RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ YAHIA FARES DE MÉDÉA
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DES MATHMÉATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématiques et Applications

par

Mekhdoua Said

SUITES RÉCURRENTES LINÉAIRES D'ORDRE SUPÉRIEUR

Soutenu publiquement le 14/09/2021, devant le jury composé de :

Présidente :	AIT-AMRANE N. Rosa	$M.A.A.$	U.Y.F.M.
Encadreur :	AIT-AMRANE Lyes	$M.C.A.$	E.S.I.(Alger)
Examinatrice :	GUETTAI Ghania	$M.C.B.$	U.Y.F.M.

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2020-2021

Remerciements

Merci d'abord et avant tout à **ALLAH** Le Tout-Puissant qui m'a aidé dans mon présent travail de recherche.

Je tiens a remercier mon père, ma mère, mes soeurs, mes frères, toute ma famille et tous mes amis, je leur dis du fond du coeur merci d'être dans ma vie.

Je remercie sincèrement mon encadreur, Monsieur AIT-AMRANE Lyes, Maître de conférences à l'E.S.I. (Alger), qui m'a dirigé tout au long de ce travail.

Je remercie sincèrement Madame AIT-AMRANE N. Rosa, Maître assistante à l'université Yahia Farés de Médéa pour avoir accepté de présider le jury.

Mes vifs remerciements à Madame GUETTAI Ghania pour avoir accepté d'examiner mon mémoire et de siéger dans mon jury.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons abordé le sujet des suites récurrentes linéaires d'ordre supérieur. Nous avons étudié la suite r-Fibonacci et la suite r-Lucas de type s. Ensuite, nous avons mis en évidence les propriétés de base les plus importantes telles que la formule de Binet, la fonction génératrice et l'extensions aux indices négatifs. Nous avons aussi étudié le q-analogue et le (p, q)-analogue de la suite de polynômes r-Fibonacci.

Mots-Clés : Suite r-Fibonacci, relation de récurrence linéaire, formule de Binet, fonction génératrice, suite r-Lucas de type s, q-analogue, polynômes incomplets r-Lucas, polynômes hyper r-Lucas.

Abstract

In this dissertation, we approached the subject of higher order linear recurrent sequences. We have studied the r-Fibonacci sequence and the r-Lucas sequence of type s. Next, we have highlighted the most important basic properties such as Binet's formula, the generating function and extensions to negative subscripts. We have also studied the q-analogue and the (p, q)-analogue of the sequence of r-Fibonacci polynomials.

Keywords : r-Fibonacci sequence, linear récurrence relation, Binet formula, generating function, r-Lucas sequence of type s, q-analogue, incomplete r-Lucas polynomials, hyper r-Lucas polynomials.

Table des matières

Résumé ii

Abstract iii

Notation vi

Introduction vi

1 Généralités 3

1.1 Suites récurrentes linéaires d'ordre p 3

1.2 Le polynôme bivarié 4

1.3 Formule de Binet 5

1.4 La fonction génératrice d'une suite récurrente linéaire 6

1.5 Coefficients multinomiaux 7

1.6 Terme général d'une suite récurrence linéaire 8

1.7 Équations aux différences linéaires à coefficients variables 9

2 Suites de Fibonacci d'ordre supérieur 14

2.1 Introduction : histoire et définition générale 14

2.2 Propriétés des suites de Fibonacci généralisées d'ordre r 16

3 La suite r-Fibonacci généralisée et la suite r-Lucas de type s 24

3.1 Polynômes r-Fibonacci et r-Lucas généralisés 25

3.2 Polynôme r-Lucas de type s 27

3.3 La fonction génératrice de la suite r-Lucas de type s 30

3.4 Formule de Binet pour la suite r-Lucas de type s 31

3.5 Extension des suites $(U_n^{(r)})_n$ et $(V_n^{(r,s)})_n$ aux indices négatifs 32

4 Le q-analogue et le (p,q)-analogue de la suite de polynômes r-Fibonacci 37

4.1 Le q-analogue des polynômes r-Fibonacci et r-Lucas 37

4.2 Le (p,q)-analogue des polynômes r-Fibonacci et r-Lucas 46

5 Polynômes incomplets r-Lucas et hyper r-Lucas de type s 50

5.1 Les polynômes incomplets r-Fibonacci 50

5.2 Les polynômes incomplets r-Lucas de type s 51

5.3 La fonction génératrice des polynômes incomplets r-Lucas de type s 52

5.4 Les polynômes bivariés hyper r-Fibonacci 52

5.5 Interprétation combinatoire 54

5.6 Les polynômes hyper-r-Lucas 56

Conclusion 59

Notations

$\mathbb{C}$: le corps des nombres complexes.

$\mathbb{R}$: le corps des nombres réels.

$\mathbb{N}$: l'ensemble des entiers naturels.

$\mathbb{N}^*$: l'ensemble des entiers naturels non nuls.

$\mathbb{N}_{n_0} = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$, où $n_0 \in \mathbb{N}$.

I_n : Matrice identité d'ordre n.

$[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$:=$: égalité par définition (affectation).

$\lfloor x \rfloor$: partie entière inférieure de x.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Ce travail s'inscrit dans le cadre de l'étude des suites récurrents linéaires qui prennent leur origine en 1202 avec l'exemple donné par Fibonacci de la célèbre suite $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ qui porte son nom (voir [31] et [43]). C'est un domaine riche et varié dont le champ d'applications est divers (cryptographie, codes correcteurs d'erreurs, informatique, algorithmique, combinatoire, théorie des nombres, etc.).

Ce mémoire est organisé en cinq chapitres dont le contenu est le suivant :

- **Le premier chapitre : Généralités**.

  Dans le premier chapitre, nous avons donné quelques défintions comme celle des suites récurrentes linéaires en citant certaines de leurs propriétés de base utilisées dans notre mémoire.

- **Le deuxième chapitre : Suites de Fibonacci d'ordre supérieur**.

  Contient un aperçu général sur les suites de Fibonacci. Ce chapitre expose diverses propriétés de la classe des suites de Fibonacci généralisées d'ordre r, notamment les techniques que nous utilisons dans ce mmoire.

- **Le troisième chapitre : Suite r-Fibonacci généralisée et Suite r-Lucas de type s.**

  On présente des généralités sur la suite de Fibonacci et la suite de Lucas et nous introduisons, pour tous entiers non nuls s et r, avec $(1 \leqslant s \leqslant r)$, une famille de s suites compagnons assosiées à la suite r-Fibonacci généralisées, que nous appelons r-Lucas de type s. Nous établirons leurs fonctions génératrices correspondantes ainsi que leurs formes des Binet et nous présenterons les exstentions de ces suites aux indices négatifs.

- **Le quatrième chapitre : Le q-analogue et le (p, q)-analogue de la suite de polynômes r-Fibonacci**.

  Ce chapitre est consacré aux différentes définitions du q-analogue des polynômes de Fibonacci et des polynômes de Lucas. On commence par la définition proposée par Carlitz. On traite le cas (p, q)-analogue, une introduction sur les coefficients p, q-binomiaux sont utilisées respectivement pour une approche de la suite p, q-Fibonacci

- **Le cinquième chapitre : Polynômes incomplets r-Lucas et hyper-r-Lucas de type s.**

  Ce chapitre est consacré aux polynômes incomplets r-Lucas et hyper r-Lucas de type s. Les polynômes incomplets sont liés à la compréhension de la suite de Fibonacci et de Lucas, et les fonctions génératrices, nous introduisons les hyper r-Fibonacci pour les hyper r-Lucas de type s.

Chapitre 1

Généralités

1.1 Suites récurrentes linéaires d'ordre p

Dans cette section, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif de caractéristique 0 et $\mathbb{K}[\mathbb{X}]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Définition 1.1.1 *[4] Soient $(p, n_0) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Une suite récurrente linéaire u_n d'ordre p à valeur dans un corps commutatif $\mathbb{K}$ est définie par :*

$$u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \ldots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n, \qquad n \geqslant n_0 \tag{1.1}$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ sont des scalaires de $\mathbb{K}$ avec $a_0 \neq 0$.

Une telle suite est entièrement déterminée par la donnée des p premiers termes

$$u_{n_0}, u_{n_0+1}, \ldots, u_{n_0+p-1}$$

de la suite et par la relation de récurrence (1.1).
A une telle suite $(u_n)_n$ on associe le polynôme $F(X)$ de degré p suivant :

$$F(X) = X^p - \sum_{i=0}^{p-1} a_i X^i. \tag{1.2}$$

Définition 1.1.2 *Le polynôme $F(X)$ est appelé polynôme caractéristique associé à la suite $(u_n)_n$. La relation (1.1) peut être écrite sous forme matricielle comme suit :*

$$U_{n+1} = TU_n, \quad n \geqslant n_0. \tag{1.3}$$

avec

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & ... & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & ... & a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-2} \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}.$$

La matrice T est appelé matrice compagnon du polynôme $F(X)$, ou bien, matrice compagnon de la suite $(u_n)_n$, et le polynôme $F(X)$ est le polynôme caractéristique de la matrice T qui est aussi son polynôme minimal.

Remarque 1.1.1 *Puisque $a_0 \neq 0$, la définition précédente (relation (1.1)) permet d'étendre la définition de la suit $(u_n)_n$ vers la gauche en incluant les termes d'indices négatifs. Si on pose $u_n^{'} = u_{-n}$ pour $n = 0, 1, 2, \cdots$, on a :*

$$u'_{n+p} = -(a_{p-1}/a_0)u'_{n+1} - \ldots - (a_1/a_0)u'_{n+p-1} + (1/a_0)u'_n.$$

En utilisant la relation (1.1), on pose $n = -m$ tel que $m \in \mathbb{Z}^-$

$$\begin{aligned} u_{-m+p} &= a_{p-1}u_{-m+p-1} + \ldots + a_1u_{-m+1} + a_0u_{-m}, \\ u_{-(m-p)} &= a_{p-1}u_{-(m-p+1)} + \ldots + a_1u_{-(m-1)} + a_0u_{-m}, \\ u'_{m-p} &= a_{p-1}u'_{m-p+1} + \ldots + a_1u'_{m-1} + a_0u'_m, \end{aligned}$$

On pose $m = n + p$, on trouve

$$\begin{aligned} u'_n &= a_{p-1}u'_{n+1} + \ldots + a_1u'_{n+p-1} + a_0u'_{n+p}, \\ u'_{n+p} &= (1/a_0)u'_n - (a_{p-1}/a_0)u'_{n+1} - \ldots - (a_1/a_0)u'_{n+p-1}. \end{aligned}$$

1.2 Le polynôme bivarié

P est une fraction rationnelle multivariée à coefficients complexes $P(X_1, ..., X_n)$ en n variables que l'on ne connaît pas. On note $\mathcal{M}_N(d)$ la complexité de la multiplication de deux polynômes de degrés inférieurs ou égaux à d avec des coefficients de N bits [46]. Par ailleurs, on note $\mathcal{M}^{'}(N)$ la complexité de la multiplication de deux entiers de N bits

[23].

Dans le cas d'un **polynôme bivarié** $P(X,Y)$, on note qu'il peut être écrit sous les formes

$$P(X,Y)=\sum_{i=0}^{d_X}\left(\sum_{j=0}^{d_Y}c_{i,j}Y^j\right)X^i=\sum_{i=0}^{d_X}c_i\left(Y\right)X^i.$$

On peut calculer le polynôme univarié $P(X,y)$, pour y fixé, en évaluant $P(x_i,y)$ pour $i=1,\ldots,d_X+1$ et puis en interpolant. Le ℓ-iéme coefficient de ce polynôme est $c_\ell(y)$, qui est l'évaluation du polynôme univarié $c_\ell(y)$ au point y. On a donc un algorithme pour évaluer ce polynôme et en l'appliquant sur d_Y+1 valeurs y_j, on peut en déduire les $c_\ell(y)$ pour tout ℓ et par suite le polynôme bivarié $P(X,Y)$.

Reprenons. Pour interpoler $P(X,Y)$ on procède comme suit. Pour j de 1 à d_Y+1, on fixe une valeur y_j et on choisit d_X+1 valeurs x_i (il n'est pas gênant de prendre les mêmes x_i pour différents j), on évalue alors tous les $P(x_i,y_j)$ et on interpole pour obtenir le polynôme univarié $P(X,y_j)$. Enfin, pour $\ell=0,\ldots,d_X$ on interpole $c_\ell(y)$.

1.3 Formule de Binet

Définition 1.3.1 *Soient $(a,b)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par : $(u_0,u_1)\in\mathbb{C}^2$ et*

$$u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n,\qquad n\in\mathbb{N}.$$

*L'équation $x^2=ax+b$ s'appelle **équation caractéristique** de la suite (u_n).*

L'étude des racines de l'équation caractéristique d'une suite récurrente linéaire permet d'éxprimer le terme générale de cette suite en fonction de ces racines, qui est appelée : **formule de Binet** de la suite. Le théorème suivant permet de classifier les différents cas de la formule de Binet d'une suite d'ordre 2.

Théorème 1.3.1 *(Voir [32])*

1. *Si l'équation caractéristique admet deux racines distinctes r_1 et r_2, alors*

$$u_n=\lambda r_1^n+\mu r_2^n,\quad avec\ \ (\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2. \tag{1.4}$$

2. *Si l'équation caractéristique admet une racine double r_0, alors*

$$u_n = (\lambda + \mu n) r_0^n, \quad avec \ \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2. \tag{1.5}$$

où λ et μ sont deux conditions initials constantes.

1.4 La fonction génératrice d'une suite récurrente linéaire

Dans cette section, on définit la fonction génératrice d'une suite récurrente linéaire.

Définition 1.4.1 *Pour une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$ et la relation*

$$u_n = c_0 u_{n-1} + \cdots + c_{k-1} u_{n-k}, \quad n \geqslant k,$$

la somme

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m x^m$$

s'appelle la fonction génératrice ordinaire de la suite $(u_m)_m$.

Nous observons que

$$\begin{aligned}
f(x) &= u_0 + \cdots + u_m x^m + \cdots \\
xf(x) &= xu_0 + \cdots + u_{m-1} x^m + \cdots \\
x^2 f(x) &= x^2 u_0 + \cdots + u_{m-2} x^m + \cdots \\
&\vdots \\
x^k f(x) &= x^k u_0 + \cdots + u_{m-k} x^m + \cdots .
\end{aligned}$$

Donc, pour $m \geq k$, nous trouvons que

$$\begin{aligned}
(1 - c_0 x - c_1 x^2 - \cdots - c_{k-1} x^k) f(x) &= \cdots + (u_m - c_0 u_{m-1} - \cdots - c_{k-1} u_{m-k}) x^m + \cdots \\
&= \cdots + 0 x^m + \cdots
\end{aligned}$$

D'où, nous devons avoir cela

$$(1 - c_0 x - c_1 x^2 - \cdots - c_{k-1} x^k) f(x) = g(x),$$

où $g(x)$ est un polynôme de degré au plus $k-1$. Il s'ensuit que

$$f(x) = \frac{g(x)}{1 - c_0 x - c_1 x^2 - \cdots - c_{k-1} x^k}.$$

Exemple 1.4.1 *L'exemple le plus ancien* (1202) *d'une suite récurrence d'ordre* 2 *est la suite de Fibonacci définie pour tout* $n \geqslant 0$*, par la relation de récurrence*

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad n \geqslant 1$$

et de conditions initiales $F_0 = 0$ *et* $F_1 = 1$*, la formule de Binet est donnée par :*

$$F_n = \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\alpha_1 - \alpha_2} \text{ avec } \alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

La fonction génératrice est

$$\sum_{n \geqslant 1} F_{n+1} x^n = \frac{1}{1 - x - x^2}.$$

Les termes d'indices négatifs de la suite de Fibonacci sont donnés par :

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

qui se traduit par :

$$\ldots -21, 13, -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 \ldots$$

1.5 Coefficients multinomiaux

1.5.1 Factorielle

La factorielle est un nombre naturel qui est défini de la manière suivante. On a $0! = 1$ et pour tous $n \geqslant 1$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \prod_{i=1}^{n} i.$$

1.5.2 Coefficient binomial

Soient n et k deux entiers naturels avec $0 \leqslant k \leqslant n$, alors on définit le coefficient binomial k parmi n comme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

1.5.3 Formule du binôme de Newton

Soient $a, b \neq 0$ des nombres réels et soit $n > 0$ un entier naturel, alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

1.5.4 Coefficients multinomiaux

Soient $n, k_1, \ldots, k_r$ des entiers naturels vérifient $n = k_1 + \cdots + k_r$, alors le coefficient multinomial associé est :

$$\begin{aligned} \binom{n}{k_1, \ldots, k_r} &= \frac{n!}{k_1! \ldots k_r!}, \\ &= \frac{(k_1 + \cdots + k_r)!}{k_1! \ldots k_r!}. \end{aligned}$$

1.5.5 Formule du multinôme de Newton

Soient $a_1, \ldots, a_r \neq 0$ des nombres réels et soit $n > 0$ un entier naturel, alors :

$$(a_1 + \cdots + a_r)^n = \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_r \\ k_1 + \ldots + k_r = n}} \binom{n}{k_1, \ldots, k_r} a_1^{k_1} \ldots a_r^{k_r}$$

1.5.6 Les coefficients polynomiaux

Soient n et k deux entiers naturels avec $0 \leqslant k \leqslant n$, alors :

$$(1 + t + \cdots + t^r)^n = \sum_{k=0}^{rn} \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_r \\ k_1 + 2k_2 + \ldots + rk_r = k}} \binom{k_1 + \ldots + k_r}{k_1, \ldots, k_r} t^k.$$

