République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr.Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences -Département de Mathématiques & Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention

du

Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Recherche Opérationnelle

Par

GHEZALI Abir et HAMIANE Salima

Thème :

ETUDE DE LA DOMINATION ROMAINE DE CERTAINES CLASSES DE GRAPHES

Devant le jury composé de :

Mr.	N. IKHLEF-ESCHOUF	Professeur	UYF Médéa	Président
Mr.	M. ZEMIR	MAA	UYF Médéa	Examinateur
Mr.	A. BOUCHOU	MCA	UYF Médéa	Promoteur
Mr.	L. OULDRABAH	MCA	UYF Médéa	Co-Promoteur

Date de soutenance 10/06/2023

Dédicace

*A l'aide de **Allah** tout puissant, qui m'a tracé le chemin de ma vie, j'ai pu réaliser ce travail que je dédie :*

A ma très chère mère

Quoi que je fasse ou que je dise, je ne saurai point remercier comme il se doit. Ton affection me couvre, ta bienveillance me guide et ta présence à mes côtés a toujours été ma source de force pour affronter des différents obstacles

A mon très cher père

Tu as toujours été a mes côtés pour me soutenir et m'encourager. Que ce travail traduit ma gratitude et mon affection

A ma chère sœur Soumia et son mari Bachir

Pour ses soutiens moral et leurs conseils précieux tout au long de mes études

A mon cher frère Oussama, sa femme Sanaa et sa fille Assinet

Pour leurs indéfectibles soutiens.

A mon très cher frère Mohamed said

Qui m'a aidé et rapporté dans les moments difficiles

A mes chères amies : Amina, Meriem et Fatiha

A ma binôme Salima

A toute personne qui m'a aidé d'un mot, d'une aidée ou d'encouragement

Je dit « Merci »

Abir.

Dédicace

*Tout d'abord je voudrais remercier « **Allah** » qui m'a donné la patience et la volonté d'arriver là où je suis maintenant*

Je dédie :

A ma mère, ce qui n'est pas à coté de moi dans cette vie mais toujours elle est vivante dans mon cœur et graçe à elle j'ai contunié mon travail avec amour et je dis ma mère vous êtes la lumière de mon chemin, je suis trés fière que vous êtes ma mère

A ma chère grande mère, à mon cher grand père et à mon père

Qui n'ont jamais saissé de me supporter, me soutenir et m'encourager durant mes années d'études, ou ils trouvent ici le témoignage de ma profonde gratitude et reconnaissance

A mes frères « Amine et Mohamed » et ma sœur « Hania »

A ma tante Naima

A toute la famille FELLAH, HAMIANE qui me donnent de l'amour et de la vivacité

A tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin, et ceux qui ont partagé avec moi le moment d'émotion

A mes amis (Nour, Meriem, Fati, Ghouzlan, Wassila, Lina) Qui m'ont toujours encouragé et à qui je souhaite plus de succès

A ma binôme Abir

« Merci »

Salima.

RÉSUMÉ

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre n et de taille m où $V(G)$ est l'ensemble de sommets et $E(G)$ l'ensemble d'arêtes, une fonction de domination romaine (FDR) sur G est une fonction $f : V \longrightarrow \{0, 1, 2\}$ tel que chaque sommet u avec $f(u) = 0$ est adjacent à au moins un sommet v avec $f(v) = 2$. Le poids de f est la valeur $f(V) = \sum_{u \in V} f(u)$, et le poids minimum de f sur G est le nombre de domination romaine de G, noté par $\gamma_R(G)$. Le nombre de domination romaine a été beaucoup étudié dans les graphes modifiés par des opérations élémentaires sur les sommets ou les arêtes (ajout d'arête ou d'une chaîne).

Dans ce mémoire, nous etudions l'effet de l'ajout d'une arête e ou d'une chaîne P_k entre deux sommets quelconques d'un cycle C_n et d'une chaîne P_n, en donnant la valeur exacte de $\gamma_R(G + e)$ et $\gamma_R(G_{u,v,k})$, tels que le graphe $G_{u,v,k}$ est obtenu à partir de G en ajoutant d'une chaîne P_k entre les deux sommets u et v , $G \in \{P_n, C_n\}$.

ABSTRACT

Let $G = (V, E)$ be a simple graph of order n and of size m, we denote by $V(G)$ the set of vertices and $E(G)$ the set of edges, a function of Roman domination (FRD) on G is a function $f : V \longrightarrow \{0, 1, 2\}$ such that each vertex u with $f(u) = 0$ is adjacent to at least one vertex v with $f(v) = 2$. The weight of f is the value $f(V) = \sum_{u \in V} f(u)$, and the minimum weight of f on G is the number of Roman domination of G, denoted by $\gamma_R(G)$.The number of Roman domination has been much studied in graphs modified by elementery operations on vertices or edges (add edge or path).

In this dissertation research, we study the effect of adding an edge e or a path P_k between any two vertices of a cycle C_n and a path P_n, we giving the exact value of $\gamma_R(G + e)$ and $\gamma_R(G_{u,v,k})$, such that $G_{u,v,k}$ a graph is obtained from G by adding a path P_k between two edge u and v, $G \in \{P_n, C_n\}$.

ملخص :

لتكن G=(V,E) رسم بياني بسيط رتبته n و قياسه m حيث V(G) مجموعة الرؤوس و E(G) مجموعة الحواف، دالة الهيمنة الرومانية (FDR) على الرسم البياني G هي الدالة $f: V \to \{0.1.2\}$ بحيث يكون أي رأسu مع f(u)=0 مجاورا لرأس على الأقل v مع f(v)=2 ، وزن الدالة f هو مجموع القيم المخصصة للرؤوس $f(v) = \sum_{u \in v} f(u)$. عدد الهيمنة الرومانية في الرسم البياني G والمشار اليه γ_R (G) هو أصغر وزن ل(FDR) للبيان G. تمت دراسة عدد الهيمنة الرومانية على نطاق واسع في الرسوم البيانية المعدلة من خلال عمليات أولية على الرؤوس أو الحواف (أضافة حافة أو سلسلة).

في هذه المذكرة، ندرس تأثير إضافة حافة e أو سلسلة P_k بين أي رأسين لدورة C_n او سلسلة P_n ، بإعطاء القيمة الدقية γ_R(G+e) و γ_R $(G_{u,v,k})$ حيث الرسم البياني $G_{u,v,k}$ تم الحصول عليه من خلال إضافة سلسلة P_k بين الراسين u و v ، $G \in \{P_n, C_n\}$.

REMERCIEMENTS

Nous remercions, en premier lieu, **Allah**, le tout puissant, d'avoir nous permis et donné la patience et le courage pour réaliser ce travail.

Toute notre gratitude et notre reconnaissance à Monsieur **A. BOUCHOU**, (Maître de conférences à l'université de Médéa*)*, qui a dirigé ce travail avec beaucoup de patience, pour la confiance qu'il mous a accordée. Nous le remercions également pour ses précieux conseils, ses encouragement, son aide et sa disponibilité.

Nous tenons à remercions Monsieur **L. OULDRABAH**, (Maître de conférences à l'université de Médéa) pour sa gentillesse et son confiance.

Nous souhaitons exprimer notre gratitude envers Monsieur **N. IKHLEF-ESCHOUF** (Professeur à l'université de Médéa), qui nous fait l'honneur d'accepter d'être le président de jury de ce mémoire.

Nous remercions également Monsieur **M. ZEMIR** (Maître assistant à l'université de Médéa) qui nous ont honoré en acceptant d'évaluer notre travail, et qui nous ont permis de l'enrichir grâce à leur précieuses remarques.

Nous tenons également à exprimer notre gratitude à l'ensemble des enseignants du département M.I de l'université Dr. YAHIA FARES de Médéa.

Nous voudrions aussi remercier toutes les personnes qui nous ont aidé par leur soutien et leur encouragements et qui nous ont permis d'accomplir notre travail à son terme.

Un grand merci à nos familles qui ont été là pour nous encourager et nous pousser à faire de notre mieux.

Table des matières

RÉSUMÉ i

ABSTRACT ii

REMERCIEMENTS iii

INTRODUCTION 1

1 Notions générales sur les graphes 3

1.1 Concepts fondamentaux 3

1.1.1 Définition d'un Graphe 3

1.1.2 Définition de voisinage et de degré 4

1.1.3 Quelques graphes particuliers 4

1.1.4 Graphe connexe 6

1.1.5 Quelques opérations sur les graphes 8

1.2 Apperçu sur la domination 10

1.2.1 Introduction 10

1.2.2 La domination 11

1.3 Effet de l'ajout d'une arête et d'une chaine sur le nombre de domination 12

1.3.1 Cas de sommets adjacents 13

1.3.2 Cas de sommets non-adjacents 14

2 Quelques résultats sur la domination romaine **16**

2.1 Définitions et propriétés 16

2.2 Bornes sur le nombre de domination romaine 18

2.3 Effet de l'ajout d'une arête et d'une chaine sur le nombre de domination romaine . . 20

2.3.1 Cas des sommets adjacents 21

2.3.2 Cas des sommets non-adjacents 23

3 Nombre de domination romaine dans quelques graphes **25**

3.1 Valeur exacte de $\gamma_R(C_n + e)$ 25

3.2 Valeur exacte de $\gamma_R(P_n + e)$ 27

3.3 Valeur exacte de $\gamma_R(C_{u,v,k})$ 33

3.3.1 Cas des sommets adjacents 33

3.3.2 Cas des sommets non-adjacents 34

3.4 Valeur exacte de $\gamma_R(P_{u,v,k})$ 40

3.4.1 Cas des sommets adjacents 40

3.4.2 Cas des sommets non-adjacents 41

CONCLUSION ET PERSPECTIVES **52**

Bibliographie **53**

Table des figures

1.1 Un graphe G 4

1.2 Un sous graphe et un graphe partiel de G 5

1.3 Un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$ 5

1.4 Le graphe biparti $K_{2,3}$ 6

1.5 La chaine d'ordre 7 6

1.6 Un arbre et une étoile 7

1.7 La chenille $C(2, 0, 1)$ 7

1.8 Un graphe 3-régulier 7

1.9 Un graphe complet 8

1.10 Un cycle d'ordre 8 8

1.11 Un graphe et son subdivision 8

1.12 La couronne de C_5 9

1.13 Exemples du joint de deux graphes, et une grille 9

1.14 Un échiquier 8×8 10

1.15 le graphe C_6 avec $\gamma(C_6) = 2$ 11

1.16 Ajout d'une chaîne P_k à un graphe G 13

2.1 Un graphe G d'ordre 7, avec $\gamma_R(G) = 5$ 17

2.2 La couronne $Cor(K_{1,k})$ 18

2.3 Un graphe G avec $\gamma_R(G) = 4n/5 = 12$ 19

2.4 Le graphe P_6 avec $V_1 = \emptyset$ 19

2.5 le graphe $K_{1,p}$ 20

2.6 Un exemple de sommets γ_R-bon, γ_R-mauvais et γ_R-trés mauvais 21

2.7 Les graphes $G_{u,v,1}$, $G_{u,v,2}$, $G_{u,v,3}$ tels que $G = K_{1,3} + e$, et u et v sont adjacents . . . 22

2.8 Les graphes $G_{u,v,1}$, $G_{u,v,2}$, $G_{u,v,3}$ tels que $G = K_{1,3} + e$, et u et v sont non-adjacents . 24

3.1 Les graphes $C_5 + uv$, $C_4 + uv$, $C_8 + uv$, $C_6 + uv$, $C_7 + uv$ 26

3.2 Les graphes $P_7 + uv$, $P_8 + uv$, $P_9 + uv$ 29

3.3 Les graphes $P_n + uv$ avec $n \equiv 0 \pmod 3$ 30

3.4 Les graphes $P_n + uv$ avec $n \equiv 1 \pmod 3$ 31

3.5 Les graphes $P_n + uv$ avec $n \equiv 2 \pmod 3$ 32

3.6 Les graphes $C_{u,v,1}$, $C_{u,v,2}$, $C_{u,v,3}$, $C_{u,v,5}$ tels que u et v sont adjacents 34

3.7 Les graphes $C_{u,v,2}$, $C_{u,v,6}$, $C_{u,v,4}$ tels que u et v sont non-adjacents 35

3.8 Les graphes $C_{u,v,k}$ pour $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$ 37

3.9 Les graphes $C_{u,v,k}$ pour $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$ 38

3.10 Les graphes $C_{u,v,k}$ pour $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3)$ 39

3.11 Les graphes $P_{u,v,1}$, $P_{u,v,2}$, $P_{u,v,3}$, $P_{u,v,4}$ tels que u et v sont adjacents 41

3.12 Les graphes $P_{u,v,1}$, $P_{u,v,2}$, $P_{u,v,3}$, $P_{u,v,4}$ tels que u et v sont non-adjacents. 51

INTRODUCTION

La Théorie des Graphes est une branche des mathématiques discrètes, en forte croissance grâce à son rôle essentiel dans les sciences appliquées. Généralement, les problèmes pratiques modélisables par les graphes sont de nature combinatoire où il est souvent question de recherche de structures optimales particulières, telles que clique maximum, stable maximum, coloration minimum ou dominant minimum. Ce dernier problème dont l'origine remonte au 16^{eme} siecle en Inde dans le jeu d'échec [22]. Le principe est de couvrir l'ensemble des cases par certaines pièces du jeu. Au début des années 1850 [23], les amateurs d'échecs étaient intéressés à trouver le nombre minimum de reines nécessaires à placer sur un échiquier de telle manière que chaque case soit occupée par une reine ou bien peut être occupée en un seul mouvement par l'une des reines.

Plus d'un siècle plus tard, en 1962, Ore [29] a été le premier à publier sur la domination dans les graphes et donna l'appelation actuelle du nombre de domination. La domination a connue sa véritable expansion après les travaux de Cockayne et Hedetniemi en 1977 [9]. Les deux livres de Haynes, et Hedetniemi Slater [19, 20] témoignent de la pertinence et de l'intérêt accru de ce sujet dans les dernières années.

Le coté pratique et appliqué de la domination a été souvent la cause de la naissance d'autres et nouveaux paramètres de domination, en effet beaucoup de paramètres de domination ont vu le jour lorsqu'on impose à la domination une condition supplémentaire dans le graphe considéré.

Nous nous sommes intéressés ici à la domination romaine dans les graphes, introduite par Cockayne et al [7] et motivée par un article de Ian Steward dans Scientific American, intitulé "*Defend the Roman Empire!*" [31].

Cependant, il y a encore beaucoup à faire dans ce domaine, ce mémoire est une contribution à

l'étude de la domination romaine dans les graphes.

Le problème qui se pose d'une manière naturelle est la détermination de la valeur de ces paramètres, mais comme en général ce problème est NP-complet, nous nous penchons vers ou bien la détermination de bornes à ces paramètres qui les encadrent le plus étroitement possible, et recherche des graphes extrémaux pour ces bornes, ou bien les déterminer exactement dans des classes particulières de graphes.

Ce document est composé de trois chapitres dont voici une description rapide.

1. Notions générales sur les graphes : Nous rappelons d'abord les définitions de base liés à la théorie des graphes et nécessaires à la compréhension de ce mémoire. Ensuite nous rappelons brièvement la notion de la domination dans les graphes et nous définissons quelques paramètres de dominations. Enfin nous rappelons l'effet de l'ajout d'une arête et d'une chaîne sur le nombre de domination.

2. La domination romaine : Nous abordons le thème étudié et nous donnons quelques résultats sur la domination romaine.

3. Nobmre de domination romaine dans quelques graphes : Nous étudions l'effet de l'ajout d'une arête e ou d'une chaîne P_k entre deux sommets quelconques d'un cycle C_n et d'une chaîne P_n, en donnant la valeur exacte de $\gamma_R(G+e)$ et $\gamma_R(G_{u,v,k})$, tel que $G \in \{P_n, C_n\}$.

Chapitre 1

Notions générales sur les graphes

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions et terminologie utilisées dans l'ensemble de ce mémoire. Dans la premiére partie, on rappelle quelques définitions de base de la théorie des graphes, on donne un aperçu sur les paramètres structurels d'un graphe, ensuite on cite quelques invariants de graphes ; les notions propres à un chapitre donné sont définies dans le chapitre en question. Enfin, on rappelle brièvement la notion de la domination dans les graphes, et on rappelle aussi l'effet de l'ajout d'une arête et d'une chaîne sur le nombre de domination.

1.1 Concepts fondamentaux

1.1.1 Définition d'un Graphe

Un graphe $G = (V, E)$ est la donnée de deux ensembles finis, un ensemble de sommets V et un ensemble d'arêtes E. Le cardinal de V est appelé l'ordre de G ; noté par $n(G)$ et le cardinal de E est appelé la taille de G ; noté par $m(G)$. Une arête $e \in E$ est une paire de sommets u et v notée par $e = uv$, où u et v sont les extrémités de e. On dira dans ce cas que u et v sont adjacents et que e est incidente à u et v. Une boucle est une arête dont les deux extrémités sont confondues. Un graphe est dit simple s'il est sans boucles et sans arêtes multiples. Tous les graphes considérés dans ce mémoire sont simples et finis.

1.1.2 Définition de voisinage et de degré

Le voisinage ouvert d'un sommet v est l'ensemble des sommets $u \in V$ tels que $uv \in E$ noté $N_G(v)$, et le voisinage fermé de v est $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Pour un sous-ensemble $S \subseteq V$; le voisinage ouvert est $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$ et le voisinage fermé $N_G[S] = \bigcup_{v \in S} N(v) \cup S$.

Le degré d'un sommet $v \in V$ noté $d_G(v)$ est égal au cardinal de son voisinage ouvert c-à-d $d_G(x) = |N_G(x)|$. On notera par $\Delta(G)$ et $\delta(G)$, respectivement, le degré maximum et le degré minimum dans G. Un sommet de degré nul sera dit un sommet isolé et un sommet de degré égal à un sera dit sommet pendant et un sommet adjacent à un sommet pendant sera dit sommet support.

Exemple 1.1.1 *Un graphe $G = (V, E)$ avec $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $E(G) = \{ab,\ be,\ ef,\ cd,\ dg,\ de,\ bc,\ bd,\ ce\}$, $n = 7$ et $m = 10$. Le voisinage ouvert du sommet c est $N_G(c) = \{d, b, e\}$ et son voisinage fermé est $N_G[c] = \{c, b, d, e\}$. Le voisinage ouvert de l'ensemble $S = \{b, f\}$ est $N_G(S) = \{a, c, d, e\}$, et son voisinage fermé est $N_G[S] = \{a, b, c, d, e, f\}$. Le graphe G n'a pas de sommets isolés, et a, g sont des sommets pendants. Le degré minimum du G est $\delta(G) = 1$ et le degré maximum est $\Delta(G) = 5$ (voir la Figure 1.1).*

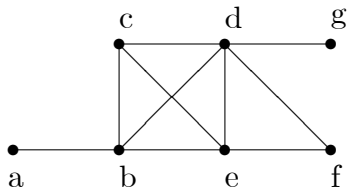


FIG. 1.1 – Un graphe G

1.1.3 Quelques graphes particuliers

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.

