Ministére de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Dr. Yahyia Farés de Médéa
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et de l'Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER. Spécialité : Analyse Mathématiques et Applications

par

BOUKHORS MALIKA

Théorème du point fixe et systèmes différentiels périodiques - Existence des solutions périodiques

---

Soutenu publiquement le 07-07-2019 devant le jury composé de

Président du jry	*Mr. Y. HAMZA*	*M.A.A U.Y.F.M*
Examinateur	*Mr. S. RAFA*	*M.A.A U.Y.F.M*
Examinateur	*Mr. H.AYADI*	*M.A.A U.Y.F.M*
Promoteur	*Mr. W. OUKIL*	*M.C.B U.Y.F.M*

ANNEE UNIVERSITAIRE : 2018-2019

REMERCIEMENT

Louange à
Allah le miséricordieux
sans Lui rien de tout cela n'aurait
pu être. Nous remercions Allah qui nous
a orienté au chemin du savoir et les portes de la
science. Mon encadreur ***OUKIL Walid****, en premier lieu pour*
ses encouragements et la confiance qu'il m'a accorder et accepter de
m'encadrer, ainsi pour ses conseils précieux qui m'ont été d'une très
grande utilité et son suivi pour terminer ce travail, je tiens à
remercier également les membres du jury et les plus sincères
remerciements sont adressés à tout les enseignants de
l'Université ***YAHIA Fares de Médéa****. Enfin, merci*
à toute personne ayant contribué de prés
au de loin à la réalisation
de ce mémoire.

Merci à tous...

DEDICACES

Je remercie Allah.

pour m'avoir donné la force d'accomplir ce travail pour aller plus loin.

Je dédie ce travail.

à mes ***parents****, ma* ***Mère*** *pour ses encouragements et ses prières tout au.*

long de mes études.

Mon ***Père*** *pour tous ce qu'il avait pour avoir ce résultat. Je le dédie à.*

Mes ***frères*** *et ma* ***sœur****.*

Et je les remercie pour leurs encouragements et leurs aides ainsi que.

Toute ma ***famille.***

Et ***Mon Marié****. Et ma* ***Grand-Mère*** *que j'aime. A tout* ***Mes amies*** *.*

Avec Lesquelles j'ai.

Partagé mes moments de joie et de bonheur qui ma accompagné.

MALIKA

Titre : Théorème du point fixe et systèmes différentiels périodiques-Existence des solutions périodiques

Titre : **Théorème du point fixe et systèmes différentiels périodiques-Existence des solutions périodiques**

Résumé : **Ce mémoire est une présentation d'une méthode qui permet de démontrer l'existence de solutions périodiques pour des systèmes non-linéaires périodiques. Le théorème principal utilisé et le théorème de Brouwer.**
On supposera que le système admet un ensemble de conditions initiales compact et invariant par le flot.Cela permet l'application directe du théorème du point fixe. Une partie sera consacré à donner des exemples explicites d'utilisation de cette méttode.

Mots clés :**Systèmes périodiques, théorème de Brouwer, équations différentielles, ensemble compact invariant par le flot.**

Faculté des Sciences. Département de Mathématiques et Informatique.
Université Dr. Yahia Farès Médéa - Pôle urbain – 26000. Médéa. Algérie.