1.6 Terme général d'une suite récurrence linéaire

Théorème 1.6.1 *[11] Soit $(u_n)_{n > -m}$ une suite récurrence linéaire à termes dans un anneau unitaire $\mathbb{A}$, définie par :*

$$\begin{cases} u_{-j} = \alpha_j, \quad (0 \leq j \leq m-1), \\ u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_m u_{n-m}, \quad (n \geqslant 1). \end{cases} \tag{1.6}$$

Soient $(\lambda_j)_{0\leqslant j\leqslant m-1}$ *et* $(y_k)_{k>-m}$ *deux suites de* $\mathbb{A}$ *définies par*

$$\lambda_j = -\sum_{k=0}^{m-1-j} a_k\alpha_{k+j}, \quad (0 \leq j \leq m-1) \; avec \; a_0 = -1, \tag{1.7}$$

et

$$y_k = \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_m \\ k_1+2k_2+\ldots+mk_m=k}} \binom{k_1+k_2+\ldots+k_m}{k_1,k_2,\ldots,k_m} a_1^{k_1}a_2^{k_2}\cdots a_m^{k_m} \quad (k>-m). \tag{1.8}$$

alors, pour tout $(n>-m)$*, on a :*

$$u_n = \lambda_0 y_n + \lambda_1 y_{n+1} + \cdots + \lambda_{m-1}y_{n+m-1} \tag{1.9}$$

1.7 Équations aux différences linéaires à coefficients variables

Définition 1.7.1 *Soit* $r \in N^*$*. Une équation de la forme*

$$x(n+r) + p_1(n)x(n+r-1) + \cdots + p_r(n)x(n) = g(n), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{1.10}$$

avec $p_i(n)$*,* $i \in \{1,\ldots,r\}$ *et* $g(n)$ *des fonctions réelles définies sur* $\mathbb{N}_{n_0}$ *et* $p_r(n) \neq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}_{n_0}$*, s'appelle équation aux différences linéaire non homogène d'ordre* r*.*

Définition 1.7.2 *On appelle équation homogène associée à l'équation* (1.10) *l'équation*

$$x(n+r) + p_1(n)x(n+r-1) + \cdots + p_r(n)x(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{1.11}$$

Exemple 1.7.1 *On considère l'équation aux différences linéaires d'ordre* 2 *suivante*

$$x(n+2) + \frac{n}{n+1}x(n+1) - 3x(n) = n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.12}$$

avec $x(0) = 1$ *et* $x(1) = -1$ *et on calcule* $x(3)$ *et* $x(4)$*.*

D'abord, nous récrivons l'équation (1.12) *sous la forme*

$$x(n+2) = \frac{-n}{n+1}x(n+1) + 3x(n) + n. \tag{1.13}$$

Posons $n = 0$ *dans l'équation* (1.13)*, on aura*

$$x(2) = 3x(0) = 3.$$

Pour $n = 1$*, on obtient*

$$x(3) = \frac{-1}{2}x(2) + 3x(1) + 1 = \frac{-7}{2}.$$

1.7.1 Opérateurs linéaires

Si E et F sont deux espaces vectoriels, (sur le méme corps $\mathbb{K}$), une application T entre E et F , est dite linéaire si :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E : T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

On désigne par $L(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires entre E et F, en particulier on pose $L(E, E) = L(E)$, et $L(E, \mathbb{K}) = E^*$: c'est l'espace des formes linéaires sur E (le dual algébrique). Si les espaces vectoriels E et F sont munis d'une structure topologique on aura la définition suivante :

Définition 1.7.3 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Une application linéaire $T \in L(E, F)$ sera dite opérateur linéaire de E dans F.*

Proposition 1.7.1 *Soit l'opérateur L défini par*

$$Lx(n) = \sum_{i=0}^{r} p_i(n) x(n + r - i), n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{1.14}$$

Alors L est linéaire.

Preuve. *Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\begin{aligned} L\left(\alpha x(n) + \beta y(n)\right) &= \sum_{i=0}^{r} p_i(n) \left(\alpha x(n + r - i) + \beta y(n + r - i)\right) \\ &= \alpha \sum_{i=0}^{r} p_i(n) x(n + r - i) + \beta \sum_{i=0}^{r} p_i(n) y(n + r - i) \\ &= \alpha L x(n) + \beta L y(n). \end{aligned}$$

■

Remarque 1.7.1 *Soit L défini par (1.14), alors l'équation (1.10) prend la forme*

$$Lx(n) = g(n), \quad n \in \mathbb{N}_{n_0} \tag{1.15}$$

et l'équation (1.11)

$$Lx(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}, \tag{1.16}$$

avec $p_0(n) = 1$.

Définition 1.7.4 *Soient* $x_1(n), x_2(n), \ldots, x_r(n)$ *pour* $n \geqslant n_0$*, des solutions de l'équation* (1.16)*. On définit le casoratien* $W(n)$ *de ces solutions par*

$$W(n) = \begin{vmatrix} x_1(n) & x_2(n) & \cdots & x_r(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) & \cdots & x_r(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(n+r-1) & x_2(n+r-1) & \cdots & x_r(n+r-1) \end{vmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}_{n_0}. \tag{1.17}$$

Exemple 1.7.2 *Considérons l'équation aux différences suivante*

$$x(n+2) + \frac{3}{2}x(n+1) + \frac{1}{2}x(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.18}$$

Vérifions que $(-1)^n$ *et* $(-\frac{1}{2})^n$ *pour* $n \geqslant n_0$*, sont des solutions de l'équation* (1.18) *et calculons leur casoratien.*

On a

$$(-1)^{n+2} + \frac{3}{2}(-1)^{n+1} + \frac{1}{2}(-1)^n = 0.$$

et

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} = 0.$$

Par définition, le casoratien $W(n)$ *de* $(-1)^n$ *et* $(-\frac{1}{2})^n$ *pour* $n \geqslant n_0$ *est*

$$\begin{aligned} W(n) &= \begin{vmatrix} (-1)^n & (-\frac{1}{2})^n \\ (-1)^{n+1} & (-\frac{1}{2})^{n+1} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n} (-1)^{n+1} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

1.7.2 Le déterminant de Vandermonde

Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $a_1, \ldots, a_n$, n éléments d'un corps commutatif $\mathbb{K}$. On appelle déterminant de Vandermonde, l'élément de $\mathbb{K}$ défini par :

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Relation de récurrence

On rappelle qu'on ne change pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une ligne (resp. une colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (resp. colonnes). Notons $L_1, \ldots, L_n$ les lignes du déterminant ci-dessus. Pour tout $k \in \{2, \cdots, n\}$, effectuons l'opération suivante : $L_k \leftarrow L_k - L_1$.

On a alors :

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 0 & a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 & \cdots & a_2^{n-2} - a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_n - a_1 & a_n^2 - a_1^2 & \cdots & a_n^{n-1} - a_1^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Effectuons un développement suivant la première colonne, puis mettons en facteur $a_k - a_1$ sur chaque ligne ($k \in \{2, \cdots, n\}$) :

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{2 \leqslant k \leqslant n} (a_k - a_1) \times \begin{vmatrix} 1 & a_2 + a_1 & a_2^2 + a_1 a_2 + a_1^2 & \cdots & a_2^{n-2} + a_1 a_2^{n-3} + \cdots + a_1^{n-2} \\ 1 & a_3 + a_1 & a_3^2 + a_1 a_3 + a_1^2 & \cdots & a_3^{n-2} + a_1 a_3^{n-3} + \cdots + a_1^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n + a_1 & a_n^2 + a_1 a_n + a_1^2 & \cdots & a_n^{n-2} + a_1 a_n^{n-3} + \cdots + a_1^{n-2} \end{vmatrix}.$$

En effectuant successivement les opérations $C_k \leftarrow C_k - \sum_{i=1}^{k-1} a_1^i C_i$ pour $k \in \{2, \cdots, n-1\}$, on obtient :

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{2 \leqslant k \leqslant n} (a_k - a_1) \times \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{2 \leqslant k \leqslant n} (a_k - a_1) \times V(a_2, \ldots, a_n).$$

Démonstration par récurrence

Pour n entier supérieur ou égal à 2, on note $\rho(n)$ la propriété :

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i).$$

Pour $n = 2$: soient $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$, $\quad V(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)$ donc $\rho(2)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Supposons $\rho(n)$ vraie. Soient $a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} V(a_1, \ldots, a_{n+1}) &= \prod_{2 \leqslant k \leqslant n+1} (a_k - a_1) \times V(a_2, \ldots, a_{n+1}) \quad \text{(relation de récurrence)} \\ &= \prod_{2 \leqslant k \leqslant n+1} (a_k - a_1) \times \prod_{2 \leqslant i < j \leqslant n+1} (a_j - a_i) \quad \text{(hypothése de récurrence)} \\ &= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (a_j - a_i). \end{aligned}$$

donc $\rho(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, on en déduit que $\rho(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

Chapitre 2

Suites de Fibonacci d'ordre supérieur

Le présent chapitre est consacré à quelques propriétés essentielles qui caractérisent les suites de Fibonacci généralisées, la première section porte sur un survol historique sur les suites de Fibonacci généralisées. L'objectif de la deuxième section est de présenter quelques propriétés concernant la classe des suites de Fibonacci généralisées d'ordre fini. Enfin dans la troisième section, nous proposons un descriptif non exhaustif des différents champs d'application des suites de Fibonacci généralisées d'ordre fini. Nous nous focalisons particulièrement, dans ce chapitre, sur les outils développés par Mouline et Rachidi (Voir [38],[35],[36],[37]).

2.1 Introduction : histoire et définition générale

La suite de Fibonacci fut introduite (vers 1200) par le mathématicien Italien Léonard de Pise (Pise, vers 1170 - vers 1250), surnommé Fibonacci, dans le but de décrire l'evolution d'une population de lapins. Léonard de Pise fut l'un des grands mathématiciens européens de son époque, auteur de plusieurs livres de géométrie et d'arithmétique. Il est d'ailleurs connu pour avoir été le premier à populariser en Europe la numérotation indo-arabe. Malgré ses nombreuses contributions aux mathématiques, Fibonacci est célébré, de nos jours, par la mise au point d'une suite de nombres entiers, qui a été introduite dans son ouvrage Liber abaci (le livre des calculs). Cette suite est issue d'un probléme de dynamique des populations. Plus précisément, le problème consiste à calculer le nombre F_n de couples

de lapins engendré en une génération (un an), en partant d'un unique couple de lapins, sous la contrainte que chaque couple donne naissance tous les mois à un nouveau couple (et ne meurt jamais), et ceci à compter du troisième mois de son existence. La suite de Fibonacci $(F_n)_n$ est apparue, comme étant la solution de ce problème. la suite $(F_n)_n$ réside dans le fait que chaque nombre F_n, à partir du troisième ($n \geqslant 3$), est la somme des deux précédents, ce qui se traduit par la formule

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n \geqslant 1 \tag{2.1}$$

où $F_1 = F_2 = 1$. Les entiers naturels $(F_n)_{n\geqslant 1}$ sont appelés nombres de Fibonacci (Voir [29],[24])

Bien que tous les termes de la suite de nombres de Fibonacci peuvent être calculé à partir de la relation de récurrence (2.1), et des valeurs initiales $F_1 = F_2 = 1$, il s'est avéré nécessaire de déterminer une expression analytique explicite du terme général de la suite $(F_n)_{n\geqslant 1}$, afin d'éviter de calculer tous les nombres de Fibonacci précédents. Une telle expression, appelé formule de Binet, fut découverte par Jacques-Philippe-Marie Binet en 1843. Cette formule permet d'exprimer la suite de Fibonacci à partir de puissances faisant intervenir le nombre d'or $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; elle s'écrit de la façon suivante :

$$F_n = \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\alpha_1 - \alpha_2},$$

où $\alpha_2 = \frac{-1}{\alpha_1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Le lien étroit de la suite de Fibonacci avec le nombre d'or apparaît également (dans le sens inverse), dans le fait que le rapport de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci tend vers le nombre d'or quand leur rang n augmente indéfiniment, i.e., $\alpha_1 = \frac{F_{n+1}}{F_n}$. Ce résultat fut découvert pour la première fois, de manière empirique, par Johannes Kepler $(1571 - 1630)$, qui avait remarqué que les quotients de deux termes consécutifs représentent la meilleure approximation du nombre d'or α_1.
La formule mathématique de la suite de Fibonacci (2.1) fut adoptée la première fois en 1876, par le mathématicien francais François Edouard Anatole Lucas. On doit également à Lucas de nombreuses contributions à l'étude des nombres de Fibonacci, et notamment à l'exploration des généralisations de la suite (2.1) (Voir [24],[33])

A ce jour, plusieurs formes de généralisations de la suite des nombres de Fibonacci (2.1) ont été étudiées dans la littérature. Dans le présent travail, nous allons considérer une généralisation basée sur l'extension de la relation de récurrence (d'ordre 2) définissant la suite des nombres de Fibonacci (2.1), combinée avec l'introduction de conditions initiales plus générales et d'une pendération définie à l'aide de coefficients. Plus précisément.

Définition 2.1.1 *On considère deux suites finies de nombres réelles ou complexes* $\{a_0, \ldots, a_{r-1}\}$ *et* $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_{r-1}\}$ *où* $r \geqslant 2$ *est un entier. On considère la suite* $(U_n)_{n\geqslant 0}$*, définie par :*

$$\begin{cases} U_n = \alpha_n \text{ pour } n = 0, 1, \ldots, r-1, \\ U_{n+1} = a_0 U_n + \cdots + a_{r-1} U_{n-r+1}, n \geqslant r-1. \end{cases} \tag{2.2}$$

La suite (2.2) *est connue dans la littérature sous le nom de suite de Fibonacci* r*- généralisée (ou généralisée d'ordre* r*), ayant pour coefficients* $a_0, \ldots, a_{r-1} (a_{r-1} \neq 0)$ *et pour conditions initiales* $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_{r-1}\}$ *(ou tout simplement* $\{U_0, \ldots, U_{r-1}\}$*). Parfois, les conditions initiales sont considérées à partir de l'indice* $i = -r+1$*, i.e.,*$\{U_{-r+1}, \ldots, U_0\}$.

2.2 Propriétés des suites de Fibonacci généralisées d'ordre r

Cette section est dévouée à certaines propriétés des suites de Fibonacci généralisées d'ordre fini (2.2), liées en particulier à la représentation explicite du terme général de ces suites. Dans le premier paragraphe nous évoquons quelques généralités importantes sur les suites (2.2). Tandis que dans les deux autres paragraphes, nous nous intéressons à l'expression combinatoire et l'expression analytique (formule de Binet).

2.2.1 Généralités

Soit $(U_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de Fibonacci r-généralisée $(r \geqslant 2)$ donnée par (2.2), et ayant pour coefficients $a_0, \ldots, a_{r-1}$et pour conditions initiales $U_0, \ldots, U_{r-1}$.
Le polynôme suivant

$$P(z) = z^r - \sum_{i=0}^{r-1} a_i z^{r-1-i} = z^r - a_0 z^{r-1} - a_1 z^{r-2} - \cdots - a_1 z - a_{r-1} \tag{2.3}$$

est appelée polynôme caractéristique de la suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$. Toute racine λ de l'équation algébrique $P(z) = 0$ est appelée racine caractéristique de la suite (2.2).

Proposition 2.2.1 *(Voir [47])*

1. *Soit $\varepsilon_{\mathbb{K}}^r$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) l'ensemble des suites de Fibonacci r-généralisées. Alors, $\varepsilon_{\mathbb{K}}^r$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les opérations d'addition de suites et de multiplication de suites par un scalaire.*
2. *Soient $a_0, \ldots, a_{r-1}(a_{r-1} \neq 0)$ des éléments de $\mathbb{K}$ et $\varepsilon_{\mathbb{K}}^p(a_0, \ldots, a_{r-1})$, l'espace des suites de Fibonacci r-généralisées ayant pour coefficients $a_0, \ldots, a_{p-1}$. Alors, $\varepsilon_{\mathbb{K}}^p(a_0, \ldots, a_{p-1})$ est un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\varepsilon_{\mathbb{K}}^r$.*

Le sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel $\varepsilon_{\mathbb{K}}^r(a_0, \ldots, a_{r-1})$ est formé par les suites de Fibonacci généralisées d'ordre r ayant le même polynôme caractéristique, donné par (2.3). Cela signifie qu'elles admettent également les mêmes racines caractéristiques. Ces nombres (réels ou complexes) interviennent dans la représentation explicite du terme général des éléments de $\varepsilon_{\mathbb{K}}^r(a_0, \ldots, a_{r-1})$ (se reporter au paragraphe $2.2.3$).
Les suites de Fibonacci généralisées d'ordre fini (2.2) peuvent se décliner sous différentes formes. En effet, considérons les équations (aux différences) linéaires homogènes d'ordre r $(r \geqslant 2)$ à coefficients variables, définies par :

$$x(n+r) + \alpha_0(n)x(n+r-1) + \cdots + \alpha_{r-1}(n)x(n) = 0, \tag{2.4}$$

où $\alpha_i(n)$ sont des fonctions réelles avec $\alpha_{r-1}(n) \neq 0$. Evidemment, les suites de Fibonacci r-généralisées représentent des équations linéaires homogènes d'ordre r, du type (2.4), qui sont à coefficients constants.

Par ailleurs, on peut vérifier que l'expression (2.2) est équivalente à l'expression matricielle suivante :

$$Y_{n+1} = CY_n, \qquad n \geqslant r-1, \tag{2.5}$$

où

$$Y_n = \begin{pmatrix} U_n \\ \vdots \\ U_{n-p+1} \end{pmatrix} \quad et \quad C = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{p-1} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette expression est équivalente à celle qui est considérée dans [25] et[28].