Pour un sous-ensemble $S \subseteq V$, le *sous graphe induit* par S noté par $G[S]$ est le graphe ayant S pour ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles de E ayant leurs deux extrémités dans S.

Pour un sous-ensemble $U \subseteq E$, *le graphe partiel* de G défini par U noté G_U est le graphe dont les ensembles de sommets et d'arêtes sont respectivement V et U.

Exemple 1.1.2 *Le sous graphe de G induit par $\{b, c, d, e\}$(voir la Figure 1.2-(a)), et le graphe partiel de G induit par $\{bc, cd, be, de, dg, ef\}$ (voir la Figure 1.2-(b)).*

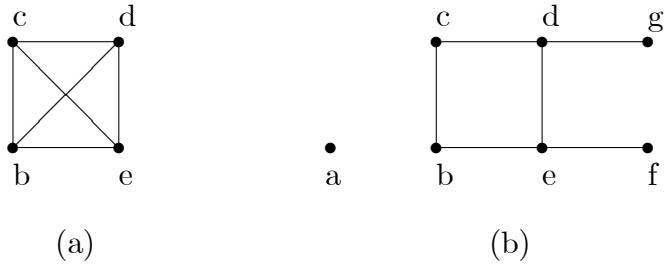


FIG. 1.2 – Un sous graphe et un graphe partiel de G

Le graphe *complémentaire* de G noté $\overline{G}$ est un graphe ayant le même ensemble de sommets que G et une arête est dans $\overline{G}$ si elle n'est pas dans G (voir la Figure 1.3).

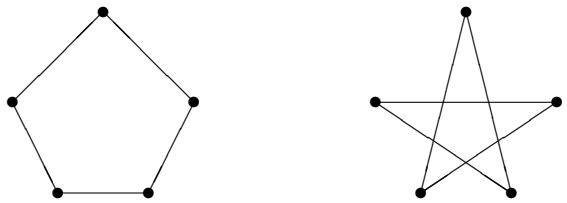


FIG. 1.3 – Un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$

Un graphe est dit *r-parti* si l'on peut partitionner l'ensemble de ses sommets en r sous-ensembles $X_1, X_2, ..., X_r$ tels que les sous graphes $G[X_1], G[X_2], ..., G[X_r]$ ne contiennent aucune arête. En particulier, pour $r = 2$, le graphe G est appelé biparti. Si un sommet dans un ensemble de partition V_i d'un graphe r-parti est adjacent à tout sommet des autres ensembles $\{V_j : j \neq i\}$ pour tout sommet dans G, alors G est appelé multiparti complet et noté par $K_{p_1,p_2,...,p_r}$ avec $p_j = |X_j|$ pour $j \in \{1, 2, ..., r\}$ (voir la Figure 1.4).

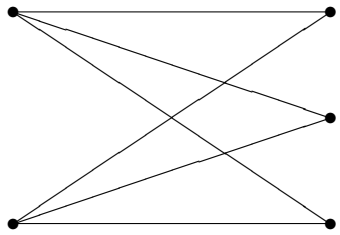


FIG. 1.4 – Le graphe biparti $K_{2,3}$

1.1.4 Graphe connexe

La relation $\sim$ entre les sommets d'un graphe G est définie comme suit : $u \sim v$ si et seulement s'il existe dans G une chaîne reliant u à v. La relation $\sim$ est une relation d'équivalence. Les sous-graphes induits par les classes d'équivalence de $\sim$ sont appelés composantes connexes de G. Le graphe G est dit connexe s'il possède une seule composante connexe.

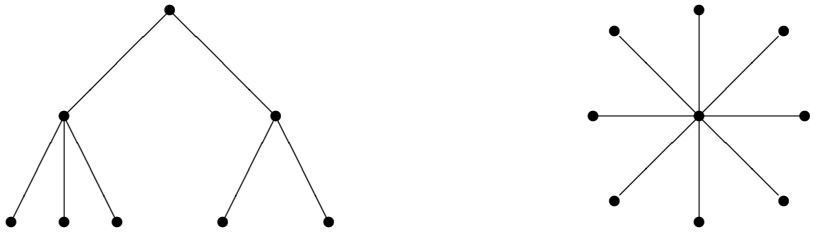
Il est bien connu que pour tout graphe G, G et $\overline{G}$ ne peuvent être tous les deux non connexe.

Une *chaîne* P dans un graphe $G = (V, E)$ est une séquence finie de sommets $v_1, v_2, ..., v_k$ de V telle que $v_i v_{i+1} \in E$ pour tout $1 \leq i \leq k-1$. L'entier $k-1$ représente la longueur de la chaine P (au sens des arêtes) et les deux sommets v_1 et v_k sont appelés respectivement *extrémité initiale* et *extrémité finale* de la chaîne P. Une chaîne est dite *élémentaire* (respectivement, *simple*) si tous ses sommets sont distincts (respectivement, toutes ses arêtes sont distinctes). Une *corde* est une arête reliant deux sommets non consécutifs dans une chaîne. Une *chaîne minimale* induite par n sommets et notée par P_n est une chaîne élémentaire sans cordes (voir la Figure 1.5).

FIG. 1.5 – La chaine d'ordre 7

Un *arbre* est un graphe biparti connexe ayant exactement $n-1$ arêtes. Une *forêt* est un graphe ou chaque composante connexe est un arbre (voir la Figure 1.6-(a)).

On appelle *étoile*, et on note par $K_{1,n}$, l'arbre à $n+1$ sommets ayant n sommets pendants.(voir la Figure 1.6-(b)).



(a) Un arbre T (b) L'étoile $K_{1,8}$

FIG. 1.6 – Un arbre et une étoile

Une *chenille* $C(t_1, t_2, ..., t_s)$ est un arbre dont la supression de ses sommets pendants donne une chaîne $u_1, u_2, ..., u_s$ où t_i représente le nombre de sommets pendants de u_i (voir la Figure 1.7).

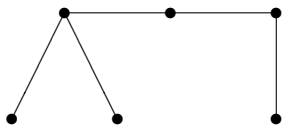


FIG. 1.7 – La chenille $C(2, 0, 1)$

Un graphe G est *régulier* si tous ses sommets sont de même degré. Si chaque sommet de G est de degré d, on dit que G est d-régulier (voir la Figure 1.8).

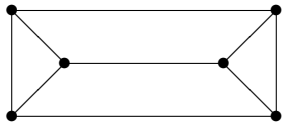


FIG. 1.8 – Un graphe 3-régulier

Un graphe *complet* est un graphe où chaque sommet est adjacent a tous les autres sommets. Le graphe complet d'ordre n est noté K_n. Un graphe complet est un graphe $(n-1)$-régulier (voir la Figure 1.9).

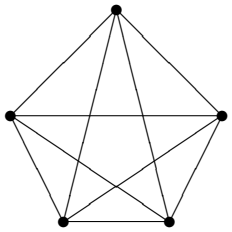


FIG. 1.9 – Un graphe complet

Un *cycle* est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues. Un cycle élémentaire C_n induit par n sommets est un cycle sans corde et dont les sommets sont distincts (voir la Figure 1.10).

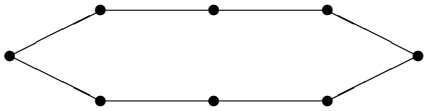


FIG. 1.10 – Un cycle d'ordre 8

Une *subdivision* $S(G)$ d'un graphe G est le graphe obtenu en remplaçant chaque arête uv de G par un sommet w et les deux arêtes uw et wv (voir la Figure 1.11).



FIG. 1.11 – Un graphe et son subdivision

1.1.5 Quelques opérations sur les graphes

Etant donné deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ avec $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

La G_2-*couronne* de G_1, c'est le graphe $G_1 \circ G_2$ obtenu d'une copie de G_1 et $|V_1|$ copies de G_2 où le $i^{ième}$ sommet de G_1 est adjacent à tous les sommets de la $i^{ième}$ copie de G_2. Lorsque G_2 est un graphe trivial K_1, $G_1 \circ K_1$ est appelé la *couronne* du graphe G_1. Il est à noter que l'ordre de $G_1 \circ K_1$ est $2\,|V_1|$ (voir la Figure 1.12).

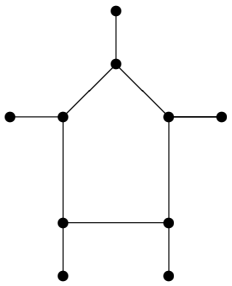
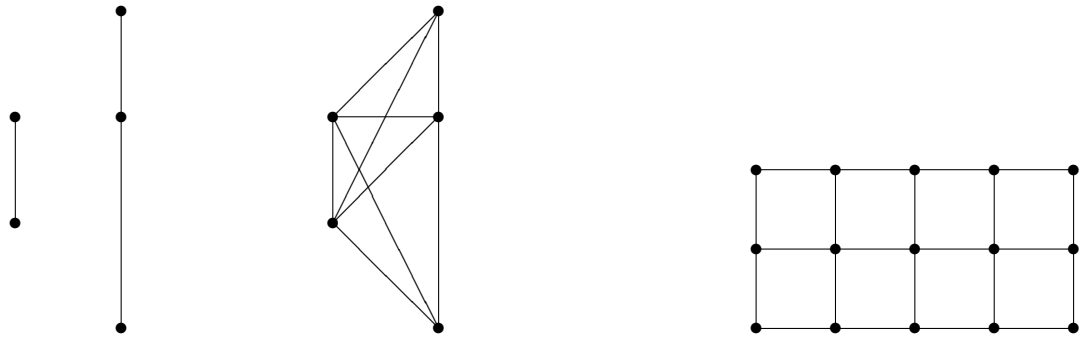


FIG. 1.12 – La couronne de C_5

L'*union* de G_1 et G_2 est le graphe $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.

Le *joint* de G_1 et G_2 le graphe $G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup E_{1,2})$ où $E_{1,2} = \{xy : x \in V_1, y \in V_2\}$ (voir la Figure 1.13-(a)).

Le *produit cartésien* $G_1 \square G_2$ est le graphe $G = (V, E)$ tel que $V = \{(u, v) : u \in V_1 \text{ et } v \in V_2\}$ et deux sommets (u_1, u_2) et (v_1, v_2) sont adjacents si $u_1 = v_1$ et $u_2v_2 \in E(G_2)$ ou $u_2 = v_2$ et $u_1v_1 \in E(G_2)$. Une *grille* de dimension $n \times m$ est le produit cartésien de deux chaînes P_n et P_m (voir la Figure 1.13-(b)).



G_1 G_2 (a) Le joint de G_1 et G_2 (b) Une grille

FIG. 1.13 – Exemples du joint de deux graphes, et une grille

1.2 Apperçu sur la domination

1.2.1 Introduction

Le concept de domination trouve son origine dans le jeu d'échec. Le principe est de couvrir (dominer) l'ensemble des cases par certaines pièces. L'idée remonte au 16^{eme} siecle en Inde (Voir [22]). En 1862, De Jaenisch [23] posa le problème suivant : Déterminer le nombre minimum de reines à placer sur l'échiquier de telle façon que chaque case soit occupée par une reine ou bien peut être occupée en un seul mouvement par l'une des reines. Pour un échiquier 8×8 le nombre minimum est 5. Le nombre minimum dans un échiquier $n \times n$ reste indéterminé jusqu'à présent. Pour plus de détails voir [15].(voir la Figure 1.14).

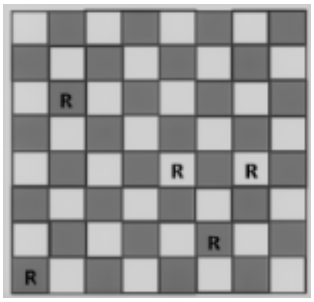


FIG. 1.14 – Un échiquier 8×8

L'appelation actuelle du nombre de domination est due à Ore [29] 1962. La domination a connu sa veritable expansion après la parution de l'article de Cockayne et Hedetniemi [9] en 1977.

Depuis, l'étude de la domination dans les graphes avec des propriétés additionnelles a donné naissance à plusieurs paramètres de domination dont la résolution est NP-Complet (Voir [3, 25, 26]). Ainsi beaucoup de voies de recherche sont à explorer, par exemple : la recherche d'algorithmes polynomiaux, détermination des bornes supérieures et inférieures, détermination des valeurs exactes dans certaines classes de graphes paticulières etc....

Pour un aperçu détaillé, le lecteur peut consulter les deux livres remarquables de Haynes, Hedetniemi et Slater ([19, 20]).

1.2.2 La domination

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.

Un sous ensemble de sommets $D \subseteq V$ de G est dit ensemble *dominant* si tout sommet $v \in V - D$ est adjacent à au moins un sommet $u \in D$.

Le *nombre de domination*, noté $\gamma(G)$, d'un graphe G représente la cardinalité minimum d'un ensemble dominant de G.

Un ensemble *dominant minimum* avec une telle cardinalité est appelé $\gamma(G)$-*ensemble*, on note qu'un graphe G peut avoir plusieurs $\gamma(G)$-ensembles.

Dans la littérature, il existe d'autres définitions équivalentes aux ensembles dominants dans les graphes. En voici des exemples :

Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant si pour tout $v \in V$, $|N[v] \cap D| \geq 1$,

Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant si pour tout $v \in V - D$, $|N(v) \cap D| \geq 1$,

Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant si $N[D] = V$.

Exemple 1.2.1 *Le graphe C_6 de la Figure 1.15, l'ensemble $D = \{b, e\}$ est un dominant minimum de cardinal $|D| = 2$, et donc $\gamma(C_6) = 2$.*

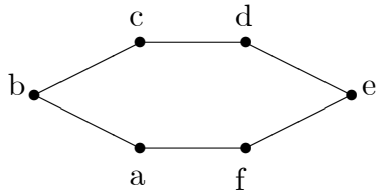


FIG. 1.15 – le graphe C_6 avec $\gamma(C_6) = 2$

Cockayene, Goodman et Hedetniemi 1975 [8] ont construit le premier algorithme linéaire pour la détermination du nombre de domination de tout arbre. Johnson 1975 [16] était le premier qui a montré que le problème de détermination du nombre $\gamma(G)$ pour un graphe arbitraire est NP-complet, En outre, Dewdney 1981 [12], Chang et Nemhauser 1984 [6], Bertossi 1984 [2], indépendement, ont montré que le problème reste NP-complet, même si l'on se restreint aux graphes

bipartis, Booth et Johnson 1982 [3] ont montré que le problème reste aussi NP-complet pour les graphes triangulés.

La domination est utilisée dans beaucoup de situations concrètes et son développement théorique a énormément contribué dans la résolution de problèmes pratiques comme les problèmes relevant des réseaux de communications, les systèmes de surveillances (par Radars), les systèmes électriques, les réseaux informatiques et d'autres. Le côté pratique et appliqué de la domination a été souvent la cause de la naissance d'autres et nouveaux paramètres de domination.

1.3 Effet de l'ajout d'une arête et d'une chaine sur le nombre de domination

La notion de criticité a été introduite par Sumner et Blitch [32], pour le paramètre de domination, ils ont montrer que $\gamma(G)-1 \leq \gamma(G+e) \leq \gamma(G)$, et ont étudié les graphes tels que $\gamma(G+e) = \gamma(G)-1$ pour toute arête $e \notin E(\overline{G})$, et ont appelé ces graphes : les graphes *domination arête critique*.

La notion de l'ajout d'une chaîne à un graphe a été établée par Samdivkin [30], il a étudié l'effet de l'ajout d'une chaine P_k sur le nombre de domination d'un graphe.

Définition 1.3.1 *Étant donné un graphe $G = (V, E)$ et soient u et v deux sommets distincts de G. Le graphe (u, v)-P_k-addition de G est le graphe $G_{u,v,k}$ obtenu à partir de l'union disjointe de G et d'une chaîne $P_k : x_1, .., x_k$ avec $k \geq 1$, en joingnant le sommet u au sommet x_1, et le sommet v au sommet x_k.*

Exemple 1.3.1

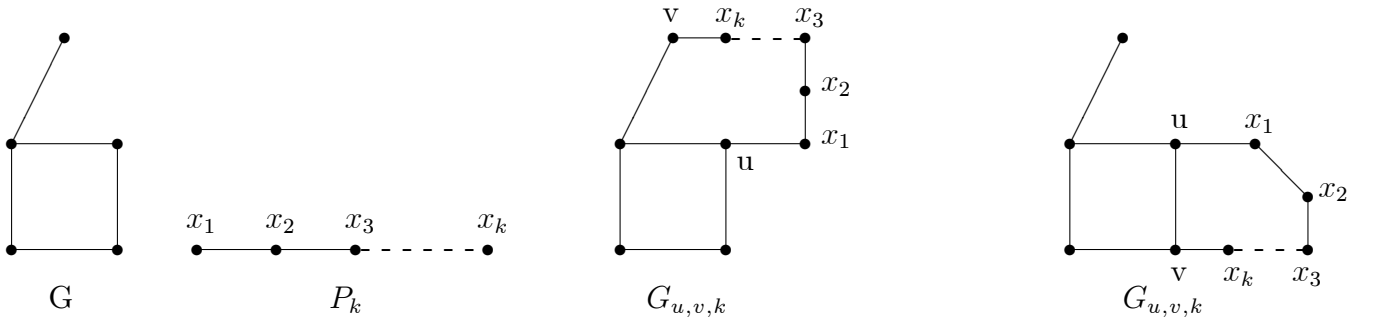


FIG. 1.16 – Ajout d'une chaîne P_k à un graphe G

On donne quelques définitions et notations nécessaires pour la suite.

Définition 1.3.2 *Soit G un graphe :*

1. un sommet v de G est γ-bon, s'il appartient à au moins un γ-ensemble de G.

2. un sommet v de G est γ-mauvais, s'il n'appartient à aucun γ-ensemble de G.

Définition 1.3.3 *Pour un graphe G on définie $V^-(G) = \{x \in V(G) : \gamma(G-x) = \gamma(G)\}$.*

1.3.1 Cas de sommets adjacents

Samdivkin [30] a remarqué que si u et v sont deux sommets adjacents d'un graphe G, alors pour tout $k \geq 1$, $\gamma(G) = \gamma(G_{u,v,0}) \leq \gamma(G_{u,v,k}) \leq \gamma(G_{u,v,k+1})$.