Table des matières

Résumé **4**

1 Introduction **7**

2 Problème de Cauchy-Lipschitz **8**

2.1 Généralités 9

2.1.1 Définitions 9

2.1.2 Théorème du point fixe 10

2.2 Quelques rappels sur équation différentielles 13

2.3 Théorème [de Cauchy -Lipschitz] 13

2.4 Existence locale et L'unicité 13

2.5 Solution Maximale 14

2.6 Dependence par rapport aux Conditions initiales 15

3 Systèmes périodiques **18**

3.1 Notions préliminairees 18

3.1.1 Opérateurs Compacts 18

3.1.2 Opérateurs non linéaires 19

3.1.3 Sous espace vectoriel topologique localement convexe 20

3.2 Flot d'une equation différentielle 20

3.2.1 propriétés 20

3.3 Équation différentielle périodique 21

3.3.1 Solution périodiques 22
3.3.2 Propriétés des équations différentielles périodiques 22
3.4 Théorème Principal 23

4 Exemple d'application **26**

Conclusion générale **29**

Bibliographie **30**

Chapitre 1

Introduction

On va s'intéresser dans ce qui suit à des "équations différentielles périodiques par rapport au temps" connues aussi sous la terminologie "équations différentielles à coefficients périodiques". Bien que le champ de vecteur de l'équation n'est pas périodique par rapport aux autres variables (il est périodique par rapport au temps) on montre que dans le cas où il existe un ensemble, de conditions initiales, compact et convexe invariant par le flot alors il existe au moins une solution périodique de l'équation différentielle. La preuve de résultat ou le point clef est le Théorème du point fixe de Brouwer. Dans le premier Chapitre on introduit des définitions fondamentales d'analyse et on rappelle le théorème d'existence et d'unicité de solution au problème de Cauchy. Dans le deuxième Chapitre on définit les équations différentielles périodiques en question. On donne quelques propriétés de ces équations et on montre en fin du Chapitre le résultat principal. Dans le dernier Chapitre on va voir un exemple d'application aux équations différentielles de Riccati périodiques.

Chapitre 2

Problème de Cauchy-Lipschitz

En analyse, un problème de Cauchy est un problème constitué d'une équation différentielle dont on cherche une solution vérifiant une certaine condition initiale. Cette condition peut prendre plusieurs formes selon la nature de l'équation différentielle. Pour une condition initiale adaptée à la forme de l'équation différentielle, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité d'une solution du problème de Cauchy. Dans le cas d'une équation différentielle du premier ordre, de la forme $y'(t) = f(t, y(t))$, la condition initiale adaptée sera la donnée d'une valeur initiale pour la fonction inconnue y, et prendra la forme d'une équation $y(t_0) = y_0$. Sous des conditions de régularité d'une fonction définissant une équation, le théorème dit de Cauchy-Lipschitz garantit l'unicité d'une solution répondant à une condition initiale dite de Cauchy et l'existence d'une solution maximale.

2.1 Généralités

2.1.1 Définitions

Définition 2.1. *(Espace de Banach)*
On appelle espace de Banach $(E, \|.\|_E)$ tout espace vectoriel normé et complet pour la norme induite de la distance.

Définition 2.2. *(Espace Compact)*
On dit qu'un espace E est compact si de tout recouvrement ouvert de E on peut extraire un sous recouvrement fini.

Définition 2.3. *(Espace Topologique Convexe)*
Soit E un espace vectoriel. Soit $A \subset E$ On dit que A est convexe si $\forall x, y \in A, \forall \lambda \in [a, b]$, ona $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$.

Définition 2.4. *(Application uniformément lipschitzienne)*
Soit $\Omega \subset I \times \mathbb{R}^n$, avec $I = [a, b] \in \mathbb{R}$. On dit que l'application $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est uniformément lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur Ω, s'il existe une constante positive (K constante de Lipschitz) de f tel que

$$\forall x \in I, \forall y, z \in \mathbb{R}^n, \|f(x, y) - f(x, z)\| \leq K\|y - z\|$$

Définition 2.5. *(Fonction-localement lipschitzienne)*
Soit $\Omega \subset I \times \mathbb{R}^n$, avec $I = [a, b] \in \mathbb{R}$. On dit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est localement Lipschitzienne par rapport à la $2^{éme}$ variable, si pour tout point de $I \times \mathbb{R}^n$ admet un voisinage V sur lequel f et uniformément lipschitzienne par rapport à la $2^{éme}$ variable.

Définition 2.6. *(Équation différentielle du 1^{er} ordre)*
Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue. On appelle l'équation

différentielle ordinaire du 1^{er} *ordre, l'équation de la forme*

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y).$$

2.1.2 Théorème du point fixe

Ce théorème consiste à prouver l'existence d'un point fixe pour un certain opérateur, on s'intéresse au théorème du point fixe de Brouwer qui assure l'existence de tel point.