La représentation matricielle (2.5) est l'un des points de départ des travaux de Mouline et Rachidi (Voir [38],[35],[36],[37]), portant sur l'étude des suites (2.2). En fait, ils commencent par établir une connexion entre les suites de Fibonacci généralisées à coefficients réels non négatifs et les chaines de Markov. Ensuite, ils établissent des formules explicites des limites, ainsi que des critères sur la convergence de ces suites. Mouline et Rachidi, introduisent une autre expression matricielle des suites de Fibonacci généralisées d'ordre fini, définie par :

$$\mathbb{X} = \mathbb{P}\mathbb{X}$$

où $\mathbb{X}$ est le vecteur infini $\mathbb{X} = {}^t(U_0, \ldots, U_{r-1}, U_r, \ldots, U_n, \cdots)$ et $\mathbb{P}$ est la matrice infinie donnée par :

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} I_r & | & 0 & 0 & & 0 & \cdots \\ a_{r-1} & a_{r-2} & \cdots & a_0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_{r-1} & a_{r-2} & \cdots & a_0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & a_{r-1} & \cdots & & a_0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

où I_r est la matrice identité $r \times r$. Ensuite, en partant de cette connexion, ils étudient la représentation combinatoire des suites (2.2) à coefficients non négatifs. Enfin, ils généralisent les propriétés obtenues au cas où les coefficients sont des réels ou des complexes quelconques .

2.2.2 Expression combinatoire

Plusieurs méthodes ont été développées pour étudier la représentation combinatoire du terme général des suites de Fibonacci d'ordre fini (2.2). En utilisant la fonction géné-

ratrice de la suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$, Levesque [34] a obtenu une première formule dans le cas des racines caractéristiques simples. Avec la même technique, Philippou [39] a retrouve la même formule dans un cadre plus général.
La proposition suivante fournit une expression de la fonction génératrice associée à une suite du type (2.2), en fonction des conditions initiales.

Proposition 2.2.2 *(Voir [44]) Soit $(U_n)_{n\geqslant 0}$ une suite du type (2.2) et $G(t)$ sa fonction génératrice. Alors $G(t)$ est analytique sur l'intervalle $\mid t \mid < min\{\mid \lambda_1 \mid^{-1}, \ldots, \mid \lambda_s \mid^{-1}\}$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ sont les racines caractéristiques de $(U_n)_{n\geqslant 0}$, elle est donnée par :*

$$G(t) = \frac{U_0 + \sum_{i=1}^{p-1} t^i [U_i - \sum_{j=1}^{i} a_{j-1} U_{i-j}]}{1 - (a_0 t + a_1 t^2 + \cdots + a_{r-1} t^r)}.$$

Dans [39], Philippou utilise cette formule pour retrouver une expression combinatoire pour les suites du type (2.2).

En effet,en considérant la suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ définie par (2.2) (et en supposant que $U_0 = 0$), on a :

$$\begin{aligned} G(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} t^n U_n \\ &= \sum_{i=1}^{r-1} t^i V_i \sum_{n=0}^{+\infty} (a_0 t + a_1 t^2 + \cdots + a_{r-1} t^r)^n \end{aligned}$$

où $V_i = U_i - \sum_{j=1}^{i} a_{j-1} U_{i-j}$, par conséquent,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} t^n U_n &= \sum_{i=1}^{r-1} t^i V_i \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{k_0,k_1,\ldots,k_{r-1} \\ k_0+k_1+\cdots+k_{r-1}=n}} \binom{n}{k_0, k_1, \ldots, k_{r-1}} a_0^{k_0} a_1^{k_1} \ldots a_{r-1}^{k_{r-1}} t^{k_0+2k_1+\cdots+rk_{r-1}} \\ &= \sum_{i=1}^{r-1} t^i V_i \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \sum_{\substack{k_0,k_1,\ldots,k_{r-1} \\ k_0+2k_1+\cdots+rk_{r-1}=k}} \binom{k_0+k_1+\cdots, k_{r-1}}{k_0, k_1, \cdots, k_{r-1}} a_0^{k_0} a_1^{k_1} \ldots a_{r-1}^{k_{r-1}}. \end{aligned}$$

Finalement, par egalite des termes correspondants aux monômes de même degré, on obtient la formule combinatoire suivante :

$$U_k = \sum_{i=1}^{r-1} V_i t^i \sum_{\substack{k_0,k_1,\ldots,k_{r-1} \\ k_0+2k_1+\cdots+rk_{r-1}=k-i}} \binom{k_0+k_1+\cdots, k_{r-1}}{k_0, k_1, \ldots, k_{r-1}} a_0^{k_0} a_1^{k_1} \ldots a_{r-1}^{k_{r-1}}.$$

Dans [17], Chen et Louck considèrent une matrice compagnon d'ordre n, par la suite ils mettent au point une représentation combinatoire de la suite engendrée par cette matrice. En étudiant l'aspect stochastique de l'équation matricielle (2.6)*, Mouline et Rachidi [37] établissent la formule suivante,*

$$U_n = Z_0\rho(n,r) + Z_1\rho(n-1,r) + \cdots + Z_{r-1}\rho(n-r+1,r) \tag{2.7}$$

pour tout $n \geqslant r$*, avec* $Z_k = a_{r-1}U_k + \cdots + a_kU_{r-k}(k = 0,\ldots,r-1)$ *et*

$$\rho(k,r) = \sum_{k_0+2k_1+\cdots+rk_{r-1}=k-r} \frac{(k_0+k_1+\cdots+k_{r-1})!}{(k_0)!(k_1)!\cdots(k_{r-1})!} a_0^{k_0}a_1^{k_1}\cdots a_{r-1}^{k_{r-1}} \tag{2.8}$$

tels que $\rho(r,r) = 1$ *et* $\rho(n,r) = 0$ *pour* $n \leqslant r-1$*. Ce résultat a été démontré par le moyen des chaînes de Markov.*

Pour simplifier la manipulation de la formule (2.7)*, plusieurs travaux ont été menés sur l'expression des* $\rho(n,r)$ *en fonction des racines caractéristiques de la suite* $(U_n)_{n\geqslant 0}$*.*

Notons que, lorsque les coefficients $\{a_0,\ldots,a_{r-1}\}$ *de la suite* $(U_n)_{n\geqslant 0}$ *sont réels, la suite* $(\rho(n,r))_{n\geqslant 0}$ *est une suite de Fibonacci* r*-généralisée dont les conditions initiales sont* $\rho(1,r) = \cdots = \rho(r-1,r) = 0$ *et* $\rho(r,r) = 1$*, [37] En plus, le polynôme caractéristique de cette suite coïncide avec celui de la suite de Fibonacci* $(U_n)_{n\geqslant 0}$*, i.e.,*

$$\rho(n+1,r) = a_0\rho(n,r) + a_1\rho(n-1,r) + \cdots + \rho(n-r+1,r).$$

Lorsque de plus les $\{a_0,\ldots,a_{r-1}\}$ *sont non négatifs de somme égale à* 1*, pour tout* $n \geqslant r$*,* $\rho(n,r)$ *est la probabilité d'atteindre l'état* n *en partant de l'état transitoire* r *(Voir [37]).*

2.2.3 La formule de Binet de la suite de Fibonacci r-généralisée

Dans ce paragraphe nous proposons une formulation des termes $(U_n)_{n\geqslant r}$, en fonction des puissances n-ième des racines caractéristiques de cette suite. Il s'agit dans ce contexte d'une extension de la formule de Binet associée à la suite de Fibonacci, mentionnée dans la premiére section de ce chapitre. Dans ce cas particulier les coefficients ϕ (nombre d'or) et $\varphi = \frac{-1}{\phi}$ sont les racines de l'équation du second degré $x^2 - x - 1 = 0$, dans le cas d'une suite de Fibonacci généralisée (2.2), le terme général U_n peut également s'exprimer à l'aide des racines caractéristiques du polynôme $P(z)$, donné par (2.3), comme suit.

Théorème 2.2.1 *(Dubeau-Motta-Rachidi-Saeki)(Voir [21]) Supposons que* (2.2) *admet les racines caractéristiques* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ *dont les multiplicités sont* $m_1, m_2, \ldots, m_s$*, respectivement* $m_1 + m_2 + \cdots + m_s = r$*. Alors, l'équation* (2.2) *admet* r *solutions indépendantes :*

$$n^j \lambda_i^n \text{ tels que } i = 1, \ldots, s; \quad j = 0, \ldots, m_i - 1.$$

En outre, toute solution de l'équation (2.2) *s'écrit de la manière suivante*

$$U_n = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_i - 1} C_{i,j} n^j \lambda_i^n, \quad n \geqslant 0, \tag{2.9}$$

tels que les coefficients $C_{i,j}$ *sont obtenus à partir des conditions initiales* $\{U_0, \ldots, U_{r-1}\}$.

Dans le Lemme suivant, les coefficients $C_{i,j}$ sont explicitement donnés en fonction des nombres de Stirling de prepière espèce et des $\gamma_j^{[i]}$,

$$\gamma_j^{[i]} = \gamma_j^{[i]}(\lambda_1, \ldots, \lambda_s) = \begin{cases} (-1)^{m-m_i} \displaystyle\sum_{\sum n_t = m_i - j - 1} \left[\prod_{1 \leqslant t \neq i \leqslant s} \frac{\binom{n_t + m_t - 1}{n_t}}{(\lambda_t - \lambda_i)^{n_t + m_t}} \right], & \text{si } 1 < s < d, \\ 1 \text{ lorsque } j = d - 1 \text{ et } 0 \text{ sinon}, & \text{si } s = 1, \end{cases} \tag{2.10}$$

pour tout $j = 0, \ldots, m_i - 1$ et $i = 1, \ldots, s$.

Lemme 2.2.1 *Les coefficients* $C_{i,j}$*, donnés par* (2.9)*, sont explicitement exprimés comme suit :*

$$C_{i,j} = \sum_{h=j}^{m_i - 1} \lambda_i^{m-1-h} \gamma_h^{[i]} \sum_{k=j}^{h} \binom{m-1}{h-k} \frac{S_{k,j}}{k!},$$

où $S_{k,j}$ *sont les nombres de Stirling de prepière espèce.*

Corollaire 2.2.1 *Soient* $a_0, \cdots, a_{r-1} (a_{r-1} \neq 0)$ *des éléments de* $\mathbb{K}$ *et* $\varepsilon_{\mathbb{K}}^{(r)}(a_0, \cdots, a_{r-1})$ *l'espace des suites de Fibonacci généralisées ayant pour coefficients* $a_0, \cdots, a_{r-1}$*. Si* $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_s$ *sont les racines caractéristiques du polynôme* (2.3)*, ayant pour multiplicités* $m_1, m_2, \ldots, m_s$*, respectivement* $(m_1 + m_2 + \cdots + m_s = r)$*, alors le système* $\{n^j \lambda_i^n \; tel \; que \; i = 1, \ldots, s; \quad j = 0, \ldots, m_i - 1\}$ *est une base du* K*-espace vectoriel* $\varepsilon_{\mathbb{K}}^{(r)}(a_0, \ldots, a_{r-1})$.
Les scalaires $C_{i,j}$ *dans l'expression* (2.9) *sont obtenus à partir de la résolution du système de Vandermonde généralisé suivant :*

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_i - 1} C_{i,j} n^j \lambda_i^n = U_n, \qquad n = 0, 1, \ldots, r - 1. \tag{2.11}$$

Rappelons que le déterminant de la matrice associée à ce systéme, qui est non nul, est explicitement donn'e par $W_g = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant s}(\lambda_j - \lambda_i)^{m_j m_i}$. *D'où l'existence et l'unicité de la solution de ce système. Précisons que ce résultat est du au fait que* W_g *est le casoratien (considéré en* 0, *i.e.,* $W_g = W_g(0) \neq 0$*) des solutions de l'équation (1.2). On en déduit que*

$$U_n = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{m_i-1} C_{i,j} n^j \lambda_i^n$$

est la solution générale (unique) de (1.2), *vue comme equation aux différences.*
Lorsque toutes les racines caractéristiques $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ *sont simples* $(m_1 = m_2 = \cdots = m_s = 1)$, *le casoration des solutions de l'équation* (2.2) *est le déterminant de Vandermonde classique :*

$$\begin{aligned} W &= det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_r \\ \vdots & . & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \lambda_2^{r-2} & & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix}, \\ &= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant s} (\lambda_j - \lambda_i). \end{aligned}$$

Par ailleurs, notons que la formule de Binet s'est déclinée sous différentes formes dans les travaux de Rachidi et al.. En effet, dans [12] Ben Taher et Rachidi ont présenté la formule de Binet sous trois formes équivalentes. Dans [13], la formule de Binet a été exprimée sous une forme factorielle, mettant en jeu un aspect combinatoire. Plus précisément, puisque $z^{n-r}P(z) = z^n - a_0 z^{n-1} - \cdots - a_{n-2}z^{n-r+2} - a_{r-1}z^{n-r+1}$, *où* $P(z)$ *est le polynôme caractéristique* (2.3), *ayant* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ *pour racines caractéristiques, d'ordres de multiplicités* $m_1, m_2, \cdots, m_s$, *respectivement. Le processus de dérivation jusqu'a l'ordre* j, *implique que les* $\lambda_i,\ (1 \leqslant i \leqslant s)$ *vérifient la relation suivante,*

$$\frac{n}{(n-j)}\lambda_i^{n-j} - a_0\frac{(n-1)}{(n-1-j)}\lambda_i^{n-1-j} - \cdots - a_{r-1}\frac{(n-r+1)}{(n-r+1-j)}\lambda_i^{n-r+1-j} = 0$$

pour tout $n \geqslant r + j$. *D'où le résultat suivant.*

Proposition 2.2.3 *(Voir [13])*

1. *Soit*

$$y_n^{i,j} = \frac{n}{(n-j)}\lambda_i^{n-j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m_i, 1 \leqslant i \leqslant s.$$

L'ensemble $\{(y_n^{i,j})_{n\geqslant -r+1}; 1 \leqslant j \leqslant m_i, 1 \leqslant i \leqslant s\}$ *est une base du* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* $\varepsilon_{\mathbb{C}}^r(a_0, a_1, \cdots, a_{r-1})$.

2. Formule de Binet Factorielle

Soit $(U_n)_{n\geqslant -r+1}$ *une suite de* $\varepsilon_{\mathbb{C}}^r(a_0, a_1, \cdots, a_{r-1})$. *Alors, il existe* r *nombres uniques* $\alpha_{i,j}(1 \leqslant j \leqslant m_i, 1 \leqslant i \leqslant s)$ *tels que*

$$U_n = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_i-1} \alpha_{i,j} \frac{n}{(n-j)} \lambda_i^{n-j},$$

pour tout $n \geqslant 0$. *Les* $\alpha_{i,j}$ *sont déterminés à partir des conditions initiales.*

Chapitre 3

La suite r-Fibonacci généralisée et la suite r-Lucas de type s

A la suite de Fibonacci est associée une suite qui lui est trés liée, dite suite compagnon de Lucas.

Certaines identités liées à ces deux suites seront présentées dans le paragraphe suivant, on donne maintenant l'expression de ces deux suites en fonction des coefficients binomiaux. La liaison entre ces deux suites avec le triangle de Pascal joue un rôle primordial pour les différentes généralisations.

