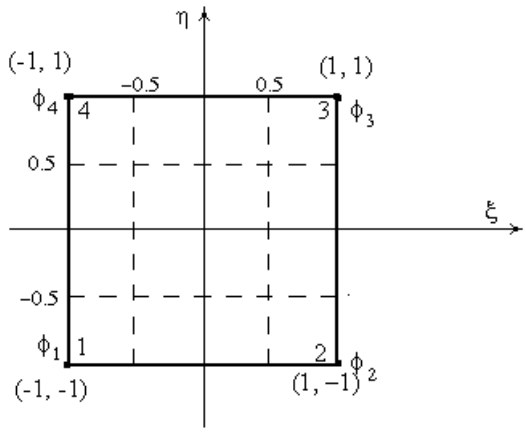


Figure A.7 : Elément de référence quadrilatéral à quatre nœuds

$P_1(\xi,\eta) = 1$
$P_2(\xi,\eta) = \xi$
$P_3(\xi,\eta) = \eta$
$P_4(\xi,\eta) = \xi\eta$
Le quatrième terme P_4 est choisi de manière à conserver la symétrie du problème.

On évalue chacune des fonctions d'interpolations aux nœuds i=1, 4
a) Fonction N_1 :
La fonction N_1 est la fonction de forme définie au nœud 1(-1,-1) de l'élément quadrilatéral. La fonction s'écrit :

$$N_1(-1,-1) = \begin{bmatrix} P_1(-1,-1) & P_2(-1,-1) & P_3(-1,-1) & P_4(-1,-1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{a}_{1,1} \\ \bar{a}_{1,2} \\ \bar{a}_{1,3} \\ \bar{a}_{1,4} \end{Bmatrix} = 1$$

Nœud 2 (= 1, = 1)

$$N_1(1,-1) = \sum_{j=1}^{4} P_j(1,-1)\bar{a}_{i,j} = 0$$

Nœud 3 (= 1, = 1)

$$N_1(1,1) = \sum_{j=1}^{4} P_j(1,1)\bar{a}_{i,j} = 0$$

Nœud 4 (= 1, = 1)

$$N_1(-1,1) = \sum_{j=1}^{4} P_j(-1,1)\bar{a}_{i,j} = 0$$

d'où :

$$\begin{Bmatrix}1\\0\\0\\0\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&-1&1\\1&1&-1&-1\\1&1&1&1\\1&-1&1&-1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{a}_{1,1}\\\bar{a}_{1,2}\\\bar{a}_{1,3}\\\bar{a}_{1,4}\end{Bmatrix}$$

La résolution du système donne les coefficients $\bar{a}_{1,j}$:

$$\begin{Bmatrix}\bar{a}_{1,1}\\\bar{a}_{1,2}\\\bar{a}_{1,3}\\\bar{a}_{1,4}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&-1&1\\1&1&-1&-1\\1&1&1&1\\1&-1&1&-1\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}1\\0\\0\\0\end{Bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\-1&1&1&-1\\-1&-1&1&1\\1&-1&1&-1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\0\\0\\0\end{Bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{Bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{Bmatrix}$$

d'où :

$$N_1=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$

La figure A.8 montre l'allure de la fonction N_1 dans le repère suivant

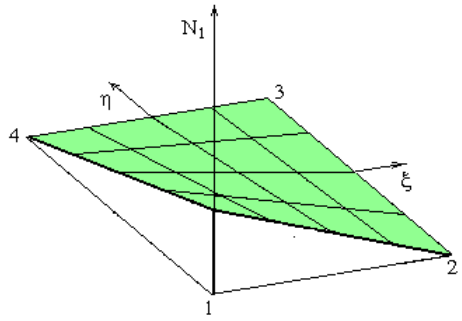


Figure A.8 : Fonction d'interpolation $N_1(\xi,\eta)$

La même procédure est utilisé pour déterminer les fonctions N_2, N_3, et N_4 aux nœuds 2, 3 et 4 respectivement.

$$N_2=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_3=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$

$$N_4=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

A* Conditions de convergence de l'approximation

La méthode des éléments finis est une méthode numérique où la solution est obtenue sur chacun des éléments finis, les conditions suivantes de convergence doivent être satisfaites.

a) L'approximation doit être continue sur l'élément fini. Cela implique que l'interpolation choisie doit être continue sur l'élément fini. Comme les polynômes sont des fonctions continues, les fonctions d'interpolation de type polynomiale satisfont à cette condition.

b) L'élément fini doit être compatible c'est-à-dire que la variable $\tilde{\phi}$ et ses dérivées partielles $\frac{\partial^r \tilde{\phi}}{\partial x^r}$ doivent être continues aux frontières communes des éléments finis.

Physiquement la compatibilité inter-éléments s'explique comme suit

- Cas de la variable $\tilde{\phi}$: La violation du critère entraînerait l'apparition 'd'ouvertures' ou 'trous' entre éléments lorsque le corps est sollicité
- Cas des dérivées partielles $\frac{\partial^r \tilde{\phi}}{\partial x^r}$: La violation du critère de continuité des dérivées partielles aux frontières entraîne des déformations non-conformes avec la nature du comportement réel du corps sous l'action des sollicitations

Mathématiquement la continuité de $\tilde{\phi}$ et de ses dérivées $\frac{\partial^r \tilde{\phi}}{\partial x^r}$ est définie par l'unicité de l'expression de l'approximation et de ses dérivées partielles en fonction des seules variables nodales associées aux nœuds de la frontière inter-éléments. En effet considérons chaque cas :

- Continuité de $\tilde{\phi}^e(x)$ sur une frontière

Considérons de nouveau l'approximation (A.5) écrite sur l'élément réel

$$\tilde{\phi}^e(x) = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) & \dots & N_{nne}(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \dots \\ \phi_{nne} \end{Bmatrix} \qquad (A.7)$$

les fonctions $N_i(x)$ doivent être nulles si elle n'est pas une variable nodale associée à un nœud de cette frontière

Où $N_i(x) = 0$

Lorsque x est situé sur une frontière et

ϕ_i n'est pas une variable nodale de cette frontière

De même sur l'élément de référence

$N_i(\xi) = 0$

Lorsque elle est situé sur une frontière et

ϕ_i n'est pas une variable nodale de cette frontière

- Continuité de $\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}$ sur une frontière

La condition pour que $\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}$ soit continue sur une frontière s'écrit de manière similaire

$$\frac{\partial \tilde{\phi}^e(x)}{\partial x} = \left[\frac{\partial N_1(x)}{\partial x} \quad \frac{\partial N_2(x)}{\partial x} \quad \ldots \quad \frac{\partial N_{nne}(x)}{\partial x} \right] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \ldots \\ \phi_{nne} \end{Bmatrix} \tag{A.8}$$

Où $$\frac{\partial N_i(x)}{\partial x} = 0 \tag{A.9}$$

Lorsque x est situé sur une frontière et

ϕ_i n'est pas une variable nodale de cette frontière

Sur l'élément de référence à deux dimensions la condition précédente s'écrit

$$\frac{\partial N_i(\xi)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i(\xi)}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \tag{A.10}$$

Lorsque □ est situé sur une frontière et

ϕ_i n'est pas une variable nodale de cette frontière

c) L'approximation **doit satisfaire la condition de complétude**, c'est-à-dire que les fonctions d'interpolations doivent être constituées des termes polynomiaux qui forment une base complète (Figure A.3). En effet, on peut diminuer l'erreur de l'approximation $e(x) = \tilde{\phi}(x) - \phi_{ex}(x)$ ou l'erreur sur les dérivées de l'approximation $\frac{\partial^r \tilde{\phi}}{\partial x^r}$ en diminuant la taille des éléments. Pour que, sur chaque élément, l'erreur e(x) tende vers zéro avec la diminution de l'élément il faut que l'expression de l'approximation $\tilde{\phi}^e(x) = [N(x)]\{\phi^e\}$ contienne un terme constant non nul. L'approximation $\tilde{\phi}(x)$ peut alors représenter exactement la fonction $\phi_{ex} = constante$ sur chaque élément. De même pour que l'erreur sur la dérivée première $\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} - \frac{\partial \phi_{ex}}{\partial x}$ tende vers zéro avec la dimension de l'élément, il faut de plus que l'expression $\tilde{\phi}^e(x) = [N(x)]\{\phi^e\}$ contienne un terme en x. Ainsi l'approximation $\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}$ peut représenter exactement la fonction dérivée $\frac{\partial \phi_{ex}}{\partial x} = constante$ sur chaque élément. Plus généralement pour que les dérivées sur $\tilde{\phi}(x)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre r tendent vers zéro, il faut que l'expression $\tilde{\phi}^e(x) = [N(x)]\{\phi^e\}$ contienne un polynôme complet d'ordre r. Si de plus $\tilde{\phi}(x)$ est continue sur les frontières entres les éléments , ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre r-1, les erreurs tendent vers zéro en tout point du domaine y compris sur les frontières.

La nécessité de cette condition peut s'expliquer physiquement. En mécanique du solide par exemple cette condition est nécessaire pour pouvoir représenter correctement les états de déformation (ou de courbure le cas échéant) constante et en particulier les états de déformation nulle pour représenter les modes rigides. Il est donc dangereux d'exclure de l'approximation les premières fonctions de base permettant de représenter ces états de

déformation constante. La base est complète en tronquant les termes d'ordre élevé sans exclure les premiers termes de la base.

Définition de la continuité de l'élément fini

On donne ci-dessous les définitions de continuité de l'élément fini :

- Elément de continuité C^0 (ou de classe C^0) : si l'approximation $\tilde{\phi}(x)$ (seule) est continue sur les frontières entre deux éléments on dit que l'approximation est de type C^0(famille de Lagrange)
- Elément de continuité C^1 : Si l'approximation et ses dérivées premières sont continues sur les frontières entres les éléments l'approximation est de type C^1(famille d'Hermite)
- Elément de continuité C^n : Si l'approximation et ses dérivées jusqu'à l'ordre n sont continues sur les frontières entres les éléments l'approximation est de type C^n (famille d'Hermite)

1. **Formulation intégrale**

Calcul élémentaire sur l'élément fini par l'utilisation d'une formulation intégrale ou variationnelle et passage à la formulation faible par transformation de la formulation forte

2. **Equations élémentaires**

Discrétisation des formes intégrales faibles. Pour plus de facilité, calculs d'intégrales sur l'élément de références. Ecriture des équations élémentaires relatives aux variables nodales de l'élément choisi pour résoudre le problème.

3. **Equations sur le domaine global**

Ecriture des équations globales obtenues par assemblage des équations élémentaires de l'étape 4

4. **Introduction des conditions aux limites**

Après assemblage introduction des conditions aux limites - système d'équations réduit

5. **Résolution**

Résolution par des méthodes numériques connues du système d'équations algébriques globales.

7. **Etape d'affichage des résultats (post processeur)**

Affichage des résultats- utilisation des techniques d'interaction graphique à l'aide du programme post- processeur. Analyse des résultats obtenus.

La formulation de la méthode des éléments finis obéit aux mêmes principes de formulation intégrale ou variationnelle des méthodes d'approximation, étudiées dans ce précédé. Le principe de base est de transformer l'équation aux dérivées partielles en un système d'équations linéaires.