Proposition 1.3.1 *[30] Si u et v sont deux sommets adjacents d'un graphe G, alors pour tout $k \geqslant 1$. $\gamma(G) \leqslant \gamma(G_{u,v,k})$ pour $k \geq 1$, et $\gamma(G) < \gamma(G_{u,v,k})$ pour $k \geq 5$.*

Ensuite, il a traité l'effet d'ajouter d'une chaîne P_1,P_2 et P_3 sur le nombre de domination, où il a montré les résultats suivants.

Théorème 1.3.1 *[30] Soient u et v deux sommets adjacents d'un graphe G. Alors*

$\gamma(G) \leq \gamma(G_{u,v,1}) \leq \gamma(G) + 1$. De plus

(A) $\gamma(G_{u,v,1}) = \gamma(G)$ *si et seulement si au moins l'un de* u *et* v *est* γ*-bon dans* G*.*

(B) $\gamma(G_{u,v,1}) = \gamma(G) + 1$ *si et seulement si* u *et* v *sont tous les deux* γ*-mauvais dans* G*.*

Théorème 1.3.2 *[30] Soient* u *et* v *deux sommets adjacents d'un graphe* G*. Alors*

$\gamma(G) \leq \gamma(G_{u,v,2}) \leq \gamma(G) + 1$*. De plus*

(A) $\gamma(G_{u,v,2}) = \gamma(G) + 1$ *si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

(i) u *et* v *sont tous les deux* γ*-mauvais dans* G*.*

(ii) au moins l'un de u *et* v *est un sommet* γ*-bon dans* G*,* $u, v \notin V^-(G)$ *et chaque* γ*-ensemble de* G *contient au plus l'un de* u *et* v*.*

(B) $\gamma(G_{u,v,2}) = \gamma(G)$ *si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

(i) il existe un γ*-ensemble de* G *qui contient à la fois* u *et* v*.*

(ii) au moins l'un de u *et* v *est dans* $V^-(G)$*.*

Théorème 1.3.3 *[30] Soient* u, v *deux sommets adjacents d'un graphe* G*. Alors* $\gamma(G_{u,v,3}) = \gamma(G) + 1$*.*

1.3.2 Cas de sommets non-adjacents

Samdivkin [30] a remarqué que si u et v sont deux sommets non-adjacents d'un graphe G, alors pour tout $k \geq 1$, $\gamma(G) - 1 = \gamma(G_{u,v,0}) \leq \gamma(G_{u,v,k}) \leq \gamma(G_{u,v,k+1})$.

Ensuite, il a traité l'effet d'ajouter une chaîne P_1,P_2 et P_3 sur le nombre de domination, où il a montré les résultats suivants.

Théorème 1.3.4 *[30] Soient* u *et* v *deux sommets non-adjacents d'un graphe* G*. Alors*

$\gamma(G) - 1 \leq \gamma(G_{u,v,1}) \leq \gamma(G) + 1$*. De plus :*

(A) $\gamma(G_{u,v,1}) = \gamma(G) - 1$ *si et seulement si* $\gamma(G - \{u, v\}) = \gamma(G) - 2$*.*

(B) $\gamma(G_{u,v,1}) = \gamma(G) + 1$ *si et seulement si* u *et* v *sont tous les deux des sommets* γ*-mauvais de* G*,* $u \notin V^-(G - v)$ *et* $v \notin V^-(G - u)$*. Si* $\gamma(G_{u,v,1}) = \gamma(G) + 1$ *alors* $x_1 \in V^-(G_{u,v,1})$*.*

Théorème 1.3.5 *[30] Soient u et v deux sommets non-adjacents d'un graphe G. Alors*

$\gamma(G) \leq \gamma(G_{u,v,2}) \leq \gamma(G) + 1$. *De plus :*

(A) $\gamma(G_{u,v,2}) = \gamma(G)$ *si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

(i) il existe un γ-ensemble de G qui contient à la fois u et v.

(ii) au moins l'un de u et v est dans $V^-(G)$.

(B) $\gamma(G_{u,v,2}) = \gamma(G) + 1$ *si et seulement si* $u, v \notin V^-(G)$ *et pour tout γ-ensemble de G contient au plus l'un de u et v.*

Théorème 1.3.6 *[30] Soit u et v deux sommets non-adjacents d'un graphe G. Alors*

$\gamma(G) \leq \gamma(G_{u,v,3}) \leq \gamma(G) + 1$. *De plus* $\gamma(G_{u,v,3}) = \gamma(G)$ *si et seulement si au moins l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

(A) $u \in V^-(G)$ *et v est un sommet γ-bon de $G - u$.*

(B) $v \in V^-(G)$ *et u est un sommet γ-bon de $G - v$.*

Théorème 1.3.7 *[30] Soit u et v deux sommets non-adjacents d'un graphe G. Alors*

$\gamma(G) \leq \gamma(G_{u,v,4}) \leq \gamma(G) + 2$. *De plus les assertions suivantes sont valides.*

(A) $\gamma(G_{u,v,4}) = \gamma(G) + 2$ *si et seulement si* $\gamma(G_{u,v,1}) = \gamma(G) + 1$.

(B) Si $\gamma(G_{u,v,1}) = \gamma(G)$ *et* $\gamma(G_{u,v,i}) = \gamma(G) + 1$ *pour certain* $i \in \{2, 3\}$, *alors* $\gamma(G_{u,v,4}) = \gamma(G) + 1$.

(C) Soit $\gamma(G_{u,v,3}) = \gamma(G)$. *Alors* $\gamma(G_{u,v,4}) \leq \gamma(G) + 1$ *et l'égalité vérifie si et seulement si* $\gamma(G - \{u, v\}) \geq \gamma(G) - 1$.

(D) $\gamma(G_{u,v,4}) = \gamma(G)$ *si et seulement si* $\gamma(G - \{u, v\}) \geq \gamma(G) - 2$.

Théorème 1.3.8 *[30] Soit u et v deux sommets non-adjacents d'un graphe G.*

Si $\gamma(G_{u,v,k}) = \gamma(G)$, *alors* $k \leq 4$.

Si $k \geq 5$, *alors* $\gamma(G_{u,v,k}) > \gamma(G)$.

Si $\gamma(G_{u,v,4}) = \gamma(G)$, *alors* $\gamma(G_{u,v,5}) = \gamma(G) + 1$.

Chapitre 2

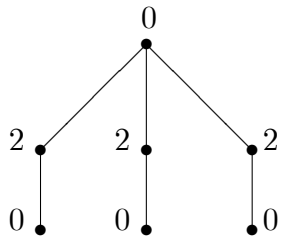
Quelques résultats sur la domination romaine

On va consacrer ce chapitre à l'état d'art sur la domination romaine dans les graphes. Ce concept est introduit par Cockayne et al [7] en 2004, et motivé par un article de Ian Steward dans Scientific American, intitulé "Defend the Roman Empire !"[31].

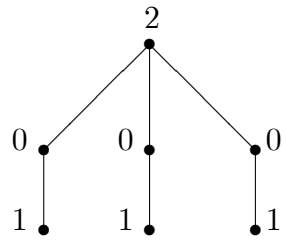
2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1.1 *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, une fonction de domination romaine (FDR) sur G est une fonction $f : V \longrightarrow \{0, 1, 2\}$ tel que chaque sommet u avec $f(u) = 0$ est adjacent à au moins un sommet v avec $f(v) = 2$. Le poids de f est la valeur $f(V) = \sum_{u \in V} f(u)$. Le poids minimum de f est appelé le* nombre de domination romaine *de G, noté $\gamma_R(G)$.*

Exemple 2.1.1 *La fonction de domination romaine $f : V \longrightarrow \{0, 1, 2\}$ du graphe G donné dans la Figure 2.1 dont le poids minimum est* 5.



Une FDR de poids 6



γ_R-fonction de poids 5

FIG. 2.1 – Un graphe G d'ordre 7, avec $\gamma_R(G) = 5$

Chaque sommet dans notre graphe représente une ville dans l'empire romain. Une ville (sommet v) est considérée non-sécurisée si elle n'a aucune légions (i.e., si $f(v) = 0$) et elle est sécurisée sinon (i.e., si $f(v) \in \{1, 2\}$). Une ville non-sécurisée (sommet v) peut être sécurisée par l'envoi d'une légion d'une ville v voisine (sommet adjacent). Mais l'empereur Constantine, en $4^{ème}$ ciècle A.D, décrétat que toute ville qui n'a pas de légions pour la sécuriser ($f(u) = 0$) doit être voisine à aumoins une autre ville qui a deux legions ($f(v) = 2$). Si la $1^{ère}$ serait attaquée, alors la $2^{ème}$ pourait déployer une légion pour la protéger sans qu'elle devient vulnérable elle même. De cette manière, l'empereur Constantine pouvait défendre tout l'empire romain. Comme le maintient d'une légion à une ville coute chère. L'objectif de l'empereur, est de minimiser le nombre total de légions nécessaires pour protéger tout l'empire. Le probème est généralisé pour un graphe. Une fonction de domination romaine de poids $\gamma_R(G)$ corresponds à une affectation optimale de légions aux villes.

Soit (V_0, V_1, V_2) une partition ordonné de V induite par f, on écrit $f = (V_0, V_1, V_2)$, où $V_i = \{v \in V(G) : f(v) = i\}$ pour $i = 0, 1, 2$.

Dans sa thèse 2000 [13], Dreyer a construit un algorithme linéaire pour la détermination du nombre de domination romaine d'un arbre. En outre, McRae 2000 [27] a montré que le problème de détermination du nombre $\gamma_R(G)$ pour un graphe arbitraire est NP-complet.

2.2 Bornes sur le nombre de domination romaine

On rappelle quelques résultats importants, établis par Cockayne et al. [7], qui seront utiles dans ce qui suit. Le nombre de domination romaine est toujours défini, et si le graphe G est non-trivial, alors $2 \leq \gamma_R(G) \leq n$.

Proposition 2.2.1 *[7] Si G est un graphe d'ordre n, alors*

1. *$\gamma_R(G) = 2$ si et seulement si G possède un sommet de degré $n-1$ (sommet universel).*
2. *$\gamma_R(G) = n$ si et seulement si $G = pK_1 \cup qK_2$.*

Proposition 2.2.2 *[7] Si G est une chaîne P_n ou un cycle C_n, alors on a : $\gamma_R(G) = \lceil 2n/3 \rceil$.*

Chambers et al. [5] ont établi des bornes superieures pour le paramètre $\gamma_R(G)$.

Proposition 2.2.3 *[5] Si G est un graphe d'ordre n et de degré maximum Δ, alors on a :*

$$\gamma_R(G) \leq n - \Delta(G) + 1.$$

Cette borne est atteinte pour la couronne d'une étoile $Cor(K_{1,k})$. En effet $n = 2k+2$, $\Delta = k+1$ et $\gamma_R(Cor(K_{1,k})) = n - \Delta + 1 = k+2$ (voir la Figure 2.2).

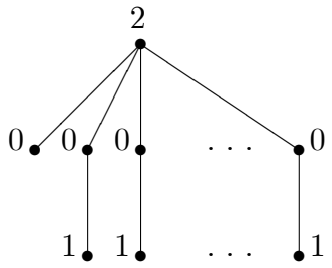


FIG. 2.2 – La couronne $Cor(K_{1,k})$

Théorème 2.2.1 *[5] Si G est un graphe connexe d'ordre n, alors on a : $\gamma_R(G) \leq 4n/5$, avec égalité si et seulement si G est un C_5 ou G est obtenu de $(n/5)\,P_5$ en identifiant chaque sommet d'un sous graphe connexe au centre d'une seule composante connexe de $(n/5)\,P_5$.*

Exemple 2.2.1 *Un exemple du graphe G vérifiant $\gamma_R(G) = 4n/5$.*

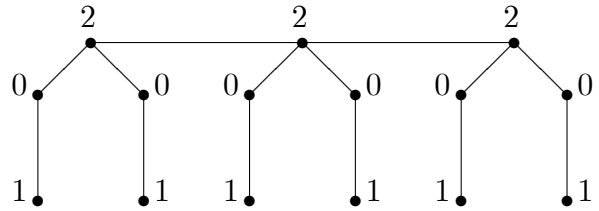


FIG. 2.3 – Un graphe G avec $\gamma_R(G) = 4n/5 = 12$

Cockayne et al. [7] ont donné des relations entre le nombre de domination romaine et le nombre de domination d'un graphe G.

Proposition 2.2.4 *[7] Pour tout graphe G, on a : $\gamma(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G)$.*

Proposition 2.2.5 *[7] Si G est un graphe d'ordre n, alors $\gamma(G) = \gamma_R(G)$ si et seulement si $G = \overline{K_n}$.*

Un graphe G est dit *romaine* si $\gamma_R(G) = 2\gamma(G)$. Cockayne et al. ont donné une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe soit romain.

Proposition 2.2.6 *[7] Un graphe G est romaine si et seulement si G a une γ_R-fonction $f = (V_0, V_1, V_2)$ avec $V_1 = \emptyset$ (voir la Figure 2.4).*



FIG. 2.4 – Le graphe P_6 avec $V_1 = \emptyset$

Cockayne et al. [7] ont donné une borne inférieure sur γ_R en fonction de n et Δ.

Théorème 2.2.2 *[7] Si G est un graphe d'ordre n et de degré maximum $\Delta \geq 1$, alors on a :*

$$\gamma_R(G) \geq 2n/(\Delta + 1).$$

Cette borne est atteinte pour l'étoile $K_{1,p}$. En effet $n = p+1$, $\Delta = p$ et $\gamma_R(K_{1,p}) = 2n/(\Delta + 1) = 2$ (voir la Figure 2.5).

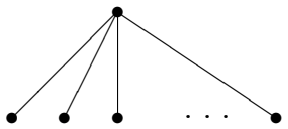


FIG. 2.5 – le graphe $K_{1,p}$

En utilisant la relation $\gamma_R(G) \leq n - \Delta(G) + 1$, Cockayne et al. [7] ont présenté des inégalité de type Nordhaus-Gaddum pour le nombre de domination romaine.

Théorème 2.2.3 *[5] Si G est un graphe d'ordre $n \geq 3$, alors on a : $\gamma_R(G) + \gamma_R(\overline{G}) \leq n + 2$. Avec égalité si et seulement si $G = K_n$ ou $\overline{G} = K_n$.*

Théorème 2.2.4 *[5] Si G est un graphe d'ordre $n \geq 3$, alors on a : $\gamma_R(G) + \gamma_R(\overline{G}) \geq 5$. Avec égalité si et seulement si G ou $\overline{G}$ a un sommet de degré $n-1$ et son complémentaire a un sommet de degré $n-2$.*

2.3 Effet de l'ajout d'une arête et d'une chaine sur le nombre de domination romaine

La notion de criticité pour la domination romaine a été introduite par Jafari Rad et Volkmann [24]. Puisque toute FDR d'un graphe partiel de G est aussi un FDR de G, on a $\gamma_R(G) \leq \gamma_R(G-e)$ pour toute arête $e \in E(G)$, et $\gamma_R(G+e) \leq \gamma_R(G)$ pour toute arête $e \notin E(G)$. D'autre part, il ont montré que la supprition de n'importe quelle arête de G peut augmanter par au plus un le nombre de domination romaine de G, et donc $\gamma_R(G) \leq \gamma_R(G-e) \leq \gamma_R(G)+1$. Aussi que l'ajout de n'importe quelle arête à G peut diminuer au plus un le nombre de domination romaine de G, et donc $\gamma_R(G) - 1 \leq \gamma_R(G+e) \leq \gamma_R(G)$.

Plus tard, Meraimi dans [28] a étudié l'effet de l'ajout d'une chaîne P_k sur le nombre de domination romaine d'un graphe. On donne quelques définitions et notations nécessaires pour la suite.

Définition 2.3.1 *Soit G un graphe :*

1. Un sommet v de G est dit γ_R-bon, s'il existe une γ_R-fonction f de G telle que $f(v) = 2$.

2. Un sommet v de G est dit γ_R-mauvais, s'il n'existe aucune γ_R-fonction f de G telle que $f(v) = 2$.

3. Un sommet v de G est dit γ_R-très mauvais, si pour toute γ_R-fonction f de G, $f(v) = 0$.

Exemple 2.3.1 *Dans la Figure 2.6-(a) on a : les sommets b et e sont γ_R-bon, et les sommets a, c, d et f sont γ_R-très mauvais.*

Dans la Figure 2.6-(b) on a : les sommets b et c sont γ_R-bon, et les sommets a et d sont γ_R-mauvais.

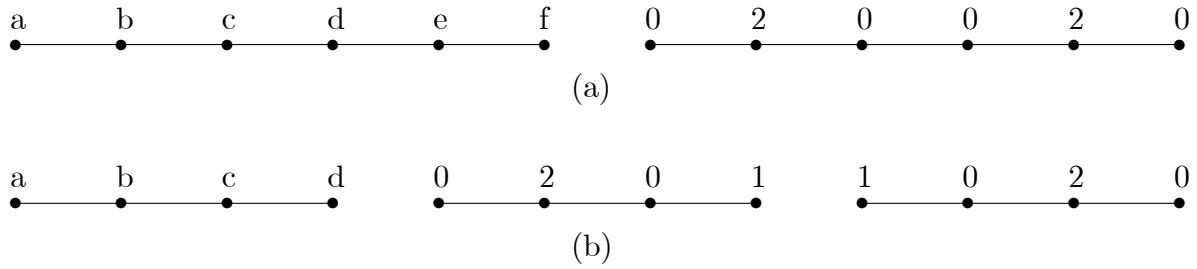


FIG. 2.6 – Un exemple de sommets γ_R-bon, γ_R-mauvais et γ_R-trés mauvais

Remarque 2.3.1 *Tous les sommets d'une chaine d'ordre $n \equiv 2 \pmod 3$ sont γ_R-bon.*

2.3.1 Cas des sommets adjacents

Proposition 2.3.1 *[28] Si u et v sont deux sommets adjacents d'un graphe G, alors pour tout $k \geqslant 2$,*

$$\gamma_R(G) \leqslant \gamma_R(G_{u,v,1}) \leqslant \gamma_R(G_{u,v,k}) \leqslant \gamma_R(G_{u,v,k+1})$$

Dans la suite, on présente l'effet de l'ajout d'une chaîne P_1, P_2 ou P_3 sur le nombre de domination Romaine.

Théorème 2.3.1 *[28] Soient u et v deux sommets adjacents d'un graphe G. Alors*

$\gamma_R(G) \leq \gamma_R(G_{u,v,1}) \leq \gamma_R(G) + 1$. De plus :

A) $\gamma_R(G_{u,v,1}) = \gamma_R(G)$ si et seulement si au moins l'un de u et v est γ_R-bon dans G.

B) $\gamma_R(G_{u,v,1}) = \gamma_R(G) + 1$ si et seulement si u et v sont tous les deux γ_R-mauvais dans G.