La relation $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ (Formule de Pascal) entraîne que la suite $a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-1-k}{k}$ $(n \geqslant 0)$ vérifie la récurrence $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, et comme $a_0 = 0, a_1 = 1$, alors $a_n = F_n \quad (n \geqslant 0)$, D'où

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} \quad (n \geqslant 0).$$

Le tableau suivant [6] montre la liaison entre le triangle de Pascal et la suite de Fibonacci ; $0, 1, 1, 2, 3, 5, \ldots$

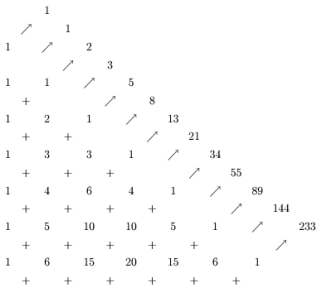


FIGURE 3.1 – Le triangle de Pascal et la suite de Fibonacci

De la relation bien établie $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$, on déduit pour $n \geqslant 1$ (L_0 étant égal à 2) l'expression

$$L_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(1 + \frac{k}{n-k}\right) \binom{n-k}{k},$$

Le tableau suivant [6] montre la liaison entre le triangle de Pascal et la suite de Lucas ; $2, 1, 3, 4, 7, 11, \ldots$

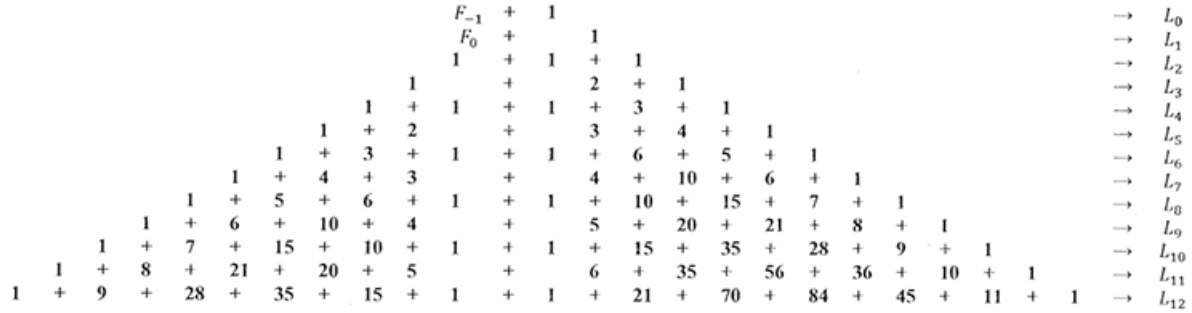


FIGURE 3.2 – Le triangle de Pascal et la suite de Lucas

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, pour tout entier $n \geqslant 2$ la suite de Fibonacci généralisée $(U_n(x,y)) = (U_n)_{n\geqslant 1}$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} U_0 = 0, U_1 = 1 \\ U_n = xU_{n-1} + yU_{n-2}, \quad (n \geqslant 2). \end{cases}$$

Et la suite de Lucas $(V_n(x,y)) = (V_n)_{n\geqslant 1}$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} V_0 = 2, V_1 = x, \\ V_n = xV_{n-1} + yV_{n-2}, \quad (n \geqslant 2). \end{cases}$$

3.1 Polynômes r-Fibonacci et r-Lucas généralisés

Pour un entier $r \geqslant 0$ notons par $U_n^{(r)}$ les Polynômes définis pour $n \geqslant 0$, par

$$U_{n+1}^{(r)} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1) \rfloor} \binom{n-rk}{k} x^{n-(r+1)k} y^k,$$

Une autre généralisation de la suite de Fibonacci est la suite nommée la r-Fibonacci généralisée. Elle a été introduite par Raab [42] et elle est définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} U_0^{(r)} = 0, U_k^{(r)} = x^{k-1}, \quad (1 \leqslant k \leqslant r), \\ U_{n+1}^{(r)} = xU_n^{(r)} + yU_{n-r}^{(r)}, \quad (n \geqslant r). \end{cases} \tag{3.1}$$

La suite r-Lucas généralisée définie par

$$V_n^{(r)} := U_{n+1}^{(r)} + yU_{n-r}^{(r)},$$

satisfont, la récurrence

$$\begin{cases} V_0^{(r)} = 2, V_k^{(r)} = x^k, \quad (1 \leqslant k \leqslant r), \\ V_{n+1}^{(r)} = xV_n^{(r)} + yV_{n-r}^{(r)}, \quad (n \geqslant r). \end{cases} \tag{3.2}$$

Et admettent, pour $n \geqslant 1$, la forme explicite

$$V_n^{(r)} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1) \rfloor} (1 + \frac{k}{n-rk}) \binom{n-rk}{k} x^{n-(r+1)k} y^k.$$

Pour le cas particulier $r = 2$ les figures suivantes [6] montrent la liaison entre le triangle de Pascal et les suite $(U_n^{(r)})$ et $(V_n^{(r)})$.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & \to & U_1^{(2)}(x,y) \\
 & & & & & & & x & & \to & U_2^{(2)}(x,y) \\
 & & & & & & x^2 & & & \to & U_3^{(2)}(x,y) \\
 & & & & & x^3 & + & & y & \to & U_4^{(2)}(x,y) \\
 & & & & x^4 & + & & 2xy & & \to & U_5^{(2)}(x,y) \\
 & & & x^5 & + & & 3x^2y & & & \to & U_6^{(2)}(x,y) \\
 & & x^6 & + & & 4x^3y & + & & y^2 & \to & U_7^{(2)}(x,y) \\
 & x^7 & + & & 5x^4y & + & & 3xy^2 & & \to & U_8^{(2)}(x,y) \\
x^8 & + & & 6x^5y & + & & 6x^2y^2 & & & \to & U_9^{(2)}(x,y) \\
+ & & 7x^6y & + & & 10x^3y^2 & + & & y^3 & \to & U_{10}^{(2)}(x,y) \\
 & 8x^7y & + & & 15x^4y^2 & + & & 4xy^3 & & \to & U_{11}^{(2)}(x,y) \\
9x^8y & + & & 21x^5y^2 & + & & 10x^2y^3 & & & \to & U_{13}^{(2)}(x,y)
\end{array}$$

FIGURE 3.3 – Le triangle de Pascal et la suite 2-Fibonacci

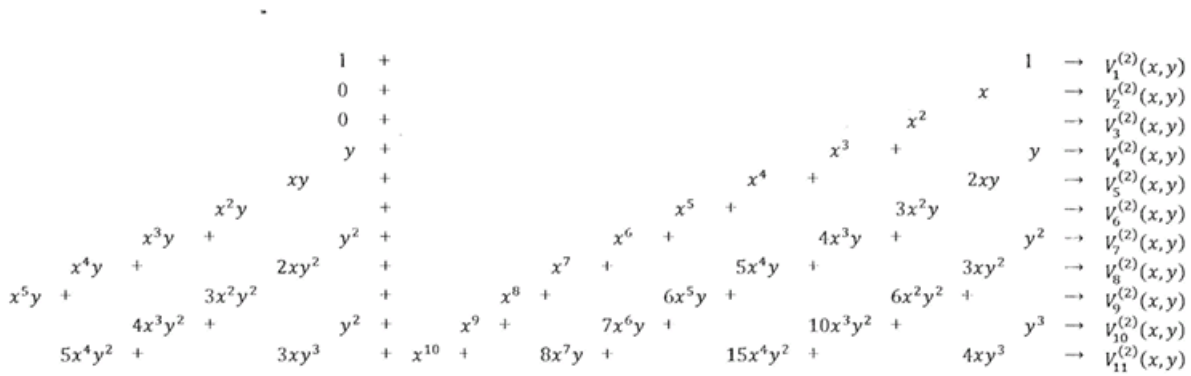


FIGURE 3.4 – Le triangle de Pascal et la suite 2-Lucas

Les fonction génératrices des suites $(U_n^{(r)})$ et $(V_n^{(r)})$ sont données par :

$$U(z) = \sum_{n\geqslant 0} V_n^{(r)} z^n = \frac{2 - xz}{1 - xz - yz^{r+1}}. \tag{3.3}$$

$$V(z) = \sum_{n\geqslant 0} U_{n+1}^{(r)} z^n = \frac{1}{1 - xz - yz^{r+1}}. \tag{3.4}$$

Remarque 3.1.1 *Le cas particulier $(x, y) = (1, z)$ permet de retrouver les polynômes de Fibonacci $U_n(z)$ et les polynômes de Lucas $V_n(z)$. De plus ce cas particulier engendre le cas général puisque*

$$U_{n+1}(x, y) = x^n U_{n+1}(y/x^2) \quad \textit{et} \quad V_n(x, y) = x^n V_n(y/x^2).$$

3.2 Polynôme r-Lucas de type s

Définition 3.2.1 *Pour tous entiers n, r et s, $1 \leqslant s \leqslant r$, on définit la famille de suites compagnons associées à polynôme r-Fibonacci généralisée $(V_n^{(r)})_n$ par la relation suivante :*

$$\begin{cases} V_0^{(r,s)} = s + 1, V_k^{(r)} = x^k \ \ (1 \leqslant k \leqslant r), \\ V_{n+1}^{(r,s)} = xV_n^{(r,s)} + yV_{n-r}^{(r,s)}, \ \ (n \geqslant r). \end{cases} \tag{3.5}$$

La suite $(V_n^{(r,s)})$ est appelée polynôme r-Lucas de type s.

Remarque 3.2.1 *Pour $s = 0$, nous obtenons un polynôme r-Fibonacci décalé.*
Pour $s = 1$ [9], on nomme $V_n^{(r,1)}$ le polynôme r-Lucas généralisé du second type, et pour $s = r$, on nomme $V_n^{(r,r)}$ le polynôme r-Lucas généralisé du premier type. Le thérorème suivant nous donne une formulation explicite pour $V_n^{(r,s)}$ en termes de s et $U_n^{(r)}$.

Théorème 3.2.2 *: Soient r et s des entiers tels que $1 \leqslant s \leqslant r$, et x, y deux des éléments d'un anneau unitaire A. On suppose que y est inversible dans A, on a pour $r \geqslant n$ ce qui suit :*

$$V_n^{(r,s)} = U_{n+1}^{(r)} + syU_{n-r}^{(r)}. \tag{3.6}$$

nous obtenons également la forme explicite pour $n \geqslant 1$:

$$V_n^{(r,s)} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} \frac{n-(r-s)k}{n-rk}\binom{n-rk}{k} x^{n-(r+1)k}y^k. \tag{3.7}$$

Bellbachir et Bencherif [8] ont donné une formule exprimant le terme général d'une suite récurrence linéaire.

Preuve. Considérons la suite $(V_n^{(r,s)})_{n\geq 0}$ définie par la relation de récurrence (3.2),qui correspond dans la relation (1.6) a : $a_1 = x, a_{r+1} = y$ et $a_2 = a_3 = ... = a_r = 0$. En remarquant que pour tout $0 \leq j \leq r$, on a $u_{-j} = \alpha_j = y^{-1}(U_{r-j+1} - xU_{r-j})$, ce qui donne $\alpha_0 = s + 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_{r-1} = 0$ et $\alpha_r = -sxy^{-1}$. Par conséquent, la suite $(\lambda_j)_{0\leq j\leq r}$ est définie comme suit :

$$\begin{cases} \lambda_0 = s+1 \\ \lambda_j = -\sum_{k=j}^{r} a_{k-j}\alpha_k = -a_{r-j}\alpha_r, \quad 1 \leq j \leq r. \end{cases}$$

Pour $a_0 = -1$, on trouve les valeurs suivantes : $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_{r-2} = 0, \lambda_{r-1} = sx^2y^{-1}$ et $\lambda_r = -sxy^{-1}$.

En utilisant la formule (1.8) du Lemme $(1.4.1)$, on obtient pour tout $n \geq 0$,

$$y_n = \sum_{k_1+(r+1)k_{r+1}=n} \binom{k_1+k_{r+1}}{k_1, k_{r+1}} x^{k_1}y^{k_{r+1}} = \sum_{k\geq 0} \binom{n-rk}{k} x^{n-(r+1)k}y^k = U_{n+1}^{(r)}$$

.

La formule (1.9), nous permet détablir l'expression de $V_n^{(r,s)}$ en fonction de $s, x, y, \lambda_0, ..., \lambda_r$ et $U_n^{(r)}$. D'où pour tout entier $n \geq r$,

$$\begin{aligned} V_n^{(r,s)} &= \lambda_0 U_{n+1}^{(r)} + \lambda_1 U_{n+2}^{(r)} + ... + \lambda_r U_{n+r+1}^{(r)} \\ &= \lambda_0 U_{n+1}^{(r)} + \lambda_{r-1} U_{n+r}^{(r)} + \lambda_r U_{n+r+1}^{(r)} \\ &= (s+1) U_{n+1}^{(r)} + sxy^{-1}\left(xU_{n+r}^{(r)} - U_{n+r+1}^{(r)}\right) \\ &= (s+1) U_{n+1}^{(r)} - sxU_n^{(r)} \\ &= syU_{n-1}^{(r)} + U_{n+1}^{(r)} \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} V_n^{(r,s)} &= U_{n+1}^{(r)} + syU_{n-r}^{(r)} \\ &= \sum_{k\geq 0} \begin{pmatrix} n-rk \\ k \end{pmatrix} x^{n-(r+1)k} y^k + s \sum_{k\geq 0} \begin{pmatrix} n-r-1-rk \\ k \end{pmatrix} x^{n-r-1-(r+1)k} y^k \\ &= \sum_{k\geq 0} \begin{pmatrix} n-rk \\ k \end{pmatrix} x^{n-(r+1)k} y^k + sy \sum_{k\geq 0} \begin{pmatrix} n-1-r(k+1) \\ k \end{pmatrix} x^{n-(r+1)(k+1)} y^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{[n/(r+1)]} \left(1 + s\frac{k}{n-rk}\right) \begin{pmatrix} n-rk \\ k \end{pmatrix} x^{n-(r+1)k} y^k \\ &= \sum_{k=0}^{[n/(r+1)]} \frac{n-(r-s)k}{n-rk} \begin{pmatrix} n-rk \\ k \end{pmatrix} x^{n-(r+1)k} y^k. \end{aligned}$$

■

Remarque 3.2.3 *La relation de récurrence de la suite* $\left(U_n^{(r)}\right)_n$ *sécrit sous forme matriceille comme suit*

$$\mathcal{U}_{n+1}^{(r)} = A_r(x,y)\mathcal{U}_n^{(r)}$$

où $\mathcal{U}_n^{(r)} := \begin{pmatrix} U_n^{(r)} \\ U_{n+1}^{(r)} \\ U_{n+2}^{(r)} \\ \vdots \\ U_{n+r}^{r} \end{pmatrix}$ *pour* $n \geqslant 1$ *et* $A_r(x,y) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & y \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ *appelée matrice compagnon associée à la récurrence linéaire* (3.1).

Par induction sur n, on calcule la puissance $n^{ième}$ de $A_r(x,y)$,

$$A_r{}^n(x,y) = \begin{pmatrix} yU_{n-r}^{(r)} & yU_{n-r+1}^{(r)} & \cdots & yU_{n-1}^{(r)} & yU_n^{(r)} \\ yU_{n-r-1}^{(r)} & yU_{n-r}^{(r)} & \cdots & yU_{n-2}^{(r)} & yU_{n-1}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ yU_{n-2r+1}^{(r)} & yU_{n-2r+2}^{(r)} & \cdots & yU_{n-r}^{(r)} & yU_{n-r+1}^{(r)} \\ U_{n-r+1}^{(r)} & U_{n-r+2}^{(r)} & \cdots & U_n^{(r)} & U_{n+1}^{(r)} \end{pmatrix}.$$

Considérons maintenant pour tout entier s avec $1 \leq s \leq r$, la sous matrice $C_r(x,y)$ d'ordre (s+1), obtenue de la matrice $A_r^n(x,y)$, en supprimant la première ligne et la première colonne. En evaluant la trace $C_s(x,y)$, on retrouve la relation (3.6).

Pour $s = r = 1$, $C_1(x,y) = \begin{pmatrix} yU_{n-1}^{(1)} & yU_n^{(1)} \\ yU_n^{(1)} & U_{n+1}^{(1)} \end{pmatrix}$ et

$$tr(C_1(x,y)) = tr(A_1^n(x,y)) = U_{n+1}^{(1)} + yU_{n-1}^{(1)} = V_n^{(1,1)}.$$

Pour $s = r$ $(r > 1)$, $C_s(x,y) = A_r^n(x,y)$ et $tr(C_s(x,y)) = U_{n+1}^{(r)} + ryU_{n-r}^{(r)} = V_n^{(r,r)}$, Si on prend le cas $s = 2$ et $r = 3$, donc $C_2(x,y)$ est la sous matrice obtenue de $A_3^n(x,y)$ d'ordre 3 , donnée par :

$$C_2(x,y) = \begin{pmatrix} yU_{n-3}^{(3)} & yU_{n-2}^{(3)} & yU_{n-1}^{(3)} \\ yU_{n-4}^{(3)} & yU_{n-3}^{(3)} & yU_{n-2}^{(3)} \\ U_{n-1}^{(3)} & U_n^{(3)} & U_{n+1}^{(3)} \end{pmatrix}$$

donc

$$tr(C_2(x,y)) = U_{n+1}^{(3)} + 2yU_{n-1}^{(3)} = V_n^{(3,2)}.$$

De plus, il existe une représentation déterminante des termes de la suite r-Fibonacci de la forme $U_{(r+1)n+r}^{(r)}$. Kilic et Arikan ont présenté une approche en [30] pour évaluer les déterminants de Hessenberg. Ils ont évalué le déterminant de Hessenberg dont les entrées sont constituées des termes de la suite $\binom{n+m-1}{m}$. En fixant $m = r$, la valeur de ce déterminant est égale à $\sum_{m=0}^{n} \binom{(r+1)n+r(1-k)}{k} = U_{(r+1)n+r}^{(r)}$.

3.3 La fonction génératrice de la suite r-Lucas de type s

Dans cette sous section, nous allons évaluer la fonction génératrice de la suite de Lucas $(V_n^{(r,s)})_{n\geqslant 0}$ pour tout $1 \leqslant s \leqslant r$ dans le théorème suivant :

Théorème 3.3.1 *Soit $A = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, pour $z \in \mathbb{C}$ la fonction génératrice de la suite de r-Lucas de type s est donnée par*

$$V(z) = \sum_{n\geqslant 0} V_n^{(r,s)} z^n = \frac{1+s-sxz}{1-xz-yz^{r+1}}. \tag{3.8}$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}
V(z) &= \sum_{n\geqslant 0} V_n^{(r,s)} z^n \\
&= \sum_{n\geqslant 0} (U_{n+1}^{(r)} + syU_{n-r}^{(r)}) z^n \\
&= \sum_{n\geqslant 0} U_{n+1}^{(r)} z^n + s\sum_{n\geqslant 0} yU_{n-r}^{(r)} z^n \\
&= \sum_{n\geqslant 0} U_{n+1}^{(r)} z^n + s\sum_{n\geqslant 0} (U_{n+1}^{r} - xU_n^r) z^n \\
&= \sum_{n\geqslant 0} U_{n+1}^{(r)} z^n + s\sum_{n\geqslant 0} U_{n+1}^{r} z^n - s\sum_{n\geqslant 0} xU_n^r z^n \\
&= U(z) + sU(z) - sxz\sum_{n\geqslant 1} U_n^r z^{n-1} \\
&= U(z) + sU(z) - sxz\sum_{m\geqslant 0} U_{m+1}^r z^m \\
&= (1+s)U(z) - sxzU(z),
\end{aligned}$$

où $U(z)$ est la série génératrice de la suite $(U_n^{(r)})_{n\geqslant 0}$, d'où $V(z) = \dfrac{1+s-(sxz)}{1-xz-yz^{r+1}}$, ■

3.4 Formule de Binet pour la suite r-Lucas de type s

Afin d'introduire les formes de Binet correspondantes aux suites $(U_n^{(r)})$ et $(V_n^{(r,s)})$, nous allons dans cette sous section, étudier les propriétés de l'équation caractéristique associée aux suites $(U_n^{(r)})$ et $(V_n^{(r,s)})$ donnée par :

$$t^{r+1} - xt^r - y = 0 \tag{3.9}$$

Ces propriétés comprennent le discriminant, l'emplacement des racines et sa réductibilité et solvabilité .