On a vu que le principe des méthodes d'approximation est basé sur la discrétisation d'une forme intégrale ou variationnelle définie sur le domaine global. La discrétisation de la forme intégrale est obtenue en utilisant une solution approchée ayant un nombre fini de

termes. L'approximation étant définie globalement sur le domaine analysé, il est difficile d'étudier des géométries à frontières complexes. La méthode des éléments finis surmonte cette difficulté par une discrétisation géométrique du domaine global en sous-domaines de forme géométrique simple appelés éléments finis. La discrétisation de la forme intégrale (de type Galerkin) est définie non pas sur le domaine global, mais sur les éléments finis. Une autre différence par rapport aux méthodes classiques est que l'approximation est propre à chaque type d'élément utilisé. On a donc une bibliographie d'éléments. Les éléments sont interconnectés par un nombre fini de points appelés points nodaux. La discrétisation de la forme intégrale permet d'obtenir un système d'équations algébriques élémentaires, c'est-à-dire obtenues sur chaque élément. Une technique d'assemblage permet d'obtenir alors le système d'équations algébriques sur le domaine global. La résolution du système d'équations permet d'obtenir la solution aux points nodaux du maillage.

Historique de la méthode

La méthode des éléments finis s'est développée initialement pour la résolution des problèmes de **mécanique des structures**. En 1941, Hrenikoff présenta une solution de problèmes d'élasticité en utilisant une méthode 'Frame work method' et montra que l'on pouvait obtenir d'assez bons résultats du problème continu en remplaçant le milieu continu par des arrangements d'éléments de barres.

Courant utilise en 1943 un assemblage d'éléments triangulaires et le principe de l'énergie potentielle minimale pour étudier le problème de torsion de St Venant.

En 1960 Clough et Turner utilisent pour la première fois, lors de la résolution de problèmes de mécanique des structures par **la méthode des déplacements**, le terme 'finite element', en représentant un milieu continu par un assemblage de panneaux triangulaires continus. Le comportement de chaque panneau est caractérisé par une matrice de rigidité élémentaire. A partir de ces matrices, la technique classique de la mécanique des structures conduit à la solution qui donne les déplacements (linéaires) en tout point du milieu continu.

C'est à partir de cette date (1960), date de l'apparition des premiers ordinateurs, que la méthode subit un développement rapide. La méthode des déplacements cédant le pas à la méthode des éléments finis, celle-ci s'étend à d'autres domaines régis par des équations aux dérivées partielles: mécanique des fluides, transfert thermique et d'autres domaines. La méthode est utilisée pour résoudre les problèmes non linéaires et non stationnaires.

A partir de 1967 des travaux sur la formulation de la méthode des éléments finis notamment ceux de Zienkiewicz et de Chung sont mis au point et constituent une référence de base sur la formulation et l'application de la méthode.

Aujourd'hui la méthode ne cesse de se développer et de s'étendre de plus en plus à d'autres domaines. Son utilisation se fait **industriellement** grâce à des codes de calculs tels que ANSYS, FLUENT FEMLAB, etc...

A.5 Principales étapes de la méthode des éléments finis

A.5.a Discrétisation du domaine

La discrétisation du domaine global[2] équivaut à remplacer le domaine continu, noté Ω, par un ensemble fini de sous-domaines notés Ω^e qu'on appelle éléments finis formant un domaine discret équivalent au domaine continu. Les éléments finis sont formés d'un ensemble fini de points nodaux (Figure A.9).

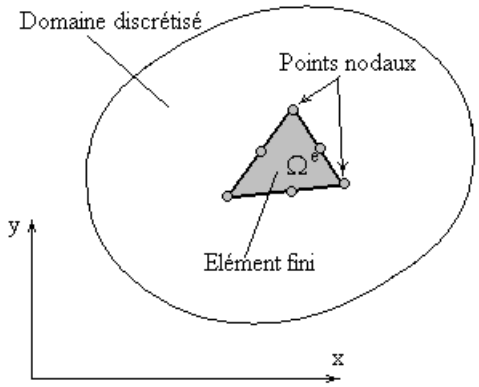


Figure A.9– Discrétisation par éléments finis

Le processus de discrétisation du domaine obéit à certaines règles qui sont :
a) **Le choix du type d'éléments:** ce choix est dicté par le type de problème comme par exemple une barre est discrétisée par des éléments finis de barre
b) **La dimension de l'élément** : la dimension de l'élément influe sur la convergence de la solution. On verra que plus la taille des éléments diminue plus la précision de la solution est meilleure.
c) **La location des nœuds** : Les points nodaux sont introduits obligatoirement aux points de discontinuités du matériau, de géométrie ou de discontinuités de sollicitations réparties du domaine ou encore aux points d'application des sollicitations ponctuelles.
d) **Le schéma de numérotation nodale** : La demi bande représente la largeur de la partie supérieure de la matrice assemblée [K]. Le problème consiste à minimiser cette bande pour avoir une capacité minimale de stockage de la matrice [K] donc un temps minimal de résolution du problème. Il est montré que cette demi bande dépend de la manière dont on numérote le modèle d'élément fini. La demi bande est minimale quand on numérote le domaine selon sa dimension la plus courte.
e) **Simplifications dues à la symétrie du problème** : Si la configuration du problème (domaine et sollicitations externes) présente des symétries, on considère alors la partie obtenu par symétrie comme nouveau problème à analyser. Cette procédure permet de réduire le nombre d'inconnues et de réduire le temps de l'analyse.

A.5.b Approximation par éléments finis

A.5.b.1 Rappel sur l'approximation de type Galerkin

On a vu que l'approximation de type Galerkin est donnée par :

$$\tilde{\phi}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i P_i(x) \qquad \text{(A.1)}$$

où les fonctions $P_i(x)$ constituent une base de l'approximation $\tilde{\phi}(x)$

a_i sont les paramètres de l'approximation

La recherche de la solution consiste à trouver les paramètres a_i en utilisant des méthodes variationnelles ou intégrales. La méthode des résidus pondérés s'écrit :

$$\int_{\Omega} P_i(x)\Re(x)dx = 0 \qquad i=1, n \qquad \text{(A.2)}$$

$\Re(x)$ est le résidu de l'équation aux dérives partielles obtenu en remplaçant la solution exacte (x) par la solution approchée $\tilde{\phi}(x)$.

On a vu que les fonctions de base sont construites en utilisant les équations des frontières du domaine choisi et le triangle de Pascal pour les fonctions d'ordre supérieur.

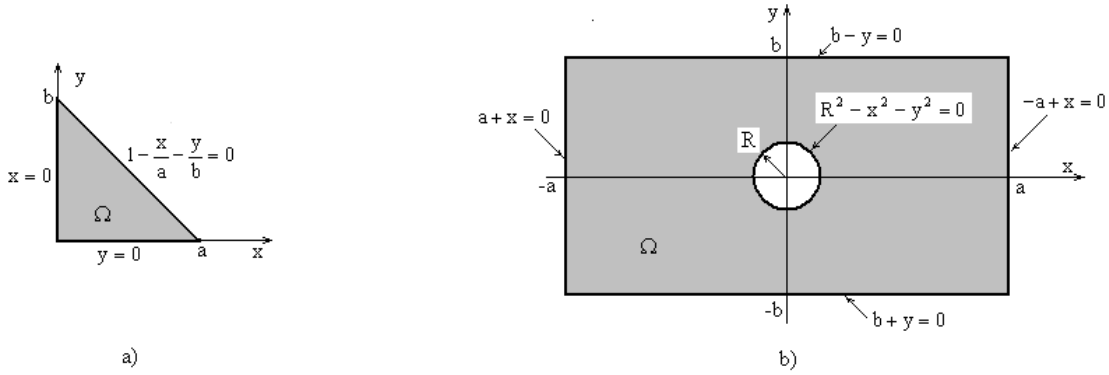


Figure A.10– - Domaines à frontières a) triangulaire et b) circulaire et rectangulaire.

Par exemple pour les configurations de la figure A.10 les fonctions de base sont données par :
Configuration a)

$$F(x,y) = F_1(x,y)F_2(x,y)F_3(x,y) = xy\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)$$

$$P_1(x,y) = F(x,y) = xy\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)$$

$$P_2(x,y) = xF(x,y)$$

$$P_2(x,y) = x^2y\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)$$

Configuration b)

$$F(x,y) = F_1(x,y)F_2(x,y)F_3(x,y) = \left(a^2-x^2\right)\left(b^2-y^2\right)\left(R_1^2-x^2-y^2\right)$$

$$P_1(x,y) = F(x,y) = \left(a^2 - x^2\right)\left(b^2 - y^2\right)\left(R_1^2 - x^2 - y^2\right)$$
$$P_2(x,y) = xF(x,y)$$
$$P_2(x,y) = x\left(a^2 - x^2\right)\left(b^2 - y^2\right)\left(R_1^2 - x^2 - y^2\right), \ldots$$

A.5.b.2 L'approximation par éléments finis

A.5.c Divers types d'éléments

A.5.c.1 Modélisation par éléments finis unidimensionnels

L'exemple de tige en transfert thermique, de barre ou poutre en mécanique du solide ou de conduction thermique à travers un mur plan est l'exemple type de problèmes unidimensionnels. Le domaine géométrique est modélisé par des éléments finis linéaires ou quadratiques le plus souvent. La solution représente un champ vectoriel (par exemple le champ de déformations) ou scalaire (le champ de températures). La solution est donnée aux points nodaux.

a) L'élément linéaire

L'élément linéaire est un élément à deux nœuds ayant une seule variable par nœud.
Le nombre de degrés de liberté n_d de l'élément est égal donc à 2. D'après le tableau 1 l'approximation $\tilde{\phi}^e$ est linéaire : on dira que *l'élément est linéaire.*

La figure A.9 montre l'élément réel i-j dans le repère (O, x) de longueur $\ell^e = x_j - x_i$ et son transformé l'élément de référence dans le nouveau repère $(|\xi| \le 1)$

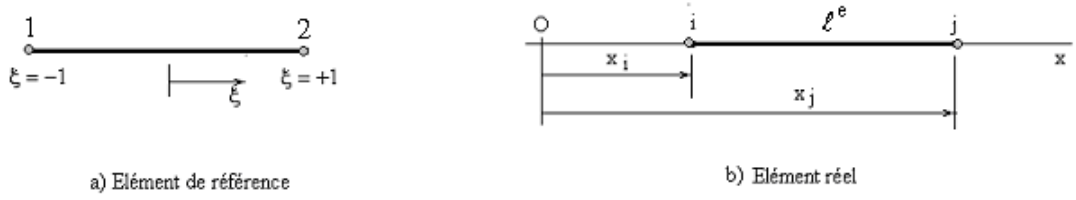
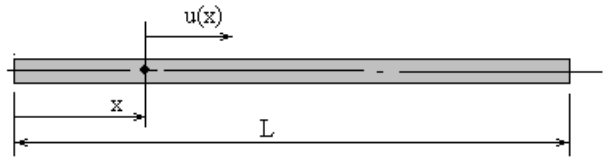
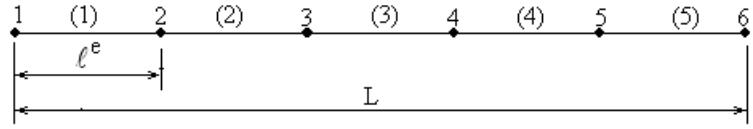


Figure A.11 : Elément fini linéaire de référence et réel

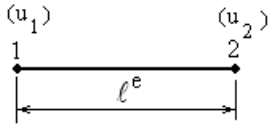
L'élément doit satisfaire la continuité de l'approximation u(x) à l'intérieur de l'élément et sur sa frontière : l'élément est de continuité C^0.
La figure A.12 montre la modélisation d'une barre ou d'une tige par ce type d'élément.



a) Barre ou tige



b) Modélisation de la barre par cinq éléments (6 noeuds)



c) Type d'élément utilisé: élément linéaire à deux noeuds

Figure A.12 - Modélisation par éléments linéaires unidimensionnels

Si on se donne une longueur ℓ^e de l'élément, le maillage est donné par :

Nombre d'éléments : $ne = \dfrac{L}{\ell^e}$

Nombre de nœuds : $nnt = ne + 1$

La modélisation de la tige de la figure A.12 est donnée par exemple pour ne= 5.

