REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ YAHIA FARES, MÉDÉA

FACULTÉ DES SCIENCES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE



MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDES EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : **ANALYSE MATHÉMATIQUES ET APPLICATION**

Présenté par

Sebati Amina

Thème :

Stabilisation d'une corde viscoélastique se déplaçant axialement sous une tension variable spatio-temporelle

---

Évalué par le jury composé de :

promotrice	F. BOULARIAH	MAA, Université de Médéa
Examinateur	N.BENAICHOUCHE	MAA, Université de Médéa
Examinateur	M.LEGHMIZI	MAA, Université de Médéa

Année universitaire 2020/2021

Dédicace

A ma chères mère : et mon chères père ;

A mes chers sœurs ;

A mes chers frères ;

*A toute la famille **Sebati et Belkhous** ;*

A mes chères amies ;

*A mes honorables **professeurs** ;*

*A tous mes amies de la promotion **2021** ;*

Je dédié cet humble travail.

SEBATI AMINA

Remerciements

Je remercie en premier lieu ALLAH le tout-puissant de nous avoir accordé la puissance et la volonté, la chance pour suivre pour terminer ce travail.

Je tiens vivement à exprimer ma profonde reconnaissance à Madame F.BOULARIAH, maître de conférences assistante ***MAA*** *à l'université de Médéa, d'avoir veillé et assurer l'encadrement de ce travail.*

Mes remerciements vont également à N.BENAICHOUCHE et M.LEGHMIZI, enseignants à l'université de médéa, d'avoir accepté d'examiner ce travail et faire partie du jury, et je les en remercie sincèrement.

Sans oublier de remercier tous nos enseignants pendant tous les paliers de notre parcours, et exceptionnellement aux enseignants qui ont enrichi nos connaissances.

Enfin, J'adresse mes vifs remerciements à ma famille et mes proches pour son soutien moral et son encouragement ainsi qu'à toutesJJJ mes amies pour leur présence et leur aide.

Résumé

Le but de notre travail est de prouver le résultat de la stabilité exponentielle de l'énergie associée à une chaîne axiale en viscoélastique sous une tension spatio-temporelle, à condition que la tension minimale dans la chaîne soit supérieure au temps de sa dérivation.
C'est grâce à l'utilisation d'un actionneur hydraulique qui fonctionne par contact sur le côté droit de la chaîne, ce qui supprime efficacement les vibrations.
Notre méthode est principalement basée sur la technique des multiplicateur.

Mots-clés : Corde à déplacement axial, actionneur dynamique, stabilité exponentielle, tension variable spatio-temporelle, viscoélasticité.

Abstract

The aim of our work is to prove the result of the exponential stability of the energy associated with an axial chain in viscoelastic under a space-time tension, provided that the minimum tension in the chain is greater than the time of its derivation.
This is through the use of a hydraulic actuator that operates by contact on the right side of the chain, effectively suppressing vibration.
Our method is mainly based on the technique of multiplying.

Key words : axial moving string , dynamic actuator, exponential stability, spatiotemporally varying tension, viscoelasticity.

ملخص

الهدف من عملنا هذا هو إثبات نتيجة الإستقرار الأسي للطاقة المرتبطة بسلسلة مطاطية لزجة محورية تحت توتر متغير زماني مكاني، بشرط أن يكون الحد الأدنى للتوتر في السلسلة أكبر من وقت إشتقاقه.
ذلك من خلال استعمال مشغل هيدروليكي يعمل باللمس على الجهة اليمنى للسلسلة، يقوم بقمع الإهتزاز بطريقة فعالة .
تعتمد طريقة عملنا بشكل أساسي على تقنية المضاعفات .

كلمات مفتاحية : حبل متحرك محوريا، مشغل ديناميكي، ثبات أسيتوتر متغير زماني ومكاني ، لزوجة مطاطية.

Table des matières

Remerciements iii

Résumé iv

Abstract v

Résumé en arabe vi

Table des matières vii

Table des figures vii

Introduction générale 9

1 Rappels généraux et définitions 12

1.1 Espace des fonctions 12

1.1.1 Espace $L^p(\Omega)$ 12

1.1.2 Espaces de Sobolev 13

1.1.3 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles 14

1.2 Quelques Inégalités 15

1.3 Stabilité de l'énergie 16

1.4 Quelques définitions 16

2 Position du problème 20

2.1 Équation du mouvement 20

2.2 Méthode de contrôle des vibrations 22
2.3 Explication de l'expérience 23
2.4 Définition de galvanisation du zinc ligne 23
2.5 Méthode expérimental 24
2.6 Les différents problèmes qui étudie 24

3 Existence et unicité **26**
3.1 Les hypothèse 26
3.2 Existence et unicité 26

4 Stabilisation exponentielle **29**
4.1 Préliminaires 29
4.2 Comportement asymptotique 35

Conclusion et perspectives **45**

Bibliographie **47**

Table des figures

1 Une bande d'acier de la translation dans la galvanisation du zinc ligne 10
2 Corde en mouvement axial 10

2.1 La bande d'acier roulante dans une ligne de galvanisation de zinc 22
2.2 Une bande d'acier de la translation dans la galvanisation du zinc ligne 23

Introduction générale

Les structures mécaniques (câbles aériens, rubans, chaînes de transmission de puissance, chaînes et plaques traitées) sont sujets à des vibrations indésirables pendant leur fonctionnement. Ces vibrations peuvent réduire leur durée de vie, provoquer des dysfonctionnements voire détruire les annonces ainsi que d'énormes pertes matérielles. Les vibrations sont dues à différents facteurs tels que la non-uniformité de la matière, les perturbations d'environnements, les grandes vitesses , etc.

La modélisation, l'analyse dynamique et le contrôle des systèmes de mouvement axiaux ont suscité un grand intérêt en raison de leurs larges applications et de l'entrée dans de nouvelles applications dans les manœuvres robotiques et les structures spatiales flexibles.
Les dynamiques des systèmes en mouvement axial ont été étudiées depuis plus de 60 ans. Les premières publications concernant l'étude des vibrations transversales d'une corde en mouvement axial remontent a l'année 1950. Les pionniers dans ce domaine sont Sack [18] et Archibald et Emslie [7].

Une corde en mouvement axial est un modèle type largement utilisé pour représenter : des fils, des bandes magnétiques, des ceintures, des scies à ruban et des câbles (voire figure **??**), en particulier lorsque l'objet concerné est long et étroit et a une rigidité à flexion négligeable.L'une des premières études consacrées à l'analyse des vibrations d'une corde en mouvement axial est celle de Archibald et Emslie [7]. Elle traite le cas de vibrations transversales d'une corde se déplaçant avec une vitesse constante c le long de la direction longitudinale,désigné par X. Soient $y(x,t)$ le déplacement transversal de la corde à la position x et l'instant t et l la longueur de la corde entre les deux extrémités (voire figure**??**)

Dans notre étude, nous avons étudié la stabilité de la corde élastique viscoélastique en mouvement axial sous tension spatio-temporelle. Nous adoptons un mécanisme de contrôle conique du côté droit (RHS) (actionneur dynamique) de la chaîne pour supprimer les vibrations transversales et permettre au système d'atteindre l'équilibre de manière rapide.

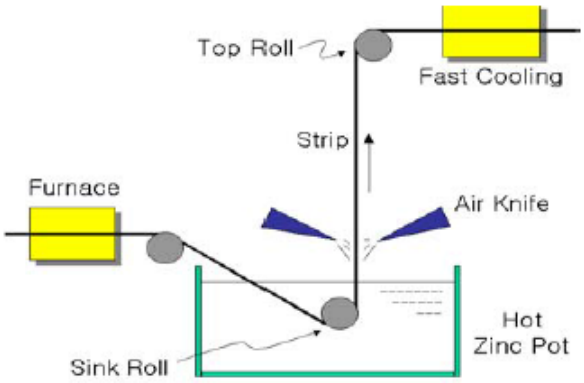


FIGURE 1 – Une bande d'acier de la translation dans la galvanisation du zinc ligne

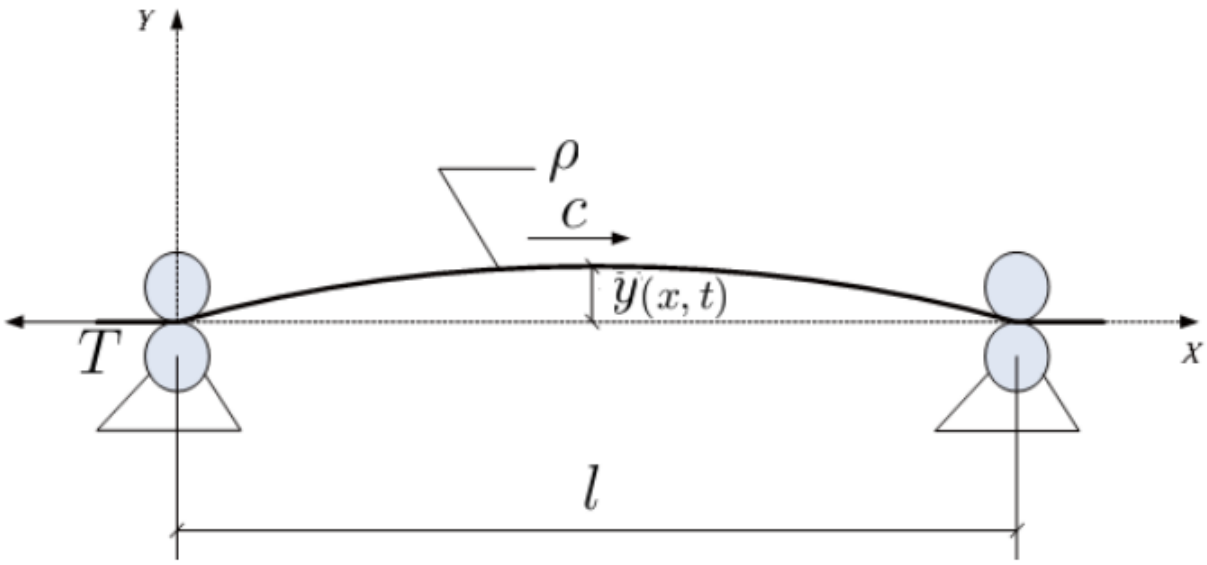


FIGURE 2 – Corde en mouvement axial

Le mouvement de la corde décrit par une équation intégro -différentielle partielle tandis que la dynamique de l'actionneur décrit par une équation différentielle intégro-ordinaire. Le problème

principal s'écrit :

$$\begin{cases} \rho y_{tt} + 2\rho c y_{xt} + \rho c^2 y_{xx} - (T_s(x,t)y_x)_x + \displaystyle\int_0^t h(t-s)(a(x)y_x(s))_x ds = 0, \quad x \in (0,l), t > 0. \\ F_c(t) = m y_{tt}(l,t) + (T_s(l,t) - \rho c^2) y_x(l,t) - a(l) \displaystyle\int_0^t h(t-s) y_x(l,s) ds + d(t), t \geq 0, \\ y(0,t) = 0, t \geq 0, \\ y(x,0) = y_0(x), y_t(x,0) = y_1(x), x \in (0,l), \end{cases}$$

Le mémoire est organisée en quatre chapitres :

- Dans **le premier chapitre :** nous rappelons les outils nécessaires qui sont utiles dans le dernier chapitre ;
- **Le deuxième chapitre :** est consacré à étudier la position du problème ;
- **Le troisième chapitre :** nous introduisons tout d'abord quelques notations, lemmes, définitions ..., nécessaires à la preuve de notre résultat ;
- **Le quatrième chapitre :** nous présentons les différentes fonctionnelles utilisées pour modifier l'énergie classique afin d'obtenir un résultat d'équivalence.

  et nous formulons les hypothèses sur la fonction de relaxation et nous présentons notre résultat de stabilisation avec la base de preuves sur la technique du multiplicateure.