Introduction et définition

Soit f une application d'un ensemble E dans lui-même. On appelle point fixe d'une application f tout élément $u \in E$ tel que

$$f(u) = u$$

On va résoudre ce type d'équation est un cas particulier des équations numériques

$$h(u) = f(u) - u = 0$$

De nombreux résultats affirment l'existence de points fixes. Lorsque l'ensemble E est un espace de Banach, toute application contractante (c'est-à-dire toute application lipschitzienne de rapport $k < 1$) de E dans lui même admet un et un seul point fixe u
Tel que

$$\forall x \in E, \quad u = \lim_{n \to +\infty} f^n(x)$$

Théorème de point fixe de Brouwer (1910)

Historique

Le mathématicien Luitzen Egbertus Jan Brouwer remarquait, en mélangeant son café au lait, que le poid centrale de la surface du liquide, au milieu du tourbillon créé par le mouvement rotatoire de la cuillère, restait immobile. Il examina le problème de cette façon :

A tout moment, il y a un point de la sur surface que n'a pas changé de place.

Nous allons examiner le problème en dimension n suivant Brouwer.

soit

$$\overline{B_m} = \{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{m}} \quad tel \quad que \quad \|x\| \leq 1\}$$

La boule unité fermée de $\mathbb{R}$ muni de la norme euclidienne usuelle.

Lemme 2.1. *Soit $T : A \longrightarrow A$. Un opérateur continu, où A et un ensemble compact et convexe, alors l'équation $Tx = x$, admet une solution dans A.*

Théorème 2.1. *(Théorème de Brouwer)*

Toute application continue f de $\overline{B_m}$ dans $\overline{B_m}$, admet au mois un point fixe.

Démonstration.

On peut montrer pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P avec $\|f - P\| < \varepsilon$

Utilisons la norme maximum sur $\overline{B_m}$ définie par

$$\|f\| = \max_{x \in \overline{B_m}} |f(x)|$$

Pour avoir $\|P\| < 1 + \varepsilon$, alors $Q(x) = \frac{P(x)}{1+\varepsilon}$ une application régulière de $\overline{B_m}$ dans $\overline{B_m}$.

Il est claire que $\|f - Q\| \leqslant 2\varepsilon$

Supposons maintenant que x est un point fixe de Q, alors x est un point fixe d'approxi-

mation de f vérifiant

$$|x - f(x)| = |Q(x) - f(x)| < 2\varepsilon$$

Ainsi, le lemme(2.1) du théorème du point fixe de Brouwer montre que f admet un point fixe si toute application régulière de $\overline{B_m}$ dans $\overline{B_m}$ admet un point fixe. □

Définition 2.7. *On dit qu'un ensemble A d'un espace de Banach a la propriété du point fixe, si toute application continue de A dans A admet un point fixe.*
Soient X, Y deux espaces de Banach ou bien en générale deux espaces topologiques, et A et B deux ensembles tels que $A \subset X$ et $B \subset Y$.

Corollaire 2.2. *Si les ensembles A et B sont homéomorphes et A a la propriété du point fixe, alors B aussi a la propriété du point fixe.*

Démonstration.
Voire[3]. □

Corollaire 2.3. *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, un ensemble compact, et supposons qu'il existe une application continue $P : \mathbb{R}^n \longrightarrow A$ avec $P \mid A = Id_A$, cet-à dire $P(x) = x, \forall x \in A$. Alors l'ensemble A a la propriété de point fixe.*

Démonstration.
Soit $A \subset B$ une boule fermée et $f : A \longrightarrow A$ continue, alors $F = f \circ P$ est une application continue de B dans B. Ainsi d'après le théorème de point fixe de Brouwer, F admet un point fixe ζ, et comme $F(B) \subset A$, alors ce point fixe appartient à A, d'ou

$$\zeta = f(\zeta)$$

□

2.2 Quelques rappels sur équation différentielles

Dans la théorie des équations différentielles, il existe des théorèmes qui montrent l'existence et l'unicité de solution sur un intervalle donné. On cite le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz, qui est une condition suffisante d'existence de solution. Soit le problème de Cauchy suivant :

$$(P.C)\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

avec $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ et $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, alors lorsque la fonction f est uniformément lipschitzienne par rapport à la deuxième variable , alors le (P.C) admet une solution sur tout I.