La figure A.13 illustre un problème unidimensionnel de transfert thermique: la conduction stationnaire unidimensionnelle à travers un mur plan de matériau homogène de conductivité thermique k et un mur plan composite de matériaux k_1,k_2 et k_3 et la modélisation correspondante par élément linéaire. Le mur composite est modélisé en tenant compte des propriétés du matériau de chaque panneau.

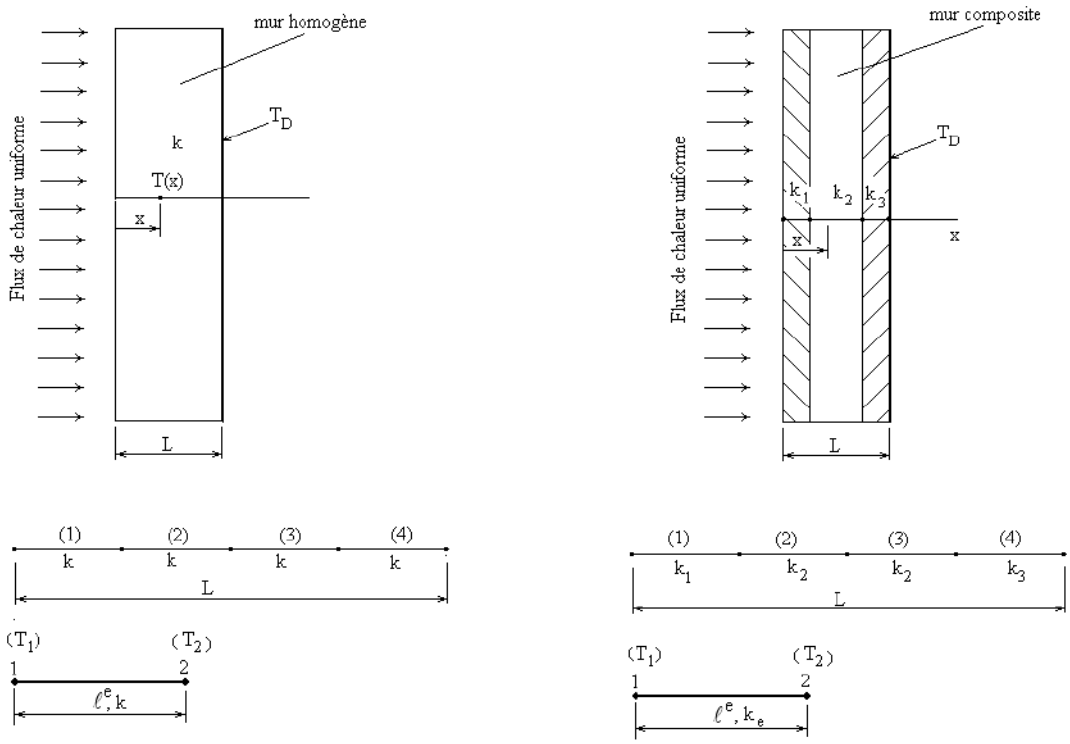


Figure A.13 – Conduction thermique unidimensionnelle à travers un mur homogène et un mur composite et la modélisation par éléments linéaires

- **Construction de l'interpolation de l'élément linéaire**

L'élément est isoparamétrique. Les fonctions d'interpolation géométriques $\overline{N}(\xi)$ et les fonctions d'interpolation de l'approximation $N(\xi)$ sont égales.

Sur l'élément réel, l'approximation (A.8) s'écrit

$$\tilde{\phi}^e(x) = N_i\phi_i + N_j\phi_j = \begin{bmatrix} N_i(x) & N_j(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix} \tag{A.16}$$

Sur l'élément de référence l'approximation (A.10) s'écrit

$$\tilde{\phi}^e(\xi) = \begin{bmatrix} N_1(\xi) & N_2(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \tag{A.17}$$

- **Calcul des fonction N_i**

Pour un élément linéaire à deux nœuds l'équation (A.11) donnant les fonctions d'interpolation N_i s'écrit :

$$N_i(\xi) = \sum_{j=1}^{2} P_j(\xi)\bar{a}_{i,j}$$

Puisque nd=2, la base polynomiale est formée de 2 termes et constitue une base complète d'après la table A.1. On a :

$P_1(\xi) = 1$

$P_2(\xi) = \xi$

On évalue chacune des fonctions d'interpolations aux nœuds i=1, 2

a) Fonction N_1 :

Nœud 1($\xi = -1$) :

$$N_1(-1) = \begin{bmatrix} P_1(-1) & P_2(-1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{a}_{1,1} \\ \bar{a}_{1,2} \end{Bmatrix} = 1$$

Nœud 2 ($\xi = 1$)

$$N_1(1) = \sum_{j=1}^{2} P_j(1)\bar{a}_{1,j} = 0$$

d'où :

$$\bar{a}_1 - \bar{a}_2 = 1$$

$$\bar{a}_1 + \bar{a}_2 = 0$$

soit :

$$\bar{a}_{1,1} = \frac{1}{2}$$

$$\bar{a}_{1,2} = -\frac{1}{2}$$

$$N_1(\xi) = \bar{a}_{1,1}P_1 + \bar{a}_{1,2}P_2 = \frac{1-\xi}{2} \qquad \text{(A.18)}$$

b) Fonction N_2

de même :

$$N_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \qquad \text{(A.19)}$$

Exemple A.3

Soit le modèle d'éléments finis donné par la figure A.13 et le point $\overline{M}$ de coordonnée $\xi = 0$, un point de l'élément de référence. Déterminer la coordonnée x du point M de l'élément (3) transformé du point $\overline{M}$.

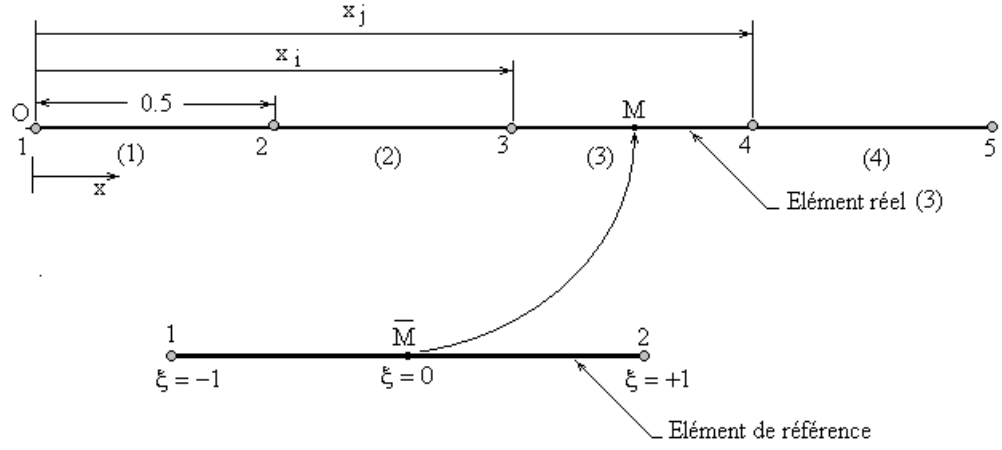


Figure A.14 : Transformés des points de l'élément de référence

On détermine tout d'abord les valeurs des fonctions d'interpolation N_1 et N_2 au point $\overline{M}$ de coordonnée $\xi = 0$ dans le nouveau repère . D'après les relations (A.18) et (A.19) on a :

$$N_1(\xi = 0) = \frac{1-0}{2} = 0.5$$

$$N_2(\xi = 0) = \frac{1+0}{2} = 0.5$$

Puis en utilisant la relation de transformation (A.12) on obtient la coordonnée x du point M dans le repère (O, x):

$$x(\xi = 0) = \begin{bmatrix} N_1(\xi = 0) & N_2(\xi = 0) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 1.5 \end{Bmatrix} = 1.25$$

- **Continuité de l'élément linéaire à deux noeuds**

L'approximation (A.16) étant polynomiale est continue sur l'élément. Soit un point i de la frontière entre les éléments 1 et 2. On a $N_i(x_i) = 1$ pour la fonction d'interpolation associée au nœud i de la frontière et $N_j(x_i) = 0$ pour tout fonction d'interpolation associée à un nœud j ne se trouvant pas sur la frontière. L'approximation $\tilde{\phi}$ est donc continue sur la frontière. L'élément est de continuité C^0. La dérivée première est continue à l'intérieur de l'élément mais est discontinue sur sa frontière. La figure 4.13 montre que les pentes α_1 et α_2 des tangentes T_1 (tangente à l'élément 1 au point frontière i) et T_2 (tangente à l'élément 2 au point frontière i) représentant les dérivées au point i de l'élément 1 et de l'élément 2 sont différentes soit $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ou encore $\left.\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}\right|_{x \to x_i^+} \neq \left.\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}\right|_{x \to x_i^-}$. La dérivée $\left.\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}\right|_{x = x_i}$ prenant deux valeurs différentes au point i est discontinue.

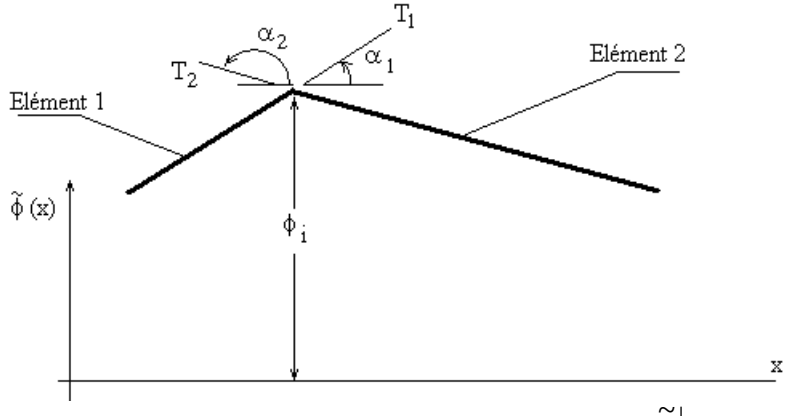


Figure A.15: Continuité C^0 -discontinuité de $\left.\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x}\right|_{x = x_i}$

b) Eléments d'ordre supérieur de type Lagrange

La précision de la solution peut être augmentée davantage en augmentant l'ordre de l'approximation $\tilde{\phi}$. L'ordre de l'approximation est augmenté en ajoutant des nœuds d'interpolation supplémentaires sur l'élément linéaire. On obtient des éléments de type Lagrange (Figure A.16).

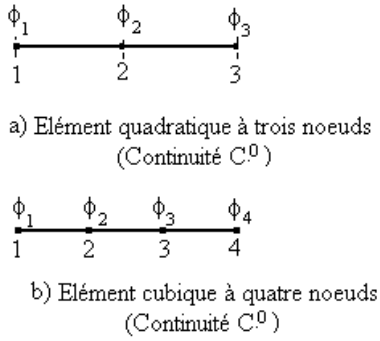


Figure A.16 - Eléments de haute précision de type Lagrange

c) Eléments de type Hermite

- **L'élément cubique à deux nœuds**

L'exemple type d'élément d'Hermite est l'élément de poutre. Cet élément à deux nœuds, possède deux variables par nœud, la déformation transversale ω_i et la déformation de rotation $\theta_i(x) = \left.\frac{\partial \omega}{\partial x}\right|_i$. En assurant la continuité de ces déformations l'élément est de continuité C^1.