Chapitre 1

Rappels généraux et définitions

1.1 Espace des fonctions

Notons par $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ le point générique d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Soit u une fonction définie de Ω $\grave{a}$ valeurs dans $\mathbb{R}$, on désigne par $D^i u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}$ la dérivée partielle de la fonction u par rapport a x_i. Définissons aussi le gradient de u, comme suit

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

On notera par :

$C(\Omega)$ l'espace des fonctions continues de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$,

$(C(\Omega))^m$ l'espace des fonctions continues de Ω $\grave{a}$ valeurs dans $\mathbb{R}^m$,

Pour $k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, on définit alors :

$C^k(\Omega)$ l'espace des fonctions u qui sont k fois dérivables et dont la dérivée d'ordre k est continue sur Ω,

$C_0^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à supports compacts qu'on appelle espace des fonctions test.

1.1.1 Espace $L^p(\Omega)$

On rappelle ici quelques définitions et propriétés élémentaires :

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$ et Ω un ensemble au sens de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$,

on définit

$$L^p(\Omega) = \left\{ (classe\ de\ fonctions)\ u : \Omega \to \mathbb{R} : u\ mesurable\ et\ \int_\Omega |u(x)|^p\ dx < \infty \right\}.$$

On note

$$\|u\|_p = \left[\int_\Omega |u(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Si $p = 1$ on note $L^1(\Omega)$ l'espace des classes des fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, on le munit de la norme

$$\|u\|_{L^1} = \int_\Omega |u(x)|\ dx;$$

et si $p = \infty$ on note $L^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables essentiellement bornées sur Ω

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} u : \Omega \to \mathbb{R} : u\ mesurable\ et\ il\ existe\ une\ constante\ C \\ telle\ que\ |u(x)| \leq C\ p.p\ sur\ \Omega \end{array} \right\}.$$

On note

$$\|u\|_\infty = inf \left\{ C > 0, |u(x)| \leq C\ p.p\ sur\ \Omega \right\} = \sup_{\Omega} ess\ |u|$$

Remarque 1.1 l'espace L^2 muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega uv\ dx,\ u, v \in L^2(\Omega)$$

est un espace de Hilbert et l'espace $L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach.

1.1.2 Espaces de Sobolev

Dérivée faible

Définition 1.1 *On dit que u est dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$, s'il existe une fonction $w \in L^2(\Omega)$, telle que pour toute $v \in C_0^\infty(\Omega)$ on ait*

$$\int_\Omega u(x) \frac{dv(x)}{dx} dx = -\int_\Omega v(x) w(x) dx.$$

Cela revient à dire que $\frac{du(x)}{dx} = w(x)$ au sens des distributions.

Espace $W^{1,p}(\Omega)$

Soit $1 \leq p \leq \infty$. On définit l'espace vectoriel $W^{1,p}(\Omega)$ par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), telle\ que : \frac{du(x)}{dx} \in L^p(\Omega) \right\},$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \left\|\frac{du(x)}{dx}\right\|_{L^p(\Omega)}$$

est un espace de Banach. On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Espace $W^{m,p}(\Omega)$

Pour $m \geq 2$, $1 \leq p \leq \infty$, on définit $W^{m,p}(\Omega)$ par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega), telle\ que : \frac{d^k u}{dx^k} \in L^p(\Omega), k \leq m \right\}$$

où $k \in \mathbb{N}$ et $\frac{d^k u}{dx^k}$ est la dérivée faible d'ordre k de u au sens de la définition (1.1). C'est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{k \leq m} \left\|\frac{d^k u}{dx^k}\right\|_{L^p(\Omega)}.$$

On pose

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

Remarque 1.2 Les espaces $H^m(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{k \leq m} \left(\frac{d^k u}{dx^k}, \frac{d^k v}{dx^k}\right)_{L^2(\Omega)}, \ u, v \in H^m(\Omega).$$

On introduit ensuite :

L'espace $H_0^1(\Omega)$ désigne la fermeture de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans la norme $H^1(\Omega)$.

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}.$$

1.1.3 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles

Définition 1.2 *Soient $1 \leq p < \infty$ et X un espace de Banach, si p est fini on définit $L^p(0,T;X)$ par :*

$$L^p(0,T;X) = \left\{ u : [0,T] \to X\ mesurable, telle\ que\ \int_0^T \|u\|_X^p\, dt < \infty \right\}$$

où $[0,T]$ *est un intervalle de* $\mathbb{R}$*. On munit cet espace de la norme :*

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u\|_X^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

Si p *est infini, alors on définit*

$$L^\infty(0,T;X) = \left\{ u : [0,T] \to X \ mesurable, telle\ que \sup_{t\in[0,T]} ess\|u\|_X < \infty \right\}.$$

On le munit de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t\in[0,T]} ess\|u(t)\|_X.$$

Proposition 1.1 $L^p(0,T;X)$ *muni de la norme* $\|u\|_{L^p(0,T;X)}$ *est un espace de Banach pour* $p \in [1,\infty]$.

1.2 Quelques Inégalités

Notation : Soit $1 \leq p \leq +\infty$. On note par q l'exposant conjugué de p i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Lemme 1.2 *(Inégalité de Hôlder)*

Soit $1 \leq p \leq \infty$*; on désigne par* q *l'exposant conjugué de* p *définie par*

$$q = \frac{p}{p-1} \ \ c'est - à - dire \ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Si $u \in L^p(\Omega)$ *et* $v \in L^q(\Omega)$*, alors* $uv \in L^1(\Omega)$ *et*

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Corollaire 1.2 Si $p = q = 2$ on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Lemme 1.3 *(Inégalité de Young)*

Soient $1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *et* $a, b \geq 0$*. Alors*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Lemme 1.4 *(Inégalité de Poincaré). Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière assez régulière. Alors*

$$\|u\|_2 \leq B\|\nabla u\|_2, \quad pour \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

où

$$B^{-1} = \inf_{\|u\|\neq 0} \frac{\|\nabla u\|_2}{\|u\|_2}$$

.

1.3 Stabilité de l'énergie

Il existe plusieurs degrés de stabilité que l'on peut étudier. Le premier degré consiste à analyser simplement la décroissance de l'énergie des solutions vers zéro, i.e

$$E(t) \to 0 \; lorsque \;\; t \to \infty,$$

c'est ce que l'on appelle la stabilisation forte.
Pour le second, on s'intéresse à la décroissance de l'énergie la plus rapide, c'est-à-dire lorsque celle-ci tend vers 0 de manière exponentielle, i.e

$$E(t) \leq Ce^{-\beta t}, \forall t > 0,$$

où C et β sont deux constantes positives avec C qui dépend des données initiales. Quant au troisième, il étudie des situations intermédiaires, dans lesquelles la décroissance des solutions n'est pas exponentielle, mais du type polynomial par exemple :

$$E(t) \leq \frac{C}{t^\alpha}, \forall t > 0,$$

où C et α sont deux constantes positives avec C qui dépend des données initiales.

1.4 Quelques définitions

Intégration par partie

Définition 1.3 *soit I un intervalle ouvert ; $a, b \in I$ et f, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ alors :*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\;\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

Matériau viscoélastique

Définition 1.4 *on appelle matériau viscoélastique, un matériau dont une partie de l'énergie stockée dans le système est récupérée lors de la suppression de la charge, et l'autre partie se dissipe sous forme de chaleur.*

Le principe de Hamilton

Définition 1.5 *le mouvement d'un système réel, depuis l'instant t_1 jusqu'à l'instant t_2 est donné par :*

$$\int_{t_1}^{t}(T-V-W)dt,$$

où T est l'énergie cinétique, V l'énergie potentielle δW le travail virtuel, pour que le système doit être stationnaire, il faut que

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T-V-W)dt=0,[11]$$

Méthode de Galerkin

On utilise cette méthode lorsque les conditions au limites sont périodiques ou sont homogènes soit $B=\{V\in H, BV=0\}$ le sous espace des fonctions de H qui vérifient les conditions aux limites dans cette méthode les$(\varphi_n)_{n\geq 1}$ forment une base de B.
En recherchant $U_N=\sum_{n=1}^{N}a_n(t)\varphi_n\ dans\ B_N$

$$B_N=vect\{\varphi_1,....,\varphi_N\}.$$

Soit $P_N$la projection orthogonal de U_N sur B_N.
Le méthode de Galerkin consiste à résoudre le problème approcher suivant :

$$\begin{cases} U_N=\sum_{n=1}^{N}a_n(t)\varphi_n\in B_n tel\ que \\ P_N R_N=0 \\ avec\ \ R_N=\frac{\partial U_N}{\partial t}-F(U_N)-f \end{cases} \tag{1.1}$$

Théorie de Lyapunov

L'utilisation des fonctions définies positives est une technique parmi les plus efficaces pour analyser la stabilité d'un système gouverné par une équation différentielle ordinaire.

Définition 1.6 *(Fonction de classe K).*
Une fonction continue $\alpha : [0, a[\longrightarrow [0, +\infty[$ est dite de classe K, si elle est strictement croissante et $\alpha(0) = 0$.
Elle est dite de classe K_∞, si de plus, on a $a = +\infty$ et $\alpha(r) \longrightarrow \infty \; quand \; r \longrightarrow \infty$.

Définition 1.7 *(Fonction de classe KL).*
Une fonction continue $\beta : [0, a[\times [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ est dite de classe KL, si pour tout s fixé, l'application $r \longmapsto \beta(x, t)$ est de classe K et pour tout r fixé, l'application $r \longmapsto \beta(x, t)$ est décroissante et $\beta(x, t) \longrightarrow 0 \; quand \; t \longrightarrow \infty$.
Voici une autre reformulation des notions de stabilité utilisant les fonctions de classes K et KL; les démonstrations des propositions suivantes peuvent être consultées dans l'ouvrage [19] .