Le polynôme caractéristique associé aux suites $(U_n^{(r)})$ et $(V_n^{(r,s)})$ est

$$P(t) = t^{r+1} - xt^r - y = \prod_{j=1}^{h}(X - \alpha_j)^{r_j},$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_h$ sont les $(r+1)$ racines de l'équation (3.7) de multiplicité r_j et $\sum_{j=1}^{h} r_j = r+1$. En utilisant le critère de De Gua pour trouver des racines imaginaires, nous voyons que l'équation (3.9) a au plus trois racines réelles puisque il y a $(r-1)$ termes successifs absents entre deux termes de même signe et donc il existe au moins $(r-2)$ racines imaginaires. De plus si α est une racine multiple de l'équation (3.9), il est facile de vérifier que $\alpha = rx/(r+1)$ et que l'ordre de multiplicité maximale d'une racine réelle est égal à 2.
Une conéquence immédiate du théorème présédent est que $\alpha = rx/(r+1)$ est une racine multiple de l'équation (3.9) si et seulement si $y = (-\frac{1}{r})(rx/r+1)^{r+1}$.

Théorème 3.4.1 *Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r+1}$ les racines du polynôme caractéristique $P(t) = t^{r+1} - xt^r - y$ associée aux suites $(U_n^{(r)})_{n\geqslant 0}$ et $(V_n^{(r,s)})_{n\geqslant 0}$ tel que $y \neq (\frac{-1}{r})(rx/r+1)^{r+1}$. Alors pour tout entier $1 \leqslant s \leqslant r$, on a :*

$$U_{n+1}^{(r)} = \sum_{k=1}^{r+1} \frac{\alpha_k^{n+1}}{(r+1)\alpha_k - rx} \quad et \quad V_n^{(r,s)} = \sum_{k=1}^{r+1} \alpha_k^n \frac{(s+1)\alpha_k - sx}{(r+1)\alpha_k - rx}.$$

3.5 Extension des suites $(U_n^{(r)})_n$ et $(V_n^{(r,s)})_n$ aux indices négatifs

Les formules de Binet ainsi que la relation de récurrence (3.1) nous permettent d'étendre les termes des suites $(U_n^{(r)})_n$ et $(V_n^{(r,s)})_n$ vers la gauche , c'est a dire de calculer les termes d'indices négatifs. Dans ce sens, nous proposons la définition suivante :

Définition 3.5.1 *Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :*

$$U_{-n}^{(r)} = \sum_{k=1}^{r+1} \frac{\alpha_k^{-n}}{(r+1)\alpha_k - rx} \quad et \quad V_{-n}^{(r,s)} = \sum_{k=1}^{r+1} \alpha_k^{-n} \frac{(s+1)\alpha_k - sx}{(r+1)\alpha_k - rx}$$

Le résultat suivant se démontre facilement par un changement de variables.

Proposition 3.5.1 *Soient A un anneau unitaire et x, y deux éléments inversibles de A, pour touts entiers $n \geqslant 0$ et $r \geqslant 1$, les termes de la suite $(U_{-n}^{(r)})_n$ vérifient la relation de la récurrence*

suivante :

$$U_{-n}^{(r)} = y^{-1}U_{-n+r+1}^{(r)} - xy^{-1}U_{-n+r}^{(r)} \quad (n \geqslant r+1). \tag{3.10}$$

Preuve. On remplace n par $-n+r$ dans la formule de Binet.

$$\begin{aligned}
U_{-n+r+1}^{(r)} &= \sum_{k=1}^{r+1} \frac{\alpha_k^{-n+r+1}}{(r+1)\alpha_k - rx} \\
&= \sum_{k=1}^{r+1} \frac{(\alpha_k^{-n})(\alpha_k^{r+1})}{(r+1)\alpha_k - rx} \\
&= \sum_{k=1}^{r+1} \frac{(\alpha_k^{-n})(x\alpha_k^{r} + y)}{(r+1)\alpha_k - rx} \\
&= x\sum_{k=1}^{r+1} \frac{\alpha_k^{-r+1}}{(r+1)\alpha_k - rx} + y\sum_{k=1}^{r+1} \frac{\alpha_k^{-n}}{(r+1)\alpha_k - rx} \\
&= xU_{-n+r}^{(r)} + yU_{-n}^{(r)}
\end{aligned}$$

on en déduit que, pour tout entier $n \geqslant r+1$, on a :

$$U_{-n}^{(r)} = y^{-1}U_{-n+r+1}^{(r)} - xy^{-1}U_{-n+r}^{(r)}.$$

■

Exemple 3.5.1 *Dans la Table* (2.1)*, nous présentons les premiers termes des suites* $(U_{-n}^{(2)})$ *et* $(V_{-n}^{(2,1)})$.

n	$U_{-n}^{(2)}$	$V_{-n}^{(2,1)}$
-13	$5x^4y^{-6} - 4xy^{-5}$	$-7x^5y^{-6} + 16x^2y^{-5}$
-12	$-x^5y^{-6} + 6x^2y^{-5}$	$x^6y^{-6} - 14x^3y^{-5} + 2y^{-4}$
-11	$-4x^3y^{-5} + y^{-4}$	$6x^4y^{-5} - 7xy^{-4}$
-10	$x^4y - 5 - 3xy^{-4}$	$-x^5y^{-5} + 9x^2y - 4$
-9	$3x^2y^{-4}$	$-5x^3y^{-4} + 2y^{-3}$
-8	$-x^3y^{-4} + y^{-3}$	$x^4y^{-4} - 5xy^{-3}$
-7	$-2xy^{-3}$	$4x^2y^{-3}$
-6	x^2y^{-3}	$-x^3y^{-3} + 2y^{-2}$
-5	y^{-2}	$-3xy^{-2}$
-4	$-xy^{-2}$	x^2y^{-2}
-3	0	$2y^{-1}$
-2	y^{-1}	$-xy^{-1}$
-1	0	0
0	0	2

Table (2.1) *Quelques valeurs des termes de* $(U_{-n}^{(2)})$ *et* $(V_{-n}^{(2,1)})$.

Lemme 3.5.1 *[2] Pour touts entiers* m, r*, on a :*

$$\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j+1}\binom{k}{m+j} = (-1)^{(r+1)}\binom{k-1}{m+r} + \binom{k-1}{m}.$$

Théorème 3.5.1 *Pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$*, la suite* $(U_{-n}^{(r)})_{n\geqslant 1}$ *satisfait les deux identités équivalentes suivantes*

$$U_{-n}^{(r)} = \sum_k \binom{k-1}{n-rk}(-x)^{-n-1+(r+1)k}y^{-k}, \tag{3.11}$$

$$U_{-n}^{(r)} = \sum_k \binom{(n-k-r)/r}{k}(-x)^{(n-r-(r+1)k)/r}y^{(-n+k)/r}. \tag{3.12}$$

avec $U_0 = 0$*. La première somme est limitée aux entiers* $k \geqslant 1$ *tels que* $\lfloor (n+1)/(r+1)\rfloor \leqslant k \leqslant \lfloor (n-1)/r\rfloor$*; la deuxième somme est limitée aux entiers* k *compris entre* 0 *et* $\lfloor (n-r)/(r+1)\rfloor$ *et qui satisfont* r *divise* $n-k$*.*

Théorème 3.5.2 *[27] Soient r et s deux entiers tels que $1 \leqslant s \leqslant r$, pour tout $n \geqslant 1$ on a*

$$V_{-n}^{(r,s)} = U_{-n+1}^{(r)} + syU_{-n-r}^{(r)}, \tag{3.13}$$

ainsi, on obtient les expressions suivantes, pour tout $n \geqslant 1$

$$V_{-n}^{(r,s)} = \sum_{k=1}^{\lfloor (n-1)/r \rfloor} \frac{n-(r-s)k}{n-rk} \binom{k-1}{n-1-rk} (-x)^{-n+(r+1)k} y^{-k} + s(-x)^{n/r} y^{-n/r} [r \mid n], \tag{3.14}$$

ou encore

$$V_{-n}^{(r,s)} = \sum_{k,r|(n-k)} \frac{sn+(r-s)k}{rk} \binom{(n-k-r)/r}{k-1} (-x)^{(n-(r+1)k)/r} y^{(-n+k)r} + s(-x)^{n/r} y^{-n/r} [r \mid n], \tag{3.15}$$

avec $V_0^{(r,s)} = s+1$ et $[r \mid n] = 1$ pour r divise n et 0 sinon. Nous pouvons limiter la première somme à des entirs k compris entre $[n/(r+1)]$ et $[(n-1)/r]$, la deuxième somme est limitée aus entier k compris entre 1 et $[n/(r+1)]$, et qui satisfont r divise $(n-k)$.

Quelques applications liées aux théorèmes $(3.5.1)$ et $(3.5.2)$

3.5.1 Application 1

Soient $(F_n)_n$ la suite de Fibonacci et $(L_n)_n$ la suite de Lucas, alors pour tout $n \geqslant 1$ on a :

$$F_{-n} = (-1)^{-n-1} \sum_{k=1}^{n} \binom{k-1}{n-k} \tag{3.16}$$

$$L_{-n} = (-1)^{-n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{n-k} \binom{k-1}{n-1-k} + (-1)^n. \tag{3.17}$$

3.5.2 Application 2

En prenant $r = 1$ et $(x, y) = (2, 1)$, on obtient la suite de Pell $(P_n)_n$ et la suite de Pell Lucas $(Q_n)_n$, alors pour tout $n \geqslant 1$ on a :

$$P_{-n} = (-2)^{-n-1} \sum_{k=1}^{n} \binom{k-1}{n-k} \tag{3.18}$$

$$Q_{-n} = (-2)^{-n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{n-k} \binom{k-1}{n-1-k} + (-2)^n. \tag{3.19}$$

3.5.3 Application 3

Considérons la suite 2-Fibonacci $(U_n^{(2)})_n$. Pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$U_{-n}^{(2)} = \sum_{k=1} \binom{k-1}{n-2k} (-1)^{-n-1+3k}. \tag{3.20}$$

Les suites compagnons d'indices négatifs pour $s = 1, 2$ sont définies par identités suivantes

$$V_{-n}^{(2,1)} = \sum_{k=1}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \frac{n-k}{n-2k} \binom{k-1}{n-1-2k} (-1)^{-n+3k} + \frac{1}{2}(1+(-1)^n)(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} \tag{3.21}$$

et

$$V_{-n}^{(2,2)} = \sum_{k=1}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \frac{n}{n-2k} \binom{k-1}{n-1-2k} (-1)^{-n+3k} + (1+(-1)^n)(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}. \tag{3.22}$$

Chapitre 4

Le q-analogue et le (p,q)-analogue de la suite de polynômes r-Fibonacci

Dans ce chapitre, on donne deux définitions du q-analogue des polynômes de Fibonacci et des polynômes de Lucas suggérées par Carlitz et de Cigler (Voir [15],[14],[18],[19]) et on exploite ces coefficients (p,q)-binomiaux pour étendre les approches de Carlitz et de Cigler au cas (p,q)-analogue.

4.1 Le q-analogue des polynômes r-Fibonacci et r-Lucas

Le q-analogue est une généralisation impliquant un nouveau paramétre $q \in \mathbb{R}$ qui se spécialise en l'identité original en faisant tendre q vers 1. Le q-analogue commence par la définition des entiers naturels l'égalité

$$\lim_{q\to 1} \frac{1-q^n}{1-q} = n$$

suggére que l'on peut définir le q-analogue de l'entier n comme étant

$$[n]_q = 1 + q + \cdots + q^{n-1}.$$

4.1.1 Le coefficient q-binomial

Soit q une indéterminée ($q \neq 1$). Notons

$$[n]_q = 1 + q + \cdots + q^{n-1}; \quad \text{(le q-analogue de l'entier n)}$$

$$[n]_q! = [1]_q[2]_q \cdots [n]_q; \quad \text{(le q-analogue de la factorielle)}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}; \quad \text{(le q-analogue des coefficients binomiaux)}$$

Il est facile de voir que

$$[n]_q = q^{n-1}[n]_{\frac{1}{q}};$$

$$[n]_q! = q^{\binom{n}{2}}[n]_{\frac{1}{q}}!;$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^{k(n-k)} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{\frac{1}{q}};$$

$$[n]_q = [k]_q + q^k[n-k]_q = q^{n-k}[k]_q + [n-k]_q. \tag{4.1}$$

En effet

$$\begin{aligned}
[n]_q &= 1 + q + \cdots + q^{n-1}; \\
&= q^{n-1}\left(\frac{1}{q^{n-1}} + \frac{q}{q^{n-1}} + \cdots + 1\right); \\
&= q^{n-1}\left(\left(\frac{1}{q}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{q}\right)^{n-2} + \cdots + \left(\frac{1}{q}\right) + 1\right); \\
&= q^{n-1}[n]_{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
[n]_q! &= [1]_q[2]_q \cdots [n]_q; \\
&= (1)(1+q)(1+q+q^2)\cdots(1+q+\cdots q^{n-1}); \\
&= q\left(\frac{1}{q}+1\right)q^2\left(\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q}+1\right)\cdots q^{n-1}\left(\frac{1}{q^{n-1}}+\frac{q}{q^{n-1}}+\cdots+1\right); \\
&= q^{1+2+\cdots+n-1}\left(\frac{1}{q}+1\right)\left(\left(\frac{1}{q}\right)^2+\frac{1}{q}+1\right)\cdots\left(\left(\frac{1}{q}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{q}\right)^{n-2}+\cdots+1\right); \\
&= q^{\frac{n(n-1)}{2}}[1]_{\frac{1}{q}}[2]_{\frac{1}{q}}[3]_{\frac{1}{q}}\cdots[n]_{\frac{1}{q}}; \\
&= q^{\frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!}}[1]_{\frac{1}{q}}[2]_{\frac{1}{q}}[3]_{\frac{1}{q}}\cdots[n]_{\frac{1}{q}}; \\
&= q^{\binom{n}{2}}[n]_{\frac{1}{q}}!.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q &= \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}; \\
&= \frac{q^{\binom{n}{2}}[n]_{\frac{1}{q}}!}{q^{\binom{k}{2}}[k]_{\frac{1}{q}}!q^{\binom{n-k}{2}}[n-k]_{\frac{1}{q}}!}; \\
&= q^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}-\binom{n-k}{2}}\frac{[n]_{\frac{1}{q}}!}{[k]_{\frac{1}{q}}![n-k]_{\frac{1}{q}}!}; \\
&= q^{\frac{n(n-1)-k(k-1)-(n-k)(n-k-1)}{2}}\frac{[n]_{\frac{1}{q}}!}{[k]_{\frac{1}{q}}![n-k]_{\frac{1}{q}}!}; \\
&= q^{k(n-k)}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
[n]_q &= 1+q+\cdots+q^{k-1}+q^k+\cdots+q^{n-1}; \\
&= (1+q+\cdots+q^{k-1})+q^k(1+q+\cdots+q^{n-k-1}); \\
&= [k]_q+q^k[n-k]_q.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
[n]_q &= 1+q+\cdots+q^{n-k-1}+q^{n-k}+\cdots+q^{n-1}; \\
&= \left(1+q+\cdots+q^{n-k-1}\right)+q^{n-k}\left(1+q+\cdots+q^{k-1}\right); \\
&= [n-k]_q+q^{n-k}[k]_q.
\end{aligned}$$

Les nombres de Gauss $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ généralisent les coefficients binomiaux. On montre, en utilisant l'égalité (4.1), que

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-k+1}\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q; \tag{4.2}$$

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = q^k\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q. \tag{4.3}$$

En effet

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q &= \frac{[n+1]_q!}{[k]_q![n+1-k]_q!} \\
&= \frac{[n]_q![n+1]_q}{[k]_q![n+1-k]_q!} \\
&= \frac{[n]_q!(1+\cdots+q^{n-k}+q^{n-k+1}+\cdots+q^n)}{[k]_q![n+1-k]_q!} \\
&= \frac{[n]_q!((1+\cdots+q^{n-k})+q^{n+1-k}(1+\cdots+q^{k-1}))}{[k]_q![n+1-k]_q!} \\
&= \frac{[n]_q!([n+1-k]_q+q^{n+1-k}[k]_q)}{[k]_q![n+1-k]_q!} \\
&= \frac{[n]_q![n+1-k]_q}{[k]_q![n+1-k]_q!} + q^{n+1-k}\frac{[n]_q![k]_q}{[k]_q![n+1-k]_q!} \\
&= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-k+1}\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q .
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q &= \frac{[n+1]_q!}{[k]_q![n+1-k]_q!} \\
&= \frac{[n]_q![n+1]_q}{[k]_q![n+1-k]_q!} \\
&= \frac{[n]_q!(1+\cdots+q^{k-1}+q^k+\cdots+q^n)}{[k]_q![n+1-k]_q!} \\
&= \frac{[n]_q!((1+q+\cdots+q^{k-1})+q^k(1+q+\cdots+q^{n-k}))}{[k]_q![n+1-k]_q!} \\
&= \frac{[n]_q!(q^k[n+1-k]_q+[k]_q)}{[k]_q![n+1-k]_q!} \\
&= q^k\frac{[n]_q![n+1-k]_q}{[k]_q![n+1-k]_q!}) + \frac{[n]_q![k]_q}{[k]_q![n+1-k]_q!} \\
&= q^n\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q .
\end{aligned}$$

Considérons maintenant, les opérateurs X et Q tels que

$$Xf(x) = xf(x) \;\; et \;\; Qf(x) = f(qx).$$

Puisque $QX = qXQ$, alors les symboles X et Q seront utilisés pour désigner un couple déterminées (x, y) vérifiant $yx = qxy$.