2.3 Théorème [de Cauchy -Lipschitz]

Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in C(I \times E, E), avec E est convex$, soit le problème de Cauchy

$$(P.C)\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

avec $(t_0, y_0) \in I \times E$, supposons que f est uniformément lipschitzienne sur I. Alors pour tout t_0 dans I, et pour tout y_0 dans E, le problème de Cauchy (P.C) admet une solution maximale unique définie sur I.

2.4 Existence locale et L'unicité

soit $f \in C(I \times D, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $I \times D$ dans $\mathbb{R}$, avec $I \times D$ sont deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Théorème 2.2. *(Solution locale)*

Soient I et D deux intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f \in C(I \times D, \mathbb{R})$, soit le problème de Cauchy

$$(P.C) \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

avec$(t_0, y_0) \in I \times D$, supposons que f est localement Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur I, alors pour tout $(t_0, y_0) \in I \times D$ il existe un intervalle $J \subset I$ contenant t_0, tel que le problème de Cauchy (P.C) admet une unique solution définie sur J.

Le théorème(2.2) précèdent affirme l'existence d'une solution sur un intervalle J.

Définition 2.8. *Soit la solution $y(t)$ définie sur J du problème de Cauchy (P.C) du théorème précédent , s'appelle " solution locale " et on note $(y(t), J)$.*

Définition 2.9. *La solution $y(t)$ définie sur l'intervalle I_0 du problème de Cauchy (P.C) du théorème précèdent , s'appelle " solution maximale " et I_0 s'appelle l'intervalle maximal.*

2.5 Solution Maximale

Théorème 2.3 (Solution maximale)**.** *Soient I et D deux intervalles de $\mathbb{R}$, et soit $f \in C(I \times D, \mathbb{R})$. Soit le problème de Cauchy*

$$(P.C) \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

avec $(t_0, y_0) \in I \times D$. Supposons que f est localement Lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur I, alors pour tout $(t_0, y_0) \in I \times D$, le problème de Cauchy (P.C) admet une unique solution définie sur L'intervalle $I_0 \subset I$ tel que toute solution locale

(x, J) du problème (P.C) vérifier $J \subset I_0$.

Remarque 2.1. *Le théorème précèdent affirme l'existence d'une solution sur un intervalle maximale $I_0 \subset I$.Intuitivement l'intervalle I_0 est le plus grand intervalle dans I contenant I_0, où la solution du problème (P.C) est définie.*

2.6 Dependence par rapport aux Conditions initiales

On va voir dans cette section le comportement des solution l'osque on perturbe les conditions initiales.

On considère le problème de Cauchy suivant

$$(P.C)\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Avec $(t_0, y_0) \in I \times E$. On a le théorème suivant

Théorème 2.4. *Soit $I = [a, b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$. Soient $f \in C(I \times E, E)$ et $(t_0, y_0) \in I \times E$.*

On considère le problème de Cauchy

$$(P.C)\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Supposons que f est uniformément lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur I. Soit $\Phi : I \times E \longrightarrow E$, la fonction définie par

$$\Phi(t, x) = x(t), \forall x \in E$$

Ou $x(t)$ est la solution du problème de Cauchy $(P.C)$ de condition initiale $x \in E$. Alors

la fonction Φ est continue par rapport à x sur E.

Démonstration.

Montrons que Φ est continue par rapport à la deuxième variable sur E.

Soient $x, y \in E$ tels que $x \neq y$. Soit $x(t)$ et $y(t)$ solutions de $(P.C)$ de condition initiale x et y respectivement. Ona

$x(t) = x + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$ et $y(t) = y + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$, $\forall t \in I$

Par définition de la fonction Φ, ona $\Phi(t, x) = x(t)$ et $\Phi(t, y) = y(t)$, ona confusion on remplace on obtenir pour tout t dans I

$[\Phi(t, x) - \Phi(t, y)] - [\Phi(t_0, x) - \Phi(t_0, y)] = \int_{t_0}^{t} [f(s, \Phi(s, x)) - f(s, \Phi(s, y))]ds$. On pose $J = [t, t_0]$ si $t \leqslant t_0$, et $J = [t_0, t]$ si $t_0 \leqslant t$. Posons aussi $\|\Phi_x - \Phi_y\|_* = max[\exp(k|s - t_0|)\|\Phi(s, x) - \Phi(s, y)\|]$