Définition 1.8 *Une fonction continue $V : R_+ \times R^n \longrightarrow R_+$ est dite :*
- définie positive, s'il existe une fonction α de classe K, telle que

$$\forall t \geq 0, \forall x \in R^n, V(t, x) \geq \alpha(\|x\|)$$

- définie positive et radialement non-bornée (ou propre), si l'inégalité précédente est vérifiée pour tout $x \in R^n$ avec une fonction α de classe K_∞.
- limitée ou decresent, s'il existe une fonction γ de classe K, telle que

$$\forall t \geq 0, \forall x \in R^n, V(t, x) \leq \gamma(\|x\|).$$

Définition 1.9 *(Fonction de Lyapunov).*
Soit $U(0)$ un voisinage de zéro et $V : R_+ \times U(0) \longrightarrow R$ une fonction continue et différentiable sur $U(0)$.
- On dit que V est une fonction de Lyapunov au sens large en 0, si elle vérifiée les deux propriétés suivantes :
1- V est définie positive.

2- $\dot{V}(t,x) \leq 0$ *pour tout* $x \in U(0)$.

- On dit que V est une fonction de Lyapunov stricte en 0, si elle vérifiée les deux propriétés suivantes :

1- V *est définie positive.*

2- $\dot{V}(t,x) < 0$ *pour tout* $x \in U(0) \setminus \{0\}$.

L'utilisation de ces fonctions fournit des critères qui permettent de conclure à la stabilité ou à la stabilité asymptotique d'un point d'équilibre sans que l'intégration des équations du 1système considéré soit nécessaire. Les résultats datent du 19^e siècle et sont dus à Lyapunov.
Pour une démonstration, le lecteur pourra se référer à [10].

Chapitre 2

Position du problème

2.1 Équation du mouvement

Nous avons configuré un mécanisme de contrôle (actionneur dynamique) orienté vers le côté droit(RHS) de la chaîne en caoutchouc visqueux axialement (se déplaçant sous tension variable spatio-temporelle) pour supprimer les vibrations .Nous décrivons le mouvement de l'actionneur dynamique en utilisant une équation différentielle ordinaire illustrée dans le problème suivant :

$$\begin{cases} \rho y_{tt} + 2\rho c y_{xt} + \rho c^2 y_{xx} - (T_s(x,t)y_x)_x + \displaystyle\int_0^t h(t-s)(a(x)y_x(s))_x ds = 0, \quad x \in (0,l), t > 0. \\ F_c(t) = m y_{tt}(l,t) + (T_s(l,t) - \rho c^2) y_x(l,t) - a(l) \int_0^t h(t-s) y_x(l,s) ds + d(t), t \geq 0, \\ y(0,t) = 0, t \geq 0, \\ y(x,0) = y_0(x), y_t(x,0) = y_1(x), x \in (0,l), \end{cases}$$

Notation :

$y(x,t)$	est le déplacement transversale de la corde .
y_{tt}	désigne l'accélération locale dans la direction transversale de la corde .
y_{xt}	est l'accélération de coriolis .
y_{xx}	est l'accélération centripète (voir Kim et al2) .
$y(l,t)$	est le déplacement .
$y_t(l,t)$	est la vitesse .
$y_{tt}(l,t)$	est l'accélération de l'actionneur .
$y_x(l,t)$	est la pente de la corde .
$y_{xt}(l,t)$	est le taux de temps la pente de la corde .
$T_s(x,t)$	représente la tension appliquée à la corde .
$F_c(t)$	est la force de commande appliquée au RHS de la corde pour supprimer les vibrations transversales .
$h(t)\ et\ a(x)$	sont des fonctions positives .
$d(t)$	désigne la force de perturbation inconnue.
$\rho > 0$	désigne la masse par unité de la longueur .
C	est la vitesse axiale de la corde qui est supposée constant .
ρ	est la masse uniforme par unité de longueur de la colonne montante.
m	est la masse de l'actionneur, que est caractérisé par le coefficient d'amortissement d_c.
l	est la longueur de la portée contrôlée de la chaîne.
$y_0(x)$	est respective le déplacement initiale.
$y_1(1)$	est la vitesse initiale .

Dans [20] une schéma de contrôle des vibrations puissant pour les bandes d'acier à déplacement axial dans la ligne de galvanisation du zinc illustré dans la figure2.1 la force de contrôle aux

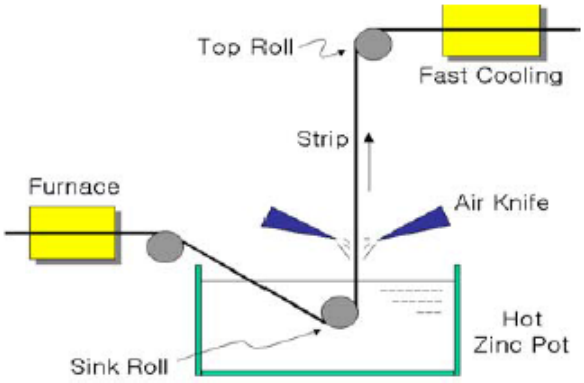


FIGURE 2.1 – La bande d'acier roulante dans une ligne de galvanisation de zinc

limites est appliquée à la barre à travers deux rouleaux tactiles reliés à un actionneur hydraulique, dérive le modèle mathématique du système, qui consiste en une équation différentielle partielle décrivant la dynamique de l'actionneur .

2.2 Méthode de contrôle des vibrations

Dans [12] les chercheurs on trouvé une moyen de réduire en continu les vibrations latérales de la bande d'acier la ligne de galvanisation à chaude du zinc(Hot zinc tank) est la méthode illustrée sur la figure 2.2.

Afin d'obtenir une uniformité des dépôtes de zinc des deux côtes de la bande d'acier et de réduire la consommation de zinc, la bande doit passer entre les lames d'air(Aire knife) à une distance entre les deux rouleaux (rollsk) de support, le rubane d'acier peut être conçu de l'une des trois manières suivantes :en tant que poutre mobile, en tant que file en mouvement, en tant que bande mobile dans la ligne de galvanisation du zinc, la distance entre les doubles rouleaux de support est trop grand par rapport l'épaisseur de la barre et le mouvement de torsion de la barre sont ignorés, de sorte que la modélisation en tant que chaîne mobile est la plus appropriée pour le système donné, le flux de masse entrant et sortant se produit à travers la frontière et donc les équations du mouvement

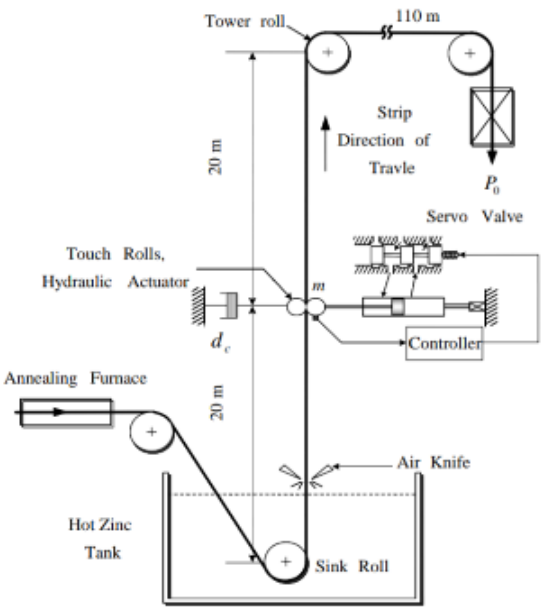


FIGURE 2.2 – Une bande d'acier de la translation dans la galvanisation du zinc ligne

peuvent être dérivées en appliquant le principe de Hamilton au système de changement de masse.

2.3 Explication de l'expérience

Afin de réduire et de supprimer les vibrations et d'empêcher la chaîne d'être endommagée et des influences extérieure ,nous vous effectué cette expérience 2.2 ,

2.4 Définition de galvanisation du zinc ligne

La définition dans sa forme générale est le processeurs revêtement de la chaîne, des plaques ou des fils avec du zinc liquide à chaud afin de les préserve et de les protéger des dommages et des facteurs externe, il a plusieurs méthodes et type.

2.5 Méthode expérimental

nous sommes des chercheurs rempli la baignoire de zinc liquide(Hot zinc tank) qui a été exposé à une chaleur élevée , le bloc ou l'objet tire la chaîne du four de recuite(Annealing furnace) qui passe à travers les poulies(rolls). La chaîne(strip) est immergée à l'intérieure du réservoir de Zinc chaud, de sort que le cuivre reposera dessus de manière aléatoire, et lorsqu'il sortira du réservoir ou de la baignoire, les lemmes pneumatique(air knife) le cuivre de manière uniforme , préservant ainsi la chaîne et réduisant les vibrations.
le frappe inconnue qui se produit sur la chaîne est contrôlée par la torche à cylindre tactile hydraulique(touch rools, Hydraulique Actuator) qui est capable de supprimer les vibrations transversales qui se produisent pendant le mouvement de la chaîne

2.6 Les différents problèmes qui étudie

YANG et [21] considéré un système décrivant une corde se déplacent axialement sous une tension variable spatio-temporelle qui est fendue en deux parties :une travée contrôlée et une travée non contrôlée. Un actionneur hydraulique de rouleau tactile est placé au milieu de chaîne, qui pourrait être considérée comme la limite droite de l'étendue contrôle. L'équation du mouvement et la frontière les conditions sont obtenues en utilisant le principe de Hamilton

$$\begin{cases} \rho y_{tt} + 2\rho c y_{xt} + \rho c^2 y_{xx} - (T_s(x,t)y_x)_x + c_v(y_t + cy_x) = 0. \\ x \in (0,l), t > 0, \\ y(0,t) = 0, t \geq 0, \\ F_c(t) = m y_{tt}(l,t) + (\eta_m - \rho c) y_t(l,t) + (T_s(l,t) - \rho c^2) y_x(l,t), t \geq 0. \end{cases}$$

Avec c_v désigne le coefficient d'amortissement dans la corde ils supposent que le borne inférieur de la tension $T_s(x,t)$ est suffisantement supérieure aux dérives de tension $T_s(x,t)_t$ et $T_s(x,t)_x$, pour prouver la stabilité asymptotique de la bouche fermée système sous le schéma de contrôle au frontières robuste dans le carde de la théorie des semi-groupes .
Kellech [13] examiné le cas où la tension est constant, c'est-à-dire $T_s(x,t) = T_S, x \in (0,l), t > 0$. Le multiplicateur cette méthode est utilisée pour concevoir une loi de contrôle aux limites robuste. L'auteur a proposé la force de contrôle aux limites suivante :

$$F_c(t) = -k y_t(l) - mc y_{xt}(l) + F_d(t), k > 0, t \geq 0,$$

où $F_d(t)$ est une force supplémentaire conçue pour contrôle la perturbation $d(t)$, qui est basée sur une stratégie de contrôle robuste.