Théorème 2.3.2 *[28] Soient u et v deux sommets adjacents d'un graphe G. Alors*

$\gamma_R(G) \leq \gamma_R(G_{u,v,2}) \leq \gamma_R(G) + 2$. *De plus :*

A) $\gamma_R(G_{u,v,2}) = \gamma_R(G)$ *si et seulement si il existe une* γ_R*-fonction* f *de* G *telle que* $f(u) = f(v) = 2$.

B) $\gamma_R(G_{u,v,2}) = \gamma_R(G) + 1$*si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

(i) u *et* v *sont tous les deux* γ_R*-mauvais dans* G *mais pas tous les deux* γ_R*-très mauvais.*

(ii) au moins l'un de u *et* v *est un sommet* γ_R*-bon dans* G *et il n'existe aucune* γ_R*-fonction* f *de* G *avec* $f(u) = f(v) = 2$.

C) $\gamma_R(G_{u,v,2}) = \gamma_R(G) + 2$ *si et seulement si* u *et* v *sont tous les deux* γ_R*-très mauvais dans* G.

Théorème 2.3.3 *[28] Soient u et v deux sommets adjacents d'un graphe G. Alors*

$\gamma_R(G) + 1 \leq \gamma_R(G_{u,v,3}) \leq \gamma_R(G) + 2$. *De plus :*

A) $\gamma_R(G_{u,v,3}) = \gamma_R(G) + 1$ *si et seulement si* u *et* v *sont tous deux des sommets* γ_R*-bons dans* G *et il existe une* γ_R*-fonction* f *de* G*, avec* $f(u) = f(v) = 2$.

B) $\gamma_R(G_{u,v,3}) = \gamma_R(G) + 2$ *si et seulement si ou bien* u *et* v *sont tous deux des sommets* γ_R*-mauvais dans* G*, ou bien au moins l'un de* u *et* v *est un sommet* γ_R*-bon dans* G *et il n'existe aucune* γ_R*-function* f *de* G *avec* $f(u) = f(v) = 2$.

Exemple 2.3.2

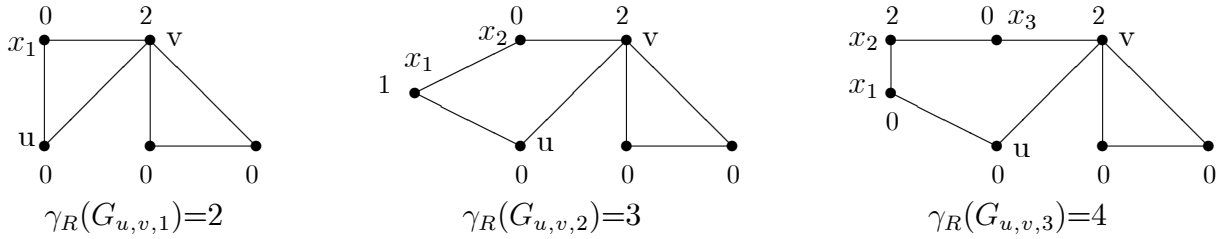


FIG. 2.7 – Les graphes $G_{u,v,1}$, $G_{u,v,2}$, $G_{u,v,3}$ tels que $G = K_{1,3} + e$, et u et v sont adjacents

2.3.2 Cas des sommets non-adjacents

Proposition 2.3.2 *[28] Si u et v sont deux sommets non-adjacents d'un graphe G, alors pour tout $k \geqslant 2$,*

$$\gamma_R(G) \leqslant \gamma_R(G_{u,v,1}) \leqslant \gamma_R(G_{u,v,k}) \leqslant \gamma_R(G_{u,v,k+1})$$

Dans la suite, on présente l'effet de l'ajout d'une chaîne P_1, P_2 ou P_3 entre deux sommets non-adjacents de G sur le nombre de domination romaine.

Théorème 2.3.4 *[28] Soient u et v deux sommets non-adjacents d'un graphe G. Alors*

$\gamma_R(G) \leq \gamma_R(G_{u,v,1}) \leq \gamma_R(G) + 1$. *De plus :*

A) $\gamma_R(G_{u,v,1}) = \gamma_R(G)$ si et seulement si ou bien l'un de u et v est un sommet γ_R-bon dans G, ou bien il existe une γ_R-fonction f de G telle que $f(u) = f(v) = 1$.

B) $\gamma_R(G_{u,v,1}) = \gamma_R(G) + 1$ si et seulement si u et v sont tous les deux des sommets γ_R-mauvais dans G et il n'existe aucune γ_R-fonction f de G avec $f(u) = f(v) = 1$.

Théorème 2.3.5 *[28] Soient u et v deux sommets non-adjacents d'un graphe G. Alors*

$\gamma_R(G) \leq \gamma_R(G_{u,v,2}) \leq \gamma_R(G) + 2$. *De plus :*

A) $\gamma_R(G_{u,v,2}) = \gamma_R(G)$ si et seulement s'il existe une γ_R-fonction f de G telle que $f(u) = f(v) = 2$.

B) $\gamma_R(G_{u,v,2}) = \gamma_R(G) + 1$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

(i) u et v sont tous les deux γ_R-mauvais dans G mais pas tous les deux γ_R-très mauvais.

(ii) au moins l'un de u et v est un sommet γ_R-bon dans G et il n'existe aucune γ_R-fonction f de G avec $f(u) = f(v) = 2$.

C) $\gamma_R(G_{u,v,2}) = \gamma_R(G) + 2$ si et seulement si u et v sont tous les deux γ_R-très mauvais dans G.

Théorème 2.3.6 *[28] Soient u, v deux sommets non-adjacents d'un graphe G. Alors*

$\gamma_R(G) + 1 \leq \gamma_R(G_{u,v,3}) \leq \gamma_R(G) + 2$. *De plus :*

A) $\gamma_R(G_{u,v,3}) = \gamma_R(G)+1$ si et seulement s'il existe une γ_R-fonction f de G, avec $f(u) = f(v) = 2$ ou, sans perte de généralité, $f(u) = 2$ et $f(v) = 1$.

B) $\gamma_R(G_{u,v,3}) = \gamma_R(G) + 2$ *si et seulement si ou bien* u *et* v *sont tous deux des sommets* γ_R*-mauvais dans* G*, ou bien au moins l'un de* u *et* v *est un sommet* γ_R*-bon dans* G *et il n'existe aucune* γ_R*-function* f *de* G *avec* $f(u) = f(v) = 2$*.*

Exemple 2.3.3

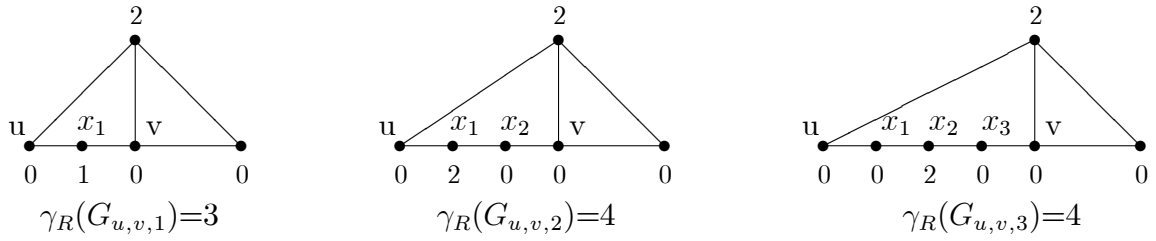


FIG. 2.8 – Les graphes $G_{u,v,1}$, $G_{u,v,2}$, $G_{u,v,3}$ tels que $G = K_{1,3} + e$, et u et v sont non-adjacents

Chapitre 3

Nombre de domination romaine dans quelques graphes

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la détermination des valeurs exactes de $\gamma_R(G+e)$, et à une extension du travail de Samdivkin [30], présenté par Mariami [28] dans sa thèse de doctorat : En donnant les valeurs exactes du nombre de domination romaine des graphes $\gamma_R(G_{u,v,k})$, tel que G est une chaîne P_n ou un cycle C_n.

3.1 Valeur exacte de $\gamma_R(C_n+e)$

Dans cette section on donne la valeur exacte de $\gamma_R(C_n+e)$. Soit G un graphe obtenu d'un C_n en ajoutant une corde tel que G est formé par deux cycles C_p et C_q (où $n=p+q-2$).

La proposition suivante est importante pour déterminer la valeur de $\gamma_R(C_n+e)$.

Proposition 3.1.1 *[4] Soit G le graphe obtenu en ajoutant une corde à un cycle C_n pour former deux cycles C_p et C_q.où $n=p+q-2$. Alors*

$$\gamma_R(G)=\gamma_R(C_p)+\gamma_R(C_q)-2. \tag{3.1}$$

Notons les sommets de C_n par $v_1, ..., v_n$. Sans perte de généralité, on peut considerer v_0v_j comme l'arête ajouté à C_n.

Théorème 3.1.1 *Soit G le graphe obtenu en ajoutant une corde à un cycle C_n, $n \geq 4$ pour former deux cycles C_p et C_q, où $n = p + q - 2$. Alors*

$$\gamma_R(G) = \begin{cases} (2n-2)/3 & si\ n \equiv 1 \pmod 3\ \ et\ p \equiv 0 \pmod 3, \\ (2n-1)/3 & si\ n \equiv 2 \pmod 3\ \ et\ p \equiv 0, 1 \pmod 3, \\ 2n/3 & si\ n \equiv 0 \pmod 3, \\ (2n+1)/3 & si\ n \equiv 1 \pmod 3\ \ et\ p \equiv 1, 2 \pmod 3, \\ (2n+2)/3 & si\ n \equiv 2 \pmod 3\ \ et\ p \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

Exemple 3.1.1

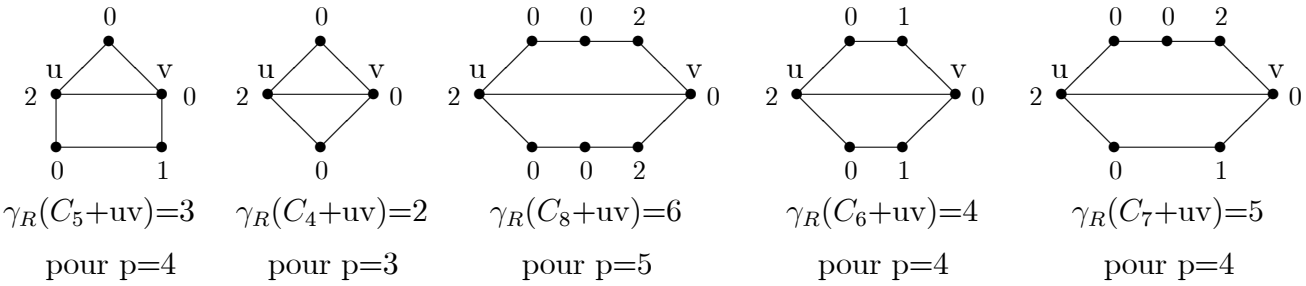


FIG. 3.1 – Les graphes $C_5 + uv$, $C_4 + uv$, $C_8 + uv$, $C_6 + uv$, $C_7 + uv$

Preuve. La proposition 3.1.1 implique que $\gamma_R(G) = \lceil 2p/3 \rceil + \lceil 2q/3 \rceil - 2$.

On distingue trois cas selon n :

Cas 1. $n \equiv 0 \pmod 3$

Si $p \equiv 1 \pmod 3$ et $q \equiv 1 \pmod 3$. Alors $\gamma_R(G) = (2p+1)/3 + (2q+1)/3 - 2 = 2n/3$.

Si $p \equiv 0 \pmod 3$ et $q \equiv 2 \pmod 3$, ou $p \equiv 2 \pmod 3$ et $q \equiv 0 \pmod 3$. Alors

$\gamma_R(G) = 2p/3 + (2q+2)/3 - 2 = (2p+2)/3 + 2q/3 - 2 = 2n/3$.

Cas 2. $n \equiv 1 \pmod 3$

Si $p \equiv 0 \pmod 3$ et $q \equiv 0 \pmod 3$. Alors $\gamma_R(G) = 2p/3 + 2q/3 - 2 = (2n-2)/3$.

Si $p \equiv 1 \pmod 3$ et $q \equiv 2 \pmod 3$, ou $p \equiv 2 \pmod 3$ et $q \equiv 1 \pmod 3$. Alors

$\gamma_R(G) = (2p+1)/3 + (2q+2)/3 - 2 = (2p+2)/3 + (2q+1)/3 - 2 = (2n+1)/3$.

Cas 3. $n \equiv 2 \pmod 3$

Si $p \equiv 2 \pmod 3$ et $q \equiv 2 \pmod 3$. Alors $\gamma_R(G) = (2p+2)/3 + (2q+2)/3 - 2 = (2n+2)/3$.

Si $p \equiv 0 \pmod 3$ et $q \equiv 1 \pmod 3$, ou $p \equiv 1 \pmod 3$ et $q \equiv 0 \pmod 3$. Alors

$\gamma_R(G) = 2p/3 + (2q+1)/3 - 2 = (2p+1)/3 + 2q/3 - 2 = (2n-1)/3$. ■

3.2 Valeur exacte de $\gamma_R(P_n + e)$

Dans cette section on donne la valeur exacte de $\gamma_R(P_n + e)$. Soit G un graphe obtenu à partir d'une chaîne P_n en ajoutant une corde, tel que G est formé par deux chaînes P_p, P_q et un cycle C_t (où $n = p + q + t$).

Pour déterminer la valeur de $\gamma_R(G)$, on décrit d'abord deux procédures concernant une chaîne P_n et un cycle C_n :

Procedure A :

Soit une chaîne P_n de $n \geq 3$ sommets consécutifs $w_1, ..., w_n$. Soit H_1 le graphe unicycle obtenu à partir de P_n en joignant deux sommets non-adjacent w_i et w_j par une l'arête w_iw_j, où $i < j$. Supposons que H_1 a un cycle de longueur supérieure strictement à 5. Alors H_1 a une sous-chaîne $P = v_1, u_1, u_2, u_3, v_2 = w_j$ du cycle, et on forme le graphe H_2 de H_1 en supprimant les sommets u_1, u_2 et u_3 et joignant les deux sommets v_1 et v_2. On répète ce processus jusqu'à obtenir un graphe H_k ayant un cycle d'ordre 3, 4 ou 5.

Proposition 3.2.1 *[4]* $\gamma_R(H_i) = \gamma_R(H_{i+1}) + 2$.

Procedure B :

Un 3-endpath dans un graphe est une chaîne v, u_1, u_2, u_3 tel que $d_G(v) \geq 2$, $d_G(u_1) = d_G(u_2) = 2$ et $d_G(u_3) = 1$. Considérons le graphe R_i avec un 3-endpath v, u_1, u_2, u_3. Soit R_{i+1} le graphe obtenu à partir R_i en supprimant les sommets u_1, u_2 et u_3. On répète ce processus jusqu'à obtenir un graphe R_k sans 3-endpaths (c-à-d, jusqu'à obtenir un graphe R_k ayant au plus deux chaînes pendantes d'ordre 1 ou 2).

Proposition 3.2.2 *[4]* $\gamma_R(R_i) = \gamma_R(R_{i+1}) + 2$.

En utilisant la procedure B, on a facilement la relation suivante entre deux chaînes.

Proposition 3.2.3 *Soit* P_n *et* $P_{n'}$ *deux chaînes d'ordres* n *et* n'*, respectivement, avec* $n \equiv n' \pmod 3$. *Alors* $\gamma_R(P_n) = \gamma_R(P_{n'}) + 2(n - n')/3$.

Théorème 3.2.1 *Soit* G *le graphe obtenu en ajoutant une arête à une chaîne* P_n *;*$n \geq 3$ *pour former deux chaînes pendantes* P_p *et* P_q*, et un cycle* C_t*, où* $n = p + t + q$. *Alors*

$$\gamma_R(G) = \begin{cases} (2n-2)/3 & si\ n \equiv 1 \pmod 3,\ t \equiv 0 \pmod 3\ \ et\ p \equiv 0,1 \pmod 3, \\ (2n-1)/3 & si\ n \equiv 2 \pmod 3\ \ et\ t \equiv 0 \pmod 3,\ ou \\ & n \equiv 2 \pmod 3,\ t \equiv 1 \pmod 3\ \ et\ p \equiv 0,1 \pmod 3, \\ 2n/3 & si\ n \equiv 0 \pmod 3, \\ (2n+1)/3 & si\ n \equiv 1 \pmod 3\ \ et\ t \equiv 1,2 \pmod 3,\ ou \\ & n \equiv 1 \pmod 3,\ t \equiv 0 \pmod 3\ \ et\ p \equiv 2 \pmod 3, \\ (2n+2)/3 & si\ n \equiv 2 \pmod 3\ \ et\ t \equiv 2 \pmod 3,\ ou \\ & n \equiv 2 \pmod 3,\ t \equiv 1 \pmod 3\ \ et\ p \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

Exemple 3.2.1

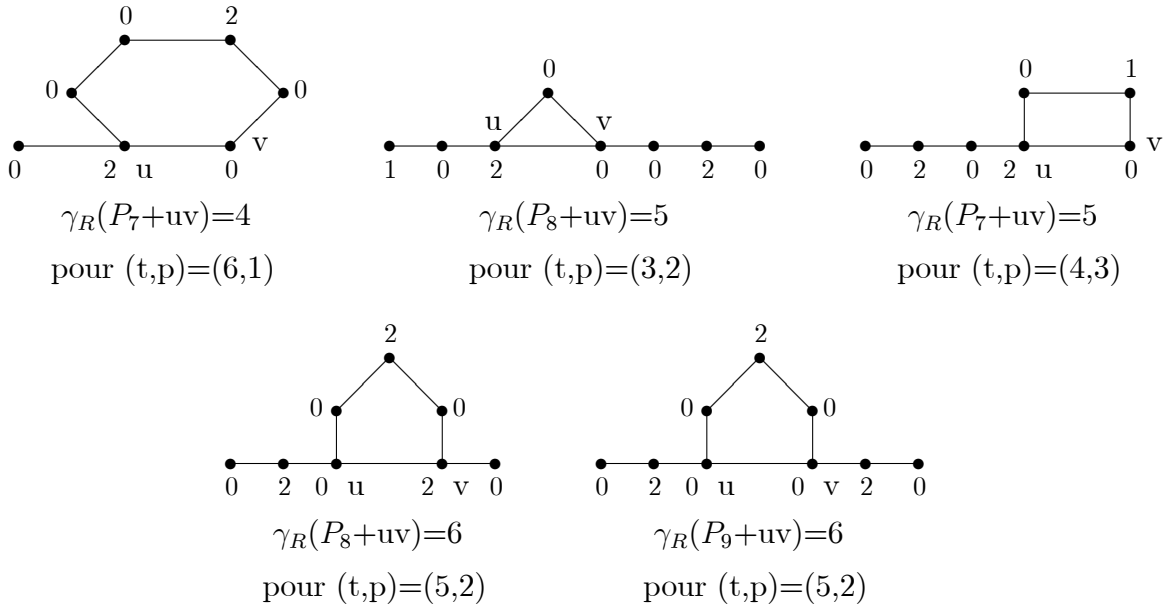


FIG. 3.2 – Les graphes $P_7 + uv$, $P_8 + uv$, $P_9 + uv$

Preuve. Soit $M(n_1, c, n_2)$, où $n_1, n_2 \in \{0, 1, 2\}$et $c \in \{3, 4, 5\}$, le graphe obtenu d'un cycle C de longueur c en joignant un sommet pendant d'une chaîne P_{n_1} à un sommet x de C, et en joignant un sommet pendant d'une chaîne P_{n_2} à un sommet y de C adjacent à x. Le graphe $M(n_1, c, n_2)$ appelé un graphe unicycle éléméntaire.