Comme $\Phi(t_0, x) = x$ et $\Phi(t_0, y) = y$ ona $x = x(t_0) = x_0, y = y(t_0) = y_0$

$$\begin{aligned}
\|[\Phi(t, x) - \Phi(t, y)] - [x - y]\| &= \int_{t_0}^{t} f(s, \Phi((s, x)) - f(s, \Phi(s, y))ds\| \\
&\leqslant \int_{j} \|f(s, \Phi(s, x)) - f(s, \Phi(s, y))\|ds \\
&\leqslant \int_{j} k\|\Phi(s, x) - \Phi(s, y)\|ds \\
&= k \int_{j} \exp(k|s - t_0|) \exp(-k|s - t_0|)\|\Phi(s, x) - \Phi(s, y)\|ds \\
&\leqslant \|\Phi_x - \Phi_y\|_* \int_{j} k \exp(k|s - t_0|)ds \\
&= \|\Phi_x - \Phi_y\|_* (\exp(k|t - t_0|) - 1.
\end{aligned}$$

Ce qui implique donc pour tout $t \in [a, b]$

$$exp(-k|t - t_0|)\|\Phi(t, x) - \Phi(t, y)\| \leq (1 - exp(-k|t - t_0|))\|\Phi_x - \Phi_y\|_* + \|x - y\|$$

Par passage au maximum et par définition de la quantité $\|.\|_*$ on obtient

$$\|\Phi_x - \Phi_y\|_* \leq (1 - \exp(-k(b-a)))\|_x - \Phi_y\|_* + \|x - y\|$$

Donc

$$\exp(-k(b-a))\|\Phi_x - \Phi_y\|\|_* \leq \|x - y\|$$

Comme

$$\exp(-k(b-a)) \leq \exp(-k|s - t_0|) \leq 1, \forall s \in I$$

Alors :

$\max_{t\in I} \|\Phi(t,x) - \Phi(t,y)\| \leq \exp(2k(b-a))\|x - y\|$. On déduit que Φ est uniformément lipschitzienne par rapport à la deuxième variable sur $[a,b]$ de constante de Lipschitz $\exp(2k(b-a))$, ce qui montre que Φ est continue par rapport à la deuxième variable sur E. □

Chapitre 3

Systèmes périodiques

L'étude de l'existence des solution périodique des systèmes différentiels non linéaires.

3.1 Notions préliminairees

3.1.1 Opérateurs Compacts

Définition 3.1. *On dit qu'un ensemble M de X (X est compact) est précompact si son adhérence $\overline{M}$ est compacte. Le sous-ensemble M est dit précompact si son complété est compact. Et on dit qu'un ensemble M est dénombrablement précompact de X si tout sous-ensemble infinie $T \subset M$ admet au moins un point d'accumulation.*

Définition 3.2. *Un opérateur T défini sur un espace de Banach X dans lui-même (ou dans un autre espace de Banach X_1)est dit opérateur compact ou, s'il transforme tout ensemble borné en un ensemble précompact.*
Dans un espace normé de dimension finie tout opérateur linéaire est compact, parce qu'il transforme tout ensemble borné en un ensemble borné, car dans un espace de dimension finie tout ensemble borné est précompact. Dans un espace de dimension infinie la compacité d'un opérateur est une condition beaucoup plus forte que la condition d'être simplement

continu (c'est-à-dire borné). Par exemple, dans un espace de Hilbert l'opérateur identique est continu, mais nullement compact.

0n note par $L(X,Y)$ les opérateurs linéaires continues et par $\sigma(X,Y)$les opérateurs compacts de X dans Y.