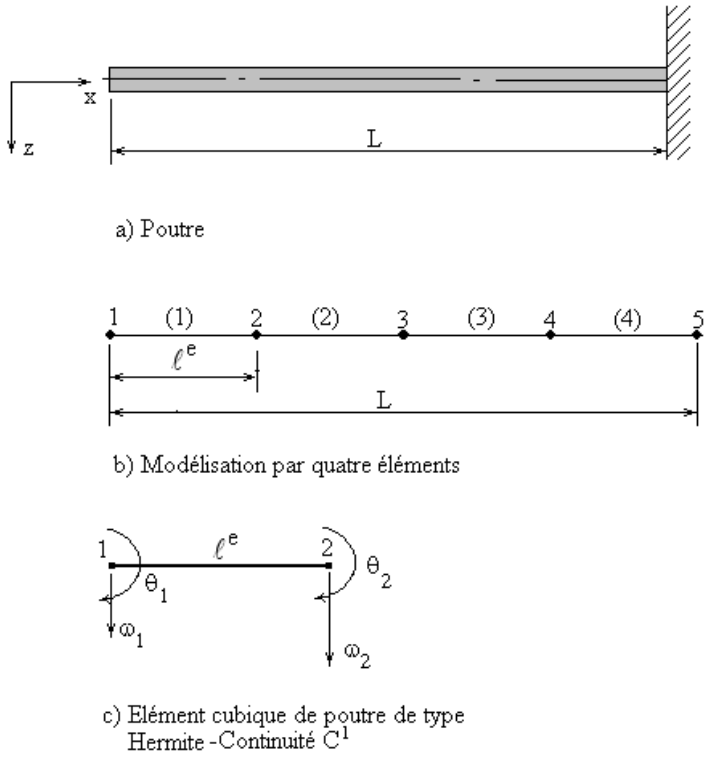


Figure A.17 - Modélisation par élément fini de poutre unidimensionnel de type Hermite

On a :

$P_1(\xi) = 1$

$P_2(\xi) = \xi$

$P_3(\xi) = \xi^2$

$P_4(\xi) = \xi^3$

Le polynôme représentant les fonctions de forme est d'ordre 3 :

$$N_i(\xi) = \sum_{j=1}^{4} P_j(\xi)\bar{a}_{i,j} \qquad i = 1, 4 \qquad \text{(A.20)}$$

Les coefficients $\bar{a}_{i,j}$ peuvent être facilement obtenus en imposant les conditions du tableau A.2.

	N_1	$N_1^{'}$	N_2	$N_2^{'}$	N_3	$N_3^{'}$	N_4	$N_4^{'}$
$\xi=-1$	1	0	0	1	0	0	0	0
$\xi=1$	0	0	0	0	1	0	0	1

Tableau A.2 : Conditions sur les fonctions d'interpolation de l'élément de type poutre

$$N_1=\frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi)=\frac{1}{4}\left(2-3\xi+\xi^3\right)$$
$$N_2=\frac{1}{4}(1-\xi)^2(1+\xi)=\frac{1}{4}\left(1-\xi-\xi^2+\xi^3\right) \quad \text{(A.21)}$$
$$N_3=\frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi)=\frac{1}{4}\left(2+3\xi-\xi^3\right)$$
$$N_4=\frac{1}{4}(1+\xi)^2(\xi-1)=\frac{1}{4}\left(-1-\xi+\xi^2+\xi^3\right)$$

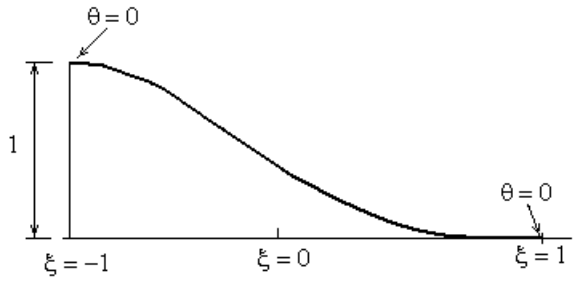
La représentation graphique est donnée par la figure A.16.
L'approximation s'écrit :

$$\omega(\xi)=N_1\omega_1+N_2\theta_1+N_3\omega_2+N_4\theta_2 \quad \text{(A.22)}$$

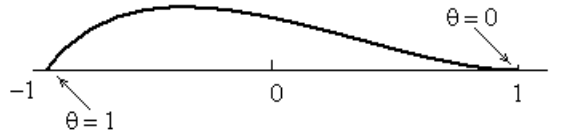
Où

$$\theta_1=\left.\frac{d\omega}{d\xi}\right|_{\xi=-1} \quad \text{(A.23)}$$

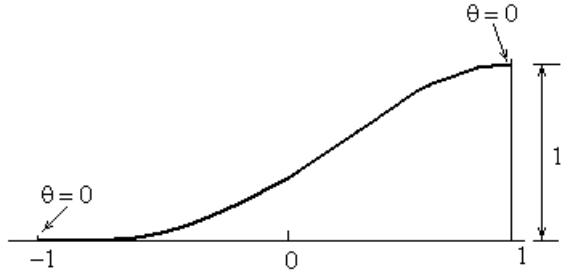
$$\theta_2=\left.\frac{d\omega}{d\xi}\right|_{\xi=1} \quad \text{(A.24)}$$



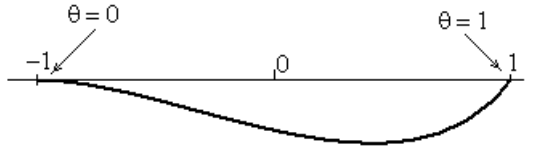
a) Fonction N_1



b) Fonction N_2



c) Fonction N_3



d) Fonction N_4

Figure A.18 Fonctions de forme d'ordre 3 de type Hermite (type poutre)

- **L'élément de type Hermite d'ordre supérieur**

L'élément de type Hermite peut satisfaire la continuité de la dérivée seconde $\phi_{i,xx} = \left.\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right|_{x=x_i}$

L'élément est de continuité C^2. L'ordre de l'approximation $\tilde{\phi}$ augmente. On a alors six variables nodales (Fig. A.17) Le nombre de termes requis de la base polynomiale est égal à six:

A.5.c.2 Modélisation par éléments finis bidimensionnels

Différents phénomènes physiques tels que l'écoulement d'un fluide dans un convergent, la flexion d'une plaque mince ou la répartition des températures dans une paroi ou murs composites constituent, sous certaines hypothèses, des problèmes bidimensionnels. La modélisation se fait par éléments triangulaires ou quadrilatéraux.

a) Eléments triangulaires de continuité C^0

La figure A.18 montre l'écoulement permanent d'un fluide dans un convergent où l'inconnue du problème est la fonction potentiel de(x, y). La fonction potentiel est liée aux vitesses du fluide dans les directions x et y par les relations $u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ et $v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$. La connaissance de cette fonction permet alors d'obtenir les vitesses en chaque point du domaine. La figure A.18b montre la discrétisation par éléments triangulaires linéaires à trois nœuds de continuité C^0.

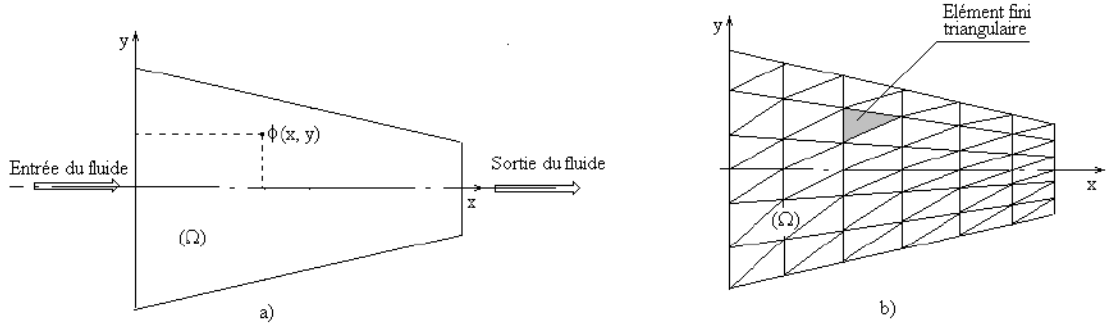


Figure A.18 : Ecoulement permanent dans un convergent

La figure A.19 représente l'écoulement irrotationnel stationnaire à travers une digue poreuse dans les directions x et y avec un potentiel hydraulique qui représente les lignes de courant équipotentielles. Les vitesses du fluide sont déduites de la fonction potentielle. La figure A.19 montre la modélisation par éléments triangulaires linéaires à trois nœuds vérifiant la continuité C^0.

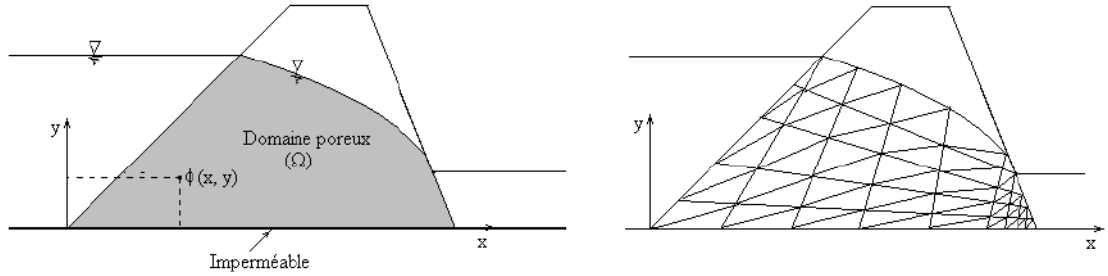


Figure A.19 : Modélisation d'un écoulement à travers une digue par éléments triangulaires

- **Elément triangulaire linéaire**

Le type d'élément utilisé dans les applications précédentes est l'élément linéaire à trois nœuds. L'élément de référence correspondant est donné par la figure A.20.

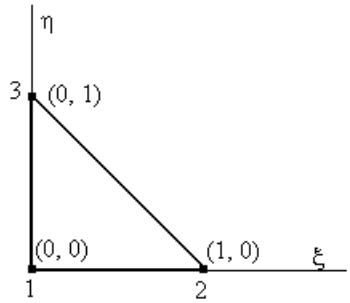


Figure A.20 : Elément de référence de l'élément triangulaire linéaire

Les nœuds géométriques et les nœuds d'interpolation sont confondus : l'élément est isoparamétrique. L'élément assurant la seule continuité de la variable $\tilde{\phi}$ est de continuité C^0.

- **Ordre de l'approximation**

On construit la base polynomiale en utilisant la table A.1. Comme le nombre de dimensions du problème est 2 et que l'élément a trois variables nodales (nd=3), l'ordre de l'approximation est 1, on utilise une base polynomiale complète (Figure A.21) donnée par :

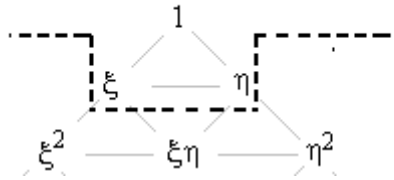


Fig. 4.21 : Base polynomiale complète de l'élément triangulaire linéaire

Appliquant la propriété $N_i(x_j) = \delta_{ij}$, i =1, 3, j=1, 3 les fonctions d'interpolation s'écrivent :

$$N_1 = 1 - \xi - \eta$$
$$N_2 = \xi \qquad \text{(A.24)}$$
$$N_3 = \eta$$

L'approximation sur l'élément fini s'écrit :

$$\tilde{\phi}(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{3} N_i \phi_i$$

Les coordonnées barycentriques L_1, L_2, L_3 sont souvent utilisées pour repérer un point O d'un triangle à cotés rectilignes

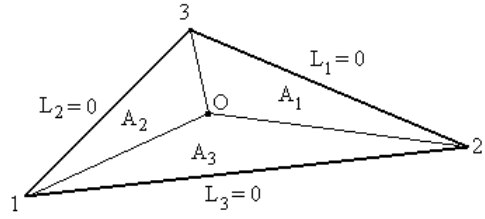


Figure A.22 – Coordonnées barycentriques

$$L_1 = \frac{A_1}{A}$$

$$L_2 = \frac{A_2}{A}$$

$$L_3 = \frac{A_3}{A}$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$L = L_1 + L_2 + L_3$$

Les coordonnées barycentriques sont reliées aux coordonnées intrinsèques par

$$L_1 \equiv 1 - \xi - \eta$$

$$L_2 \equiv \xi$$

$$L_3 \equiv \eta$$

- **Eléments triangulaires d'ordre supérieur de type Lagrange**

La précision de l'approximation peut être augmentée en utilisant des éléments d'ordre supérieur. Ces éléments sont obtenus en ajoutant des points d'interpolation supplémentaires sur les côtés (Figure A.23a). ou au milieu du triangle (Figure A.23b). Ces éléments sont de type Lagrange de continuité C^0.



a) Elément quadratique (6 noeuds), C^0 b) Elément cubique complet (10 noeuds), C^0

Figure A.23 : Eléments triangulaires d'ordre supérieur de type Lagrange

b) Eléments triangulaires de type Hermite de continuité C^1

Les éléments triangulaires de type Hermite sont principalement des éléments à 3 nœuds ou 4 nœuds (nœud au centre de l'élément triangulaire) auquel on ajoute en chaque nœud des dérivées de la variable nodale.