Comme q-analogue du binôme de Newton, les relations (4.2) et (4.3) se traduisent par le développement suivant

$$(X+Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q X^{n-k}Q^k. \tag{4.4}$$

Si on pose $Z = X^{-1}Q$, alors $ZX = qXZ$ et le développement (4.4) devient

$$(1+q^{n-1}Z)(1+q^{n-2}Z)...(1+Z) = \sum_{k=0}^{n} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q Z^k. \tag{4.5}$$

Le coefficient $q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ considéré comme un q-analogue du nombre $\binom{n}{k}$ sera noté par $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(1)}$, par suite les deux relation de récurrence (4.2) et (4.3) seront notées respectivement :

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q^{(1)} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(1)} + q^n \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q^{(1)}; \tag{4.6}$$

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q^{(1)} = q^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(1)} + q^{k-1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q^{(1)}.$$

4.1.2 L'approche de Carlitz pour les q-analogues de la suite de Fibonacci et de la suite de Lucas

Carlitz [15] propose comme q-analogue des polynômes bivariés de Fibonacci, les polynômes définis, pour $n \geqslant 0$, par

$$F_{n+1}(x,y,1) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} q^{k^2} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-2k}y^k \ ; \ avec \ \ F_0(x,y,1) = 0. \tag{4.7}$$

Les premiers termes de cette suite sont :

$F_0(x,y,1) = 0, F_1(x,y,1) = 1, F_2(x,y,1) = x, F_3(x,y,1) = x^2 + q^2y, F_4(x,y,1) = x^3 + q^2[2]_q xy, F_5(x,y,1) = x^4 + q^2[3]_q x^2y + q^4y^2, F_6(x,y,1) = x^5 + q^2[4]_q x^3y + q^4[4]_q xy^2, ...$

Les relations (4.2) et (4.3) entraînent que la suite $(F_n(x,y,1))_{n\geqslant 0}$ satisfait les deux relation de récurrence

$$F_{n+1}(x,y,1) = xF_n(x,qy,1) + qyF_n(x,q^2y,1), \tag{4.8}$$

$$F_{n+1}(x,y,1) = xF_n(x,qy,1) + q^{n-1}yF_{n-1}(x,y,1), \tag{4.9}$$

avec $F_0(x,y,1) = 0$ et $F_1(x,y,1) = 1$.
La vérification des relations de récurrence (4.8) et (4.9) pour les indices négatifs nous conduit, pour $y \neq 0$, à l'expression

$$F_{-n}(x,y,1) = (-1)^{n-1}q^{\binom{n+1}{2}}\frac{F_n(x,y/q^n,1)}{y^n} \qquad (n \geqslant 0). \tag{4.10}$$

Avec le changement de variables $(x,y,1)$ par $(1,z,1)$, on retrouve le q-analogue des polynômes de Fibonacci $F_n(z,1)$ qui satisfait les deux relations de récurrence

$$F_{n+1}(z,1) = F_n(qz,1) + qzF_{n-1}(q^2z,1), \tag{4.11}$$

$$F_{n+1}(z,1) = F_n(z,1) + q^{n-1}zF_{n-1}(z,1), \tag{4.12}$$

avec $F_0(z) = 0$ et $F_1(z) = 1$.

$$C^n(z) = \begin{pmatrix} zU_{n-1}(z) & U_n(z) \\ zU_n(z) & U_{n+1}(z) \end{pmatrix}, \tag{4.13}$$

où $C(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ z & 1 \end{pmatrix}$ et les $U_n(z)$ sont les polynômes Fibonacci.
L'interprétation matricielle des récurences (4.11) et (4.12) donne l'égalité

$$C(q^{n-1})C(q^{n-2})\cdots C(z) = \begin{pmatrix} zF_{n-1}(qz,1) & F_n(z,1) \\ zF_n(qz,1) & F_{n+1}(z,1) \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

qui est un q-analogue de (4.13).

Dans le cas des polynômes bivariés, on a

$$C(x,q^{n-1}y)C(x,q^{n-2}y)\cdots C(x,y) = \begin{pmatrix} yF_{n-1}(x,qy,1) & F_n(x,y,1) \\ yF_n(x,qy,1) & F_{n+1}(x,y,1) \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

et avec la relation des suites $F_n(x,y,1) = x^{n-1}F_n(y/x^2,1)$, on retrouve l'identité (4.14).

Les propriétés (4.14) et (4.15) montrent que le q-analogue des polynômes bivariés de Fibonacci proposé par Carlitz est une extension naturelle des polynôme bivariés de Fibonacci,

et à partir de ces propriétés, Cigler a associé à la définition de Carlitz un q-analogue des polynôme bivariés de Lucas défini par

$$Luc_n(x,y,1) = tr\left(C(x,q^{n-1}y)C(x,q^{n-2}y)...C(x,y)\right)$$

$$= yF_{n-1}(x,qy,1) + F_{n+1}(x,y,1). \tag{4.16}$$

Le calcul du détermimant des deux membres de (4.15) donne un q-analogue de la formule de Cassini

$$F_{n-1}(x,qy,1)F_{n+1}(x,y,1) - F_n(x,qy,1)F_n(x,y,1) = (-1)^n q^{\binom{n}{2}} y^{n-1}.$$

L'identité (4.16) entraine, pour $n \geq 1$, que

$$Luc_n(x,y,1) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} q^{k^2-k} \frac{[n]_p}{[n-k]_p} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-2k} y^k,$$

$$Luc_{-n}(x,y,1) = (-1)^n q^{\binom{n+1}{2}} \frac{Luc_n(x,y/q,1)}{y^n}, \qquad (y \neq 0),$$

avec $Luc_0(x,y,1) = 2$

Remarque 4.1.1 *Le q-analogue des polynômes bivariés de Lucas ne satisfait, ni une relation de récurrence de type (4.8), ni de type (4.9), cependant avec l'algorithme q-Zeilberger, la relation de récurrence suivante est déduite, c'est la plus courte possible*

$$Luc_{n+4}(x,y,1) = (1+q)xLuc_{n+3}(x,y,1) + (q^{n+2}(1+q)y - qx^2)Luc_{n+2}(x,y,1) -$$

$$q^{n+2}(1+q)xyLuc_{n+1}(x,y,1) - q^{2n+3}y^2Luc_n(x,y,1),$$

qui devient en utilisant (4.16)

$$F_{n+4}(x,y,1) = (1+q)xF_{n+3}(x,y,1) + (q^{n+2}(1+q)y - qx^2)F_{n+2}(x,y,1) -$$

$$q^{n+2}(1+q)xyF_{n+3}(x,y,1) - q^{2n+3}y^2F_n(x,y,1).$$

4.1.3 L'approche de Cigler pour le q-analogue de la suite de Fibonacci et de la suite de Lucas

Le q-analogue des polynômes bivariés de Fibonacci et des polynômes bivariés de Lucas suggérés par Cigler sont définis, pour $n \geq 0$ et $n \geq 1$ respectivement, par

$$F_{n+1}(x,y,0) := \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-2k}y^k \quad \text{avec } F_0(x,y) = 0, \tag{4.17}$$

$$Luc_n(x,y,0) := \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} q^{\binom{k}{2}} \frac{[n]_q}{[n-k]_q} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-2k}y^k \quad \text{avec } Luc_0(x,y) = 2. \tag{4.18}$$

La suite $(F_n(x,y,0))_{n\geqslant 0}$ satisfait les deux relations de récurrence

$$F_{n+1}(x,y,0) = xF_n(x,y,0) + q^{n-1}yF_{n-1}(x,y/q,0), \tag{4.19}$$

$$F_{n+1}(x,y,0) = xF_n(x,qy,0) + qyF_{n+1}(x,qy,0), \tag{4.20}$$

avec $F_0(x,y,0) = 0$ et $F_1(x,y,0) = 1$.

Ces relations de récurrence, pour $y \neq 0$, prolongent la suite $(F_n(x,y,0))_n$ aux indices négatifs par

$$F_{-n}(x,y,0) = (-1)^{n-1}\frac{F_n(x,y,0)}{y^n}, \qquad n \geq 1.$$

Ce qui est remarquable dans la proposition de Cigler, autre que les formes explicites, est le fait que chacun des polynômes bivariés $F_n(x,y,0)$ et $Luc_n(x,y,0)$ satisfait la même relation aux q-différence, pour

$$Df(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x},$$

$$F_n(x,y,0) = xF_{n-1}(x,y,0) + (q-1)yDF_{n-1}(x,y,0) + yF_{n-2}(x,y,0),$$

$$Luc_n(x,y,0) = xLuc_{n-1}(x,y,0) + (q-1)yDLuc_{n-1}(x,y,0) + yLuc_{n-2}(x,y,0),$$

ce qui montre qu'ils sont liés respectivement aux polynômes bivariés de Fibonacci $U_n(x,y)$ et aux polynômes bivariés de Lucas $V_n(x,y)$ par les relations

$$F_n(x,y,0) = U_n(x + (q-1)yD, y)\cdot 1, \tag{4.21}$$

$$Luc_n(x,y,0) = V_n(x + (q-1)yD, y)\cdot 1, \tag{4.22}$$

comme on le voit, pour $2 \leq n \leq 6$,

$$\begin{aligned}
&U_2(x+(q-1)yD,y)\cdot 1 = x = F_2(x,y,0),\\
&U_3(x+(q-1)yD,y)\cdot 1 = x^2+qy = F_3(x,y,0),\\
&U_4(x+(q-1)yD,y)\cdot 1 = x^3+q[2]_q xy = F_4(x,y,0),\\
&U_5(x+(q-1)yD,y)\cdot 1 = x^4+q[3]_q x^2y+q^3y^2 = F_5(x,y,0),\\
&U_6(x+(q-1)yD,y)\cdot 1 = x^5+q[4]_q x^3y+q^3[4]_q xy^2 = F_6(x,y,0).
\end{aligned}$$

Avec l'opérateur matriciel

$$C(A,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ y & A \end{pmatrix}, \qquad \text{où} \quad A = x+(q-1)yD,$$

chacune des relations (4.21) et (4.22) se traduit respectivement par

$$\begin{aligned}
C^n(A,y)\cdot 1 &= \begin{pmatrix} yF_{n-1}(x,y,0) & F_n(x,y,0) \\ yF_n(x,y,0) & F_{n+1}(x,y,0) \end{pmatrix},\\
Luc_n(x,y,0) &= tr(C^n(A,y)\cdot 1).
\end{aligned}$$

Les valeurs propres formelles $\alpha(q)$ et $\beta(q)$ de l'opérateur matriciel $C(A,y)$ nous permettent d'écrire une généralisation de la formule de Binet

$$\begin{aligned}
F_n(x,y,0) &= \frac{\alpha(q)^n-\beta(q)^n}{\alpha(q)-\beta(q)}\cdot 1\\
Luc_n(x,y,0) &= (\alpha(q)^n+\beta(q)^n)\cdot 1,
\end{aligned} \tag{4.23}$$

par suite, pour $y \neq 0$,

$$Luc_{-n}(x,y,0) = (\alpha(q)^{-n}+\beta(q)^{-n})\cdot 1 = (-1)^n \frac{Luc_n(x,y,0)}{y^n}.$$

Remarque 4.1.2 *Le q-analogue des polynômes bivariés de Lucas ne satisfait ni une relation de récurrence de type (4.19) ni type (4.20), mais elle satisfait la relation de récurrence, toujours via l'algorithme de q-Zeilberger,*

$$\begin{aligned}
Luc_{n+4}(x,y,0) =& xLuc_{n+3}(x,y,0) + q^{n+3}\frac{[2]_q}{[n+1]_q}Luc_{n+2}(x,y,0)+\\
&q^{n+1}\frac{[n+3]_q}{[n+1]_q}xyLuc_{n+1}(x,y,0) + q^{n+1}\frac{[n+3]_q}{[n+1]_q}y^2Luc_n(x,y,0).
\end{aligned}$$

Pour le q-analogue des polynômes bivariés de Fibonacci, en composant (4.19) *et* (4.20)*, on obtient*

$$F_{n+4}(x,y,0) = xF_{n+3}(x,y,0) + q^{n-2}xyF_{n+1}(x,y,0) + q^{n-2}y^2F_n(x,y,0).$$

Théorème 4.1.3 *Les suites de polynômes $(L_n(z,m))_n$ et $(\mathbb{L}_n(z,m))_n$ satisfont respectivement les récurrences*

$$L_{n+1}(z,m) = L_n(z,m) + q^{n-1}zL_{n-1}(q^{m-1}z,m), \tag{4.24}$$

$$\mathbb{L}_{n+1}(z,m) = \mathbb{L}_n(qz,m) + qz\mathbb{L}_{n-1}(q^{m+1}z,m). \tag{4.25}$$

4.2 Le (p,q)-analogue des polynômes r-Fibonacci et r-Lucas

4.2.1 Les coefficients p,q-binomiaux

Considérons les notations

$$[n]_{p,q} := p^{n-1} + p^{n-2}q + ... + q^{n-1},$$

$$[n]_{p,q}! := [1]_{p,q}[2]_{p,q}...[n]_{p,q},$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} := \frac{[n]_{p,q}!}{[k]_{p,q}![n-k]_{p,q}!},$$

avec la convention $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} = 0$ pour $k<0$ ou $k>n$

Les coefficients p,q-binomiaux $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q}$ généralisent les coefficients q-binomiaux puisque $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{1,q} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q}$, et mettent en exergue une certaine symétrie dans les relations comme on le voit ci-dessous

$$[n]_{p,q} = p^{n-k}[k]_{p,q} + q^k[n-k]_{p,q},$$

$$[n]_{p,q}! = q^{\binom{n}{2}}[n]_{p/q}!,$$

$$[n]_{p,q} = q^{n-1}[n]_{p/q},$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} = q^{k(n-k)} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p/q}, \tag{4.26}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} = p^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_{p,q} + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_{p,q}, \tag{4.27}$$

$$\prod_{j=0}^{n-1} \left(p^j x + q^j y\right) = \sum_{k=0}^{n} p^{\binom{n-k}{2}} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} x^{n-k} y^k. \tag{4.28}$$

4.2.2 La suite p,q-Fibonacci

Considérons la suite $\left(F_{n+1}^{(r)}(x,y,p,q)\right)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$F_{n+1}^{(r)}(x,y,p,q) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} p^{\binom{n+1-(r+1)k}{2}} q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n-rk \\ k \end{bmatrix}_{p,q} x^{n-(r+1)k} y^k$$

avec $F_0^{(r)}(x,y,p,q) = 0$.

Pour $p = 1$ et $r = 1$, on retrouve le q-analogue de la suite de Fibonacci donnée par Cigler.

Théorème 4.2.1 *Les polynôme $F_n^{(r)}(x,y,p,q)$ vérifient les deux récurrences*

$$F_{n+1}^{(r)}(x,y,p,q) = pxF_n^{(r)}(px,py,p,q) + qyF_{n-r}^{(r)}(qx,qy,p,q) \tag{4.29}$$

$$F_{n+1}^{(r)}(x,y,p,q) = pxF_n^{(r)}(px,qy,p,q) + qyF_{n-r}^{(r)}(px,qy,p,q) \tag{4.30}$$

avec $F_0^{(r)}(x,y,p,q) = 0$, $F_j^{(r)}(x,y,p,q) = x^{j-1}$, pour $j = 1,2,\ldots,r$.