Théorème 3.1. *$\sigma(X,Y)$ est un sous espace de $L(X,Y)$.*

Théorème 3.2. *Si $T \in \sigma(X,Y)$, alors l'image de tout borné de X par T est compact dans Y.*

Théorème 3.3. *soient $T \in L(X,Y)$, $B \in L(Y,Z)$. Si au mois l'un de ces deux opérateurs est compacts, leur produit BT est lui aussi un opérateur compact.*

Définition 3.3. *On dit qu'un ensemble M est uniformément borné s'il existe un $c \in \mathbb{R}$,tel que pour tout $x \in M$ on a $a\|x\| \leq c$. On dit que Mest équicontinu si pour tout $\varepsilon > 0$; il existe un $\delta > 0$ tel que pur tout $t_1, t_2 \in \overline{I}$ (tel que $\overline{I}$ un ensemble convexe, fermé et borné) vérifiant $\|t_1 - t_2\| < \delta$ ona $a\|x(t_1) - x(t_2)\| < \varepsilon$ pour tous les $x \in M$.*

3.1.2 Opérateurs non linéaires

Définition 3.4. *Soient X, Y deux espaces de Banach et $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur non linéaire défini sur $D(T) \subset X$. On dit que T est continu au point $x_0 \in D(T)$ si pour toute suite $(x_n) \subset D(T)$ tel que :*

$\|x_n - x_0\| \longrightarrow 0 (n \longrightarrow \infty)$ on a $\|Tx_n - Tx_0\| \longrightarrow 0 (n \longrightarrow \infty)$.

On dit que T est continu sur l'ensemble $M \subset D(T)$ si T est continue en tout point $x_0 \in M$.

On dit que T est compact si T est continu sur $D(T)$ et envoie chaque ensemble borné de $D(T)$ dans un ensemble compact de Y.

On dit que T est borné sur l'ensemble $M \subset D(T)$ si :

$$\sup_{x \in M} \|T(x)\| < \infty$$

3.1.3 Sous espace vectoriel topologique localement convexe

Définition 3.5. *Un espace vectoriel topologique est dit localement convexe, si tout ensemble ouvert non vide de E contient un sous-ensemble non vide ouvert et convexe.*
Autrement dit un espace vectoriel topologique E est localement convexe s'il admet une base de voisinage convexe de 0.

Exemple 3.1. *Tout espace normé est localement convexe.*
En effet, dans un tel espace tout ensemble ouvert non vide contient une boule, ainsi, tout espace normé est localement borné et localement convexe.

3.2 Flot d'une equation différentielle

Définition 3.6. *Soit* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, *avec* $n \in \mathbb{N}^*$, *une fonction uniformément lipschitzienne sur* $\mathbb{R}^n$. *Soit l'équation différentielle autonome*

$$\dot{x(t)} = f(x), t \in R \qquad (I)$$

On appelle flot de l'équation (I) *la fonction* $\Phi^t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *définie pour chaque* $t \in \mathbb{R}$ *par :*

$$\forall X \in \mathbb{R}^n : \Phi^t(X) = X(t)$$

où $X(t)$ *est la solution du système*(I) *de condition initiale* $X_0 \in \mathbb{R}^n$.

3.2.1 propriétés

1. $\Phi^0 = Id$ où $Id : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est la fonction identité, $\forall X \in \mathbb{R}^n : \Phi^0(X) = X$.
2. Φ^t est continu de plus si f est de classe C^1 alors Φ^t est de classe C^1.

3. Pour tout $t, s \in \mathbb{R}$ et tout $X \in \mathbb{R}^n$ on a $\Phi^s(\Phi^t(X)) = \Phi^{s+t}(X)$.

Définition 3.7. *(Ensemble invariant)*
Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, avec $n \in N^*$, une fonction uniformément lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$. Soit l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} = f(x), t \geqslant 0$$

Notons Φ^t le flot de l'équation (I). Soit O un ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que l'ensemble O est positivement invariant par le flot ou il est positivement Φ^t-invariant
si

$$\forall X \in O : \Phi^t(X) \in O, \forall t \geqslant 0$$

3.3 Équation différentielle périodique

Définition 3.8. *(fonction de plusieurs variables périodique)*
Soit

$$f : \mathbb{R} \times \psi \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(t, u) \longrightarrow f(t, u)$$

une fonction où ψ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que f est T-périodique s'il existe un $T > 0$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall u \in \psi : f(t + T, u) = f(t, u)$$

On dira de même que l'équation :

$$u' = f(t, u)$$

est T-périodique dans la définition suivante

Définition 3.9. *(Équation différentielle périodique)*
L'équation différentielle non-autonome suivante

$$\dot{X} = f(t, X), t \geqslant 0$$

est dite T-périodique (ou à coefficients périodiques, si $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, est T-périodique au sens de la définition précédente.