Dans le cas où il n'y a pas de perturbation, c'est-à-dire $d(t)$, une résultat de décroissance exponentielle a été obtenu.

Chapitre 3

Existence et unicité

3.1 Les hypothèse

3.2 Existence et unicité

Pour étudier la stabilisation d'une corde viscoélastique se déplaçant axialement sous une tension variable spatio-temporelle elle faut propose les hypothèse suivante
$(A1)$, $h(t) \geq 0$ est une fonction C^1 bornée vérifiant $h(0) > 0$, et il existe des constantes positives ξ_1, ξ_2, ξ_3 et t_* tq :

$$-\xi_2 \leq h'(t) \leq -\xi_1 h(t), t > t_*,$$

et

$$0 \leq h''(t) \leq \xi_3 h(t), t > t_*.$$

(A2) $T_S(x,t)$ est continûment dérivable et satisfait

$$0 \ < T_{s,min} \leq \ T_s(x,t) \ \leq T_{s,max}, \tag{3.1}$$

et

$$|(T_s(x,t))_t| \ \leq \ (T_s)_{t,max}$$

pour tout $x \in [0, l]$ et $T_{s,min},\ T_{s,max}$, et $(T_s)_{t,max}$ est constates positives

(A3) $a :]0, l[\ , t \geq 0$ est une fonction bornée non négative et $a(x) \geq a_0$ avec

$$T_{s,min} - \rho c^2 \|a\|_\infty \int_0^\infty h(s)ds =: T_{s,min} - \rho c^2 - \|a\|_\infty k > 0.$$

(A4) elle existe $\sigma > 0$ tel que $\int_0^\infty h(s)e^{\sigma s} < \infty$.

(A5) le fonction de perturbation $d(t)$ est uniformément bornée,c'est-à-dire, $|d(t)| \leq \eta_d$ où η est une constante positive inconnue.

L'hypothèse (A5) est raisonnable car la perturbation variant dans le temps $d(t)$ a une énergie finie donc est bornée.

L'hypothèse sur $h''(t)$ est nécessaire pour garantir la régularité des solutions nécessaire à la preuve du résultat principal .

On rappel l'inégalité de Poinacré [9], pour $[u \in V = v \in H^1(0, l), v(0) = 0,]$

$$u^2(x) \leq l \|u_x\|^2 , \forall x \in [0, l], \|u\|^2 \leq l^2 \|u_x\|^2$$

Ona

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^x u_x(s,t)ds \\ &\leq \left(\int_0^x |u_x|^2 ds\right)^{\frac{l}{2}} \left(\int_0^x 1ds\right)^{\frac{l}{2}} \\ &\leq \left(\int_0^l |u_x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^l 1dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|u_x\|_{L^2} \sqrt{l} \end{aligned}$$

Alors

$$\int_0^l |u(x,t)|^2 dx \leq \int_0^l \|u_x\|_2^2 (\sqrt{l})^2 dx$$

$$\|u\|_2^2 \leq l \|u_x\|_2^2 \int_0^l 1dx = l^2 \|u_x\|_2^2 ,$$

et $\|.\|_2$ est la norme dans $L^2(0, l)$.

On équipe V de la norme dans $H^1(0, l)$ et on note (.,.)et $L^2(0, l)$

Théorème 3.1 *Soit* $(y_0, y_1) \in V \cap H^2(0,l) \times V$ *et soit* $T > 0$*, alors sous les hypothèses* $(A_1 - A_5)$ *le problème (1) a une unique solution globale telle que*

$$y \in L^\infty([0,T], V \cap H^2(0,l)), y_t \in L^\infty([0,T], V), y_{tt} \in L^\infty([0,T], L^2(0,l)).$$

De plus

$$y \in C([0,T], V), \quad y_t \in C([0,T], V), y_{tt} \in C([0,T], L^2(0,l)).$$

Preuve: La preuve est basée sur la méthode d'approximation de Galerkin ,qui peut être adaptée, par exemple de [9] ■

Chapitre 4

Stabilisation exponentielle

4.1 Préliminaires

On présente d'abord les notations suivantes :

$$K = \int_0^\infty h(s)ds$$
$$\overline{h_\sigma} = \int_0^\infty e^{\sigma s} h(s)ds$$

et soit $t_* > 0$ un nombre réel tel que $h_* = \int_0^{t_*} h(s)ds$.
On définit l'énergie classique associée au système

$$\begin{cases} \rho y_{tt} + 2\rho c y_{xt} + \rho c^2 y_{xx} - (T_s(x,t)y_x)_x + \int_0^t h(t-s)(a(x)y_x(s))_x ds = 0, \quad x \in (0,l), t > 0. \\ F_c(t) = m y_{tt}(l,t) + (T_s(l,t) - \rho c^2) y_x(l,t) - a(l) \int_0^t h(t-s) y_x(l,s) ds + d(t), t \geq 0, \\ y(0,t) = 0, t \geq 0, \\ y(x,0) = y_0(x), y_t(x,0) = y_1(x), x \in (0,l), \end{cases} \tag{4.1}$$

par :

$$E(t) = E_k(t) + E_p(t), \quad t \geq 0$$

où $E_k(t)$ est l'énergie cinétique définie par

$$E_k(t) = \frac{\rho}{2} \|y_t\|^2 + \frac{m}{2}(y_t(l) + c y_x(l))^2, t \geq 0$$

et $E_p(t)$ représente l'énergie potentielle donnée par

$$E_p(t) = -\frac{1}{2}\rho c^2 \|y_x\|^2 - \frac{1}{2}\left(\int_0^t h(s)ds\right)\left\|\sqrt{a(x)}y_x\right\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^l T_s(x,t)y_x^2 dx, t \geq 0$$

L'énergie classique totale associée au système 4.1 est définie par :

$$E(t) = \frac{1}{2}\left\{\rho\|y_t\|^2 + m(y_t(l)+cy_x(l))^2 - \rho c^2\|y_x\|^2 - \int_0^t h(s)ds\left\|\sqrt{a(x)}y_x\right\|^2 + \int_0^l T_s(x,t)y_x^2 dx\right\}, t \geq 0$$

Par différentiation, nous obtenons :

$$\frac{d}{dt}E(t) = \rho\int_0^l y_t y_{tt}dx - \rho c^2\int_0^l y_x y_{xx}dx + m[y_{tt}(l) + cy_x(l)] + \int_0^l y_{xt}y_x T_s(x,t)dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^l (T_s(x,t))y_x^2 dx - \frac{1}{2}h(t)\left\|\sqrt{a(x)}y_x\right\|^2 - \int_0^t h(s)ds\int_0^l a(x)y_{xt}y_x dx,$$

Remarque 4.1

La dérivée de l'énergie totale n'a pas un signe explicite clair.

Nous avons défini l'énergie modifiée par :

$$\varepsilon(t) = \frac{\rho}{2}||y_t||^2 - \frac{1}{2}\rho c^2||y_x||^2 - \frac{1}{2}\left(\int_0^t h(s)ds\right)\left\|\sqrt{a(x)}y_x\right\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^l T_s(x,t)y_x^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 (h\circ y_x)dx$$

$$-\frac{m}{2}(y_t(l) + cy_x(l))^2 + \frac{1}{2\theta_d}\,\tilde{\eta}_d, t \geq 0.$$

Où

$(h \circ y_x)(x,t) = \int_0^t h(t-s)a(x)(y_x(x,t) - y_x(x,s))^2 ds, t \geq 0.$

$\eta > 0$ et $\tilde{\eta} = \hat{\eta} - \eta$.

Remarque 4.2

La relation entre ε et E

$\varepsilon(t) = E(t) + \frac{1}{2}\int_0^l (h \circ y_x)dx + \frac{1}{2\theta_d}\tilde{\eta}_d, t \geq 0\ , \tilde{\eta}_d > 0.$

Notez que l'hypothèse (A3) est d'assurer que $\varepsilon(t) \geq 0$ pour $t \geq 0$. La dérive totale de ε est donné par

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\varepsilon(t) &= \int_0^l \frac{d}{dt}\widetilde{\varepsilon}(x,t)dx + \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left[(y_t(l) + cy_x(l))^2\right] \\ &= \int_0^l \left(\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\varepsilon}(x,t) + c\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\varepsilon}(x,t)\right)dx + \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left[(y_t(l) + cy_x(l))^2\right] \\ &= \int_0^l \frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\varepsilon}(x,t)dx + c\widetilde{\varepsilon}(x,t)|_0^l + \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left[(y_t(l) + cy_x(l))^2\right] + \frac{1}{2\vartheta_d}\frac{d}{t}\widetilde{\eta}_d^2, t \geq 0\end{aligned} \tag{4.2}$$

Où

$$\widetilde{\varepsilon}(x,t)=\frac{\rho}{2}y_t^2(x,t)+\frac{1}{2}\left(T_s(x,t)-\rho c^2-a(x)\int_0^t h(s)ds\right)y_x^2(x,t)+\frac{1}{2}(h\circ y_x)(x,t)x\in[0,l],t\geq 0$$

(voir [15, 16]), Alors 4.2 implique

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}\varepsilon(t)&=\rho\int_0^l y_t y_{tt}dx-\rho c^2\int_0^l y_x y_{xx}dx-\left(\int_0^t h(s)ds\right)\int_0^l a(x)y_x y_{xt}dx\\&-\tfrac{1}{2}h(t)\|\sqrt{a(x)}y_x\|^2+\int_0^l T_s y_x y_{xt}dx+\frac{1}{2}\int_0^l (T_s)_t y_x^2dx+\frac{1}{2}\int_0^l (h'\circ y_x)dx\\&\int_0^l a(x)y_{xt}\int_0^t h(t-s)(y_x(t)-y_x(s))dsdx+c\widetilde{\varepsilon}(x,t)|_0^l\\&+m(y_t+cy_x)(l)(y_{tt}+cy_{xt})(l)+\tfrac{1}{\vartheta}\widetilde{\eta}_d\tfrac{d}{t}\widetilde{\eta}_d,t\geq 0.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Ensuite, à partir des conditions aux limites dans problème 4.1 et de la définition de $\widetilde{\varepsilon}(x,t)$,on a

$$\begin{aligned}\widetilde{\varepsilon}(x,t)|_0^l&\leq\frac{\rho}{2}y_t^2(l)+\tfrac{1}{2}\left(T_s(l)-\rho c^2-a(l)\int_0^t h(s)ds\right)y_x^2(l)+\tfrac{1}{2}(h\circ y_x))(l)\\&\leq\frac{\rho}{2}y_t^2(l)+\tfrac{1}{2}\left(T_s(l)-\rho c^2\right)y_x^2(l)-a(l)y_x(t)\int_0^l h(t-s)y_x(l,s)ds\\&+\tfrac{a(l)}{2}\int_0^t h(t-s)y_x^2(l,s)ds,t\geq 0.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Maintenant, en mettant y_{tt} et $y_{tt}(l)$ de 4.1 dans 4.3, en utilisant 4.4 et en intégrant par parties, nous trouvons :