En appliquant les procédures A et B sur $P_n + e$, avec $e \in E\left(\overline{P_n}\right)$, et sur les graphes résultants,on obtient à la fin un graphe unicycle $M(n_1, c, n_2)$ d'ordre $n_1 + c + n_2$, où $n_1, n_2 \in \{0, 1, 2\}$ et $c \in \{3, 4, 5\}$. Remaquons que d'ordre du graphe $M = M(n_1, c, n_2)$ est $n(M) \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Soit k_1, k_2 et k les nombres de groupes de trois sommets suprimés de $P_n + e$ pour obtenir le graphe unicyle élémentaire $M = M(n_1, c, n_2)$. Donc $k_1 + k + k_2 = (n - n(M))/3$.

Par les propositions 3.2.1 et 3.2.2, pour toute arête $e \in E\left(\overline{P_n}\right)$.

$$\gamma_R(P_n + e) = \gamma_R(M) + 2(k_1 + k + k_2) = \gamma_R(M) + 2(n - n(M))/3. \tag{3.2}$$

Soit $\mathcal{M}_i$, pour $i = 0, 1$, l'ensemble de tous les unicycles élémentaires $M = M(n_1, c, n_2)$ tels que $\gamma_R(M) = \gamma_R(P_{n_1+c+n_2})$ pour $M \in \mathcal{M}_0$, et $\gamma_R(M) = \gamma_R(P_{n_1+c+n_2}) - 1$ pour $M \in \mathcal{M}_1$. Alors, en

appliquant les procédures A et B, on distingue trois cas :

Cas 1. $n \equiv 0 \pmod 3$. Alors $n(M) \equiv 0 \pmod 3$. Notons que $n(M) = n_1 + c + n_2 = 3$, 6 ou 9 pour tout $M \in \mathcal{M}$. Donc $\mathcal{M} = \{M(0,3,0), M(0,4,2), M(0,5,1), M(1,3,2), M(1,4,1), M(1,5,0), M(2,3,1), M\,(2,4,0)\,, M\,(2,5,2)\}$.

Il est facile de vérifier que pour tout $M \in \mathcal{M}$, $M \in \mathcal{M}_0$. D'où $\gamma_R(M) = \gamma_R(P_{n_1+c+n_2})$. Par la relation 3.2 et la proposition 3.2.3, on trouve

$$\begin{aligned}\gamma_R(P_n + e) &= \gamma_R(M) + 2\,(n - n(M))\,/3 \\ &= \gamma_R(P_{n(M)}) + 2\,(n - n(M))\,/3 \\ &= \gamma_R(P_n) \\ &= 2n/3.\end{aligned}$$

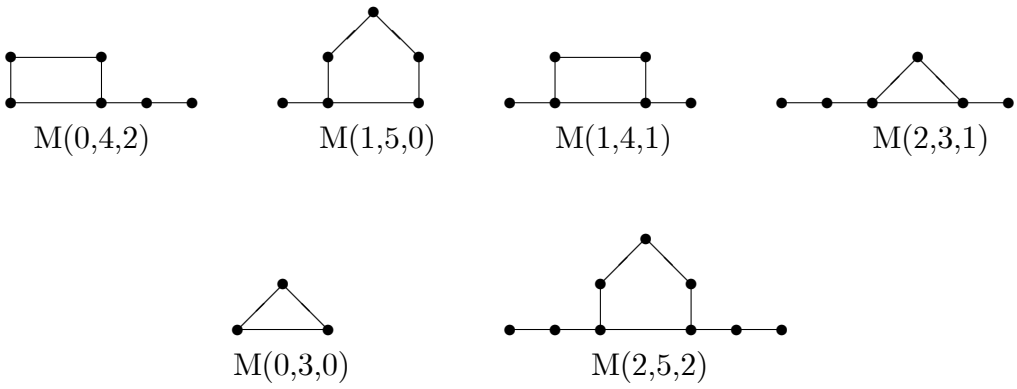


FIG. 3.3 – Les graphes $P_n + uv$ avec $n \equiv 0 \pmod 3$

Cas 2. $n \equiv 1 \pmod 3$. Alors $n(M) \equiv 1 \pmod 3$. Notons $n(M) = n_1 + c + n_2 = 4$ ou 7 pour tout $M \in \mathcal{M}$. Donc $\mathcal{M} = \{M(0,3,1), M(0,4,0), M(0,5,2), M(1,3,0), M(1,4,2), M(1,5,1), M(2,3,2), M\,(2,4,1)\,, M\,(2,5,0)\}$.

Il est facile de vérifier que $\mathcal{M}_1 = \{M(0,3,1), M(1,3,0)\}$ et $\mathcal{M}_0 = \{M(0,4,0), M(0,5,2), M(1,4,2), M(1,5,1), M(2,3,2), M\,(2,4,1)\,, M\,(2,5,0)\}$.

Par la relation 3.2 et la proposition 3.2.3, on trouve :

1) Pour $M \in \mathcal{M}_0$, on a $\gamma_R(M) = \gamma_R(P_{n_1+c+n_2})$, et par suite :

$$\begin{aligned}\gamma_R(P_n + e) &= \gamma_R(M) + 2\,(n - n(M))\,/3 \\ &= \gamma_R(P_{n(M)}) + 2\,(n - n(M))\,/3 \\ &= \gamma_R(P_n) \\ &= (2n+1)\,/3.\end{aligned}$$

2) Pour $M \in \mathcal{M}_1$, on a $\gamma_R(M) = \gamma_R(P_{n_1+c+n_2}) - 1$, et par suite :

$$\begin{aligned}\gamma_R(P_n + e) &= \gamma_R(M) + 2\,(n - n(M))\,/3 \\ &= \gamma_R(P_{n(M)}) - 1 + 2\,(n - n(M))\,/3 \\ &= \gamma_R(P_n) - 1 \\ &= (2n-2)\,/3.\end{aligned}$$

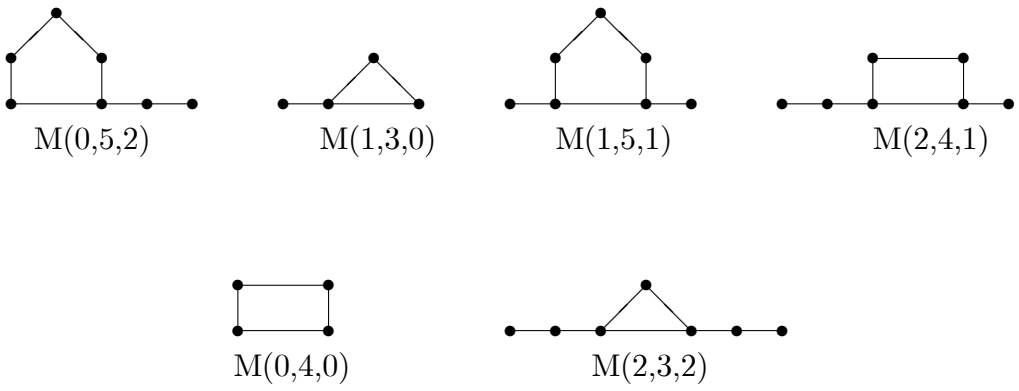


FIG. 3.4 – Les graphes $P_n + uv$ avec $n \equiv 1 \pmod 3$

Cas 3. $n \equiv 2 \pmod 3$. Alors $n(M) \equiv 2 \pmod 3$. Notons que $n(M) = n_1 + c + n_2 = 5$ ou 8 pour tout $M \in \mathcal{M}$. Donc $\mathcal{M} = \{M(0,3,2), M(0,4,1), M(0,5,0), M(1,3,1), M(1,4,0), M(1,5,2), M(2,3,0), M\,(2,4,2)\,, M\,(2,5,1)\}$.

Il est facile de vérifier que $\mathcal{M}_1 = \{M(0,3,2), M(1,3,1), M(0,4,1), M(1,4,0), M(2,3,0)\}$,

et $\mathcal{M}_0 = \{M(0,5,0), M(1,5,2), M\,(2,4,2)\,, M\,(2,5,1)\}$.

Par la relation 3.2 et la proposition 3.2.3, on trouve :

1) Pour $M \in \mathcal{M}_0$, on a $\gamma_R(M) = \gamma_R(P_{n_1+c+n_2})$, et par suite :

$$\begin{aligned}\gamma_R(P_n + e) &= \gamma_R(M) + 2\,(n - n(M))\,/3 \\ &= \gamma_R(P_{n(M)}) + 2\,(n - n(M))\,/3 \\ &= \gamma_R(P_n) \\ &= (2n+2)\,/3.\end{aligned}$$

2) Pour $M \in \mathcal{M}_1$, on a $\gamma_R(M) = \gamma_R(P_{n_1+c+n_2}) - 1$, et par suite :

$$\begin{aligned}\gamma_R(P_n + e) &= \gamma_R(M) + 2\,(n - n(M))\,/3 \\ &= \gamma_R(P_{n(M)}) - 1 + 2\,(n - n(M))\,/3 \\ &= \gamma_R(P_n) - 1 \\ &= (2n-1)\,/3.\end{aligned}$$

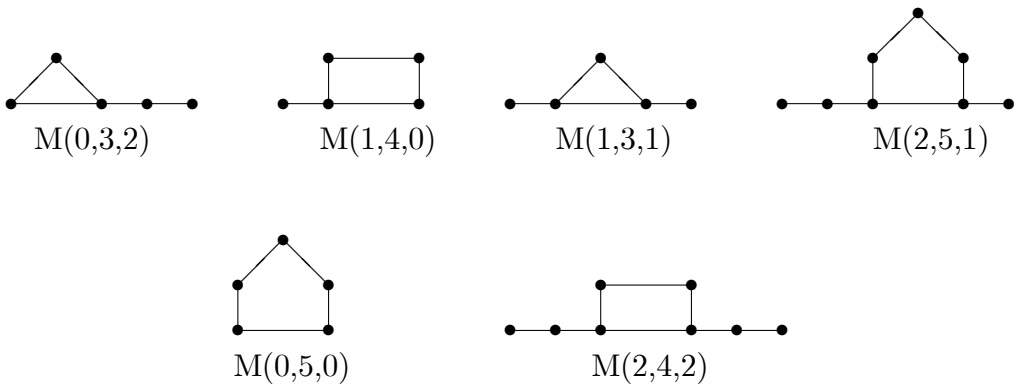


FIG. 3.5 – Les graphes $P_n + uv$ avec $n \equiv 2 \pmod 3$

■

3.3 Valeur exacte de $\gamma_R(C_{u,v,k})$

Dans cette section on donne la valeur exacte de $\gamma_R(C_{u,v,k})$. Soit G le graphe obtenu d'un cycle C_n en ajoutant une chaîne P_k entre deux sommets de C_n pour former deux cycles C_p et C_q. Notons les sommets de C_n par $v_1, ..., v_n$. Sans perte de généralité, on peut considerer $v_1x_1x_2...x_kv_j$; $j \in \{2, 3, ..., n\}$ comme la chaîne ajoutée à C_n.

3.3.1 Cas des sommets adjacents

Il est facile de voir que si $uv \in E(C_n)$, alors le graphe $C_{u,v,k}$ n'est que le graphe $G = C_{n+k} + uv$ d'ordre $n + k$, étudié dans la section 1. Donc d'après le théoreme 3.1.1, on a immédiatement le resultat suivant :

Théorème 3.3.1 *Soient u et v deux sommets adjacents d'un cycle C_n. Alors*

$$\gamma_R(C_{u,v,k}) = \begin{cases} (2n+2k-2)/3 & si\ n \equiv 0 \pmod 3\ \ et\ k \equiv 1 \pmod 3, \\ (2n+2k-1)/3 & \begin{array}{c} si\ n \equiv 0 \pmod 3\ \ et\ k \equiv 2 \pmod 3,\ ou \\ n \equiv 1 \pmod 3\ \ et\ k \equiv 1 \pmod 3, \end{array} \\ (2n+2k)/3 & si\ n+k \equiv 0 \pmod 3, \\ (2n+2k+1)/3 & \begin{array}{c} si\ n \equiv 1 \pmod 3\ \ et\ k \equiv 0 \pmod 3,\ ou \\ n \equiv 2 \pmod 3\ \ et\ k \equiv 2 \pmod 3, \end{array} \\ (2n+2k+2)/3 & si\ \equiv 2 \pmod 3\ \ et\ k \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

Exemple 3.3.1

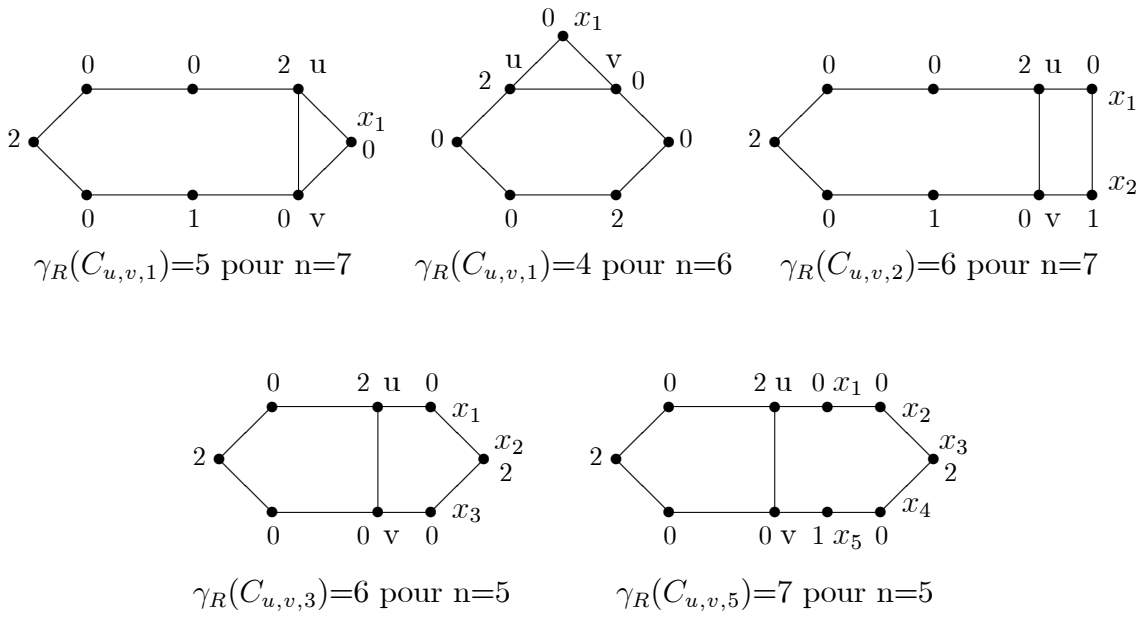


FIG. 3.6 – Les graphes $C_{u,v,1}$, $C_{u,v,2}$, $C_{u,v,3}$, $C_{u,v,5}$ tels que u et v sont adjacents

3.3.2 Cas des sommets non-adjacents

Soit $C_{u,v,k}$ le graphe d'ordre $n+k$ obtenu en ajoutant une chaîne P_k à un cycle C_n ; $n \geq 4$ entre deux sommets non-adjacents, pour former deux cycles C_p et C_q.où $n = p + q - 2k - 2$. Pour déterminer la valeur de $\gamma_R(C_{u,v,k})$. On décrit d'abord la procédure suivante :

Procedure C : Soient u et v deux sommets non-adjacents d'un cycle C_n, et soit $k \geq 1$ un entier. Soit L_1 le graphe obtenu à partir de C_n en joignant deux sommets non-adjacent u et v par une chaîne $x_1, ..., x_k$, où $i < j$. Supposons que $k \geq 4$. Alors on forme le graphe L_2 de L_1 en supprimant les sommets x_1, x_2 et x_3 et joignant les deux sommets u et x_4. On répète ce processus jusqu'à obtenir un graphe L_k ayant une chaîne d'ordre 1, 2 ou 3.

Proposition 3.3.1 *Soient u et v deux sommets non-adjacents d'un cycle C_n. Alors*

$$\gamma_R(L_i) = \gamma_R(L_{i+1}) + 2.$$

Preuve. Même preuve que de la proposition 3.2.2. ■

Théorème 3.3.2 *Soient u et v deux sommets non-adjacents d'un cycle C_n. Alors*

$$\gamma_R(C_{u,v,k}) = \begin{cases} (2n+2k-4)/3 & si\ n \equiv 0(\mathrm{mod}\,3),\ k \equiv 2(\mathrm{mod}\,3)\ et\ p \equiv 0(\mathrm{mod}\,3), \\ (2n+2k-3)/3 & si\ n \equiv 0(\mathrm{mod}\,3),\ k \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)\ et\ p \equiv 1(\mathrm{mod}\,3),\ ou \\ & n \equiv 1(\mathrm{mod}\,3),\ k \equiv 2(\mathrm{mod}\,3)\ et\ p \equiv 0,1(\mathrm{mod}\,3), \\ (2n+2k-2)/3 & si\ n+k \equiv 1(\mathrm{mod}\,3), \\ (2n+2k-1)/3 & si\ n \equiv 0(\mathrm{mod}\,3),\ k \equiv 2(\mathrm{mod}\,3)\ et\ p \equiv 1,2(\mathrm{mod}\,3),\ ou \\ & n \equiv 1(\mathrm{mod}\,3)\ et\ k \equiv 1(\mathrm{mod}\,3),\ ou \\ & n \equiv 2\,(\mathrm{mod}\,3)\,,\ k \equiv 0(\mathrm{mod}\,3), \\ (2n+2k)/3 & si\ n \equiv 0(\mathrm{mod}\,3),\ k \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)\ et\ p \equiv 0,2(\mathrm{mod}\,3),\ ou \\ & n \equiv 1(\mathrm{mod}\,3),\ k \equiv 2(\mathrm{mod}\,3)\ et\ p \equiv 2(\mathrm{mod}\,3),\ ou \\ & n \equiv 2(\mathrm{mod}\,3)\ et\ k \equiv 1(\mathrm{mod}\,3). \end{cases}$$

Exemple 3.3.2

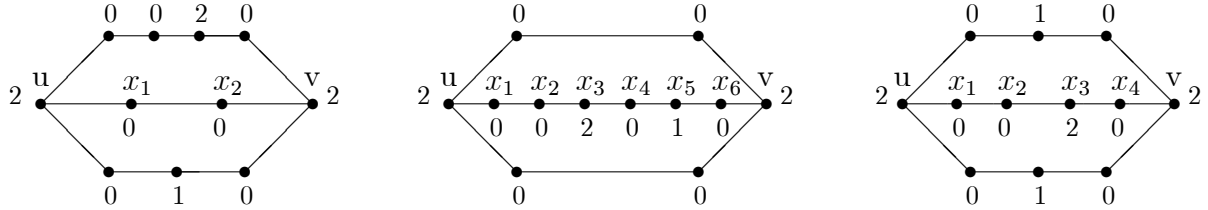


FIG. 3.7 – Les graphes $C_{u,v,2}$, $C_{u,v,6}$, $C_{u,v,4}$ tels que u et v sont non-adjacents

Preuve. Soit $M(a,b,c)$, où $a,b,c \in \{1,2,3\}$, le graphe obtenu d'un cycle C_n de longueur $n \in \{4,5,6,7,8\}$ en joignant deux sommets non-adjacents par une chaîne P_k ; $k \in \{1,2,3\}$ pour former trois cycles C_{a+b+2}, C_{a+c+2} et C_{b+c+2}. Le graphe $M(a,b,c)$ appelé un graphe tri-cycle éléméntaire.