3.3.1 Solution périodiques

Définition 3.10. *Une solution U d'une certaine équation différentielle ordinaire est dite périodique de période T, ou plus brièvement T-périodique, si elle est définie sur $\mathbb{R}$ et s'il existe un nombre $T > 0$, tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:*

$$u(t + T) = u(t)$$

Il est clair que si T est une période pour une solution, tout multiple de T et aussi une période pour cette solution. Donc, toute solution périodique admet une famille de période. Si u est une solution périodique et si l'inf des périodes de u est égal à 0, u est une solution constante.

3.3.2 Propriétés des équations différentielles périodiques

Propriétés

Soit

$$\dot{X} = f(t, X) \qquad (EP)$$

une équation différentielle T-périodique où $T > 0$. Supposons que f est uniformément lipschitzienne et il existe une condition initiale $X_0 \in \mathbb{R}^n$ telle que

$$\varphi^T(X_0) = X_0$$

où φ^t est le flot de l'équation (EP), Alors la solution $X(t)$ de condition initiale X_0 est T-périodique.

Démonstration.

Ona

$$\varphi^{t+T}(X_0) = \varphi^t(\varphi^T(X_0)) = \varphi^t(X_0)$$

Par unicité de solution (Voir chapitre 1), car f est uniformément lipschitzienne.

Alors

$$\varphi^{t+T}(X_0) = \varphi^t(X_0), \forall t \geqslant 0$$

D'après 3.3.1 (solution périodique)

$$\varphi^t(X_0) = X(t)$$

est une solution périodique. □

3.4 Théorème Principal

Théorème 3.4. *On considère l'équation différentielle suivante*

$$\dot{X} = f(t, X), \quad t \geqslant 0 \qquad (1)$$

où

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

est une fonction C^1 *et* T*-périodique.*

On suppose qu'il existe un compact $A \subset \mathbb{R}^n$ *invariant par le flot de* (1).

Alors il existe $X_0 \in A$ *tel que la solution* $X(t)$ *de* (1) *de condition initiale* X_0 *est une solution périodique par rapport au temps de périodique.*

Démonstration.

Ona par hypothèse A et positivement invariant.

Donc

$$\varphi^t(A) \subset A \qquad\qquad \forall t \geqslant 0$$

En particulier $\varphi^T(A) \subset A$, oú T la période qui vérifie

$$f(t+T, y) = f(t, y) \qquad\qquad \forall y \in \mathbb{R}^n$$

Comme A est par l'hypothèse convexe et compact et d'après la **section 2.6.** (Dépendance par rapport aux condition initiales) du **chapitre 2**, la fonction

$$\varphi^T : A \longrightarrow A$$

Et continue par le théorème de point fixe de Brouwer (voire chapitre 2).

Il existe un point fixe

$$X_0 \in A$$

Tel que

$$\varphi^T(X_0) = X_0$$

D'après les propriété 3.3.2. (Propriétés des équations différentielles périodiques), implique

$X(t)$ de condition initiale X_0 et périodique. □

Chapitre 4

Exemple d'application

On va étudier dans ce qui suit l'existence de solutions périodique pour une équation différentielle de Riccati à coefficients périodiques et cela en utilisant le théorème principal du Chapitre précédent. On va voir une condition suffisante pour qu'une équation différentielle de Riccati de coefficients périodiques admet une solution périodique. Plus précisément on montre le théorème suivant

Théorème 4.1. *On considère l'équation différentielle de Riccati EDR suivante*

$$y' = a(t) + b(t)y + c(t)y^2, \quad t \geq t_0. \tag{EDR}$$

Supposons que la fonction b est 1-périodique et que

$$\int_0^1 b(s)ds < 0.$$

Alors pour toute fonction c 1-périodique il existe $r > 0$ tel que pour toute fonction a 1-périodique et satisfaisant $\max_{s\in[0,1]} |a(s)| < r$ l'équation EDR admet une solution 1-périodique définie sur $[t_0, +\infty[$.