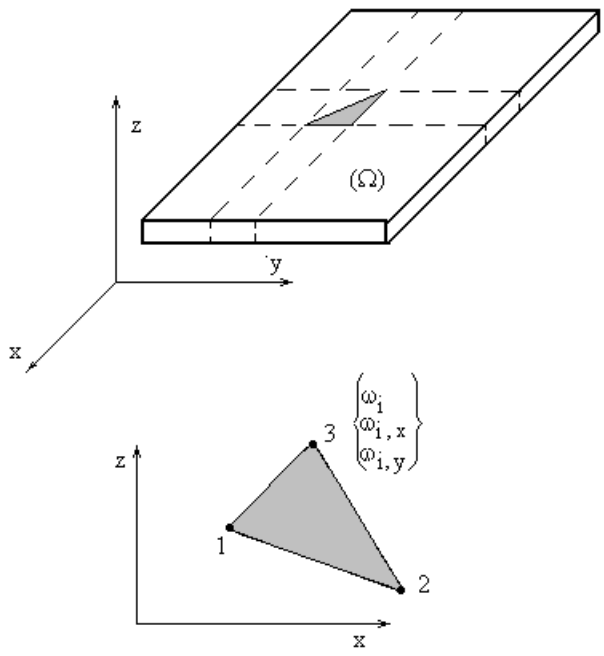


Figure A.24 : Elément cubique de type Hermite semi C^1

L'élément à trois nœuds ayant trois variables ϕ_i, $\phi_{i,\xi} = \left.\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right|_{\xi=\xi_i}$ et $\phi_{i,\eta} = \left.\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right|_{\eta=\eta_i}$ en chaque nœud, est un élément cubique à base incomplète semi continu C^1. Cet élément ne respectant pas la condition de continuité $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ est dit non conforme. On l'utilise par exemple pour modéliser des plaques en flexion (Figure A.24).

- **Ordre de l'approximation**

Ces éléments doivent respecter les hypothèses de Kirchoff (compatibilité C^1 aux points nodaux) pour la flexion des plaques. Différentes bases polynomiales sont proposées pour assurer ces hypothèses (Figure A.25. et A.26).

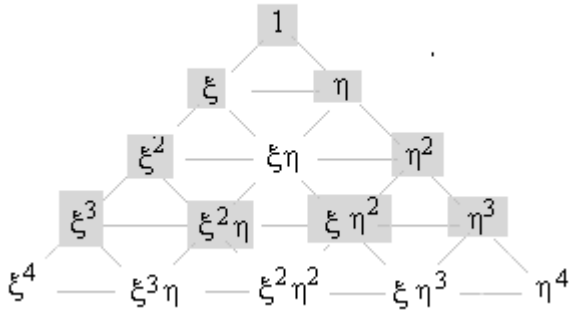


Figure A.25 : Modèle excluant le terme □ □

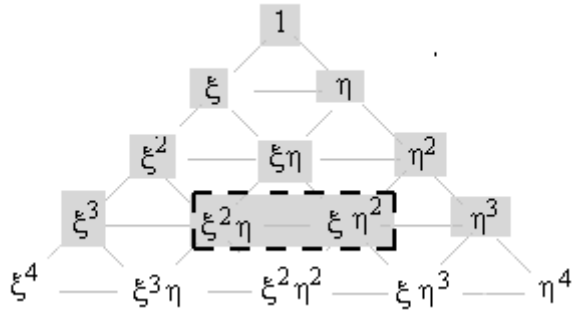


Figure A.26 : Modèle regroupant plusieurs termes

Cependant ces modèles présentent des problèmes de convergence.

b) Eléments quadrilatéraux

La figure A.27 montre de problèmes types bidimensionnels (écoulement d'un fluide dans un convergent et la flexion d'une plaque mince)

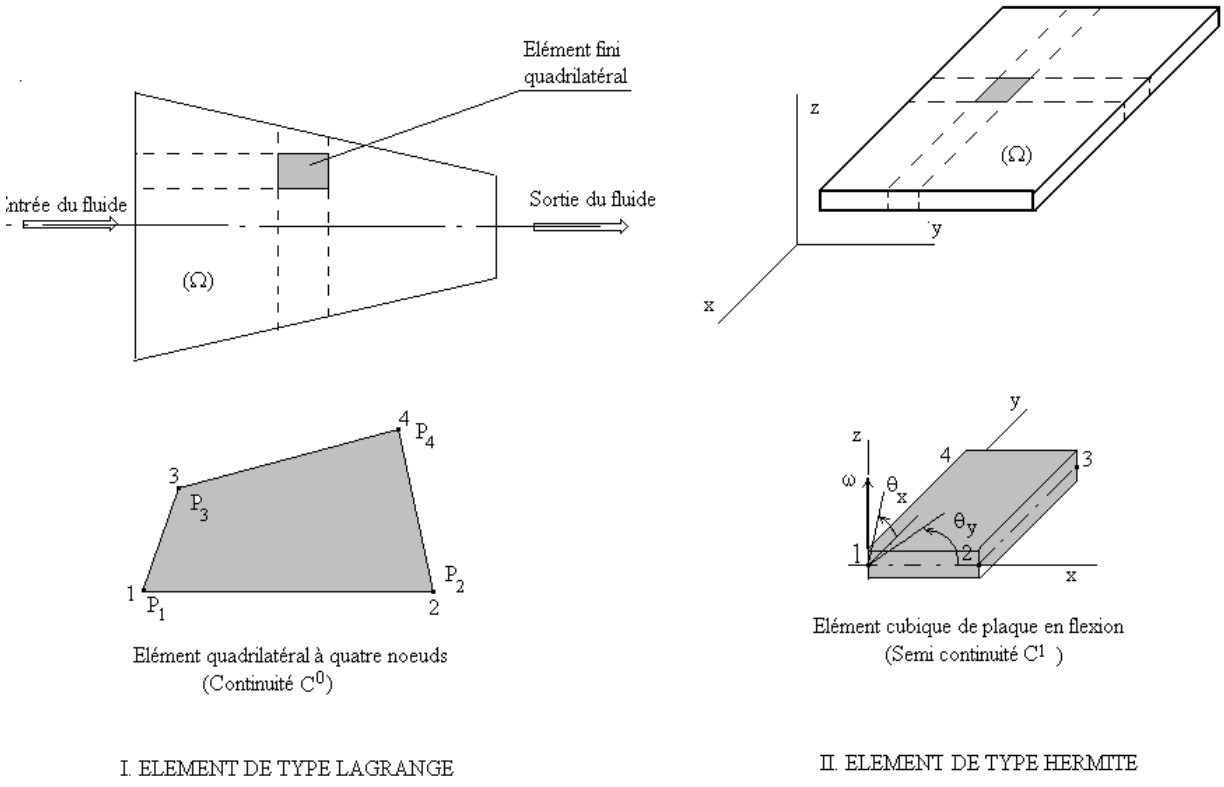


Figure A.27: Modélisation par éléments finis quadrilatéraux

- **Elément quadrilatéral à quatre nœuds**

L'élément réel est montré sur la figure A.27, l'élément de référence est donné par la figure A.28. L'élément ayant une variable par nœud est de continuité C^0. Les nœuds géométriques et les nœuds d'interpolation sont confondus : l'élément est isoparamétrique.

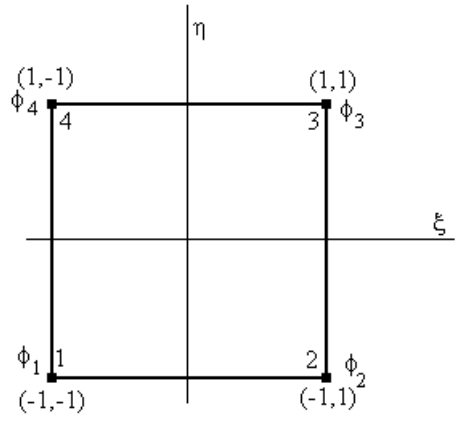


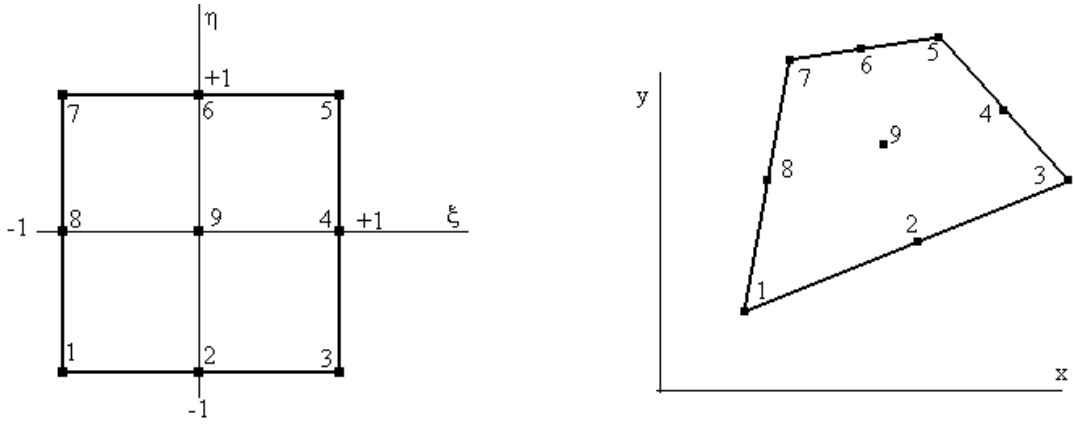
Figure A.28 : Elément de référence de l'élément quadrilatéral bilinéaire à quatre nœuds

Ordre de l'approximation

On vu que les fonctions N_i ont pour expression

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$
$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \qquad \text{(A.25)}$$
$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$
$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

On utilise en mécanique des fluides l'élément quadrilatéral quadratique de Lagrange à 9 nœuds :



a) Elément de référence b) Elément réel

Figure A.29 : Elément quadrilatéral quadratique de type Lagrange

les fonctions N_i s'écrivent:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\xi\eta$$
$$N_2 = -\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)\eta$$
$$N_3 = -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\xi\eta$$
$$N_4 = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)\xi$$
$$N_5 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\xi\eta \qquad \text{(A.26)}$$
$$N_6 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)\eta$$

$$N_7 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\xi\eta$$

$$N_8 = -\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)\xi$$

$$N_9 = (1-\xi^2)(1-\eta^2)$$

L'approximation sur l'élément s'écrit :

$$\tilde{\phi}(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{9} N_i \phi_i$$

- **Elément cubique quadrilatéral à quatre nœuds de type Hermite (semi continu C^1)**