En appliquant la procédure C sur le graphe $C_{u,v,k}$, avec $k \geq 1$ et sur les graphes résultants, on obtient à la fin un graphe tri-cycle $M(a,b,c)$ d'ordre $a+b+c+2$, où $a,b,c \in \{1,2,3\}$. Remaquons que l'ordre du graphe $M = M(a,b,c)$ est $n(M) \in \{5,6,7,8,9,10,11\}$.

Soit k_1, k_2 et k_3 les nombres de groupes de trois sommets suprimés de $C_{u,v,k}$ pour obtenir le graphe tri-cycle élémentaire $M = M(a,b,c)$. Donc $k_1 + k_2 + k_3 = (n + k - n(M))/3$. Par la proposition 3.3.1.

$$\gamma_R(C_{u,v,k}) = \gamma_R(M) + 2(k_1 + k_2 + k_3) = \gamma_R(M) + 2\,(n + k - n(M))/3. \tag{3.3}$$

En appliquant la procédure P, on distingue trois cas :

Cas 1. $n \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$.

1) Si $k \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$, alors $n(M) = a+b+c+2 = 9$ pour tout M. Donc $M \in \{M(2,3,2), M(1,3,3)\}$. Il est facile de vérifier que pour $M(2,3,2)$; $\gamma_R(M(2,3,2)) = 5$ et $p \equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$, et pour $M(1,3,3)$; $\gamma_R(M(1,3,3)) = 6$ et $p \equiv 0,2(\mathrm{mod}\,3)$. Par la relation 3.3, on trouve

$$\gamma_R(C_{u,v,k}) = \gamma_R(M) + 2\,(n + k - 9)/3.$$

$$\gamma_R(C_{u,v,k}) = \begin{cases} (2n + 2k - 3)/3 & \text{si} \quad p \equiv 1(\mathrm{mod}\,3), \\ (2n + 2k)/3 & \text{si} \quad p \equiv 0,2(\mathrm{mod}\,3). \end{cases}$$

2) Si $k \equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$, alors $n(M) = a + b + c + 2 = 7$ pour tout M. Donc $M = M(1,1,3)$. Il est facile de vérifier que $\gamma_R\,(M(1,1,3)) = 4$ et $p \equiv 0,1(\mathrm{mod}\,3)$. Par la relation 3.3, on trouve

$$\begin{aligned} \gamma_R(C_{u,v,k}) &= \gamma_R(M) + 2\,(n + k - 7)/3 \\ &= (2n + 2k - 2)/3. \end{aligned}$$

3) Si $k \equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$, alors $n(M) = a+b+c+2 = 8$ pour tout M. Donc $M \in \{M(2,2,2), M(1,2,3)\}$. Il est facile de vérifier que pour $M(2,2,2)$; $\gamma_R(M(2,2,2)) = 4$ et $p \equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$, et pour $M(1,2,3)$; $\gamma_R(M(1,2,3)) = 5$ et $p \equiv 1,2(\mathrm{mod}\,3)$. Par la relation 3.3, on trouve

$$\gamma_R(C_{u,v,k}) = \gamma_R(M) + 2\,(n + k - 8)/3.$$

$$\gamma_R(C_{u,v,k}) = \begin{cases} (2n + 2k - 4)/3 & \text{si} \quad p \equiv 0(\mathrm{mod}\,3), \\ (2n + 2k - 1)/3 & \text{si} \quad p \equiv 1,2(\mathrm{mod}\,3). \end{cases}$$

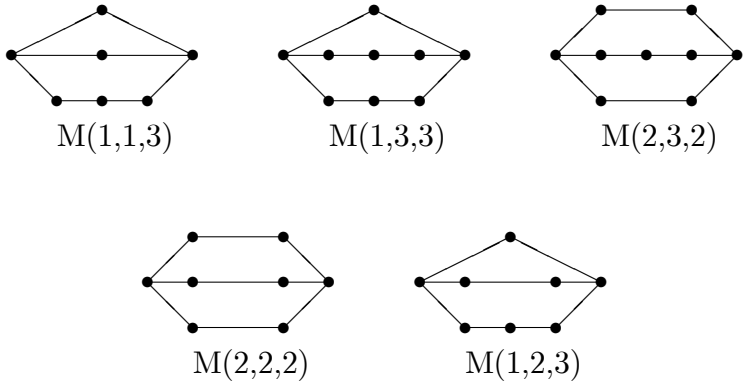


FIG. 3.8 – Les graphes $C_{u,v,k}$ pour $n \equiv 0(\mathrm{mod}\, 3)$

Cas 2. $n \equiv 1(\mathrm{mod}\, 3)$.

1) Si $k \equiv 0(\mathrm{mod}\, 3)$, alors $n(M) = a+b+c+2 = 7$ ou 10 pour tout M. Donc $M \in \{M(1,3,1), M(2,3,3)\}$. Il est facile de vérifier que pour $M(1,3,1)$; $\gamma_R(M(1,3,1)) = 4$ et $p \equiv 0(\mathrm{mod}\, 3)$, et pour $M(2,3,3)$; $\gamma_R(M(2,3,3)) = 6$ et $p \equiv 1,2(\mathrm{mod}\, 3)$. Par la relation 3.3, on trouve

$$\begin{aligned}\gamma_R(C_{u,v,k}) &= \gamma_R(M(1,3,1)) + 2\,(n+k-7)\,/3 \\ &= \gamma_R(M(2,3,3)) + 2\,(n+k-10)\,/3 \\ &= (2n+2k-2)\,/3.\end{aligned}$$

2) Si $k \equiv 1(\mathrm{mod}\, 3)$, alors $n(M) = a+b+c+2 = 5$ ou 8 pour tout M. Donc $M \in \{M(1,1,1), M(2,1,3)\}$. Il est facile de vérifier que $\gamma_R\,(M(1,1,1)) = 3$ et $p \equiv 1(\mathrm{mod}\, 3)$, et $\gamma_R\,(M(2,1,3)) = 5$ et $p \equiv 0,2(\mathrm{mod}\, 3)$. Par la relation 3.3, on trouve

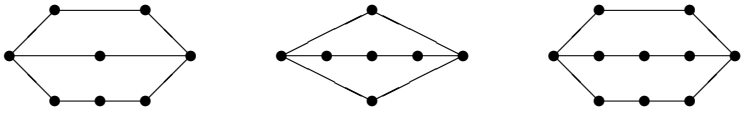
$$\begin{aligned}\gamma_R(C_{u,v,k}) &= \gamma_R(M(1,1,1)) + 2\,(n+k-5)\,/3 \\ &= \gamma_R(M(2,1,3)) + 2\,(n+k-8)\,/3 \\ &= (2n+2k-1)\,/3.\end{aligned}$$

3) Si $k \equiv 2(\mathrm{mod}\, 3)$, alors $n(M) = a+b+c+2 = 6$ ou 9 pour tout M. Donc $M \in \{M(1,2,1), M(2,2,3)\}$. Il est facile de vérifier que $\gamma_R\,(M(1,2,1)) = 4$ et $p \equiv 2(\mathrm{mod}\, 3)$, et $\gamma_R\,(M(2,2,3)) = 5$

et $p \equiv 0, 1(\mathrm{mod}\, 3)$. Par la relation 3.3, on trouve

$$\gamma_R(C_{u,v,k}) = \gamma_R(M(1,2,1)) + 2\,(n+k-6)\,/3, \text{ ou}$$
$$\gamma_R(C_{u,v,k}) = \gamma_R(M(2,2,3)) + 2\,(n+k-9)\,/3.$$

$$\gamma_R(C_{u,v,k}) = \begin{cases} (2n+2k)\,/3 & \text{si} \quad p \equiv 2(\mathrm{mod}\, 3), \\ (2n+2k-3)\,/3 & \text{si} \quad p \equiv 0, 1(\mathrm{mod}\, 3). \end{cases}$$


M(2,1,3) M(1,3,1) M(2,3,3)

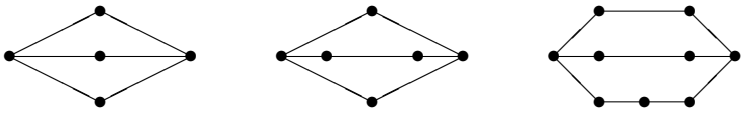

M(1,1,1) M(1,2,1) M(2,2,3)

FIG. 3.9 – Les graphes $C_{u,v,k}$ pour $n \equiv 1(\mathrm{mod}\, 3)$

Cas 3. $n \equiv 2(\mathrm{mod}\, 3)$.

1) Si $k \equiv 0(\mathrm{mod}\, 3)$, alors $n(M) = a+b+c+2 = 8$ ou 11 pour tout M. Donc $M \in \{M(1,3,2), M(3,3,3)\}$.

Il est facile de vérifier que $\gamma_R(M(1,3,2)) = 5$ et $p \equiv 0, 1(\mathrm{mod}\, 3)$, et $\gamma_R(M(3,3,3)) = 7$

et $p \equiv 2(\mathrm{mod}\, 3)$. Par la relation 3.3, on trouve

$$\begin{aligned} \gamma_R(C_{u,v,k}) &= \gamma_R(M(1,3,2)) + 2\,(n+k-8)\,/3 \\ &= \gamma_R(M(3,3,3)) + 2\,(n+k-11)\,/3 \\ &= (2n+2k-1)\,/3. \end{aligned}$$

2) Si $k \equiv 1(\mathrm{mod}\, 3)$, alors $n(M) = a+b+c+2 = 6$ ou 9 pour tout M. Donc $M \in \{M(1,1,2), M(3,1,3)\}$.

Il est facile de vérifier que $\gamma_R\,(M(1,1,2)) = 4$ et $p \equiv 1, 2(\mathrm{mod}\, 3)$, et $\gamma_R\,(M(3,1,3)) = 6$

et $p \equiv 0(\mathrm{mod}\, 3)$. Par la relation 3.3, on trouve

$$\begin{aligned}\gamma_R(C_{u,v,k}) &= \gamma_R(M(1,1,2)) + 2\,(n+k-6)\,/3 \\ &= \gamma_R(M(3,1,3)) + 2\,(n+k-9)\,/3 \\ &= (2n+2k)\,/3.\end{aligned}$$

3) Si $k \equiv 2(\mathrm{mod}\, 3)$, alors $n(M) = a{+}b{+}c{+}2 = 7$ ou 10 pour tout M. Donc $M \in \{M(1,2,2), M(3,2,3)\}$. Il est facile de vérifier que $\gamma_R\,(M(1,2,2)) = 4$ et $p \equiv 0, 2(\mathrm{mod}\, 3)$, et $\gamma_R\,(M(3,2,3)) = 6$

et $p \equiv 1(\mathrm{mod}\, 3)$. Par la relation 3.3, on trouve

$$\begin{aligned}\gamma_R(C_{u,v,k}) &= \gamma_R(M(1,2,2)) + 2\,(n+k-7)\,/3 \\ &= \gamma_R(M(3,2,3)) + 2\,(n+k-10)\,/3 \\ &= (2n+2k-2)\,/3.\end{aligned}$$

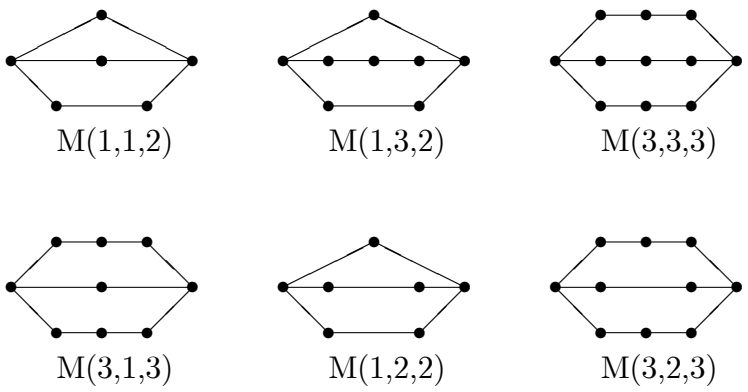


FIG. 3.10 – Les graphes $C_{u,v,k}$ pour $n \equiv 2(\mathrm{mod}\, 3)$

■

3.4 Valeur exacte de $\gamma_R(P_{u,v,k})$

Dans cette section on donne la valeur exacte de $\gamma_R(P_{u,v,k})$, Soit G un graphe obtenu de P_n en ajoutant une chaîne P_k entre deux sommets de P_n. Alors l'ordre de G est $n+k$.

3.4.1 Cas des sommets adjacents

Il est facile de voir que si $uv \in E(P_n)$, alors le graphe $P_{u,v,k}$ n'est que le graphe $G = P_{n+k} + uv$ d'ordre $n+k$, étudié dans la section 1, avec $t = k+2$. Donc d'après le théorème 3.2.1, on a immédiatement le resultat suivant :

Théorème 3.4.1 *Soient u et v deux sommets adjacents d'une chaîne P_n. Alors*

$$\gamma_R(P_{u,v,k}) = \begin{cases} (2n+2k-2)/3 & si\ n \equiv 0 \pmod 3,\ k \equiv 1 \pmod 3\ \ et\ p \equiv 0,1 \pmod 3, \\ (2n+2k-1)/3 & \begin{array}{c} si\ n \equiv 1 \pmod 3\ \ et\ k \equiv 1 \pmod 3,\ ou \\ n \equiv 0 \pmod 3,\ k \equiv 2 \pmod 3\ \ et\ p \equiv 0,1 \pmod 3, \end{array} \\ (2n+2k)/3 & si\ n+k \equiv 0 \pmod 3, \\ (2n+2k+1)/3 & \begin{array}{c} si\ n \equiv 1 \pmod 3\ \ et\ k \equiv 0 \pmod 3,\ ou \\ n \equiv 2 \pmod 3\ \ et\ k \equiv 2 \pmod 3,\ ou \\ n \equiv 0 \pmod 3,\ k \equiv 1 \pmod 3\ \ et\ p \equiv 2 \pmod 3, \end{array} \\ (2n+2k+2)/3 & \begin{array}{c} si\ n \equiv 2 \pmod 3\ \ et\ k \equiv 0 \pmod 3,\ ou \\ n \equiv 0 \pmod 3,\ k \equiv 2 \pmod 3\ \ et\ p \equiv 2 \pmod 3. \end{array} \end{cases}$$

Exemple 3.4.1

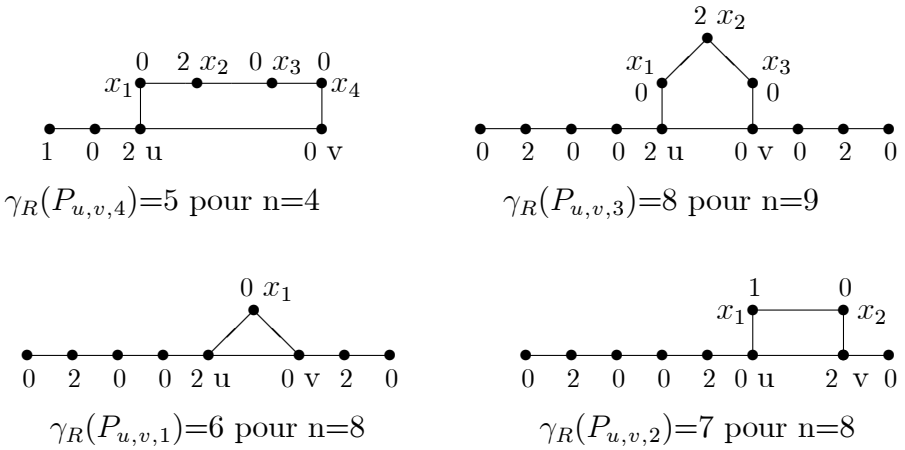


FIG. 3.11 – Les graphes $P_{u,v,1}$, $P_{u,v,2}$, $P_{u,v,3}$, $P_{u,v,4}$ tels que u et v sont adjacents

3.4.2 Cas des sommets non-adjacents

Soit G un graphe obtenu d'une chaîne P_n en ajoutant une chaîne P_k, tel que G est formé par deux chaînes P_p, P_q et un cycle C_{t+k} (où $n = p + q + t$). On décrit d'abord la procédure suivante :

Procedure D : Soient u et v deux sommets non-adjacents d'une chaîne P_n, et soit $k \geq 1$ un entient. Soit T_1 le graphe obtenu à partir de P_n en joignant deux sommets non-adjacent u et v par une chaîne $x_1, ..., x_k$, où $i < j$. Supposons que $k \geq 4$. Alors on forme le graphe T_2 de T_1 en supprimant les sommets x_1, x_2 et x_3 et joignant les deux sommets u et x_4. On répète ce processus jusqu'à obtenir un graphe T_k ayant une chaîne d'ordre 1, 2 ou 3.