Pour montrer le théorème précédent on a besoin du lemme et du corollaire suivants

Lemme 4.1. *On considère l'équation différentielle de Riccati EDR. Supposons que la fonction b est 1-périodique et que*

$$\int_0^1 b(s)ds < 0.$$

Alors pour toute fonction c 1-périodique il existe $r > 0$ tel que pour toute fonction a 1-périodique satisfaisant $\max_{s\in[0,1]} |a(s)| < r$ il existe un intervalle I telle que la fonction P suivante (fonction de Poincaré)

$$P(y) = y(t_0 + 1),$$

est de classe C^1 et définie de I dans lui même où $y(t)$ est la solution de l'équation (EDR) de condition initiale $y \in I$.

Démonstration. Par hypothèse il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\int_{t_0}^{t_0+1} b(s)ds = -\alpha.$$

Soit $r > 0$ et $y_0 \in]-r, r[$

$$y(t) = \exp(\int_{t_0}^{t} b(s)ds)y_0 + \int_{t_0}^{t} [a(s) + c(s)y^2(s)] \exp(\int_s^t b(\mu)d\mu)ds$$

$$\implies |y(t_0 + 1)| < \exp(-\alpha)r + \|a\|_\infty \exp(\|b\|_\infty) + \|c\|_\infty \max_{s\in[t_0,t]} |y|^2 \exp(\|b\|_\infty)$$

Pour que $|y(t_0 + 1)| < r$ il suffit que

$$\exp(-\alpha)r + \|a\|_\infty \exp(\|b\|_\infty) + \|c\|_\infty r^2 \exp(\|b\|_\infty) < r$$

□

Corollaire 4.2. *La fonction de Poincaré P définie dans le lemme 4.1 admet un point fixe*

$X_* \in \bar{I}$ où $\bar{I}$ est l'adhérence de l'ensemble I.

Démonstration. On a $\bar{I}$ est un intervalle fermé donc compact et convexe et par continuité par rapport au conditions initiales la fonction $P : \bar{I} \to \bar{I}$ est continue. Par le théorème du point fixe de Brouwer, la fonction P admet un point fixe dans $\bar{I}$ qu'on note y_*. □

Preuve du théorème 4.1. Le corollaire 4.2 montre l'existence d'un point fixe $y_* \in \bar{I}$. Soit $y_*(t)$ la solution de l'équation (EDR) de condition initiale y_*. Donc

$$y_*(t_0 + 1) = y_* = y_*(t_0).$$

Par la propriété d'unicité de solution d'équations différentielles, on a

$$y_*(t_0 + 1 + t) = y_*(t_0 + t), \quad \forall t \geq 0.$$

autrement dit

$$y_*(s + 1) = y_*(s), \quad \forall s \geq t_0.$$

Ce qui implique donc l'existence de solution 1-périodique de l'équation EDR. □

Conclusion générale

Nous avons introduit au début de ce mémoire quelques définitions fondamentales d'analyse. Nous avons par suite défini les équations différentielles périodiques ou aussi dites à coefficients périodique. Le théorème principal de ce mémoire, montre que dans le cas ou il existe un ensemble, de conditions initiales, compacte et convexe invariant par le flot alors il existe au moins une solution périodique de l'équation différentielle. La preuve de résultat ou le point clef est le Théorème du point fixe de Brouwer. En fin de mémoire on a vu un exemple d'application de ce résultat.

Bibliographie

[1] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*. Edition Masson, Paris, 1983

[2] L. Abdellatif, *Existence et unicite de solution d'un équation différentielle fractionnaire du type voltérra avec retard*. The Universsity of new south wales, 2010

[3] Wolfgang Walter, *Ordinary Differntial Equations*, Springer-Verlag, New york, 1998

[4] W.Oukil, *Notes et exercices du cours d'Equations Différentielles*. Licence, Algérie, 2017.

[5] M.Bekri zouaoui, *Existence de solution périodiques pour EDO Non Linéaires*. Memoire de Magister ,Universite D'ORAN