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}\varepsilon(t)&\leq-\tfrac{\rho c}{2}y_t^2(l)-\tfrac{1}{2}h(t)\|\sqrt{a(x)}y_x\|^2+\tfrac{1}{2}\int_0^l (T_s)_t y_x^2dx+\frac{1}{2}\int_0^l (h'\circ y_x)dx\\&-\tfrac{c}{2}\left(T_s(l)-\rho c^2\right)y_x^2(l)+\tfrac{c}{2}a(l)\int_0^t h(t-s)y_x^2(l,s)ds\\&+\left(y_t+cy_x\right)(l)\left[F_c(t)+mcy_{xt}(l)-d(t)\right]+\tfrac{1}{\vartheta}\widetilde{\eta}_d\tfrac{d}{t}\widetilde{\eta}_d,t\geq 0.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Après l'analyse ci-dessus, nous avons

$$F_c(t)=-mcy_{xt}(l)+F_d(t),t\geq 0.\tag{4.6}$$

F_d Nouveau signal d'entrée pour contrôler l'influence de la turbulence, basé sur une stratégie de contrôle forte, donné par [21]

$$F_d=\frac{\hat{\eta}_d^2(t)}{\hat{\eta}_d(t)|\bar{y}(l)|+\varepsilon_d}\bar{y},t\geq 0.\tag{4.7}$$

où $\varepsilon_d > 0$ et $\bar{y}$ est une fonction qui sera déterminée plus tard. Loi d'adaptation law $\hat{\eta}_d$ d' Est Couleur proposée comme

$$\frac{d}{dt}\hat{\eta}_d(t) = -\delta_d\hat{\eta}_d(t) + \vartheta_d|\bar{y}(l)|, t \geq 0. \tag{4.8}$$

avec δ_d, $\vartheta_d > 0$. L'hypothèse 3.1 et l'expression 4.6 impliquent

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}\varepsilon(t) \leq \left(\delta - \tfrac{\rho}{c}2\right) y_t^2(l) + \tfrac{1}{2}(T_s)_{t,max}\|y_x\|^2(l) + \tfrac{c}{2} + \tfrac{1}{2}\int_0^l (h' \circ y_x)dx \\ -\tfrac{c}{2}\left(T_s(l) - \rho c^2\right) y_x^2(l) + \tfrac{c}{2}\int_0^t h(t-s)y_x(l,s)ds \\ +\tfrac{1}{\vartheta_d}\widetilde{\eta}_d\tfrac{d}{dt}\widetilde{\eta}_d + (y_t + cy_x)(l)\left[F_c(t) - d(t)\right], t \geq 0.\end{aligned} \tag{4.9}$$

On commence cette partie par l'introduction des fonctionnelles suivantes

$$\Phi_1(t) = \rho\int_0^1 yy_t\, dx + my(l)(y_t + cy_x)(l), \quad t \geq 0,$$
$$\Phi_2(t) = -\rho\int_0^1 y_t\int_0^t h(t-s)(y(t) - y(s))\, dsdx - m(y_t + cy_x)(l)\int_0^t h(t-s)(y(l,t) - y(l,s))ds, t \geq 0,$$
$$\phi_3(t) = \int_0^t H_\sigma(t-s)y_x^2(l,s)ds,$$

avec

$$H_\sigma(t) = e^{-\sigma t}\int_t^{+\infty} h(s)e^{\sigma s}\, ds, \quad ,$$

et σ est une constante positive.

et la fonctionnelle modifiée

$$L(t) = \varepsilon(t) + \lambda_1\phi_1(t) + \lambda_2\phi_2(t) + \lambda_3\phi_3(t), t \geq 0$$

où

$\lambda_i, i = 1, 3.$ sont des constantes positives.

La première résultat consiste à établir l'équivalence entre l'énergie modifiée $\varepsilon(t)$ et la fonctionnelle $L(t)$.

Le proposition $L(t)$ *et* $\varepsilon(t) + \phi_3(t)$ sont équivalent

Proposition 4.1 *On a*

$$\frac{1}{2}(\varepsilon(t)+\lambda_3\phi_3(t)) \leq L(t) \leq 2(\varepsilon(t)+\lambda_3\phi_3(t))$$

où

pour tout $t \geq 0$ *et petit* $\lambda_i > 0, i = 1, 2, 3.$

Preuve:

En utilisant l'inégalité de young , on obtient :

$$\begin{aligned}\phi_1(t) &\leq \frac{\rho}{2}\int_0^l y_t^2 dx + \frac{\rho}{2}\int_0^l y^2 dx + \frac{m}{2}y^2(t) + \frac{m}{2}(y_t(l)+cy_x(l))^2, t \geq 0 \\ &\leq ||y_t||^2 + ||y||^2 + \frac{m}{2}y^2(t) + \frac{m}{2}(y_t(l)+cy_x(l))^2, t \geq 0,\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Poincaré, on trouve :

$$\phi_1(t) \leq \frac{\rho}{2}||y_t||^2 + \frac{l^2\rho}{2}||y_x||^2 + \frac{ml}{2}||y_x||^2 + \frac{m}{2}(y_t(l)+cy_x(l))^2, t \geq 0,$$

et alors :

$$\phi_1(t) \leq \frac{\rho}{2}||y_t||^2 + \frac{l}{2}(\rho l + m)||y_x||^2 + \frac{m}{2}(y_t(l)+cy_x(l))^2$$

maintenant, pour la fonction $\phi_2(t)$, on a :

$$\phi_2(t) \leq \frac{\rho}{2}\int_0^l y_t^2 dx + \frac{\rho}{2}\int_0^l \left(\int_0^t h(t-s)(y(t)-y(s))\right)^2 dx + \frac{m}{2}(y_t(l)+cy_x(l))^2$$

$$+\frac{m}{2}\left(\int_0^t h(t-s)(y(l,t)-y(l,s))\right)^2 ds, t \geq 0$$

et on a :

$y(l,t) = \int_0^x y'(z,t)dz$

$y(l,s) = \int_0^x y'(z,s)dz$
d'après l'inégalité de Cauchy -Schwarz, on trouve :

$$\begin{aligned}
|y(t)-y(s)| &= \int_0^x y'(t)-y'(s)dz \\
&\leq \left(\int_0^x |y'(t)-y'(s)|^2 dz\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^x 1dz\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_0^l |y'(t)-y'(s)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^l 1dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|y'(t)-y'(s)\|_{L^2}^2 \sqrt{l}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^l |y(t)-y(s)|^2 dx &\leq \int_0^l \left(\int_0^l |y_x(t)-y_x(s)|^2 \sqrt{l} dx\right)^2 dx \\
&\leq \int_0^l \int_0^l |y_x(t)-y_x(s)|^2 l dx dx \\
&\leq ||y_x(t)-y_x(s)||^2 l \left(\int_0^l 1dx\right)^2 \\
&\leq \|y_x(t)-y_x(s)\|^2 l^2
\end{aligned}$$

on a aussi : d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^t h(t-s)|y(t)-y(s)|ds\right)^2 &= \left(\int_0^t \sqrt{h(t-s)}\sqrt{h(t-s)}|y(t)-y(s)|ds\right)^2 \\
&\leq \int_0^{+\infty} h(s)ds \int_0^t h(t-s)|y(t)-y(s)|^2 ds, t \geq 0
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\phi_2(t) \leq \tfrac{\rho}{2}||y_t||^2 + \tfrac{\rho}{2}\int_0^l \int_0^\infty h(s)dsl^2 \int_0^t h(t-s)|y_x(t)-y_x(s)|^2 dx + \frac{m}{2}(y_t+cy_x)^2 \\
+\tfrac{m}{2}\int_0^l \int_0^t h(s)dsl^2 \int_0^t h(t-s)|y_x(t)-y_x(s)|^2 dx
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
(h \circ y_x(x,t)) &= \int_0^t h(t-s)a(x)|y_x(t)-y_x(s)|^2 ds \\
\Rightarrow \tfrac{1}{a}(h \circ y_x(x,t)) &= \int_0^t h(t-s)|y_x(t)-y_x(s)|^2 ds
\end{aligned}$$

et alors :

$$\begin{aligned}\phi_2(t) &\leq \tfrac{\rho}{2}||y_t||^2 + \tfrac{\rho}{2}l^2\int_0^\infty h(s)ds - \frac{1}{a}\int_0^l (h\circ y_x)dx + \frac{m}{2}(y_t+cy_x)^2\\ &\quad +\tfrac{m}{2}l^2\int_0^{+\infty} h(s)ds\frac{1}{a}\int_0^l (h\circ y_x)dx\\ &\leq \tfrac{\rho}{2}||y_t||^2 + \tfrac{l^2k}{2a}(\rho+m)\int_0^l (h\circ y_x)dx + \frac{m}{2}(y_t+cy_x)^2, t\geq 0\end{aligned}$$

On obtient pour $t \geq 0$

$$\begin{aligned}L(t) &\leq \tfrac{\rho}{2}(1+\lambda_1+\lambda_2)\|y_t\|^2 + \tfrac{1}{2}\left[-\rho c^2 + \lambda_1 l(\rho l+m)\right]\|y_x\|^2\\ &\quad -\tfrac{1}{2}\left(\int_0^t h(s)ds\right)\|\sqrt{a(x)}y_x\|^2 + \tfrac{1}{2}\int_0^l T_s(x,t)y_x^2dx\\ &\quad +\tfrac{1}{2}\left[1+\lambda_2\tfrac{kl^2}{a_0}(\rho+m)\right]\int_0^l (h\circ y_x)dx\\ &\quad \tfrac{m}{2}(1+\lambda_1+\lambda_2)(y_t(l)+cy_x(l))^2 + \tfrac{1}{2\vartheta_d}\widetilde{\eta}_d^2 + \lambda_3\phi_3(t), t\geq 0\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}&2(\varepsilon(t)+\lambda_3\phi_3(t)) - L(t)\\ &\geq \tfrac{\rho}{2}(1-\lambda_1-\lambda_2)\|y_t\|^2 + \tfrac{1}{2}\left[T_{s,m} - \rho c^2 - \|a\|_\infty k - \lambda_1 l(\rho l+m)\right]\|y_x\|^2\\ &+\tfrac{1}{2}\left[1-\lambda_2\tfrac{kl^2}{a_0}(\rho+m)\right]\int_0^l (h\circ y_x)dx + \frac{m}{2}(1-\lambda_1-\lambda_2)(y_t(l)+cy_x(l))^2\\ &+\tfrac{1}{2\vartheta_d}\widetilde{\eta}_d^2 + \lambda_3\phi_3(t).\end{aligned}$$

Si nous choisissons $\lambda_1 < min\left\{1, (T_{s,min} - \rho c^2\|a\|_\infty k)/l(\rho l+m)\right\}$ et $\lambda_2 < min\left\{a_0/kl(\rho l+m), 1-\lambda_1\right\}$, alors

$$2(\varepsilon(t)+\lambda_3\phi_3(t)) - L(t) \geq 0, t\geq 0$$

.