Proposition 3.4.1 *Soient u et v deux sommets non-adjacents d'une chaîne P_n. Alors*

$$\gamma_R(T_i) = \gamma_R(T_{i+1}) + 2.$$

Preuve. Même preuve que de la proposition 3.2.2. ■

Corollaire 3.4.1 *Soient u et v deux sommets non-adjacents d'une chaîne P_n, et soit k un entier strictement positif. Alors.*

$$\gamma_R(P_{u,v,k}) = \begin{cases} \gamma_R(P_{u,v,1}) + 2(k-1)/3 & si\ k \equiv 1 \pmod 3, \\ \gamma_R(P_{u,v,2}) + 2(k-2)/3 & si\ k \equiv 2 \pmod 3, \\ \gamma_R(P_{u,v,3}) + 2(k-3)/3 & si\ k \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

Proposition 3.4.2 *Soient u et v deux sommets non-adjacents d'une chaîne P_n. Alors*

$$\gamma_R(P_{u,v,1}) = \begin{cases} 2n/3 & \begin{array}{c} si\ n \equiv 0 \pmod 3,\ t \equiv 0 \pmod 3\ \ et\ p \equiv 1,2 \pmod 3,\ ou \\ n \equiv 0 \pmod 3,\ t \equiv 1 \pmod 3\ \ et\ p \equiv 1 \pmod 3,\ ou \\ n \equiv 0 \pmod 3,\ t \equiv 2 \pmod 3\ \ et\ p \equiv 0,1 \pmod 3, \end{array} \\ (2n+1)/3 & \begin{array}{c} si\ n \equiv 1 \pmod 3\ \ et\ t \equiv 0 \pmod 3,\ ou \\ n \equiv 1 \pmod 3\ \ et\ t \equiv 2 \pmod 3,\ ou \\ n \equiv 1 \pmod 3,\ t \equiv 1 \pmod 3\ \ et\ p \equiv 1,2 \pmod 3, \end{array} \\ (2n+2)/3 & si\ n \equiv 2 \pmod 3, \\ (2n+3)/3 & \begin{array}{c} si\ n \equiv 0 \pmod 3,\ t \equiv 0 \pmod 3\ \ et\ p \equiv 0 \pmod 3,\ ou \\ n \equiv 0 \pmod 3,\ t \equiv 1 \pmod 3\ \ et\ p \equiv 0,2 \pmod 3,\ ou \\ n \equiv 0 \pmod 3,\ t \equiv 2 \pmod 3\ \ et\ p \equiv 2 \pmod 3, \end{array} \\ (2n+4)/3 & si\ n \equiv 1 \pmod 3,\ t \equiv 1 \pmod 3\ \ et\ p \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

Preuve. Soient u et v deux sommets non-adjacents d'une chaine P_n, et soit f une γ_R-fonction de P_n. On distingue trois cas selon n :

Cas 1. $n \equiv 0 \pmod 3$.

Si $t \equiv 0 \pmod 3$ et $p \equiv 0 \pmod 3$, alors $f(u) = f(v) = 0$. D'après le théorème 2.3.4-(B) on a $\gamma_R(P_{u,v,1}) = \gamma_R(P_n) + 1 = (2n+3)/3$.

Si $t \equiv 0 \pmod 3$ et $p \equiv 1,2 \pmod 3$, alors $f(u) = 2$ et $f(v) = 0$, ou $f(v) = 2$ et $f(u) = 0$. D'après le théorème 2.3.4-(A) on a $\gamma_R(P_{u,v,1}) = \gamma_R(P_n) = 2n/3$.

Si $t \equiv 1 \pmod 3$ et $p \equiv 0, 2 \pmod 3$, alors $f(u) = f(v) = 0$. D'après le théorème 2.3.4-(B) on a $\gamma_R(P_{u,v,1}) = \gamma_R(P_n) + 1 = (2n+3)/3$.

Si $t \equiv 1 \pmod 3$ et $p \equiv 1 \pmod 3$, alors $f(u) = f(v) = 2$. D'après le théorème 2.3.4-(A) on a $\gamma_R(P_{u,v,1}) = \gamma_R(P_n) = 2n/3$.

Si $t \equiv 2 \pmod 3$ et $p \equiv 0, 1 \pmod 3$, alors $f(u) = 2$ et $f(v) = 0$, ou $f(v) = 2$ et $f(u) = 0$. D'après le théorème 2.3.4-(A) on a $\gamma_R(P_{u,v,1}) = \gamma_R(P_n) = 2n/3$.

Si $t \equiv 2 \pmod 3$ et $p \equiv 2 \pmod 3$, alors $f(u) = f(v) = 0$. D'après le théorème 2.3.4-(B) on a $\gamma_R(P_{u,v,1}) = \gamma_R(P_n) + 1 = (2n+3)/3$.

Cas 2. $n \equiv 1 \pmod 3$.

Si $t \equiv 0 \pmod 3$ et $p \equiv 0, 1 \pmod 3$, alors il existe une γ_R-fonction f de P_n telle que $f(u) = 2$ et $f(v) = 0, 1$, ou $f(u) = 0, 1$ et $f(v) = 2$. D'après le théorème 2.3.4-(A) on a $\gamma_R(P_{u,v,1}) = \gamma_R(P_n) = (2n+1)/3$.

Si $t \equiv 0 \pmod 3$ et $p \equiv 2 \pmod 3$, alors il existe une γ_R-fonction f de P_n telle que $f(u) = 2$ et $f(v) = 0$, ou $f(v) = 2$ et $f(u) = 0$. D'après le théorème 2.3.4-(A) on a $\gamma_R(P_{u,v,1}) = \gamma_R(P_n) = (2n+1)/3$.

Si $t \equiv 1 \pmod 3$ et $p \equiv 0 \pmod 3$, alors $f(u) = f(v) = 0$, ou $f(u) = 1$ et $f(v) = 0$, ou $f(u) = 0$ et $f(v) = 1$. D'après le théorème 2.3.4-(B) on a $\gamma_R(P_{u,v,1}) = \gamma_R(P_n) + 1 = (2n+4)/3$.

Si $t \equiv 1 \pmod 3$ et $p \equiv 1, 2 \pmod 3$, alors il existe une γ_R-fonction f de P_n telle que $f(u) = f(v) = 2$, ou $f(u) = 2$ et $f(v) = 0$, ou $f(u) = 0$ et $f(v) = 2$. D'après le théorème 2.3.4-(A) on a $\gamma_R(P_{u,v,1}) = \gamma_R(P_n) = (2n+1)/3$.

Si $t \equiv 2 \pmod 3$ et $p \equiv 0, 2 \pmod 3$, alors il existe une γ_R-fonction f de P_n telle que $f(u) = 2$ et $f(v) = 0$, ou $f(u) = 0$ et $f(v) = 2$. D'après le théorème 2.3.4-(A) on a $\gamma_R(P_{u,v,1}) = \gamma_R(P_n) = (2n+1)/3$.

Si $t \equiv 2 \pmod 3$ et $p \equiv 1 \pmod 3$, alors $f(u) = f(v) = 2$, ou $f(u) = 2$ et $f(v) = 0$, ou $f(u) = 0$ et $f(v) = 2$. D'après le théorème 2.3.4-(A) on a $\gamma_R(P_{u,v,1}) = \gamma_R(P_n) = (2n+1)/3$.

Cas 3. $n \equiv 2 \pmod 3$. Dans ce cas, il facile de voir qu'il existe une γ_R-fonction f de P_n telle que $f(u) = 2$ ou $f(v) = 2$. D'après le théorème 2.3.4-(A), on a $\gamma_R(P_{u,v,1}) = \gamma_R(P_n) = (2n+2)/3$. ■

Proposition 3.4.3 *Soient u et v deux sommets non-adjacents d'une chaîne P_n. Alors*

$$\gamma_R(P_{u,v,2}) = \begin{cases} 2n/3 & si\ n \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,3)\,,\ t \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,3)\ \ et\ p \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,3)\,, \\ (2n+1)/3 & si\ n \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,3)\,,\ t \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,3)\ \ et\ p \equiv 1,2\,(\mathrm{mod}\,3)\,,\ ou \\ & n \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,3)\,,\ t \equiv 2\,(\mathrm{mod}\,3)\ \ et\ p \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,3)\,, \\ & si\ n \equiv 2\,(\mathrm{mod}\,3)\ \ et\ t \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,3)\,,\ ou \\ (2n+2)/3 & n \equiv 2\,(\mathrm{mod}\,3)\,,\ t \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,3)\ \ et\ p \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,3)\,,\ ou \\ & n \equiv 2\,(\mathrm{mod}\,3)\,,\ t \equiv 2\,(\mathrm{mod}\,3)\ \ et\ p \equiv 1,2\,(\mathrm{mod}\,3)\,, \\ & si\ n \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,3)\,,\ t \equiv 2\,(\mathrm{mod}\,3)\,,\ ou \\ (2n+3)/3 & n \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,3)\,,\ t \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,3)\ \ et\ p \equiv 1,2\,(\mathrm{mod}\,3)\,,\ ou \\ & n \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,3)\,,\ t \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,3)\ \ et\ p \equiv 0,2\,(\mathrm{mod}\,3)\,, \\ & si\ n \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,3)\ \ et\ t \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,3)\,,\ ou \\ (2n+4)/3 & n \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,3)\,,\ t \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,3)\ \ et\ p \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,3)\,,\ ou \\ & n \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,3)\,,\ t \equiv 2\,(\mathrm{mod}\,3)\ \ et\ p \equiv 0,2\,(\mathrm{mod}\,3)\,, \\ (2n+5)/3 & si\ n \equiv 2\,(\mathrm{mod}\,3)\,,\ t \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,3)\ \ et\ p \equiv 0,2\,(\mathrm{mod}\,3)\,,\ ou \\ & n \equiv 2\,(\mathrm{mod}\,3)\,,\ t \equiv 2\,(\mathrm{mod}\,3)\ \ et\ p \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,3)\,, \\ (2n+6)/3 & si\ n \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,3)\,,\ t \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,3)\ \ et\ p \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,3)\,. \end{cases}$$

Preuve. Soient u et v deux sommets non-adjacents d'une chaine P_n, et soit f une γ_R-fonction de P_n. On distingue trois cas selon n :

Cas 1. $n \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,3)$.

Si $t \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,3)$ et $p \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,3)$, alors $f(u) = f(v) = 0$. D'après le théorème 2.3.5-(C) on a $\gamma_R(P_{u,v,2}) = \gamma_R(P_n) + 2 = (2n+6)/3 + 2$.

Si $t \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,3)$ et $p \equiv 1,2\,(\mathrm{mod}\,3)$, alors $f(u) = 2$ et $f(v) = 0$, ou $f(u) = 0$ et $f(v) = 2$. D'après le théorème 2.3.5-(B)-(ii) on a $\gamma_R(P_{u,v,2}) = \gamma_R(P_n) + 1 = (2n+3)/3$.

Si $t \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,3)$ et $p \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,3)$, alors $f(u) = f(v) = 2$. D'après le théorème 2.3.5-(A) on a $\gamma_R(P_{u,v,2}) = \gamma_R(P_n) = 2n/3$.

Si $t \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,3)$ et $p \equiv 0,2\,(\mathrm{mod}\,3)$, alors $f(u) = f(v) = 0$. D'après le théorème 2.3.5-(A) on a

$\gamma_R(P_{u,v,2}) \geq \gamma_R(P_n)+1$. Soit $P_n = y_1, y_2, ..., y_p, w_1, w_2, ..., w_t, z_1, z_2, ..., z_q$, tels que $u = y_1$ et $v = y_t$. La fonction g définie par $g(u) = g(v) = 2$, $g(w_2) = g(x_1) = g(x_2) = g(z_1) = 0$, $g(z_2) = 1$ et $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in V(P_n) - \{u, w_2, v, z_1, z_2\}$, est une FDR sur $P_{u,v,2}$ de poids $\gamma_R(P_n)+1$. Par consequent $\gamma_R(P_{u,v,2}) = \gamma_R(P_n)+1 = (2n+3)/3$.

Si $t \equiv 2 \pmod 3$ et $p \equiv 0, 1 \pmod 3$, alors $f(u) = 2$ et $f(v) = 0$, ou $f(u) = 0$ et $f(v) = 2$. D'après le théorème 2.3.5-(B)-(ii) on a $\gamma_R(P_{u,v,2}) = \gamma_R(P_n)+1 = (2n+3)/3$.

Si $t \equiv 2 \pmod 3$ et $p \equiv 2 \pmod 3$, alors $f(u) = f(v) = 0$. D'après le théorème 2.3.5-(A), on a $\gamma_R(P_{u,v,2}) \geq \gamma_R(P_n)+1$. Soit $P_n = y_1, y_2, ..., y_p, w_1, w_2, ..., w_t, z_1, z_2, ..., z_q$, tels que $u = y_1$ et $v = y_t$. La fonction g définie par $g(u) = g(v) = 2$, $g(y_p) = g(x_1) = g(x_2) = g(z_1) = 0$, $g(y_{p-1}) = g(w_3) = g(z_2) = 1$ et $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in V(P_n) - \{y_{p-1}, y_p, u, w_3, v, z_1, z_2\}$, est une FDR sur $P_{u,v,2}$ de poids $\gamma_R(P_n)+1$. Par consequent $\gamma_R(P_{u,v,2}) = \gamma_R(P_n)+1 = (2n+3)/3$.

Cas 2. $n \equiv 1 \pmod 3$.

Si $t \equiv 0 \pmod 3$ et $p \equiv 0, 1 \pmod 3$, alors il existe une γ_R-fonction f de P_n telle que $f(u) = 2$ et $f(v) = 1$, ou $f(u) = 1$ et $f(v) = 2$, ou $f(u) = 2$ et $f(v) = 0$, ou $f(u) = 0$ et $f(v) = 2$. D'après le théorème 2.3.5-(B)-(ii) on a $\gamma_R(P_{u,v,2}) = \gamma_R(P_n)+1 = (2n+4)/3$.

Si $t \equiv 0 \pmod 3$ et $p \equiv 2 \pmod 3$, alors il existe une γ_R-fonction f de P_n telle que $f(u) = 2$ et $f(v) = 0$, ou $f(u) = 0$ et $f(v) = 2$. D'après le théorème 2.3.5-(B)-(ii) on a $\gamma_R(P_{u,v,2}) = \gamma_R(P_n)+1 = (2n+4)/3$.

Si $t \equiv 1 \pmod 3$ et $p \equiv 0 \pmod 3$,alors il existe une γ_R-fonction f de P_n telle que $f(u) = 1$ et $f(v) = 0$, ou $f(u) = 0$ et $f(v) = 1$, alors d'après le théorème 2.3.5-(B)-(i) on a $\gamma_R(P_{u,v,2}) = \gamma_R(P_n)+1 = (2n+4)/3$.

Si $t \equiv 1 \pmod 3$ et $p \equiv 1, 2 \pmod 3$, alors il existe une γ_R-fonction f de P_n telle que $f(u) = f(v) = 2$. D'après le théorème 2.3.5-(A) on a $\gamma_R(P_{u,v,2}) = \gamma_R(P_n) = (2n+1)/3$.

Si $t \equiv 2 \pmod 3$ et $p \equiv 0, 2 \pmod 3$, alors il existe une γ_R-fonction f de P_n telle que $f(u) = 2$ et $f(v) = 0$, ou $f(u) = 0$ et $f(v) = 2$. D'après le théorème 2.3.5-(B)-(ii) on a $\gamma_R(P_{u,v,2}) = \gamma_R(P_n)+1 = (2n+4)/3$.

Si $t \equiv 2 \pmod 3$ et $p \equiv 1 \pmod 3$, alors il existe une γ_R-fonction f de P_n telle que $f(u) = f(v) = 2$,

D'après le théorème 2.3.5-(A) on a $\gamma_R(P_{u,v,2}) = \gamma_R(P_n) = (2n+1)/3$.

Cas 3. $n \equiv 2 \pmod 3$. Dans ce cas, il facile de voir qu'il existe une γ_R-fonction f de P_n telle que $f(u) = 2$.

Si $t \equiv 0 \pmod 3$ et $p \equiv 0, 2 \pmod 3$, alors $f(v) = 0$ ou 1, alors d'après le théorème 2.3.5-(B)-(ii) on a $\gamma_R(P_{u,v,2}) = \gamma_R(P_n) + 1 = (2n+5)/3$.

Si $t \equiv 0 \pmod 3$ et $p \equiv 1 \pmod 3$, alors il existe une γ_R-fonction f de P_n telle que $f(v) = 2$. D'après le théorème 2.3.5-(A) on a $\gamma_R(P_{u,v,2}) = \gamma_R(P_n) = (2n+2)/3$.

Si $t \equiv 1 \pmod 3$, alors il existe une γ_R-fonction f de P_n telle que $f(v) = 2$. D'après le théorème 2.3.5-(A) on a $\gamma_R(P_{u,v,2}) = \gamma_R(P_n) = (2n+2)/3$.

Si $t \equiv 2 \pmod 3$ et $p \equiv 0 \pmod 3$, alors $f(v) = 0$. D'après le théorème 2.3.5-(B)-(ii) on a $\gamma_R(P_{u,v,2}) = \gamma_R(P_n) + 1 = (2n+5)/3$.

Si $t \equiv 2 \pmod 3$ et $p \equiv 1, 2 \pmod 3$, alors il existe une γ_R-fonction f de P_n telle que $f(v) = 2$. D'après le théorème 2.3.5-(A) on a $\gamma_R(P_{u,v,2}) = \gamma_R(P_n) = (2n+2)/3$. ■

Proposition 3.4.4 *Soient u et v deux sommets non-adjacents d'une chaîne P_n. Alors*

$$\gamma_R(P_{u,v,3}) = \begin{cases} (2n+3)/3 & \text{si } n \equiv 0 \pmod 3,\ t \equiv 1 \pmod 3 \text{ et } p \equiv 1 \pmod 3, \\ & \text{si } n \equiv 1 \pmod 3,\ t \equiv 0 \pmod 3 \text{ et } p \equiv 0,1 \pmod 3, \text{ ou} \\ (2n+4)/3 & n \equiv 1 \pmod 3,\ t \equiv 1 \pmod 3 \text{ et } p \equiv 1,2 \pmod 3, \text{ ou} \\ & n \equiv 1 \pmod 3,\ t \equiv 2 \pmod 3 \text{ et } p \equiv 1 \pmod 3, \\ & \text{si } n \equiv 2 \pmod 3,\ t \equiv 2 \pmod 3 \text{ et } p \equiv 1,2 \pmod 3, \text{ ou} \\ (2n+5)/3 & n \equiv 2 \pmod 3 \text{ et } t \equiv 0 \pmod 3, \text{ ou} \\ & n \equiv 2 \pmod 3 \text{ et } t \equiv 1 \pmod 3, \\ & \text{si } n \equiv 0 \pmod 3,\ t \equiv 1 \pmod 3 \text{ et } p \equiv 0,2 \pmod 3, \text{ ou} \\ (2n+6)/3 & n \equiv 0 \pmod 3 \text{ et } t \equiv 0 \pmod 3, \text{ ou} \\ & n \equiv 0 \pmod 3 \text{ et } t \equiv 2 \pmod 3, \\ & \text{si } n \equiv 1 \pmod 3,\ t \equiv 0 \pmod 3 \text{ et } p \equiv 2 \pmod 3, \text{ ou} \\ (2n+7)/3 & n \equiv 1 \pmod 3,\ t \equiv 1 \pmod 3 \text{ et } p \equiv 0 \pmod 3, \text{ ou} \\ & n \equiv 1 \pmod 3,\ t \equiv 2 \pmod 3 \text{ et } p \equiv 0,2 \pmod 3, \\ (2n+8)/3 & \text{si } n \equiv 2 \pmod 3,\ t \equiv 2 \pmod 3 \text{ et } p \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

Preuve. Soient u et v deux sommets non-adjacents d'une chaine P_n, et soit f une γ_R-fonction de P_n. On distingue trois cas selon n :

Cas 1. $n \equiv 0 \pmod 3$.