Preuve. D'aprés la relation (4.27), on a

$$
\begin{aligned}
&F_{n+1}^{(r)}(x,y,p,q)\\
&=\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} p^{\binom{n+1-(r+1)k}{2}}q^{\binom{k+1}{2}}\left(p^k\begin{bmatrix} n-1-rk \\ k \end{bmatrix}_{p,q}+q^{n-(r+1)k}\begin{bmatrix} n-1-rk \\ k-1 \end{bmatrix}_{p,q}\right)x^{n-(r+1)k}y^k\\
&=px\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} p^{\binom{n+1-(r+1)(k+1)}{2}}q^{\binom{k+1}{2}}\begin{bmatrix} n-1-rk \\ k \end{bmatrix}_{p^{r+1},q}(px)^{n-1-(r+1)k}(qy)^k+\\
&y\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} p^{\binom{n+1-(r+1)(k+1)}{2}}q^{\binom{k+2}{2}}q^{n-(r+1)(k+1)}\begin{bmatrix} n-r-1-rk \\ k \end{bmatrix}_{p^{r+1},q}x^{n-r-1-(r+1)k}(qy)^k\\
&=px\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} p^{\binom{n-(r+1)k}{2}}q^{\binom{k+1}{2}}\begin{bmatrix} n-1-rk \\ k \end{bmatrix}_{p^{r+1},q}x^{n-1-(r+1)k}y^k+\\
&qy\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} p^{\binom{n-r-(r+1)k}{2}}q^{\binom{k+1}{2}}\begin{bmatrix} n-r-1-rk \\ k \end{bmatrix}_{p^{r+1},q}(qx)^{n-r-1-(r+1)k}(qy)^k\\
&=pxF_n^{(r)}(px,py,p,q)+qyF_{n-r}^{(r)}(qx,qy,p,q).
\end{aligned}
$$

Par ailleurs, on à :

$$
\begin{aligned}
&F_{n+1}^{(r)}(x,y,p,q)\\
&=\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} p^{\binom{n-(r+1)k}{2}+1}q^{\binom{k+1}{2}}\left(q^k\begin{bmatrix} n-1-rk \\ k \end{bmatrix}_{p,q}+p^{n-(r+1)k}\begin{bmatrix} n-1-rk \\ k-1 \end{bmatrix}_{p,q}\right)x^{n-(r+1)k}y^k\\
&=px\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} p^{\binom{n-(r+1)k}{2}}q^{\binom{k+1}{2}}\begin{bmatrix} n-1-rk \\ k \end{bmatrix}_{p^{r+1},q}(px)^{n-1-(r+1)k}(qy)^k+\\
&y\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} p^{\binom{n-(r+1)(k+1)+1}{2}}q^{\binom{k+2}{2}}p^{n-(r+1)(k+1)}\begin{bmatrix} n-r-1-rk \\ k \end{bmatrix}_{p,q}x^{n-r-1-(r+1)k}(y)^k\\
&=px\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} p^{\binom{n-(r+1)k}{2}}q^{\binom{k+1}{2}}\begin{bmatrix} n-1-rk \\ k \end{bmatrix}_{p^{r+1},q}(px)^{n-1-(r+1)k}(qy)^k+\\
&qy\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} p^{\binom{n-r-(r+1)k}{2}}q^{\binom{k+1}{2}}\begin{bmatrix} n-r-1-rk \\ k \end{bmatrix}_{p^{r+1},q}(px)^{n-r-1-(r+1)k}(qy)^k\\
&=pxF_n^{(r)}(px,qy,p,q)+qyF_{n-r}^{(r)}(px,qy,p,q).
\end{aligned}
$$

■

Remarque 4.2.2 *1)Les récurrences* (4.29) *et* (4.30) *peuvent être écrites de la façon suivante :*

$$F_{n+1}^{(r)}\left(\frac{x}{p},\frac{y}{p},p,q\right)=xF_n^{(r)}(x,y,p,q)+\left(\frac{q}{p}\right)^{n-r}yF_{n-r}^{(r)}\left(x,\left(\frac{q}{p}\right)^{-r}y,p,q\right),$$

$$F_{n+1}^{(r)}\left(\frac{x}{p},\frac{y}{q},p,q\right)=xF_n^{(r)}(x,y,p,q)+yF_{n-r}^{(r)}(x,y,p,q).$$

2) Pour $r=1$*, les récurrences* (4.29) *et* (4.30) *deviennent*

$$F_{n+1}(x,y,p,q)=p^nxF_n\left(x,\frac{y}{p},p,q\right)+q^{n-1}yF_{n-1}\left(x,\frac{y}{q},p,q\right), \tag{4.31}$$

$$F_{n+1}(x,y,p,q)=pxF_n\left(px,qy,p,q\right)+qyF_{n-r}\left(px,qy,p,q\right). \tag{4.32}$$

4.2.3 La suite p,q-Lucas

La suite p,q-Fibonacci vérifie deux relations de récurrence. Par rapport à chacune de ces récurrences, on définit un p,q-analogue de la suite de Lucas. Ainsi, on obtient deux espèces de suite p,q-Lucas.

Définition 4.2.1 *La suite* p,q*-Lucas de première espèce et la suite* p,q*-Lucas de deuxième espèce sont définies respectivement par*

$$L_n^{(r)}(x,y,p,q):=2F_{n+1}^{(r)}\left(\frac{x}{p},\frac{y}{q},p,q\right)-xF_n^{(r)}(x,y,p,q)$$

$$\mathbb{L}_n^{(r)}(x,y,p,q):=2F_{n+1}^{(r)}\left(\frac{x}{p},\frac{y}{p},p,q\right)-xF_n^{(r)}(x,y,p,q)$$

Avec cette définition, on peut déduire des relations duales entre la suite p,q-Fibonacci et la suite p,q-Lucas.

Pour $r=p=1$, on retrouve les deux espèces de suites q-Lucas qu'on a associé à l'approche de Cigler, et les relations de récurrences (4.24) et (4.25) sont généralisées par le théorème suivant :

Théorème 4.2.3 *[10] La suite* $p,q-Lucas$ *de première espèce et la suite* p,q*-Lucas de deuxième espèce satisfont respectivement les récurrences*

$$L_{n+1}^{(r)}(x,y,p,q)=pxL_n^{(r)}(px,py,p,q)+qyL_{n-r}^{(r)}(qx,qy,p,q),$$

$$\mathbb{L}_{n+1}^{(r)}(x,y,p,q)=px\mathbb{L}_n^{(r)}(px,qy,p,q)+qy\mathbb{L}_{n-r}^{(r)}(px,qy,p,q).$$

Chapitre 5

Polynômes incomplets r-Lucas et hyper r-Lucas de type s

Dans ce chapitre nous allons traiter les polynômes r-Lucas et les polynômes hyper-r-Lucas de type s, les notations suivantes seront adoptées :
U_n, V_n représentent respectivement la suite r-Fibonacci généralisée et polynômes bivariés r-Lucas de type s
$U_n(k), V_n(k)$ pour les polynômes bivariés incomplets r-Fibonacci et r-Lucas de type s respectivement.
$U_n^{[m]}, V_n^{[m]}$ pour les polynômes bivariés hyper-r-Fibonacci et hyper-r-Lucas de type s respectivement.

5.1 Les polynômes incomplets r-Fibonacci

Tasci. D, Firengiz. MC, Tuglu. N,[45] proposent la définition des polynômes incomplets r-Fibonacci

$$U_{n+1}(k) = \sum_{j=0}^{k} \binom{n-rj}{j} x^{n-(r+1)j} y^j \ , \ 0 \leqslant k \leqslant \lfloor n/(r+1) \rfloor. \tag{5.1}$$

Ces polynômes satisfont la relation de récurrence suivante :

$$U_{n+1}(k+1) = xU_n(k+1) + yU_{n-r}(k). \tag{5.2}$$

5.2 Les polynômes incomplets r-Lucas de type s

Définition 5.2.1 *Pour tous entiers naturels r, s avec $1 \leqslant s \leqslant r$, les polynômes incomplets r-Lucas de type s sont définis comme suit :*

$$V_n(k) = \sum_{j=0}^{k} \frac{n-(r-s)j}{n-rj} \binom{n-rj}{j} x^{n-(r+1)j} y^j, \quad 0 \leqslant k \leqslant \lfloor n/(r+1) \rfloor. \tag{5.3}$$

1. Pour $k = \lfloor n/(r+1) \rfloor, V_n(k) = V_n$, on retrouve les polynômes r-Lucas de type s.

2. Pour $x = y = 1,\ s = r = 1$, on obtient la suite incomplète de Lucas [26]

3. Pour $x = 2$, $y = 1$, et $s = r = 1$, on obtient la suite incomplète de Jacobsthal-Lucas [20]

Dans le théorème suivant , nous etablirons une relation entre les polynômes incomplets r Lucas de type s et les polynômes incomplets r Fibonacci .

Théorème 5.2.1 *[2] Soient r, s deux entiers positifs, avec $1 \leqslant s \leqslant r$ les polynômes incomplets r-Lucas de type s satisfont le relation suivante*

$$V_n(k) = U_{n+1}(k) + syU_{n-r}(k-1). \tag{5.4}$$

Théorème 5.2.2 *Pour tous entiers r, s avec $0 \leqslant k \leqslant \lfloor n/(r+1) \rfloor$, les polynômes incomplets r-Lucas de type s satisfont le récurrence suivante :*

$$V_n(k+1) = xV_{n-1}(k+1) + yV_{n-r-1}(k), \tag{5.5}$$

Preuve. La démonstration se fait en utilisant d'identité (5.4) et la relation de récurrence de la suite incomplète de r-Fibonacci généralisée.

$$\begin{aligned} V_n(k+1) &= U_{n+1}(k+1) + syU_{n-r}(k) \\ &= xU_n(k+1) + yU_{n-r}(k) + sy(xU_{n-r-1}(k) + yU_{n-1-r-r}(k-1)) \\ &= x(U_n(k+1) + syU_{n-r-1}(k)) + y(U_{n-r}(k) + syU_{n-1-2r}(k-1)) \\ &= xV_{n-1}(k+1) + yV_{n-r-1}(k). \end{aligned}$$

■

Les relations (5.3) et (5.5) nous permettent d'établir une relation non hemogène pour les polynômes incomplets r-Lucas de type s donnée par le théoreme suivant :

Théorème 5.2.3 *pour tous entiers positifs r, s avec $1 \leqslant s \leqslant r$, les polynômes incomplets r Lucas de type s satisfont la relation non hemogène suivante :*

$$V_n(k) = xV_{n-1}(k) + yV_{n-r-1}(k)\frac{n-r-1-(r-s)k}{n-1-r(k+1)}\binom{n-1-r(k+1)}{k}x^{n-r-1-(r+1)k}y^{k+1} \quad (5.6)$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} V_n(k) &= xV_{n-1}(k) + yV_{n-r-1}(k-1) \\ &= xV_{n-1}(k) + y\sum_{j=0}^{k-1}\frac{n-r-1-(r-s)j}{n-r-1-rj}\binom{n-r-1-rj}{k}x^{n-r-1-(r+1)j}y^j, (0 \leqslant k \leqslant \lfloor n/(r+1)\rfloor \\ &= xV_{n-1}(k) + yV_{n-r-1}(k) - \frac{n-r-1-(r-s)k}{n-1-r(k+1)}\binom{n-1-r(k+1)}{k}x^{n-r-1-(r+1)k}y^{k+1}. \end{aligned}$$

■

5.3 La fonction génératrice des polynômes incomplets r-Lucas de type s

Théorème 5.3.1 *[1] La fonction génératrice des polynômes incomplets r-Lucas de type s est donnée par :*

$$\sum_{n\geqslant 0}V_n(k)t^n = \frac{t^{k(r+1)}}{(1-xt-yt^{r+1})}\left[V_{k(r+1)} + \sum_{i=1}^{r}\left(V_{k(r+1)+i} - xV_{k(r+1)+i-1}\right)t^i - \frac{y^{k+1}t^{r+1}[s(1-xt)+1]}{(1-xt)^{k+1}}\right].$$

5.4 Les polynômes bivariés hyper r-Fibonacci

Définition 5.4.1 *[22] Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments d'un anneau commutatif A. On appelle matrice d'Euler Seidel associée à $(a_n)_{n\geqslant 0}$ la suite double $(a_n^{(k)})(n \geqslant 0, k \geqslant 0$ donnée par la récurrence suivante,*

$$\begin{cases} a_n^{(0)} = a_n, \quad (n \geqslant 0), \\ a_n^{(k)} = a_{n-1}^{(k)} + a_n^{(k-1)}, \quad (n \geqslant 1, k \geqslant 1). \end{cases} \quad (5.7)$$

La suite $(a_n^{(0)})$ représente la première ligne de la matrice, C'est la suite initiale. La suite $(a_0^{(n)})$ représente la première colonne de la matrice, c'est la suite finale. ll en résulte immédiatement

de (5.7) *l'identité*

$$a_n^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a_{n+1}^{(0)}. \tag{5.8}$$

Les auteurs dans [7] ont généralisé l'algorithme d'Euler Seidel en définissant une matrice symétrique infinie associée à $(a_n)_{n\geqslant 0}$ *par la relation de récurrence suivante*

$$\begin{cases} a_n^{(0)} = a_n, \quad (n \geqslant 0), \\ a_n^{(k)} = x a_{n-1}^{(k)} + y a_n^{(k-1)}, \quad (n \geqslant 1, k \geqslant 1). \end{cases} \tag{5.9}$$

avec x *et* y *deux nombres réels.*

Notons que le terme $a_n^{(k)}$ *désigne l'élément qui se trouve dans l'intersection de la* k*-iéme ligne et de la* n*-iéme colonne,*

$$\begin{pmatrix} . & . & . & & . & . & . \\ . & . & . & & . & . & . \\ . & . & . & & y a_n^{(k-1)} & . & . \\ . & . & . & & \downarrow & . & . \\ & & x a_{n-1}^{(k)} & \rightarrow & a_n^{(k)} & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

C'est facile de voir que l'dentité (5.8) *se généralise en :*

$$a_n^{(k)} = x^n \sum_{i=1}^{k} y^{k-i} \binom{n+k-i-1}{n-1} a_0^i + y^k \sum_{s=1}^{n} x^{n-s} \binom{n+k-s-1}{k-1} a_s^0 \tag{5.10}$$

Ainsi, nous définissons le polynôme bivarié hyper r-Fibonacci dans la définition suivante

Définition 5.4.2 *Pour tout* $m \geqslant 0$*, les polynômes bivariés hyber* r*-Fibonacci sont définis par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} U_n^{[0]} = U_n^{(r)}, U_0^{[m]} = y^m, \\ U_{n+1}^{[m]} = x U_n^{[m]} + y U_{n+1}^{[m-1]}. \end{cases} \tag{5.11}$$

La relation (5.11) *peut s'écrire comme suit :*

$$U_n^{[m]} = \sum_{j=0}^{n} y x^{n-j} U_j^{[m-1]}. \tag{5.12}$$

***Quelques cas particuliers de polynômes hyper-r-fibonacci** :*

- *Pour* $r = 1, x = 1$ *et* $y = 1$, $U_n^{[m]}(1,1) = F_n^{[m]}$, *nous optenons les nombres hyper-fibonacci [7].*
- *Pour* $r = 1, x = 2$ *et* $y = 1$, $U_n^{[m]}(2,1) = p_n^{[m]}$, *nous trouvons les nombres hyper-Pell [3].*
- *Pour* $r = 1, x = 1$ *et* $y = 2$, $U_n^{[m]}(1,2) = j_n^{[m]}$, *nous avons les nombres hyper-Jacobsthal.*

Comme résultat de (5.10), *les polynômes hyper-r-Fibonacci bivariés peuvent être exprimés comme une somme de coefficients binomiaux et de polynômes r-Fibonacci :*

$$U_{n+1}^{[m]} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+m-k}{m-1} x^{n+1-k} y^m U_k. \tag{5.13}$$

5.5 Interprétation combinatoire

Cette section traite d'une interprétation combinatoire de la relation (5.11) et de la formule explicite des polynômes bivariés hyper-r-Fibonacci.

Théorème 5.5.1 *[2] le polynôme hyper-r-Fibonacci* $U_n^{[m]}$ *est interprété comme le nombre de façons de paver un* $[n + (r+1)m]$*-ruban avec au moins* m $(r+1)$*-ominos, de telle sorte que l'on distribue un poids* x *pour chaque carré et un poids* y *pour chaque* $(r+1)$*-ominos.*

Théorème 5.5.2 *[2] Pour touts* $n \geqslant 0, m \geqslant 0,$ *et* $k = 0, \ldots, \lfloor n/(r+1) \rfloor$, *on a :*

$$U_{n+1}^{[m]} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1) \rfloor} \binom{n+m-rk}{m+k} x^{n-(r+1)k} y^{k+m}, \tag{5.14}$$

où le nombre $\binom{n+m-rk}{m+k} x^{n-(r+1)k} y^{k+m}$ *représente le poids d'un* $n + (r+1)m$*-pavage linéaire avec au moins* $(k+m)$ $(r+1)$*-ominos.*

Corollaire 5.5.1 *les premiers termes des nombres hyper-*r*-Fibonacci sont donnés par*

$$U_k^{[m]} = \binom{n+m-1}{k-1} x^{k-1} y^m \ , \ (1 \leqslant k \leqslant r).$$

Théorème 5.5.3 *Le polynôme hyper-*r*-Fibonacci* $U_n^{[m]}$ *satisfait la relation de récurrence non homogène suivante :*

$$U_{n+1}^{[m]} = x U_n^{[m]} + y U_{n-r}^{[m]} + \binom{n+m-1}{m-1} x^n y^m. \tag{5.15}$$

Preuve. En utilisant les relations (5.11) et (5.14), on a :

$$\begin{aligned}
U_{n+1}^{[m]} &= xU_n^{[m]} + yU_{n+1}^{[m-1]} \\
&= xU_n^{[m]} + y\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} \tbinom{n+m-1-rk}{m-1+k} x^{n-(r+1)k} y^{k+m-1} \\
&= xU_n^{[m]} + y\sum_{k=1}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} \tbinom{n+m-1-rk}{m-1+k} x^{n-(r+1)k} y^{k+m-1} + \tbinom{n+m-1}{m-1} x^n y^m \\
&= xU_n^{[m]} + y\sum_{k=0}^{\lfloor (n-r-1)/(r+1)\rfloor} \tbinom{n+m-1-r(k+1)}{m+k} x^{n-(r+1)(k+1)} y^{k+m} + \tbinom{n+m-1}{m-1} x^n y^m \\
&= xU_n^{[m]} + xU_{n-r}^{[m]} + \tbinom{n+m-1}{m-1} x^n y^m.
\end{aligned}$$

■

Le théorème suivant implique que chaque polynôme r-Fibonacci peut être écrit comme une somme de polynômes hyper-r-Fibonacci et de polynômes incomplets r-Fibonacci.