Cet élément est développé pour être utilisé pour modéliser par exemple une plaque en flexion (Fig. A.27). Chaque nœud a trois variables (Fig. A.30), ϕ_i , $\phi_{i,x} = \left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{x=x_i}$ et $\phi_{i,y} = \left.\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|_{y=y_i}$

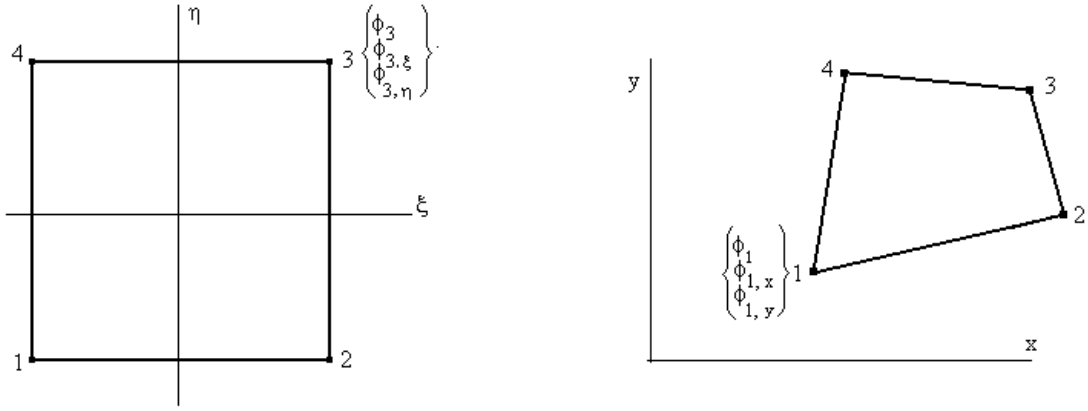


Figure A.30 : Elément quadrilatéral cubique de type Hermite

Les termes de la base polynomiale de l'interpolation correspondant aux 12 variables nodales sont donnés par le triangle de Pascal de la figure A.31. La base polynomiale est choisie, en respectant la symétrie. Cette base est incomplète. L'élément est semi continue C^1. En effet on peut montrer aisément que cet élément ne respecte pas la continuité inter éléments de la pente normale $\phi_{i,n}$. Néanmoins cet élément converge. Pour satisfaire la continuité il faut choisir un élément plus précis de base polynomiale complète avec un ordre plus élevé. On ajoutera une variable pour chaque nœud i soit, $\phi_{i,\xi\eta}$. L'élément aura donc une continuité C^1 complète

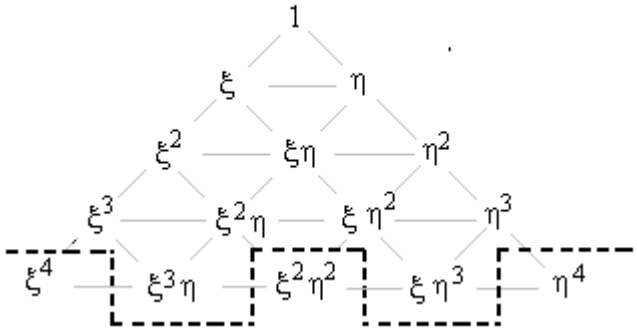


Figure A.31 : Choix des termes de la base polynomiale de l'élément de la figure A.30

On a douze fonction N_i.

Noeud 1 $(-1,-1)$

Variable $_1$ $\quad N_1 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(2-\xi^2-\eta^2-\xi-\eta)$

Variable $\phi_{1,\xi}$ $\quad N_2 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\xi^2)$

Variable $\phi_{1,\eta}$ $\quad N_3 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\eta^2)$

Noeud 2 $(+1,-1)$

Variable $_2$ $\quad N_4 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(2-\xi^2-\eta^2+\xi-\eta)$

Variable $\phi_{2,\xi}$ $\quad N_5 = -\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi^2)$

Variable $\phi_{2,\eta}$ $\quad N_6 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\eta^2)$

Noeud 3 $(+1,+1)$

Variable $_3$ $\quad N_7 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(2-\xi^2-\eta^2+\xi+\eta)$

Variable $\phi_{3,\xi}$ $\quad N_8 = -\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi^2)$

Variable $\phi_{3,\eta}$ $\quad N_9 = -\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\eta^2)$

Noeud 4 $(-1,+1)$

Variable $\square$ $\quad N_{10} = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(2-\xi^2-\eta^2-\xi+\eta)$

Variable $\phi_{4,\xi}$ $\quad N_{11} = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)\left(1-\xi^2\right)$

Variable $\phi_{4,\eta}$ $\quad N_{12} = -\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)\left(1-\eta^2\right)$

ANNEXE (02)

Le programme de la régularisation et les résultats des trois cas :