Si $t \equiv 0 \pmod 3$ et $p \equiv 0 \pmod 3$, alors $f(u) = f(v) = 0$. D'après le théorème 2.3.6-(B) on a $\gamma_R(P_{u,v,3}) = \gamma_R(P_n) + 2 = (2n+6)/3$.

Si $t \equiv 0 \pmod 3$ et $p \equiv 1,2 \pmod 3$, alors $f(u) = 2$ et $f(v) = 0$, ou $f(u) = 0$ et $f(v) = 2$. D'après le théorème 2.3.6-(B) on a $\gamma_R(P_{u,v,3}) = \gamma_R(P_n) + 2 = (2n+6)/3$.

Si $t \equiv 1 \pmod 3$ et $p \equiv 0,2 \pmod 3$, alors $f(u) = f(v) = 0$. D'après le théorème 2.3.6-(B) on a $\gamma_R(P_{u,v,3}) = \gamma_R(P_n) + 2 = (2n+6)/3$.

Si $t \equiv 1 \pmod 3$ et $p \equiv 1 \pmod 3$, alors $f(u) = f(v) = 2$. D'après le théorème 2.3.6-(A) on a $\gamma_R(P_{u,v,3}) = \gamma_R(P_n) + 1 = (2n+3)/3$.

Si $t \equiv 2 \pmod 3$ et $p \equiv 0, 1 \pmod 3$, alors $f(u) = 2$ et $f(v) = 0$, ou $f(u) = 0$ et $f(v) = 2$. D'après le théorème 2.3.6-(B) on a $\gamma_R(P_{u,v,3}) = \gamma_R(P_n) + 2 = (2n + 6)/3$.

Si $t \equiv 2 \pmod 3$ et $p \equiv 2 \pmod 3$, alors $f(u) = f(v) = 0$. D'après le théorème 2.3.6-(B) on a $\gamma_R(P_{u,v,3}) = \gamma_R(P_n) + 2 = (2n + 6)/3$.

Cas 2. $n \equiv 1 \pmod 3$.

Si $t \equiv 0 \pmod 3$ et $p \equiv 0, 1 \pmod 3$, alors il existe une γ_R-fonction f de P_n telle que $f(u) = 2$ et $f(v) = 1$, ou $f(u) = 1$ et $f(v) = 2$. D'après le théorème 2.3.6-(A) on a $\gamma_R(P_{u,v,3}) = \gamma_R(P_n)+1 = (2n + 4)/3$.

Si $t \equiv 0 \pmod 3$ et $p \equiv 2 \pmod 3$, alors il existe une γ_R-fonction f de P_n telle que $f(u) = 2$ et $f(v) = 0$, ou $f(u) = 0$ et $f(v) = 2$. D'après le théorème 2.3.6-(B) on a $\gamma_R(P_{u,v,3}) = \gamma_R(P_n) + 2 = (2n + 7)/3$.

Si $t \equiv 1 \pmod 3$ et $p \equiv 0 \pmod 3$, alors $f(u) = f(v) = 0$, ou $f(u) = 0$ et $f(v) = 1$, ou $f(u) = 1$ et $f(v) = 0$. D'après le théorème 2.3.6-(B) on a $\gamma_R(P_{u,v,3}) = \gamma_R(P_n) + 2 = (2n + 7)/3$.

Si $t \equiv 1 \pmod 3$ et $p \equiv 1, 2 \pmod 3$, alors il existe une γ_R-fonction f de P_n telle que $f(u) = f(v) = 2$. D'après le théorème 2.3.6-(A) on a $\gamma_R(P_{u,v,3}) = \gamma_R(P_n) + 1 = (2n + 4)/3$.

Si $t \equiv 2 \pmod 3$ et $p \equiv 0, 2 \pmod 3$, alors $f(u) = f(v) = 0$, ou $f(u) = 1$ et $f(v) = 0$, ou $f(u) = 0$ et $f(v) = 1$, ou $f(u) = 2$ et $f(v) = 0$, ou $f(u) = 0$ et $f(v) = 2$. D'après le théorème 2.3.6-(B) on a $\gamma_R(P_{u,v,3}) = \gamma_R(P_n) + 2 = (2n + 7)/3$.

Si $t \equiv 2 \pmod 3$ et $p \equiv 1 \pmod 3$, alors il existe une γ_R-fonction f de P_n telle que $f(u) = f(v) = 2$. D'après le théorème 2.3.6-(A) on a $\gamma_R(P_{u,v,3}) = \gamma_R(P_n) + 1 = (2n + 4)/3$.

Cas 3. $n \equiv 2 \pmod 3$. Dans ce cas, il facile de voir qu'il existe une γ_R-fonction f de P_n telle que $f(u) = 2$.

Si $t \equiv 0 \pmod 3$ et $p \equiv 0, 2 \pmod 3$, alors il existe une γ_R-fonction f de P_n telle que $f(v) = 1$. D'après le théorème 2.3.6-(A) on a $\gamma_R(P_{u,v,3}) = \gamma_R(P_n) + 1 = (2n + 5)/3$.

Si $t \equiv 0 \pmod 3$ et $p \equiv 1 \pmod 3$, alors il existe une γ_R-fonction f de P_n telle que $f(v) = 1$ ou 2. D'après le théorème 2.3.6-(A) on a $\gamma_R(P_{u,v,3}) = \gamma_R(P_n) + 1 = (2n + 5)/3$.

Si $t \equiv 1 \pmod 3$, alors il existe une γ_R-fonction f de P_n telle que $f(v) = 2$. D'après le théorème

2.3.6-(A) on a $\gamma_R(P_{u,v,3}) = \gamma_R(P_n) + 1 = (2n+5)/3$.

Si $t \equiv 2 \pmod 3$ et $p \equiv 0 \pmod 3$, alors $f(v) = 0$. D'après le théorème 2.3.6-(B) on a $\gamma_R(P_{u,v,3}) = \gamma_R(P_n) + 2 = (2n+8)/3$.

Si $t \equiv 2 \pmod 3$ et $p \equiv 1, 2 \pmod 3$, alors il existe une γ_R-fonction f de P_n telle que $f(v) = 2$. D'après le théorème 2.3.6-(A) on a $\gamma_R(P_{u,v,3}) = \gamma_R(P_n) + 1 = (2n+5)/3$. ■

D'après le corollaire 3.4.1 et les propositions 3.4.2 3.4.3 3.4.4 ,on a immédiatement le resultat suivant :

Théorème 3.4.2 *Soient u et v deux sommets non-adjacents d'une chaîne P_n. Alors*

$$\gamma_R(P_{u,v,k}) = \begin{cases} (2n+2k-4)/3 & si\ (n,k,t,p) \equiv (0,2,1,1)\,(\mathrm{mod}\,3)\,, \\ (2n+2k-3)/3 & si\ (n,k,t,p) \equiv (a,b,c,d)\,(\mathrm{mod}\,3)\,,\ avec\ (a,b,c,d) \in \\ & \{(1,2,1,1)\,,(1,2,1,2)\,,(1,2,2,1)\,,(0,0,1,1)\}\,, \\ (2n+2k-2)/3 & si\ (n,k,t,p) \equiv (a,b,c,d)\,(\mathrm{mod}\,3)\,,\ avec\ (a,b,c,d) \in \\ & \{(1,0,0,0)\,,(1,0,0,1)\,,(1,0,1,1)\,,(1,0,1,2)\,, \\ & (1,0,2,1)\,,(0,1,0,1)\,,(0,1,0,2)\,(0,1,1,1)\,, \\ & (0,1,2,0)\,,(0,1,2,1)\,,(2,2,1,0)\,,(2,2,1,1)\,, \\ & (2,2,1,2)\,,(2,2,0,1)\,,(2,2,2,1)\,,(2,2,2,2)\}, \\ (2n+2k-1)/3 & si\ (n,k,t,p) \equiv (a,b,c,d)\,(\mathrm{mod}\,3)\,,\ avec\ (a,b,c,d) \in \\ & \{(2,0,2,1)\,,(2,0,2,2)\,,(1,1,1,1)\,,(1,1,1,2)\,, \\ & (0,2,0,1)\,,(0,2,0,2)\,,(0,2,1,0)\,,(0,2,1,2)\},\ ou \\ & (n,k,t) \equiv (a,b,c)\,(\mathrm{mod}\,3)\,,\ avec\ (a,b,c) \in \\ & \{(2,0,0)\,,(2,0,1)\,,(1,1,0)\,,(1,1,2)\,,(0,2,2)\}, \\ (2n+2k)/3 & si\ (n,k,t,p) \equiv (a,b,c,d)\,(\mathrm{mod}\,3)\,,\ avec\ (a,b,c,d) \in \\ & \{(0,0,1,0),(0,0,1,2),(1,2,1,0),(1,2,2,0), \\ & (1,2,2,2)\},\ ou\ (n,k,t) \equiv (a,b,c)\,(\mathrm{mod}\,3)\,, \\ & avec\ (a,b,c) \in \{(0,0,0),(0,0,2),(1,2,0)\},\ ou \\ & (n,k) \equiv (2,1)\,(\mathrm{mod}\,3)\,, \\ (2n+2k+1)/3 & si\ (n,k,t,p) \equiv (a,b,c,d)\,(\mathrm{mod}\,3)\,,\ avec\ (a,b,c,d) \in \\ & \{(1,0,0,2)\,,(1,0,1,0)\,,(1,0,2,0)\,,(1,0,2,2)\,, \\ & (0,1,0,0)\,,(0,1,1,0)\,,(0,1,1,2)\,(0,1,2,2)\,, \\ & (2,2,0,0)\,,(2,2,0,2),(2,2,2,0)\}, \\ (2n+2k+2)/3 & si\ (n,k,t,p) \equiv (a,b,c,d)\,(\mathrm{mod}\,3)\,,\ avec\ (a,b,c,d) \in \\ & \{(2,0,2,0)\,,(1,1,1,0)\,,(0,2,0,0)\}. \end{cases}$$

Exemple 3.4.2

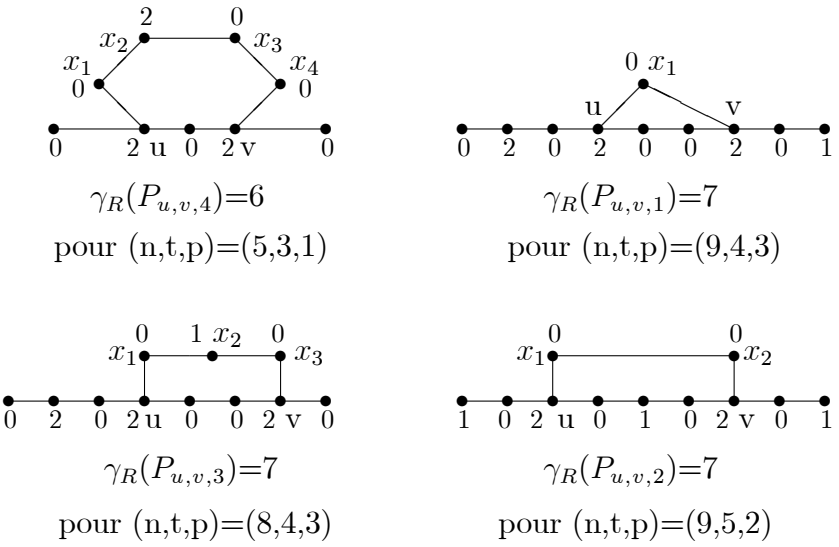


FIG. 3.12 – Les graphes $P_{u,v,1}$, $P_{u,v,2}$, $P_{u,v,3}$, $P_{u,v,4}$ tels que u et v sont non-adjacents.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'étude de l'effet de l'ajout d'une arête ou d'une chaîne à une chaîne et un cycle sur le nombre de domination romaine d'un graphe. Plus précisément, nous nous sommes focalisés sur les valeurs exactes de $\gamma_R(G+e)$ et $\gamma_R(G_{u,v,k})$, tel que $G \in \{P_n, C_n\}$.

Dans un premier lieu, nous avons calculé les valeurs exactes de $\gamma_R(C_n+e)$ et $\gamma_R(P_n+e)$, ensuite nous avons calculé les valeurs exactes de $\gamma_R(G_{u,v,k})$ tels que les sommet u et v sont adjacents, et enfin nous avons donné nous les valeurs exactes de $\gamma_R(G_{u,v,k})$ tels que les sommet u et v sont non-adjacents, avec $G \in \{P_n, C_n\}$.

Les travaux réalisés durant ce mémoire ouvrent plusieurs perspectives de travaux futurs. Nous proposons d'étuder :

• l'effet de l'ajout d'une chaine sur le nombre de domination romaine des graphes d'un graphe complet K_n et d'un graphe biparti complet $K_{p,q}$.

• l'effet de l'ajout d'une chaine sur le nombre de domination romaine d'une grille $G_{p\times q}$.

Bibliographie

[1] M. Atapour, S.M. Sheikholeslami and A. Khodkar, *Roman domination subdivision number of graphs*. Aequationes Math. 78 (2009) 237–245.

[2] A. A. Bertossi, *Dominating set for split and bipartite graphs*, Inform. Process. Lett., 19 (1984)37-40.

[3] K.S. Booth et J.H. Johnon, *Dominating sets in chordal graphs*. SIAM J. Comput. 11(1982) 191-199.

[4] A. Bouchou and M. Blidia,*Criticality indices of Roman domination of paths and cycles*,Australasian Journal of Combinatorics 56 (2013), 103–112.

[5] E. W. Chambers, B. Kinnersley, N. Prince and D. B. West, *Extremal problems for Roman domination*, SIAM J. Discreter. Math. 23 (2009) 1575-1586.

[6] G. J. Chang and G. L. Nemhauser, *the k-domination and k-stability problems in sun-free chordal graphs*, SIAM J. Algebraic Discrete Methods, 5 (1984) 332-345.

[7] E. J. Cockayne, P. A. Dreyer Jr., S. M. Hedetniemi, and S. T. Hedetniemi, *Roman domination in graphs,* Discrete Mathematics 278 (2004) 11-22.

[8] E. Cockayne, S. Goodman and S. Hedetniemi. *A linear algorithm for the domination number of a tree*. Inform. Process. Lett., 4 (2) (1975) 41-4.

[9] E. J.Cockayne and S. T.Hedetniemi, *Towards a theory of domation in graphs*, Networks 7 (1977) 247-261.

[10] E. J.Cockayne, S. T.Hedetniemi and D.J.Miller, *Properties of hereditary hypergraphs and middle graphs*, Canad Math . Bull. 21 (1978) 461-468.

[11] D. E. Daykin and C. P. Ng, *Algorithms for generalized stanility number of tree graphs*, J. Austral. Math. Soc., 6 (1994) 89-100.

[12] A. K. Dewdney, *Fast turning reductions between problems in NP ; chapter 4 ; reductions between NP-compet problems. Technical report 71*, Dep. Computer Science, Univ. Western Ontario, 1981.

[13] P. A Dreyer, *Applications and Variations of Domination in Graphs*, Thesis, New Jersey (2000).

[14] J. Edmonds, *Paths trees and flowers*, Canad. J. Math. 17 (1965) 449-467.

[15] G. H. Fricke, S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, A. A. McRae, C.K. Wallis, M. S. Jacobson, H. W. Martin and W. D. Weakley, *Combinatorial problems on chessboards*, A briev survey, dans Graph Theory, Combinatorics and Applications : Proc. Seventh Quad. Internat. Conf. on the Theory and Applications of Graphs, vol. 1, Y. Alavi and A. Schwenk, Eds., Wiley, (1995) 507-528.

[16] M.R. Garey and D.S. Johnson. *Computers and Intractability* : A Guide to the Theory of NP-Completeness. W. H. Freeman, 1979.

[17] F. Gvaril, *Algorithms for minimum colorings, maximum clique, minimum covrings by cliques, and maximum independent set of a chordal graph*, SIAM J. Compu. 1 (1972) 180-187.

[18] A. Hansberg, N. Jafari Rad, and L. Volkmann, *Vertex and edge critical Roman domination in graphs*, Utilitas Math., to appear.

[19] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and P. J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, New York, 1998.

[20] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater, *Domination in Graphs : Advanced Topics*, Marcel Dekker, New York, 1998.

[21] T.W. Haynes, C.M. Mynhardt, and L.C. van der Merwe, *Criticality index of total domination,* Congr. Numer. **131** (1998) 67–73.

[22] S.T. Hedetniemi and R.C. Laskar, *Introduction*, Discrete Mathematics 86 (1990) 3-9.

[23] C.F. de Jaenisch, *Applications de l'analyse mathématique au jeu des echecs*, Petrograde (1862).

[24] N. Jafari Rad and L. Volkmann, *Changing and unchanging the Roman domination number of a graph*, Submitted for publication.

[25] R. Laskar and K. Peters, *Domination and irredundance in graphs*. Technical Report 434, Dep. Mathematical Sciences, Clemson univ, (1983).

[26] 62. R. Laskar, J. Pfaff, S.M. Hedetniemi and S.T. Hedetniemi, *On the algorithmic complexity of total domination*. SIAM J. Alg. Disc. Meth. Vol. 5, N^o 3, september 1984.

[27] A. A. McRae, *Private communication*, March 2000.

[28] H. Meraimi, *Etude des graphes critiques et stables pour quelques paramètres de domination*, Thèse de Doctorat 3ème Cycle LMD en Mathématiques (2022).

[29] O. Ore, *theory of graphs*, Amer. Math soc. Colloq. Publ. 38 (1962).

[30] V. Samodivkin, *Changing and unchanging of the domination number of a graph : Path addition numbers*. Discussiones Mathematicae Graph Theory. 41 (2021) 365–379.

[31] I. Steward, *Defend the Roman Empire !*, Sci. Amer. 281 (1999) 136-139.

[32] D.P. Sumner and P. Blitch, *Domination Critical Graphs*, J. Combin. Theory Ser. B, 34 (1983) 65–76.