Des calculs similaires et les mêmes arguments donnent

$$L(t) - \frac{1}{2}\varepsilon(t) \geq 0, t\geq 0$$

Ceci achève la preuve de la proposition 4.1. ■

4.2 Comportement asymptotique

Dans cette section, on a démontre notre résultat de décroissance de l'énergie.

Théorème 4.1 *Supposons que les hypothèses (A1-A4) soient vérifiées. Si la borne inférieure de la tension $T_{s,min}$ est dérivé par rapport aux temps $(T_s)_{t,max}$, alors il existe des constantes positives K, γ et ε telles que*

$$\varepsilon(t) \leq K_1 e^{-\gamma t} + \varepsilon, t \geq 0.$$

Dans le cas où il n'y a pas de perturbation, c'est-à-dire $d(t) = 0, t \geq 0$, on obtient le résultat de décroissance exponentielle suivant. En effet, il existe des constantes positives K_2 et γ telles que

$$\varepsilon(t) \leq K_2 e^{-\gamma t}, t \geq 0.$$

Dans ce théorème, nous présentons des lemmes bien connus qui seront nécessaires pour notre étude. On commence par estimer la dérivée de $\phi_1(t)$.

Lemme 4.2 *pour le solution de (4.1), la fonctionnelle $\phi_1(t)$ satisfait*

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\phi_1(t) \leq \rho\left(1+\tfrac{C}{\beta}\right)\|y_t\|^2 - \left[T_{s,min} - \rho c^2 - \|a\|_\infty k - \beta\rho c - \delta(\rho c l + l)\right]\|y_x\|^2 \\ + \tfrac{k}{4\delta}\|a\|_\infty \int_0^l (h \circ y_x)dx + \frac{mc}{4}y_x^2(l) + \left(m(1+c) + \frac{\rho c}{4\delta}\right)y_t^2(l) \\ + y(l)(F_d(t) - d(t)), t \geq 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Preuve: La dérivée de $\phi_1(t)$ de (4.1) est égale à

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}\phi_1(t) &= \int_0^l \frac{d}{dt}\widetilde{\phi}_1(x,t)dx + m\frac{d}{dt}[y(l)(y_t + cy_x)(l)] \\ &= \int_0^l \left(\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\phi}_1(x,t)\right)dx + c\widetilde{\phi}_1(x,t)|_0^l + m\frac{d}{dt}[y(l)(y_t + cy_x)(l)] \\ &= \int_0^l \left(\rho y_t^2(x,t) + \rho y_{tt} y\right)dx + \rho c y(l) y_t(l) + y(l)\left[m y_{tt}(l) + m c y_{xt}(l)\right] + m y_t(l)(y_t + cy_x)(l), t \geq 0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

où

$$\widetilde{\phi}_1(x,t) = \rho y(x,t) y_t(x,t), x \in [0,l], t \geq 0.$$

nous utilisons la première équation du problème (4.1) avec (4.11), nous arriverions à

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\phi_1(t) = \rho\left\|y_t\right\|^2 + \int_0^l y\Big[-2\rho c y_{xt} - \rho c^2 y_{xx} + (T_s(x,t)y_x)_x - \int_0^t h(t-s)a(x)y_{xx}(s)ds\Big]dx \\ +y(l)\Big[F_c(t) - (T_s(l) - \rho c^2)y_x(l) + a(l)\int_0^t h(t-s)y_x(l,s)ds + mcy_{xt}(l) - d(t)\Big] \\ +my_t(l)(y_t + cy_x)(l) + \rho c y(l)y_t(l), t \geq 0.\end{aligned} \tag{4.12}$$

Nous fixons

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\phi_1(t) = \rho\left\|y_t\right\|^2 + y(l)\Big[F_c(t) - (T_s(l) - \rho c^2)y_x(l) + a(l)\int_0^t h(t-s)y_x(l,s)ds + mcy_{xt}(l) - d(t)\Big] \\ +\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + my_t(l)(y_t + cy_x)(l) + \rho c y(l)y_t(l), t \geq 0.\end{aligned} \tag{4.13}$$

où

$$\alpha_1 = -2\rho c\int_0^l y y_{xt}\, dx, \quad t \geq 0 \tag{4.14}$$

$$\alpha_2 = -\rho c^2\int_0^l y y_{xx}\, dx, \quad t \geq 0 \tag{4.15}$$

$$\alpha_3 = \int_0^l y(T_s(x,t)y_x)_x\, dx, \quad t \geq 0 \tag{4.16}$$

et

$$\alpha_4 = -y\int_0^l\int_0^t h(t-s)a(x)y_{xx}(s)ds\, dx, \quad t \geq 0, \tag{4.17}$$

En utilisant l'intégrale par parties une fois en (4.14),(4.15),(4.16) et (4.17)

ona

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -2\rho c y(x,t)y_t(x,t)|_0^l + 2\rho c\int_0^l y_t y_t(x,t)\, dx \\ &= -2\rho c y(l)y_t(l) + 2\rho c y(0,t)y_t(0,t) + 2\rho c\int_0^l y_t y_x(x,t)\, dx, \quad t \geq 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= -\rho c^2 y(x,t)y_x(x,t)|_0^l + \rho c^2\int_0^l y_x^2\, dx \\ &= -\rho c^2 y(l)y_x(l) + \rho c^2 y(0,t)y_x(0,t) + \rho c^2\left\|y_x\right\|^2, \quad t \geq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_3 &= y(x,t)(T_s(x,t)y_x|_0^l - \int_0^l T_s(x,t)y_x^2 dx \\ &= y(l)T_s(l)y_x(l) - y(0,t)(T_s(0,t)y_x - \int_0^l T_s(x,t)y_x^2\, dx, \quad t \geq 0\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\alpha_4 &= -y(x,t)\int_0^t h(t-s)a(x)y_x(s)ds|_0^l + \int_0^l y_x\int_0^t h(t-s)a(x)y_x(s)dsdx\\ &= -y(l)\int_0^t h(t-s)a(l)y_x(l,s)ds + y(0,t)\int_0^t h(t-s)a(0)y_x(s)ds\\ &+\int_0^l y_x\int_0^t h(t-s)a(x)y_x(s)ds\ dx,\quad t\geq 0,\end{aligned}$$

les conditions aux limites en (4.1) on a : $y(0,t)=0$,

et donc, nous obtenons

$$\alpha_1 = -2\rho c y(l)y_t(l) + 2\rho c\int_0^l y_t y_x(x,t)\ dx,\quad t\geq 0 \tag{4.18}$$

$$\alpha_2 = -\rho c^2 y(l)y_x(l) + \rho c^2\left\|y_x\right\|^2,\quad t\geq 0 \tag{4.19}$$

$$\alpha_3 = y(l)T_s(l)y_x(l) - \int_0^l T_s(x,t)y_x^2\ dx,\quad t\geq 0 \tag{4.20}$$

et

$$\alpha_4 = -y(l)\int_0^t h(t-s)a(l)y_x(l,s)ds + \int_0^l y_x\int_0^t h(t-s)a(x)y_x(s)ds\ dx,\quad t\geq 0, \tag{4.21}$$

Ensuite, d'après les équations (4.18),(4.19),(4.20),(4.21), et de l'expression (4.6), ona

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}\phi_1(t) &= \rho\left\|y_t\right\|^2 + \rho c^2\left\|y_x\right\|^2 + 2\rho c\int_0^l y_t y_x\ dx\\ &-\int_0^l T_s(x,t)y_x^2\ dx + \int_0^l y_x\int_0^t h(t-s)a(x)y_x(s)ds\ dx - \rho c y(l)y_t(l)\\ &+y(l)(F_d(t)-d(t)) + m y_t(l)(y_t+cy_x)(l),\ t\geq 0.\end{aligned} \tag{4.22}$$

Le troisième terme de RHS de (4.22) est estimé comme

$$2\rho c\int_0^l y_t y_x\ dx \leq \frac{\rho c}{\beta}\left\|y_t\right\|^2 + \beta\rho c\left\|y_x\right\|^2,\ \beta>0,\ t\geq 0. \tag{4.23}$$

Ona, soient $a,b\in\mathbb{R}$, alors

$$ab\leq \delta a^2 + \tfrac{b^2}{4\delta},\ \delta>0. \tag{4.24}$$

Donc, utiliser l'inégalité de Poincaré et (4.24) dans les deux derniers termes de (4.22) conduit à

$$-\rho c y(l)y_t(l) \leq \delta\rho c l\left\|y_x\right\|^2 + \tfrac{\rho c}{4\delta}y_t^2(l),\ \delta>0,\ t\geq 0. \tag{4.25}$$

et

$$m y_t(l)(y_t+cy_x)(l) \leq m(1+c)y_t^2(l) + \tfrac{mc}{4}y_x^2(l),\ t\geq 0. \tag{4.26}$$

Le terme de convolution donne

$$\begin{aligned}\int_0^l y_x \int_0^t h(t-s)a(x)y_x(s)ds\,dx &= \int_0^l y_x \int_0^t h(t-s)a(x)(y_x(s)-y_x(t))dsdx \\ &\quad + \left(\|a\|_\infty \int_0^t h(s)ds \right) \|y_x\|^2 \\ &\leq [\delta + \|a\|_\infty k] \|y_x\|^2 + \tfrac{\|a\|_\infty}{4\delta} k \int_0^l (h \circ y_x)dx,\ t \geq 0.\end{aligned} \tag{4.27}$$

D'après (4.23),(4.25),(4.26) et (4.27),

On obtient

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}\phi_1(t) \leq \rho\left(1+\tfrac{c}{\beta}\right)\|y_t\|^2 - [T_{s,min} - \rho c^2 - \|a\|_\infty k - \beta\rho c - \delta(\rho c l + 1)]\|y_x\|^2 \\ + \tfrac{k}{4\delta}\|a\|_\infty \int_0^l (h \circ y_x)\,dx + \frac{mc}{4}y_x^2(l) + \left(m(1+c) + \frac{\rho c}{4\delta}\right)y_t^2(l) \\ + y(l)(F_d(t) - d(t)),\ t \geq 0.\end{aligned} \tag{4.28}$$

■

Lemme 4.3 *Soit y la solution de problème (4.1). Alors la dérivée de la fonctionnelle $\phi_2(t)$ vérifie*