Voici le programme qu'on a utiliser pour les trois cas,

```
Option Explicit
Private Type tVertex
   x As Long
   y As Long
   z As Long 'z-coordinate will not be used
End Type
Private Type tVertex1
   x As Single
   y As Single
   z As Long 'z-coordinate will not be used
End Type
'Triangles, v# are the vertex pointers
Private Type tTriangle
   v1 As Long
   v2 As Long
   v3 As Long
End Type
Private Type letringle
   p As Single
   q As Single
   aprim As Single
   B As Single
   R As Single
   XM As Single
   YM As Single
   A As Single
   H As Single
   XT As Single
   YT As Single
 D As Single
 GD As Single
 End Type
Dim triang() As letringle
Dim N_id As Single
Dim GA As Single
Dim GB As Single
Dim HBR As Single
Dim BBR As Single
Dim W1 As Single
Dim W2 As Single
```

```
Dim S(5) As Single
Dim LX As Single
Dim LY As Single
Dim L As Single
Dim point_bohr() As Integer
Dim tri_bohr() As Integer
Dim HowMany As Integer
''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''
'                    Declaration of the Triangulate function from DLL
'
''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''''

Dim maxx As Double
Dim maxy As Double
Dim maxz As Double
Dim minx As Double
Dim miny As Double
Dim minz As Double
Dim maxxr As Double
Dim maxyr As Double
Dim minxr As Double
Dim minyr As Double
Dim xmax As Double
Dim ymax As Double
Dim zmax As Double
Dim pas As Double
Dim echell As Double
 ReDim Vertices1(MaxVertices)
 ReDim Vertices2(MaxVertices)
For I = 2 To ss
echell = (xmax * 10 ^ 2) / 12
End If
If xmax < ymax Then
pas = (ymax * 10 ^ 2) / 6803
echell = (ymax * 10 ^ 2) / 12
End If
Exit Function
30
LIMI01 = -1
End Function
Dim ii As Integer
Dim I As Integer
Dim j As Integer
Dim ih As Integer
```

```
Dim xenn As Single
Dim yenn As Single
For ii = 1 To HowMany
If vrifier_segement(ii, Triangles(ii).v1, Triangles(ii).v2) = False Then
For I = 0 To LIMI01(point_bohr)
If point_bohr(I) = Triangles(ii).v1 Then GoTo 10
Next
For I = 0 To LIMI01(point_bohr)
If point_bohr(I) = Triangles(ii).v1 Then GoTo 30
Next
For I = 0 To LIMI01(point_bohr)
If point_bohr(I) = Triangles(ii).v3 Then GoTo 50
Next
ReDim Preserve point_bohr(LIMI01(point_bohr) + 1)
point_bohr(LIMI01(point_bohr)) = Triangles(ii).v3
50
For I = 0 To LIMI01(point_bohr)
If point_bohr(I) = Triangles(ii).v2 Then GoTo 60
Next
For ii = 0 To LIMI01(point_bohr)
If point_bohr(ii) = I Then GoTo 70
Next
If Triangles(j).v1 = I Then
For ih = 1 To LIMI01(tri_bohr)
If tri_bohr(ih) = Triangles(j).v2 Then GoTo 1
Next
ReDim Preserve tri_bohr(LIMI01(tri_bohr) + 1)
tri_bohr(LIMI01(tri_bohr)) = Triangles(j).v2
1
For ih = 1 To LIMI01(tri_bohr)
If tri_bohr(ih) = Triangles(j).v3 Then GoTo 11
Next
ReDim Preserve tri_bohr(LIMI01(tri_bohr) + 1)
tri_bohr(LIMI01(tri_bohr)) = Triangles(j).v3
11
End If
If Triangles(j).v2 = I Then
For ih = 1 To LIMI01(tri_bohr)
If tri_bohr(ih) = Triangles(j).v1 Then GoTo 2
Next
ReDim Preserve tri_bohr(LIMI01(tri_bohr) + 1)
tri_bohr(LIMI01(tri_bohr)) = Triangles(j).v1
2
End If
```

```
If Triangles(j).v3 = I Then
For ih = 1 To LIMI01(tri_bohr)
If tri_bohr(ih) = Triangles(j).v2 Then GoTo 3
Next
ReDim Preserve tri_bohr(LIMI01(tri_bohr) + 1)
tri_bohr(LIMI01(tri_bohr)) = Triangles(j).v2
3
For ih = 1 To LIMI01(tri_bohr)
If tri_bohr(ih) = Triangles(j).v1 Then GoTo 33
Next
ReDim Preserve tri_bohr(LIMI01(tri_bohr) + 1)
tri_bohr(LIMI01(tri_bohr)) = Triangles(j).v1
33
End If
Next
Vertices1(I).x = 0
 xenn = Vertices1(I).x
 yenn = Vertices1(I).y
For k = 1 To LIMI01(tri_bohr)
Vertices1(I).x = Vertices1(I).x + Vertices1(tri_bohr(k)).x
Next
Vertices1(I).x = Vertices1(I).x / LIMI01(tri_bohr)
Vertices1(I).y = 0
For k = 1 To LIMI01(tri_bohr)
Vertices1(I).y = Vertices1(I).y + Vertices1(tri_bohr(k)).y
Next
Vertices1(I).y = Vertices1(I).y / LIMI01(tri_bohr)
disen = ((xenn - Vertices1(I).x) ^ 2 + (yenn - Vertices1(I).y) ^ 2) ^ 0.5
If disen < disen1 Then disen1 = disen
70
Next
If disen1 < 20 Then GoTo 200
If nbretr > 600 Then GoTo 200
Loop
200
Label2.Caption = "Nombre d'étiration est : 102"
  Picture1.ForeColor = RGB(192, 192, 192)
  Picture1.Cls
  For I = 1 To HowMany
    Picture1.Line (Vertices1(Triangles(I).v1).x, Vertices1(Triangles(I).v1).y)-
(Vertices1(Triangles(I).v2).x, Vertices1(Triangles(I).v2).y)
    Picture1.Line (Vertices1(Triangles(I).v2).x, Vertices1(Triangles(I).v2).y)-
(Vertices1(Triangles(I).v3).x, Vertices1(Triangles(I).v3).y)
```

```
    Picture1.Line (Vertices1(Triangles(I).v1).x, Vertices1(Triangles(I).v1).y)-
(Vertices1(Triangles(I).v3).x, Vertices1(Triangles(I).v3).y)
  Next I
    Picture1.ForeColor = Picture1.FillColor
  For I = 1 To MaxVertices
    Picture1.PSet (Vertices1(I).x, Vertices1(I).y) ', 30
      Picture1.CurrentX = Vertices1(I).x
     Picture1.CurrentY = Vertices1(I).y
   Picture1.Print I
  Next I
End Sub
Private Function vertria(tr As Integer, p1 As Integer, p2 As Integer) As Boolean
End Function
Private Sub corection_pi(po As Integer)
Dim x_min As Single
Dim x_max As Single
Dim k As Integer
Dim pj As Integer
Dim pk As Integer
Dim ti As Integer
Dim i2 As Integer
Erase triang
ReDim triang(LIMI01(Tri_inflia))
For i2 = 1 To LIMI01(Tri_inflia)
 ti = Tri_inflia(i2)
If Triangles(ti).v1 = po Then
 pj = Triangles(ti).v2
 pk = Triangles(ti).v3
 End If
 If Triangles(ti).v2 = po Then
 pj = Triangles(ti).v1
 pk = Triangles(ti).v3
 End If
 If Triangles(ti).v3 = po Then
 pj = Triangles(ti).v2
 pk = Triangles(ti).v1
 End If
triang(i2).p = Vertices2(pj).y - Vertices2(pk).y
triang(i2).q = Vertices2(pk).x - Vertices2(pj).x
triang(i2).R = Vertices2(pj).x * Vertices2(pk).y - Vertices2(pk).x * Vertices2(pj).y
triang(i2).aprim = 0.5 * Abs((triang(i2).p * Vertices2(po).x + triang(i2).q * Vertices2(po).y +
triang(i2).R))
triang(i2).B = (triang(i2).p ^ 2 + triang(i2).q ^ 2) ^ 0.5
triang(i2).XM = 0.5 * (Vertices2(pj).x + Vertices2(pk).x)
```

```
triang(i2).YM = 0.5 * (Vertices2(pj).y + Vertices2(pk).y)
Next
GA = 0
GB = 0
For i2 = 1 To LIMI01(Tri_inflia)
GA = GA + triang(i2).aprim
GB = GB + triang(i2).B
Next
HBR = 2 * GA / GB
BBR = GB / LIMI01(Tri_inflia)
W1 = 1 / (HBR ^ 2)
W2 = 4 / (BBR ^ 2)
Dim A As Single
Dim XT As Single
Dim YT As Single
S(1) = 0
S(2) = 0
S(3) = 0
S(4) = 0
S(5) = 0
Dim n1 As Single
Dim n2 As Single
For i2 = 1 To LIMI01(Tri_inflia)


S(1) = S(1) + (1 / (triang(i2).B ^ 2)) * (W1 * triang(i2).p ^ 2 + W2 * triang(i2).q ^ 2)
S(2) = S(2) + (triang(i2).p * triang(i2).q / (triang(i2).B ^ 2)) * (W1 - W2)
n1 = W1 * triang(i2).p * (HBR * triang(i2).B - 2 * triang(i2).aprim)
n2 = W2 * triang(i2).q * ((Vertices2(po).x - triang(i2).XM) * triang(i2).q - (Vertices2(po).y -
triang(i2).YM) * triang(i2).p)
S(3) = S(3) + (1 / (triang(i2).B ^ 2)) * (n1 - n2)
S(4) = S(4) + (1 / (triang(i2).B ^ 2)) * (W1 * triang(i2).q ^ 2 + W2 * triang(i2).p ^ 2)
n1 = W1 * triang(i2).q * (HBR * triang(i2).B - 2 * triang(i2).aprim)
n2 = W2 * triang(i2).p * ((Vertices2(po).y - triang(i2).YM) * triang(i2).p - (Vertices2(po).x -
triang(i2).XM) * triang(i2).q)
S(5) = S(5) + (1 / (triang(i2).B ^ 2)) * (n1 - n2)
Next
LX = (S(3) * S(4) - S(2) * S(5)) / (S(1) * S(4) - S(2) * S(2))
LY = (S(1) * S(5) - S(2) * S(3)) / (S(1) * S(4) - S(2) * S(2))
Dim XXP As Single
Dim YYP As Single
L = (LX * LX + LY * LY) ^ 0.5
Vertices2(po).x = Vertices2(po).x + LX
Vertices2(po).y = Vertices2(po).y + LY
```

```
End Sub
Private Function moyen_y() As Single
Dim y_min As Single
Dim y_max As Single
Dim k As Integer
y_min = 1E+21
y_max = -1E+22
For k = 1 To LIMI01(tri_bohr)
If y_min > Vertices2(tri_bohr(k)).y Then y_min = Vertices2(tri_bohr(k)).y
If y_max < Vertices2(tri_bohr(k)).y Then y_max = Vertices2(tri_bohr(k)).y
Next
For uj = 1 To 300
Erase point_bohr
Erase tri_bohr
For ii = 1 To HowMany
If vrifier_segement(ii, Triangles(ii).v1, Triangles(ii).v2) = False Then
For I = 0 To LIMI01(point_bohr)
If point_bohr(I) = Triangles(ii).v1 Then GoTo 10
Next
ReDim Preserve point_bohr(LIMI01(point_bohr) + 1)
point_bohr(LIMI01(point_bohr)) = Triangles(ii).v1
10
For I = 0 To LIMI01(point_bohr)
If point_bohr(I) = Triangles(ii).v2 Then GoTo 20
Next
ReDim Preserve point_bohr(LIMI01(point_bohr) + 1)
point_bohr(LIMI01(point_bohr)) = Triangles(ii).v2
20
End If
If Triangles(j).v1 = I Then
ReDim Preserve Tri_inflia(LIMI01(Tri_inflia) + 1)
Tri_inflia(LIMI01(Tri_inflia)) = j
For ih = 1 To LIMI01(tri_bohr)
If tri_bohr(ih) = Triangles(j).v2 Then GoTo 1
Next
ReDim Preserve tri_bohr(LIMI01(tri_bohr) + 1)
tri_bohr(LIMI01(tri_bohr)) = Triangles(j).v2
1
For ih = 1 To LIMI01(tri_bohr)
If tri_bohr(ih) = Triangles(j).v3 Then GoTo 11
Next
ReDim Preserve tri_bohr(LIMI01(tri_bohr) + 1)
tri_bohr(LIMI01(tri_bohr)) = Triangles(j).v3
11
```

```
End If
If Triangles(j).v2 = I Then
ReDim Preserve Tri_inflia(LIMI01(Tri_inflia) + 1)
Tri_inflia(LIMI01(Tri_inflia)) = j
For ih = 1 To LIMI01(tri_bohr)
If tri_bohr(ih) = Triangles(j).v1 Then GoTo 2
Next
ReDim Preserve tri_bohr(LIMI01(tri_bohr) + 1)
tri_bohr(LIMI01(tri_bohr)) = Triangles(j).v1
2
For ih = 1 To LIMI01(tri_bohr)
If tri_bohr(ih) = Triangles(j).v3 Then GoTo 22
Next
ReDim Preserve tri_bohr(LIMI01(tri_bohr) + 1)
tri_bohr(LIMI01(tri_bohr)) = Triangles(j).v3
22
End If
If Triangles(j).v3 = I Then
ReDim Preserve Tri_inflia(LIMI01(Tri_inflia) + 1)
Tri_inflia(LIMI01(Tri_inflia)) = j
For ih = 1 To LIMI01(tri_bohr)
If tri_bohr(ih) = Triangles(j).v2 Then GoTo 3
Next
ReDim Preserve tri_bohr(LIMI01(tri_bohr) + 1)
tri_bohr(LIMI01(tri_bohr)) = Triangles(j).v2
3
For ih = 1 To LIMI01(tri_bohr)
If tri_bohr(ih) = Triangles(j).v1 Then GoTo 33
Next
ReDim Preserve tri_bohr(LIMI01(tri_bohr) + 1)
tri_bohr(LIMI01(tri_bohr)) = Triangles(j).v1
33
End If
Next
Call corection_pi(I)
70
Next
Next
 Picture2.ForeColor = RGB(192, 192, 192)
  Picture2.Cls
  For I = 1 To HowMany
    Picture2.Line (Vertices2(Triangles(I).v1).x, Vertices2(Triangles(I).v1).y)-
(Vertices2(Triangles(I).v2).x, Vertices2(Triangles(I).v2).y)
```

```
    Picture2.Line (Vertices2(Triangles(I).v2).x, Vertices2(Triangles(I).v2).y)-
(Vertices2(Triangles(I).v3).x, Vertices2(Triangles(I).v3).y)
    Picture2.Line (Vertices2(Triangles(I).v1).x, Vertices2(Triangles(I).v1).y)-
(Vertices2(Triangles(I).v3).x, Vertices2(Triangles(I).v3).y)
  Next I

  'Draw red points
  Picture2.ForeColor = Picture2.FillColor
  For I = 1 To MaxVertices
    Picture2.PSet (Vertices2(I).x, Vertices2(I).y) ', 30
      Picture2.CurrentX = Vertices2(I).x
     Picture2.CurrentY = Vertices2(I).y
   Picture2.Print I
  Next I
End Sub
Private Sub Command4_Click()
Picture3.Visible = True
End Sub
Private Sub Command5_Click()
Dim I As Long
ver1 = Val(Text1.Text)
ver2 = Val(Text2.Text)
ver3 = Val(Text3.Text)
 For I = 1 To HowMany
 tri_sup = I
 If Triangles(I).v1 = ver1 And Triangles(I).v2 = ver2 And Triangles(I).v3 = ver3 Then GoTo
100
 If Triangles(I).v1 = ver1 And Triangles(I).v2 = ver3 And Triangles(I).v3 = ver2 Then GoTo
100
 If Triangles(I).v1 = ver2 And Triangles(I).v2 = ver1 And Triangles(I).v3 = ver3 Then GoTo
100
 If Triangles(I).v1 = ver2 And Triangles(I).v2 = ver3 And Triangles(I).v3 = ver1 Then GoTo
100
 If Triangles(I).v1 = ver3 And Triangles(I).v2 = ver2 And Triangles(I).v3 = ver1 Then GoTo
100
 If Triangles(I).v1 = ver3 And Triangles(I).v2 = ver1 And Triangles(I).v3 = ver2 Then GoTo
100
 Next I
 GoTo 200
100
For I = tri_sup To HowMany - 1
Triangles(I) = Triangles(I + 1)
Next
HowMany = HowMany - 1
```

```
picMain.Cls
  For I = 1 To HowMany
    picMain.Line (Vertices(Triangles(I).v1).x, Vertices(Triangles(I).v1).y)-
(Vertices(Triangles(I).v2).x, Vertices(Triangles(I).v2).y)
    picMain.Line (Vertices(Triangles(I).v2).x, Vertices(Triangles(I).v2).y)-
(Vertices(Triangles(I).v3).x, Vertices(Triangles(I).v3).y)
    picMain.Line (Vertices(Triangles(I).v1).x, Vertices(Triangles(I).v1).y)-
(Vertices(Triangles(I).v3).x, Vertices(Triangles(I).v3).y)
  Next I
 For I = 1 To MaxVertices
    picMain.PSet (Vertices(I).x, Vertices(I).y) ', 30
  Vertices1(I) = Vertices(I)
   Vertices2(I).x = Vertices(I).x
    Vertices2(I).y = Vertices(I).y
    picMain.CurrentX = Vertices(I).x
     picMain.CurrentY = Vertices(I).y
   picMain.Print I
  Next I
200
End Sub
Private Sub Command6_Click()
Picture3.Visible = False
End Sub
Private Sub Command8_Click()
Dim I As Long
 Open "D:\semis MOD.txt " For Output As #1
Print #1, " Coordonnées originaux"
For I = 1 To MaxVertices
transfx_in (Vertices(I).x)
transfy_in (Vertices(I).y)
Print #1, I, " ", xre, " ", yre
Next I

Print #1, " Coordonnées Modifiées"
For I = 1 To MaxVertices
transfx_in (Vertices1(I).x)
transfy_in (Vertices1(I).y)
Print #1, I, " ", xre, " ", yre
Next I
Close #1
End Sub
Private Sub Form_Load()
ss = 800
End Sub
```

```
Private Sub picMain_MouseDown(Button As Integer, Shift As Integer, x As Single, y As
Single)
 'Draw red point
 'Make sure that the point doesn't already exists
 If picMain.Point(x, y) <> picMain.FillColor Then
   picMain.ForeColor = &H80000012
   MaxVertices = MaxVertices + 1
      ReDim Preserve Vertices(MaxVertices + 6)
      Vertices(MaxVertices).x = x
   Vertices(MaxVertices).y = y
   picMain.Line (Vertices(MaxVertices).x - 1, Vertices(MaxVertices).y)-
(Vertices(MaxVertices).x + 1, Vertices(MaxVertices).y)
   picMain.Line (Vertices(MaxVertices).x, Vertices(MaxVertices).y - 1)-
(Vertices(MaxVertices).x, Vertices(MaxVertices).y + 1)
   'MsgBox Vertices(MaxVertices).x & "  " & x
   End If
Call traceniage
End Sub
xre = 0
End If
End Function
Else
xre = 0
End If
End Function
Public Function transfy_in(y As Single)
If pask <> 0 Then
yre = (6903 - y) * pask / 100 + miny
Else
yre = 0
End If
End Function
For uj = 1 To 10
Erase point_bohr
Erase tri_bohr
For ii = 1 To HowMany
If vrifier_segement(ii, Triangles(ii).v1, Triangles(ii).v2) = False Then
For I = 0 To LIMI01(point_bohr)
If point_bohr(I) = Triangles(ii).v1 Then GoTo 10
Next
ReDim Preserve point_bohr(LIMI01(point_bohr) + 1)
point_bohr(LIMI01(point_bohr)) = Triangles(ii).v1
10
For I = 0 To LIMI01(point_bohr)
```

```
If point_bohr(I) = Triangles(ii).v2 Then GoTo 20
Next
ReDim Preserve point_bohr(LIMI01(point_bohr) + 1)
point_bohr(LIMI01(point_bohr)) = Triangles(ii).v2
20
End If
If vrifier_segement(ii, Triangles(ii).v1, Triangles(ii).v3) = False Then
For I = 0 To LIMI01(point_bohr)
If point_bohr(I) = Triangles(ii).v3 Then GoTo 40
Next
ReDim Preserve point_bohr(LIMI01(point_bohr) + 1)
point_bohr(LIMI01(point_bohr)) = Triangles(ii).v3
40
End If
If vrifier_segement(ii, Triangles(ii).v3, Triangles(ii).v2) = False Then
For I = 0 To LIMI01(point_bohr)
If point_bohr(I) = Triangles(ii).v3 Then GoTo 50
Next
ReDim Preserve point_bohr(LIMI01(point_bohr) + 1)
point_bohr(LIMI01(point_bohr)) = Triangles(ii).v3
50
For I = 0 To LIMI01(point_bohr)
If point_bohr(I) = Triangles(ii).v2 Then GoTo 60
Next
ReDim Preserve point_bohr(LIMI01(point_bohr) + 1)
point_bohr(LIMI01(point_bohr)) = Triangles(ii).v2
60
End If
Next
Next
ReDim Preserve tri_bohr(LIMI01(tri_bohr) + 1)
tri_bohr(LIMI01(tri_bohr)) = Triangles(j).v1
2
For ih = 1 To LIMI01(tri_bohr)
If tri_bohr(ih) = Triangles(j).v3 Then GoTo 22
Next
ReDim Preserve tri_bohr(LIMI01(tri_bohr) + 1)
tri_bohr(LIMI01(tri_bohr)) = Triangles(j).v3
22
End If
If Triangles(j).v3 = I Then
Vertices2(I).y = Vertices2(I).y / LIMI01(tri_bohr)
70
Next
```

```
Next
End Sub
Private Sub Picture2_MouseMove(Button As Integer, Shift As Integer, x As Single, y As
Single)
Label1.Caption = "X = " & x & "     Y= " & y
End Sub
```