Théorème 5.5.4 *Pour $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 0$, on a :*

$$U_{n+(r+1)m} = U_n^{[m]} + U_{n+(r+1)m}(m-1). \tag{5.16}$$

Preuve. En utilisant les relations (5.11) et (5.14), on a :

$$\begin{aligned}
U_{n+(r+1)m} &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor+m} \tbinom{n+(r+1)m-rk-1}{k} x^{n+(r+1)m-(r+1)k-1} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor+m} \tbinom{n+m-r(k-m)-1}{k} x^{n+(r+1)(m-k)-1} y^k \\
&= \sum_{k=-m}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} \tbinom{n+m-rk-1}{k+m} x^{n-(r+1)k-1} y^{k+m} \\
&= \sum_{k=-m}^{-1} \tbinom{n+m-rk-1}{k+m} x^{n-(r+1)k-1} y^{k+m} + \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} \tbinom{n+m-rk-1}{k+m} x^{n-(r+1)k-1} y^{k+m} \\
&= U_n^{[m]} + \sum_{k=0}^{m-1} \tbinom{n+m(r+1)-rk-1}{k} x^{n+m(r+1)-rk-1} y^k \\
&= U_n^{[m]} + U_{n+(r+1)m}(m-1).
\end{aligned}$$

■

5.6 Les polynômes hyper-r-Lucas

Dans cette section, nous donnous la définition des polynômes hyper-r-Lucas de type s, puis nous donnons une formule explicite en termes de s et des polynômes hyper-r-Fibonacci.

Définition 5.6.1 *Pour $m \geqslant 0$, les polynômes hyper-r-Lucas bivariés sont définis par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} V_n^{[0]} = V_n^{(r,s)}, V_0^{[m]} = (s+1)y^m, \\ V_n^{[m]} = xV_{n-1}^{[m]} + yV_n^{[m-1]}. \end{cases} \tag{5.17}$$

***Quelques cas particuliers de polynômes hyper-r-Lucas de type s sont** :*

- *Pour $r = s = 1, x = 1$ et $y = 1$, $V_n^{[m]}(1,1) = L_n^{[m]}$, nous obtenons les nombres hyper-Lucas [7].*
- *Pour $r = s = 1, x = 2$ et $y = 1$, $V_n^{[m]}(2,1) = P_n^{[m]}$, nous obtenons les nomberes hyper-Pell-lucas [3].*
- *Pour $r = s = 1, x = 1$ et $y = 2$, $V_n^{[m]}(1,2) = J_n^{[m]}$, nous obtenons les nomberes hyper-Jacobsthal-Lucas.*

Théorème 5.6.1 *Soit r et s des entiers positifs tels que $1 \leqslant s \leqslant r$. Pour tous $n \geqslant 0$ et $m \geqslant 1$, on a :*

$$V_n^{[m]} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1) \rfloor} \frac{n + (s+1)m - (r-s)k}{n + m - rk} \binom{n+m-rk}{m+k} x^{n-(r+1)k} y^{k+m}. \tag{5.18}$$

Preuve. On prouve le théorème par récurrence sur l'entier $n + m$.
Posons $V_{n+m} = V_n^{[m]}$. On a $V_0^{[0]} = s + 1 = V_1^{[0]}$ et $V_0^{[1]} = (s+1)y$, donc la relation (5.18) est vérifiée pour $n + m = 0$ et $n + m = 1$. Supposons maintenante que l'identité (5.18) est vraie pour tout entier $p < n + m + 1$ et montrons qu'elle est vraie pour $p = n + m + 1$.

En utilisant la relation (5.17) on a :

$$\begin{aligned}
V_{n+1}^{[m]} &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} \frac{n+(s+1)m-(r-s)k}{n+m-rk}\binom{n+m-rk}{m+k}x^{n-(r+1)k}y^{k+m} \\
&+ \sum_{k=0}^{\lfloor (n+1)/(r+1)\rfloor} \frac{n+1+(s+1)(m-1)-(r-s)k}{n+m-rk}\binom{n+m-rk}{m-1+k}x^{n+1-(r+1)k}y^{k+m-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} \binom{n+m-rk}{m+k}x^{n+1-(r+1)k}y^{k+m} + s\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} \binom{n+m-rk-1}{m+k-1}x^{n+1-(r+1)k}y^{k+m} \\
&+ \sum_{k=0}^{\lfloor (n+1)/(r+1)\rfloor} \binom{n+m-rk}{m+k-1}x^{n+1-(r+1)k}y^{k+m} + s\sum_{k=0}^{\lfloor (n+1)/(r+1)\rfloor} \binom{n+m-rk-1}{m+k-2}x^{n+1-(r+1)k}y^{k+m} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} [\binom{n+m-rk+1}{m+k} + s\binom{n+m-rk}{m+k-1}]x^{n+1-(r+1)k}y^{k+m} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} \frac{n+1+(s+1)m-(r-s)k}{n+m-rk+1}\binom{n+m-rk+1}{m+k}x^{n-(r+1)k}y^{k+m}.
\end{aligned}$$

■

Remarque 5.6.2 *On obtient comme conséquence des relations* (5.17) *et* (5.18)*, une relation non homogène des polynômes hyper-*r*-Lucas de type* s *donnée par :*

$$V_n^{[m]} = xV_{n-1}^{[m]} + yV_{n-r-1}^{[m]} + \frac{n+(s+1)(m-1)}{n+m-1}\binom{n+m-1}{m-1}x^n y^m. \tag{5.19}$$

Le théorème suivant est analogue au théorème $3.2.1$ *pour les* r*-Lucas de type* s*, nous exprimons les polynômes hyper-*r*-Lucas de type* s *en fonction de* s *et du polynôme hyper-*r*-Fibonacci.*

Théorème 5.6.3 *Pour tous entiers* n, m, r *et* s $(1 \leqslant s \leqslant r)$*, on a :*

$$V_n^{[m]} = U_{n+1}^{[m]} + syU_{n+1}^{[m-1]}, \tag{5.20}$$

ce qui donne, de plus, pour tout entiers $n \geqslant r$ *et* $m \geqslant 1$ *:*

$$V_n^{[m]} = U_{n+1}^{[m]} + syU_{n-r}^{[m]} + s\binom{n+m-1}{m-1}x^n y^m. \tag{5.21}$$

Preuve. On obtient la preuve en utilisant les relations (5.14) et (5.18), en effet :

$$\begin{aligned}
V_n^{[m]} &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} \frac{n+(s+1)m-(r-s)k}{n+m-rk}\binom{n+m-rk}{m+k}x^{n-(r+1)k}y^{k+m} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} \binom{n+m-rk}{m+k}x^{n-(r+1)k}y^{k+m} + \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} \frac{(s+m)k}{n+m-rk}\binom{n+m-rk}{m+k}x^{n-(r+1)k}y^{k+m} \\
&= U_{n+1}^{[m]} + s\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} \binom{n+m-rk-1}{m+k-1}x^{n-(r+1)k}y^{k+m} \\
&= U_{n+1}^{[m]} + sy\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} \binom{n+m-1-rk}{m+k-1}x^{n-(r+1)k}y^{k+m-1} \\
&= U_{n+1}^{[m]} + syU_{n+1}^{[m-1]}.
\end{aligned}$$

■

Corollaire 5.6.1 *Pour des entiers positifs donnés m, n avec $x = y = 1$ et $r = s = 1$, on obtient :*

$$V_n^{[m]} + U_n^{[m]} = 2U_{n+1}^{[m]} \text{ et } V_n^{[m]} - U_n^{[m]} = 2U_{n+1}^{[m-1]}.$$

Nous présentons maintenant la connexion entre les polynômes incomplets r-Lucas, les polynômes hyper-r-Lucas et les polynômes r-Lucas de tybe s.

Théorème 5.6.4 *Pour tous entiers $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 0$, on a :*

$$V_{n+(r+1)m} = V_n^{[m]} + V_{n+(r+1)m}(m-1). \tag{5.22}$$

Preuve. La preuve est obtenue en utilisant les relations (5.16) et (5.20), en effet :

$$\begin{aligned}
V_{n+(r+1)m} &= U_{n+(r+1)m+1}^{[m]} + syV_{n+(r+1)m+1}^{[m-1]} \\
&= [U_{n+(r+1)m+1} + V_{n+(r+1)m+1}(m-1)] + sy[U_{n+(r+1)(m-1)+1} + V_{n+(r+1)(m-1)+1}(m-2)] \\
&= [U_{n+(r+1)m+1} + syU_{n+(r+1)(m-1)+1}] + [V_{n+(r+1)m+1}(m-1) + syV_{n+(r+1)(m-1)+1}(m-2)] \\
&= V_n^{[m]} + V_{n+(r+1)m}(m-1).
\end{aligned}$$

■

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons appris les suites récurrentes linéaires d'ordre supérieur, définies par la relation (1.1), ainsi que les suites de Fibonacci et les suites de Lucas, qui font actuellement l'objet de nombreuses recherches approfondies, ces suites sont utilisées dans divers domaines allant des sciences exactes aux sciences appliquées.

Le q analogue pour les suites de Fibonacci a été proposé. Nous avons aussi suggéré une extension au (p, q)-analogue de la suite r-Fibonacci généralisée. Nous avons défini et étudié les suites incomplétes r-Lucas de type s, les suites hyper-r-Fibonacci et hyper-r-Lucas de type s pour tout entier s compris entre 1 et r.

En conclusion, nous espérons que Dieu bénéficiera de cette oeuvre selon son destin, qui est un premier pas que nous espérons étre suivi de pas plus généraux et plus complets vers ce qui est meilleur et plus complet.

Bibliographie

[1] ABBAD. S, BELBACHIR. H, BENZAGHOU. B, Combinatoire et arithmétique des suites récurrentes linéaire et realisabilité, *Thése de doctorat Université Houari Boumedienne* (2020).

[2] ABBAD. S, BELHACHIR. H, BENZAGHOU. B, Companion sequences associated to the r-Fibonacci sequence. *algebraic and combinatorial properties*, **2019 43 : 1095-1114 TUBITAK**.

[3] AHMIA. M, BELBACHIR. H, BELKHIR. A, The Log-concavity and log convexity properties associated to hyperPell and hyperPell-Lucas sequences .*Annales Mathematicae et Informaticae 2014*, **:43 : 03-12**.

[4] AIT AMRANE. L, BETINA. K, MOKRANE. A, Etude des périodes de suites récurrentes linéaires sur les courbes elliptiques, *Thése de doctorat University Houari Boumedienne* (2015).

[5] AIT-MOKHTAR. A, NACER. A, SALINIER. A, ENDOMORPHISMES D'ALGÉBRES DE SUITES, *Thése de doctorat Université de limoges* (2008).

[6] BANMEZAI. A, Le q-analogue des suites de Fibonacci et de Lucas. *Présentée en vue de l'optention du Doctorat en Sciences Université d'Oran* 1 **05, 2016,**.

[7] BASHI. MM, MEZO. I, SOLAK. S, A symmetric algorithm for hyper-Fibonacci and hyper-Lucas numbers. *Annales Mathematicae et Informaticae 2014*, **:43 : 19-27**.

[8] BELBACHIR. H, BENCHERIF. F, Suites récurrentes linéaire, propriétés algébriques et arithmétiques *Linear recurrent sequences and powers of a square matrix. Integers 2006*, **2006 ; 6 : A12**.

[9] BELBACHIR. H, BENMEZAI. A, An alternative approach to Cigler's q-Lucas polynomials, *Applied Mathematics and Computation 2014*, **226 : 691-698. doi.org/10.1016/j.amc.2013.10.009.**

[10] BELBACHIR. H, BANMEZAI. A, Le p, q-analogue des suites de Fibonacci et de Lucas généralisées. *Les Annales RECITS* **vol 05, 2018, p :53-65**.

[11] BELBACHIR. H, Unimodalité et propriétés combinatoires de suites numériques. *Thése de doctorat Université Houari Boumedienne* **09, 2007-E/MT**.

[12] BEN TAHER. R, RACHIDI. M, Solving some generalized vandermonde systems and inverse of their associate matrices via new approaches for the binet formula. *(to appear)*.

[13] BERNOUSSI. B, RACHIDI. M, SAEKI. O, Factorial binet formula and the distributional moment formulation of generalized fibonacci sequences *Fibonacci Quarterly*, **42(4) :320-329, 2004**.

[14] CARLITZ. L, Fibonacci notes . III. q-Fibonacci numbers.*Fibonacci Quart*, **:12 : 317-322, 1974**.

[15] CARLITZ. L, Fibonacci notes . IV. q-Fibonacci polynomials.*Fibonacci Quart*, **:13 : 97-102, 1975**.

[16] CERLIENCO. L, MIGNOT. M, PIRAS. F, Suites récurrentes linéaire, propriétés algébriques et arithmétiques *Enseignements Mathématiques*, **1987. 33**, p. 67-108.

[17] CHEN. Y. C, LOUCK. J. D, The combinatorial power of the companion matrix *Linear Algebra Appl*, **232 :261-278, 1996**.

[18] CIGLER. J, A new class of q-Fibonacci polynomials. *Electron. J. Combin.* **10 Research Paper : 19, 15 pp. (electronic), 2003**.

[19] CIGLER. J, Some beautiful q-analogues of Fibonacci end Lucas polynomials *.ArXiv e-prints,* **Apr. 2011**.

[20] DJORDJEVIC. G B, SRIVASTAVA. HM, Incomplete generalized Jaccobsthal and Jaccobsthal-Lucas numbers. *Mathematical and Computer Modelling 2005 ;42 :1049-1056.* **doi.org/10.1016/j.mcm.2004.10.026**.

[21] DUBEAU. F, MOTTA. W, RACHIDI. M, SAEKI. O, On weighted r-generalized fibonacci sequences *Fibonacci Quarterly*, **35 :102-110, 1997**.

[22] DUMONT. D, Matrices d'Euler-Seidel, *Lotharingien de Combinatorie*, **1981**.

[23] DUPONT. R, Moyenne arithmético-géométrique, suites de Borchardt et applications. *Thèse de doctorat, École polytechnique, 2006* **http ://www.lix. polytechnique.fr/Labo/Regis.Dupont/.**

[24] EDOUARD LUCAS, Théorie des fonctions numériques simplement périodiques *Amer. J. Math*, **1 :184-240, 289-321, 1878**.

[25] ER. M. C, The matrices of fibonacci numbers. *Fibonacci Quarterly*, **22 :134-139, 1984**.

[26] FILIPPONI. P, Incomplete Fibonacci and Lucas numbers. *Rendicontidel Circolo Matematico di Palermo 1996 ;* **45(1) : 37-56.doi.org/10.1007/BF02845088** .

[27] GRAHAM. RL, KNUTH. DE, PATASHNIK. O, Concrete Mathematics -A Foundation for Computer Science. *Addison-Wesley Publishing Company, 1989*, **Advanced Book Program (1st ed). Reading, MA, USA**.

[28] KALMAN. D, Generalized fibonacci sequences by matrix methods. *Fibonacci Quarterly*, **20 :73-76, 1982**.

[29] KALMAN. D, MENA. R, The fibonacci numbers-exposed *Math Mag 2003*, **76 :167-81,2003.**

[30] KILIC. E, Evaluation of Hessenberg determinants via generating function approach *Filomat 2017*, **2017. 31 (15) : 4945-4962. doi : 12298/FIL1715945K**.

[31] KOSHY. T, Fibonacci and Lucas numbers with Applications, *A Wiley Interscience Publications.John Wiley and Soons, Inc., (2001)*.

[32] LAFON. G, Un an de maths, *ECE3* 2011 - 2012, (2012).

[33] LEONARD. E DICKSON, History of the Theory of Numbers,*vol. 1 : Divisibility and Primality.* **Chelsea, New York, 1952**.

[34] LEVESQUE. C, On m-th order linear recurrences. *Fibonacci Quart*, **23(4) :290-295, 1985**.

[35] MOULINE. M, RACHIDI. M, suites de Fibonacci généralisées et Chaînes de Markov, *Real Academia de Ciencias Exatas, Fisicasy Naturales de Madrid,* **89 :1-2,61-77, 1995**.

[36] MOULINE. M, RACHIDI. M, suites de Fibonacci généralisées, théorème de cayley-hamilton et Chaînes de Markov. *Rend. Sem. Mat. Messina Ser. II XIX,* **4 :107-115, 1996/1997**.

[37] MOULINE. M, RACHIDI. M, Application of markov chains properties to rgeneralized fibonacci sequences *Fibonacci Quarterly*, **37 :34-38, 1999**.

[38] MOULINE. M, suites de Fibonacci Généralisées et Chaînes de Markov, *PhD thesis, Universieé Abdelmalek Essaadi, Tétouan, Maroc* **1995**.

[39] PHILIPPOU. G. N, On the k-th order linear recurrence and some probability applications of Fibonacci Numbers *Kluwer Academic Publishers*, **pages 89-96, 1988**.

[40] PHILIPPOU. A. N, GEORGHIOU. C, PHILIPPOU. G. N, Fibonacci-type polynomials of order k with probability applications *The Fibonacci Quarterly*, **23**.

[41] POORTEN. A, SHPARLINSKI. I, Exponential functions, linear recurrence sequences, and their applications, *Centre for Number Theory Research Macquarie Université Sydney*.

[42] RAAB. JA, A generalization of the connection between the Fibonacci sequence and Pascal's triangle. *Fibonacci Quarterly*, **1963 ; 1(3) :21-31**.

[43] RENAULT. M, The Fibonacci Sequence Under Various Moduli, *A thesis submitted to Wake Forest University in partial fulfillment of the degree of Master of Arts in Mathematics, (1996)*.

[44] STANLEY. R. P, Generating functions. In Studies in Combinatorics M.A.A. Studies in Mathematics *G-C. Rota, ed., Math. Ass. of America*, **17 :100-141, 1978**.

[45] TASCI. D, FIRENGIZ. MC, TUGLU. N, Incomplete Bivariate Fibonacci and Lucas p-polynomials. *Discrete Dynamics in Nature and Society 2012 :* Article ID 840345, 11 pages. doi : 10.1155/2012/840345 .

[46] VON ZUR GATHEN. J, JÜRGEN. G, Modern Computer Algebra, *Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1999*.

[47] YOUNESS EL KHATABI, Racines p-iémes d'une matrice inversible et suites de Fibonacci *Thése de doctorat University Moulay Ismail*, **2016**.