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}\phi_2(t) \leq \rho[\delta(c+1) - h_*]\|y_t\|^2 + \delta\left[(T_{s,max} - \rho c^2)^2 + \|a\|_\infty k^2\right]\|y_x\|^2 \\ + \tfrac{k}{a_0\delta}\left[\tfrac{17}{4} + \delta + \tfrac{a_0 k}{4} + \tfrac{h(0)l^2}{4}\xi_2 + \delta m h(0) l \xi_2 + 2\delta\rho c l\right]\int_0^l (h \circ y_x)\,dx \\ + \tfrac{mc^2}{2}\left(k + \tfrac{1}{\delta}\right)y_x^2(l) + \tfrac{m}{2}\left(\tfrac{1}{\delta} + \tfrac{\rho c}{2\delta_7 m}\right)y_t^2(l) + \tfrac{\rho c}{4\delta}|d(t)|^2 \\ - (F_d(t) - d(t))\int_0^t h(t-s)(y(l,t) - y(l,s))ds,\ t \geq 0.\end{aligned} \tag{4.29}$$

Preuve: Une différentiation de $\phi_2(t)$ donne

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}\phi_2(t) &= \int_0^l \frac{d}{dt}\widetilde{\phi}_2(x,t)dx - \frac{d}{dt}\left[m(y_t+cy_x)\int_0^t h(t-s)(y(l,t)-y(l,s))ds\right]\\
&= \int_0^l \left(\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\phi}_2(x,t)\right)dx + c\widetilde{\phi}_2(x,t)|_0^l - \frac{d}{dt}\left[m(y_t+cy_x)\int_0^t h(t-s)(y(l,t)-y(l,s))ds\right]\\
&= -\rho\int_0^l y_{tt}\int_0^t h(t-s)(y(t)-y(s))dsdx\\
&\quad -\rho\int_0^l y_t\left[\int_0^t h'(t-s)(y(t)-y(s))ds + \left(\int_0^t h(s)ds\right)y_t\right]dx\\
&\quad -\rho c y_t(l)\int_0^t h(t-s)(y(l,t)-y(l,s))ds - m(y_{tt}+cy_{xt})(l)\int_0^t h(t-s)(y(l,t)-y(l,s))ds\\
&\quad -m(y_t+cy_x)(l)\left[\int_0^t h'(t-s)(y(l,t)-y(l,s))ds + \left(\int_0^t h(s)ds\right)y_t(l)\right],\ t\geq 0.\end{aligned} \tag{4.30}$$

où

$$\widetilde{\phi}_2(x,t) = -\rho y_t(x,t)\int_0^t h(t-s)(y(x,t)-y(x,s))ds, x\in[0,l], t\geq 0.$$

En substituant y_{tt} et $y_{tt}(l)$ de (4.1) dans (4.30), en intégrant par parties et en tenant compte des conditions aux limites et l'expression (4.6), il en résulte que

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}\phi_2(t) &= \left[\int_0^l (T_s(x,t)-\rho c^2)y_x\int_0^t h(t-s)(y_x(t)-y_x(s))dsdx\right]\\
&\quad -\int_0^l a(x)\left(\int_0^t h(t-s)y_x(s)ds\right)\int_0^t h(t-s)(y_x(t)-y_x(s))dsdx\\
&\quad -\rho\left(\int_0^t h(s)ds\right)\|y_t\|^2 - 2\rho c\int_0^l y_t\int_0^t h(t-s)(y_x(t)-y_x(s))dsdx\\
&\quad -\rho\int_0^l y_t\int_0^t h'(t-s)(y(t)-y(s))dsdx\\
&\quad -m(y_t+cy_x)(l)\left[\int_0^t h'(t-s)(y(l,t)-y(l,s))ds + \left(\int_0^t h(s)ds\right)y_t(l)\right]\\
&\quad +\rho c y_t(l)\int_0^t h(t-s)(y(l,t)-y(l,s))ds\\
&\quad -(F_d(t)-d(t))\int_0^t h(t-s)(y(l,t)-y(l,s))ds,\ t\geq 0.\end{aligned} \tag{4.31}$$

Pour le premier terme, utiliser l'hypothèse (3.1) et (4.24), ona

$$\begin{aligned}&\int_0^l (T_s(x,t)-\rho c^2)y_x\int_0^t h(t-s)(y_x(t)-y_x(s))dsdx\\
&\qquad \leq \delta(T_{s,max}-\rho c^2)^2\|y_x\|^2 + \tfrac{k}{4\delta a_0}\int_0^l (h\circ y_x)\,dx,\ t\geq 0.\end{aligned} \tag{4.32}$$

Le deuxième et le troisième terme donnent

$$\begin{aligned}
&-\int_0^l a(x)\bigg(\int_0^t h(t-s)y_x(s)ds\bigg)\int_0^t h(t-s)(y_x(t)-y_x(s))dsdx\\
&\quad=\int_0^l a(x)\bigg(\int_0^t h(t-s)(y_x(t)-y_x(s))ds\bigg)^2dx\\
&\qquad+\bigg(\int_0^t h(s)ds\bigg)\int_0^l a(x)y_x\int_0^t h(t-s)(y_x(t)-y_x(s))dsdx\\
&\quad\leq \delta\left\|a\right\|_\infty k^2\left\|y_x\right\|^2+k\bigg(1+\tfrac{k}{4\delta}\bigg)\int_0^l (h\circ y_x)\,dx,
\end{aligned}$$

et

$$\int_0^l y_t\int_0^t h(t-s)(y_x(t)-y_x(s))dsdx\leq\frac{\delta}{2}\left\|y_t\right\|^2+\frac{2k}{\delta a_0}\int_0^l (h\circ y_x)\,dx,\ t\geq 0.$$

De la même manière, nous avons

$$\begin{aligned}
&-\int_0^l y_t\int_0^t h'(t-s)(y(t)-y(s))dsdx\\
&\qquad\leq\delta\left\|y_t\right\|^2+\tfrac{l^2}{4\delta}\bigg(\int_0^t|h'(s)|ds\bigg)\int_0^l(|h'|\circ y_x)\,dx\\
&\qquad\leq\delta\left\|y_t\right\|^2+\tfrac{h(0)l^2}{4\delta a_0}\xi_2\int_0^l(h\circ y_x)\,dx,\ t\geq 0.
\end{aligned}$$

Les termes restants peuvent être traités, à l'aide de (4.24) et l'inégalité de Poincaré, comme suit :

$$\begin{aligned}
&-m(y_t+cy_x)(l)\bigg[\int_0^t h'(t-s)(y(l,t)-y(l,s))ds\bigg]\\
&\qquad\leq\tfrac{m}{2\delta}(y_t^2+c^2y_x^2)(l)-\delta m\bigg(\int_0^l|h'(s)|ds\bigg)(h'\circ y)(l)\\
&\qquad\leq\tfrac{m}{2\delta}(y_t^2+c^2y_x^2)(l)+\tfrac{\delta mh(0)l}{a_0}\xi_2\int_0^l(h\circ y_x)\,dx\\
&\qquad\quad-m\bigg(\int_0^l h(s)ds\bigg)(y_t+cy_x)(l)y_t(l)\\
&\qquad\leq-m\bigg(\int_0^l h(s)ds\bigg)y_t^2(l)+\frac{m}{2}\bigg(\int_0^l h(s)ds\bigg)(y_t^2+c^2y_x^2)(l)\\
&\qquad\leq\tfrac{mc^2}{2}ky_x^2(l),\ t\geq 0
\end{aligned}$$

et

$$\rho cy_t(l)\int_0^t h(t-s)(y(l,t)-y(l,s))ds\leq\frac{\rho c}{4\delta}y_t^2(l)+\frac{\delta\rho clk}{a_0}\int_0^l(h\circ y_x)\,dx,\ t\geq 0.$$

Pour $t\geq t_*>0$, le fait

$$\int_0^t h(s)ds\geq\int_0^{t_*}h(s)ds=h_*$$

implique

$$-\bigg(\int_0^t h(s)ds\bigg)\left\|y_t\right\|^2\leq-h_*\left\|y_t\right\|^2,\ t\geq t_*>0.$$

En recueillant les estimations précédentes et en les insérant dans (4.31) , on obtient pour $t \geq t_*$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\phi_2(t) \leq \rho[\delta(c+1)-h_*]\left\|y_t\right\|^2 &+ \delta\left[(T_{s,max}-\rho c^2)^2+\|a\|_\infty k^2\right]\|y_x\|^2 \\ &+\frac{k}{a_0\delta}\left[\frac{17}{4}+\delta+\frac{a_0k}{4}+\frac{h(0)l^2}{4}\xi_2+\delta mh(0)l\xi_2+2\delta\rho cl\right]\int_0^l (h\circ y_x)\,dx \\ &+\frac{mc^2}{2}\left(k+\frac{1}{\delta}\right)y_x^2(l)+\frac{m}{2}\left(\frac{1}{\delta}+\frac{\rho c}{2\delta_7 m}\right)y_t^2(l)+\frac{\rho c}{4\delta}|d(t)|^2 \\ &-(F_d(t)-d(t))\int_0^t h(t-s)(y(l,t)-y(l,s))ds,\ t\geq 0.\end{aligned} \tag{4.33}$$

■

Pour la dernière fonctionnelle $\phi_3(t)$, on obtient

$$\frac{d}{dt}\phi_3(t) \leq -\sigma\phi_3(t) - \int_0^t h(t-s)y_x^2(l,s)ds + \overline{h_\sigma}y_x^2(l)$$

Preuve: du Théorème 4.1

Compte tenu des estimations (4.9), (4.28), et(4.33) nous en déduisons pour $t \geq t^*$ que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}L(t) \leq \rho\left\{\lambda_1\left(1+\frac{c}{\beta}\right)-\lambda_2\left[h_*-\delta\left(c+1\right)\right]\right\}\left\|y_t\right\|^2 &\\ +\{\frac{1}{2}(T_s)_{t,max}-\lambda_1\left[T_{s,min}-\rho c^2-\|a\|_\infty k-\beta\rho c-\delta(\rho cl+1)\right] &\\ +\lambda_2\delta\left[\left(T_{s,max}-\rho c^2\right)^2+\|a\|_\infty k^2\right]\}\|y_x\|^2 &\\ +\frac{k}{\delta}\{\frac{\lambda_2}{a_0}\left[\frac{17}{4}+\delta+\frac{a_0k}{4}+\frac{h(0)l^2}{4}\xi_2+\delta mh(0)l\xi_2+2\delta\rho cl\right] &\\ +\frac{\lambda_1}{4}\|a\|_\infty-\frac{\delta\xi_1}{2k}\}\int_0^l(h\circ y_x)dx-\left(\lambda_3-\frac{c}{2}\right)\int_0^t h(t-s)y_x^2(l,s)ds \quad ll &\\ +\left\{\lambda_2\frac{m}{2\delta}\left(1+\frac{\rho c}{2m}\right)+\lambda_1\left[m(1+c)+\frac{\rho c}{4\delta}\right]-\left(\frac{\rho c}{2}-\delta\right)\right\}y_t^2(l) &\\ +\left\{\lambda_2\frac{mc^2}{2}\left(k+\frac{1}{\delta}\right)+\lambda_1\frac{mc}{4}-\frac{c}{2}\left(T_s(l)-\rho c^2\right)+\lambda_3\bar{h}_\delta\right\}y_x^2(l)-\sigma\lambda_3\Phi_3(t) &\\ +\frac{1}{\vartheta_d}\widetilde{\eta}_d\frac{d}{dt}\widetilde{\eta}_d+(F_d(t)-d(t)) &\\ \times\left[(y_t+cy_x)(l)+\lambda_1y(l)-\lambda_2\int_0^t h(t-s)(y(l,t)-y(l,s))ds\right]. &\end{aligned} \tag{4.34}$$