Cas N° (01) coté du four

Coordonnées originaux

N°	x	y
1	1	2,249449
2	1	3,500367
3	1	4,749816
4	1	5,999265
5	1	1
6	1	7,250184
7	1	8,499633
8	1	9,750551
9	1	11
10	1,749669	3,000588
11	1,999559	5,599442
12	1,999559	11
13	2,099515	8,899456
14	2,249449	1
15	2,249449	6,750404
16	2,499339	4,499927
17	2,499339	2,199471
18	2,499339	9,750551
19	2,750698	8,249743
20	3,000588	11
21	3,000588	5,499485
22	3,000588	3,250478
23	3,400412	6,600471
24	3,500367	1
25	3,500367	10,25033
26	3,600323	4,89975
27	3,750257	7,749963
28	3,750257	8,749522
29	4,000147	5,899309
30	4,000147	11
31	4,000147	2,249449
32	4,250037	4,000147
33	4,749816	1
34	4,999706	4,999706
35	4,999706	9,500662
36	4,999706	6,500515
37	4,999706	7,999853

38	4,999706	11
39	5,249596	3,000588
40	5,499485	4,000147
41	5,499485	1,899603
42	6,000735	1
43	6,400558	3,500367
44	6,500515	2,249449
45	6,500515	4,999706
46	7,250184	1
47	7,250184	3,400412
48	7,999853	4,999706
49	7,999853	2,499339
50	8,499633	1
51	8,749522	3,750257
52	8,7995	1,999559
53	9,500662	2,499339
54	9,500662	4,999706
55	9,750551	1
56	10,00044	3,500367
57	11	1,999559
58	11	1
59	11	3,000588
60	11	4,999706
61	11	4,000147

Coordonnées Modifiées

N°	x	y
1	1	2,249449
2	1	3,500367
3	1	4,749816
4	1	5,999265
5	1	1
6	1	7,250184
7	1	8,499633
8	1	9,750551
9	1	11
10	2,026018	3,125533
11	1,829046	5,406879
12	1,999559	11
13	1,73056	8,964133
14	2,249449	1
15	2,077466	6,456416
16	2,22005	4,323534
17	2,69925	2,178892
18	2,506688	9,634426
19	2,417022	7,970454
20	3,000588	11
21	2,847714	5,505365

22	3,212259	3,378362
23	3,369543	6,60782
24	3,500367	1
25	3,650301	9,982801
26	3,623842	4,595473
27	3,906071	7,570631
28	3,745847	8,775981
29	3,967808	5,64207
30	4,000147	11
31	4,207408	2,317066
32	4,498456	3,726738
33	4,749816	1
34	4,999706	4,999706
35	4,999706	9,500662
36	4,999706	6,500515
37	4,999706	7,999853
38	4,999706	11
39	5,408349	3,002058
40	5,536234	4,067764
41	5,38336	1,933412
42	6,000735	1
43	6,275614	3,613553
44	6,551962	2,350875
45	6,500515	4,999706
46	7,250184	1
47	7,379539	3,647362
48	7,999853	4,999706
49	8,165956	2,258268
50	8,499633	1
51	8,784801	3,665001
52	9,022931	1,680582
53	9,674114	2,46112
54	9,500662	4,999706
55	9,750551	1
56	9,991621	3,625312
57	11	1,999559
58	11	1
59	11	3,000588
60	11	4,999706
61	11	4,000147

Cas N° : 02 d'un coté d'une lame

Coordonnées originaux

N°	x	y
1	1	1
2	1	5,000588

3	2,250184	3,500367
4	2,500221	6,499265
5	3,500367	5,000588
6	3,500367	2,000147
7	4,500515	1
8	4,500515	6,499265
9	4,500515	8,499559
10	5,000588	5,000588
11	5,500661	6,000735
12	5,500661	7,999485
13	5,500661	2,750257
14	6,000735	5,000588
15	6,250772	7,749449
16	6,749302	1,899824
17	6,999339	1
18	7,400632	3,600691
19	7,499412	7,099662
20	7,999485	5,000588
21	8,499559	1,75011
22	8,749596	6,499265
23	8,999633	4,250478
24	9,499706	3,000294
25	9,499706	5,000588
26	11,5	1
27	11,5	3,000294
28	11,5	5,000588

Coordonnées Modifiées

N°	**x**	**y**
1	1	1
2	1	5,000588
3	2,250184	3,500367
4	2,500221	6,499265
5	3,475672	4,63325
6	3,500367	2,000147
7	4,500515	1
8	4,515949	6,608849
9	4,500515	8,499559
10	5,185801	5,340144
11	5,93128	6,681391
12	5,500661	7,999485
13	5,3741	3,484933

14	6,635087	5,292297
15	6,250772	7,749449
16	6,621197	2,324269
17	6,999339	1
18	7,698515	3,809055
19	7,499412	7,099662
20	8,12296	5,341688
21	8,531971	2,325812
22	8,749596	6,499265
23	8,763487	4,398648
24	9,840805	3,497281
25	9,394753	4,948111
26	11,5	1
27	11,5	3,000294
28	11,5	5,000588

Cas N° : 03 du T

Coordonnées originaux

N°	x	y
1	1	10,49949
2	1	12
3	1	9,000588
4	2,24989	12
5	2,400265	11,09937
6	2,500515	9,999853
7	3,000147	9,000588
8	3,200647	11,00074
9	3,750404	9,749228
10	3,999412	12
11	4,749669	10,90049
12	5,000294	7,000441
13	5,000294	3,000147
14	5,000294	1
15	5,000294	5,000294
16	5,000294	9,000588
17	5,249302	12
18	5,600176	7,600323
19	5,600176	5,999559
20	5,899309	1,999265
21	5,999559	10,25048
22	6,099809	3,39953

23	6,200059	4,250037
24	6,250184	8,749963
25	6,500808	1
26	6,749816	12
27	7,000441	9,899603
28	7,000441	9,000588
29	7,000441	6,250184
30	7,199324	2,300015
31	7,399824	4,500661
32	7,399824	11,00074
33	7,999706	3,000147
34	7,999706	5,000294
35	7,999706	7,000441
36	7,999706	9,000588
37	7,999706	1
38	8,250331	10,25048
39	8,250331	12
40	9,000588	11,00074
41	9,099221	9,749228
42	9,50022	12
43	9,999853	9,000588
44	9,999853	10,80023
45	10,75011	12
46	10,80023	9,749228
47	11,09937	10,90049
48	12	10,49949
49	12	9,000588
50	12	12

Coordonnées Modifiées

N°	x	y
1	1	10,49949
2	1	12
3	1	9,000588
4	2,24989	12
5	1,920035	11,11392
6	2,262825	10,09202
7	3,000147	9,000588
8	3,085845	10,98133
9	3,572541	9,95943
10	3,999412	12
11	4,513597	10,72262

12	5,000294	7,000441
13	5,000294	3,000147
14	5,000294	1
15	5,000294	5,000294
16	5,000294	9,000588
17	5,249302	12
18	6,235631	7,184772
19	5,831398	5,858886
20	6,007644	2,033221
21	6,170954	10,396
22	6,52668	3,132735
23	6,052918	4,478024
24	6,715861	8,618992
25	6,500808	1
26	6,749816	12
27	7,370719	9,584301
28	7,521094	8,551081
29	6,867852	5,629281
30	7,006909	2,033221
31	7,089372	4,24842
32	7,595473	10,84713
33	7,999706	3,000147
34	7,999706	5,000294
35	7,999706	7,000441
36	7,999706	9,000588
37	7,999706	1
38	8,216375	10,09687
39	8,250331	12
40	8,816257	11,0072
41	9,301337	10,04674
42	9,50022	12
43	9,999853	9,000588
44	10,03543	11,05248
45	10,75011	12
46	10,74041	10,12274
47	11,10584	11,13494
48	12	10,49949
49	12	9,000588
50	12	12

Perspectives
et travaux futurs

Perspectives :

Dans l’ensemble, les résultats sont en accord avec les données théorique, et pour les cas proposer l’étude été en 2D, On cherche toujours a améliorer le maillage initiale.

En perspectives et en principe, le but de cette technique et l’utilisation de l'adaptation de maillages, avec une fonction et un algorithme visant les géométries en 3D, biens que des erreurs dans l'analyse par éléments finis vent survenir.

On travaillera a essaier toujours l’optimisation en vers ces erreurs.