Ensuite, nous estimons les deux derniers termes dans (4.34). Pour cela, on pose

$$\bar{y}(t) = (y_t+cy_x)(l)+\lambda_1y(l)-\lambda_2\int_0^t h(t-s)(y(l,t)-y(l,s))ds.\ ll \tag{4.35}$$

Alors en considérant les expressions (4.7) et (4.8), on obtient

$$\begin{aligned}
&\bar{y}(t)(F_d(t)-d(t))+\tfrac{1}{\vartheta_d}\widetilde{\eta}_d\tfrac{d}{dt}\hat{\eta}_d\\
&\leq -\tfrac{\hat{\eta}_d^2(t)}{\hat{\eta}_d(t)|\bar{y}(l)|+\varepsilon_d}|\bar{y}(l)|^2+\eta_d|\bar{y}(l)|-\tfrac{\delta_d}{\vartheta_d}\widetilde{\eta}_d\hat{\eta}_d(t)+\widetilde{\eta}_d|\bar{y}(l)|\\
&\leq \tfrac{-\hat{\eta}_d^2(t)|\bar{y}(l)|^2+\hat{\eta}_d^2(t)|\bar{y}(l)|^2+\varepsilon_d\hat{\eta}_d(t)|\bar{y}(l)|}{\hat{\eta}_d(t)|\bar{y}(l)|+\varepsilon_d}-\tfrac{\delta_d}{2\vartheta_d}\widetilde{\eta}_d\\
&\leq \left(\sqrt{\tfrac{\delta_d}{2\vartheta_d}}\widetilde{\eta}_d+\sqrt{\tfrac{\delta_d}{2\vartheta_d}}\eta_d\right)^2+\tfrac{\delta_d}{2\vartheta_d}\eta_d\\
&\leq \varepsilon_d-\tfrac{\delta_d}{\vartheta_d}\widetilde{\eta}_d^2+\tfrac{\delta_d}{2\vartheta_d}\eta_d=\vartheta(t), t\geq 0.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Maintenant, nous commençons à sélectionner les différents paramètres de telle sorte que tous les coefficients de l'inégalité soient négatifs. Premièrement, nous avons besoin

$$\begin{cases}
\lambda_2 h_* > \ \lambda_1(1+\frac{c}{\beta})\\
T_{s,min}-\rho c^2-\|a\|_\infty k>\beta\rho c\\
\frac{c}{2}(T_s(l)-\rho c^2)-\lambda_3\bar{h}_\sigma.
\end{cases}$$

Pour cela, il suffit de choisir

$$\beta=\frac{1}{2\rho c}(T_{s,min}-\rho c^2-\|a\|_\infty k), \lambda_1\frac{\beta}{2(\beta+c)}h_*\lambda_2 \ et \ \lambda_3=\frac{c}{2}$$

La troisième inégalité sera vérifiée lorsque nous choisissons σ tell que

$$\bar{h}_\sigma \ < T_s(l)-\rho c^2$$

Ensuite, il suffit de sélectionnerδ et λ_2 suffisamment petits pour s'assurer que les coefficients en (4.33) sont négatifs. Pour le deuxième coefficient, nous demandons que la borne inférieure de la tension $T_{s,min}$ soit plus grande que sa dérivée temporelle $(T_s)_{t,max}$. Sous ces considérations, la relation (4.33) prend la forme simplifiée

$$\frac{d}{dt}L(t)\leq -C_1(E(t)+\Phi_3(t))+\vartheta(t), t\geq t_*,$$

pour une constante positive C_1 . Nous profitons de la relation de la proposition (4.1) pour dériver

$$\frac{d}{dt}L(t)\leq -C_2L(t)+\vartheta(t), t\geq t_*.$$

Un intégrateur sur (t_*,t) donne

$$L(t)\leq L(0)e^{-c_2t}+\int_{t_*}^{t}e^{-c_2(t-s)}\vartheta(s)ds, t\geq t_*.$$

Notez que $\vartheta(t)$ est borné ($|\vartheta(t)| \leq \bar{\vartheta}_d, t \geq t_*$) en raison de l'hypothèse que η_d est borné. Cela nous permet d'obtenir

$$L(t) \leq L(0)e^{-c_2 t} + \bar{\vartheta}_d, t \geq t_* \tag{4.37}$$

Le résultat est trivialement entre 0 et t. $\vartheta(t)$ peut être poussé dans une région limitée arbitrairement petite en faisant suffisamment petit ε_d et δ_d et en faisant suffisamment grand ϑ_d (voir Yang et al [21], [17]). Ainsi, (4.37) implique

$$L(t) \leq C_3 e^{-\gamma t} + \varepsilon_d, t \geq t_*,$$

et la proposition 4.1 conclut

$$\varepsilon(t) \leq K_1 e^{-\gamma t} + \varepsilon_d, t \geq t_*$$

avec de petits ε^d positifs et des constantes positives K_1 et γ. Le résultat tient trivialement entre 0 et t_* . Dans le cas où il n'y a pas de perturbation, c'est-à-dire que $d(t) = 0, t \geq 0$, nous obtenons le résultat de décroissance exponentielle suivant. En effet, il existe constante positives K_2 et γ telle que

$$\varepsilon(t) \leq K_2 e^{-\gamma t}, t \geq 0$$

Enfin, d'après la relation entre $E(t)$ et $\mathcal{E}(t)$

ona :

$$E(t) \leq \mathcal{E}(t), \quad t \geq 0,$$

C'est-à-dire

$$E(t) \leq \mathcal{E}(t) \leq K_2 e^{-\gamma t}, \quad t \geq 0,$$

on obtient finalement :

$$E(t) \leq K_2 e^{-\gamma t}, \quad t \geq 0.$$

La preuve est complète. ■

Conclusion et perspectives

Nous avons intéressés dans ce mémoire, à l'étude du problème de la stabilité d'une corde viscoélastique en mouvement axial soumis sous une tension spatio-temporaire variante à une frontière perturbation.

D'un point de vue mathématique, une contribution à une étude du comportement asymptotique des solutions pour des temps infinis (décroissance exponentielle).
Alors nous obtenons Les résultats suivants :
- Nous avons prouvé que même la tension de la corde est variable et que la stratégie de contrôle adoptée est capable de déstabiliser la corde. Cependant, ce résultat est montré sous la condition que la variation de la tension soit bornée, et la borne supérieure de sa variation temporelle est plus petite que la borne inférieure de la tension
- Comme les termes qui interviennent dans la loi du contrôle des frontières et les lois d'adaptation sont : la vitesse, la pente, le taux de la pente et le côté contrôlé du mécanisme, la suppression de la vibration de la partie contrôlée, peut être réalisée, avec succès.
- Donner une approximation numérique...

Nous espérons à la venir de faire des changements sur la tension , la force de perturbation et sur les conditions aux bords pour voir la stabilité asymptotique.

Bibliographie

[1] A.CHEKROUN. Fonction de Lyapunov et stabilité globale pour un modèle de Kermack-McKendrick avec l'âge d'infection. *Université ABOUBEKR BELKAID -TLEMCEN.* (2011-2012).

[2] Coleman BD, Noll W. Foundations of linear viscoelasticity.*Rev Modern Phys.* 1961 ;33 :239-249.

[3] Coleman BD, Mizel VJ. On the general theory of fading memory.*Arch Ration Mech Anal.* 1968 ;29 :18-31.

[4] Dafermos CM. stability in viscoelasticity. *Arch Ration Mech Anal.* 1970 ;37(4) :297-308.

[5] Dafermos CM. On abstract Volterra equations with applications to linear viscoelasticity. *Differential Equations.* 1970 ;7 :554-569.

[6] E.Moulay. Stabilité des équations différentielles ordinaires. *Cours de master.*

[7] FR Archibald, AG Emslie. Les vibrations d'une corde ayant un mouvement uniforme le longsa longueur, J. Appl. *Méca. COMME MOI.* 25 (1958), 347-348.

[8] Fabrizio M, Morro A. *Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity.* Philadelphia : SIAM Stud. Appl. Math. ; 1992.

[9] Hardy GH, Littlewood JE, Polya G. *Inequalities. Cambridge UK :cambridge University Press* 1959.

[10] H.K Khalil. Nonlinear Systems. *Macmillan, New York,* 3^e *edition,* 2002.

[11] J.Ferreira. Cours de Mécanique Analytique. *Université Joseph Fourier, Laboratoire d'Astrophysique de Grenoble.* (2007-2008).

[12] Kim CW, park H , Hong KS. Boundary control of axially moving continu :application to a zinc galvanizing line. *Internat J Control Automation Sys.*2005 ;3(4) :601-611.

[13] Kelleche A. Control boundary stabilization of an axially moving viscoelastic string under a boundary disturbance. *Math Model Anal.*2018 ;22(6) :763-784.

[14] Kelleche A, Berkani A, Tatar N .E. Uniform stabilization of a nonlinear axially moving string by a boundary control of memory type. *J Dyn Control Sys.* 2018 ;24(2) :313-323.

[15] Li F, Zhao Z, Chen Y. Global existence uniqueness and decay estimates for nonlinear viscoelasticwave equationwith boundary dissipation. *Anal RealWorld Appl.* 2011 ;12 :1759-1773.

[16] Leal LG. *Advanced Transport Phenomena : Fluid Mechanics and Connective Transport Processes. Cambridge : Cambridge University Press ;* 2007. p.912.

[17] Reynolds O. *Papers on Mechanical and Physical studies, The Sub-Mechanics of the Universe, vol. 3. Cambridge, UK : Cambridge University Press ;* 1903

[18] RA Sack, Oscillations transversales dans les cordes mobiles, Br. J. Appl. Appl. *Phys.* 5(6) (1954),224-226

[19] W Hahn. Stability of Motion. *Springer-Verlag*, 1967.

[20] Yang KJ, Hong KS. *Robust Boundary Control of an Axially Moving Steel Strip.* Inter.Federation.Auto.control 15th IFAC World Congress.Barcelona,Spain : T-Tu-E,192 ;2002.

[21] Yang KJ, Hong KS, Matsuno F. Robust adaptive boundary control of an axially moving string under a spatiotemporally varying tension. J Sound Vib.2004 ;273 :1007-1029.