Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr.Yahia Farès de Médéa

Département de Mathématique et de l'Informatique



Mémoire de fin d'étude

présenté en vue de l'obtention

du

Diplôme de Master en Recherche opérationnelle

Par

Bendadou Abderrahim

Thème

Sur les polynômes de Bernoulli

Composition du Jury:

Mr.	Rahmani	Mourad	M.C.A	U.S.T.H.B	Président
Mme.	Ghattai	Ghania	M.A.A	U.D.Y.F-Médéa	Examinatrice.
Mr.	Tablennahas	Kamel	M.A.A	U.D.Y.F-Médéa	Examinateur.
Mr.	Laissaoui	Diffalah	M.C.B	U.D.Y.F-Médéa	Encadreur.

Date de soutenance: 22 Mai 2017

Remerciements

Je remercie tout d'abord, ALLAH, le grand DIEU, qui me a donné la force et le courage afin de parvenir et élaborer ce modeste travail.

Je remercie mes parents, pour tout leur amour et leur encouragement.

Je voudrais remercie profondément Monsieur D.Laissaoui, mon directeur de mémoire et maitre de conférences à L'université YAHIA-FARES de Médéa, Je le remercie vivement pour son aide précieuse, ses conseil et sa patience.

Je remercie ensuite les personnes qui me font l'honneur de faire parti du jury :

Monsieur M.Rahmani d'avoir accepté de présider le jury.

Monsieur K.Tablennahas d'avoir accepté d'être l'examinateur de ce travail.

Madame G.Ghattai d'avoir accepté d'être l'examinatrice de ce travail.

Table des matières

Introduction **1**

1 Préliminaires **3**

1.1 Notations 3

1.2 Dénombrement 4

1.3 Fonction Gamma 5

1.4 Fonction Béta 5

1.5 Les lois de probabilités 6

1.5.1 La loi de Bernoulli 6

1.5.2 La loi uniforme continue 6

1.5.3 La loi sécante hyperbolique 6

1.5.4 La loi logistique 6

1.5.5 La loi de gamma 6

1.5.6 La loi de Laplace 7

1.6 Fonction caractéristique 7

1.7 Fonction génératrice des moments 9

1.8 Serie de puissance formelle 10

1.9 Fonction génératrice 10

1.10 Le produit infinit associe aux fonctions sinh et cosh 11

1.11 Les nombres de Stirling 11

2 Les nombres et les polynômes de Bernoulli **17**

2.1 Une approche naturelle pour dériver les nombres de Bernoulli 17

2.2 Somme des puissance d'entier à l'aide de l'algebre matricielle 26
2.3 Approche de calcul des sommes des puissances par calcul intégral 29
2.4 Fonction génératrice exponentielle S(z) associe aux $S_m(n-1)$ 32
2.5 Quelque propriétés associe aux nombres de Bernoulli B_n 32
2.5.1 Formule pour les nombres de Bernoulli impliquant les nombres de stirling 35
2.5.2 Théorème de Clausen et Von Staudt 36
2.6 Les polynomes de Bernoulli 38
2.7 La relation entre les nombres de Bernoulli et la fonction zéta 47

3 La représentation probabiliste des polynômes de Bernoulli,polynômes d' Euler et polynômes de Gegenbauer 51
3.1 La preuve probabiliste d'une relation entre les polynômes généralisé de Bernoulli et ceux d'Euler 56
3.1.1 La preuve probabiliste du Théorème (3.1.1) 64

Conclusion et perspectives 66

Références 67

Introduction

Les nombres de Bernoulli B_n est une suite de nombres rationnels, ont une longue histoire qui remonte au XVIIe siècle. Ils ont été introduits par Jacob Bernoulli $(1654 - 1705)$ dans son ouvrage Ars Conjectandi quand il a étudie la somme de puissances de nombres entiers successifs. Jusqu'à nos jours, une question qui reste ouverte et qui a motivé les recherches est la relation entre les nombres premiers aux nombres de Bernoulli : p premier si et seulement si $pB_{p-1} \equiv -1 \mod p$.

Ce mémoire, consacré à une étude de l'article de H. M. Srivastava et C. Vignat intitulé : Probabilistic Proofs of Some Relationships Between the Bernoulli and Euler Polynomials. Eur. J. Pure Appl. Math. 5 (2012), no. $2, 97 - 107$, comporte trois chapitre avec une introduction et une conclusion.

Le premier chapitre est consacré à des rappels et des compléments utiles (La loi logistique, les nombres de Stirling,...) qui seront utilisées dans le reste du document.

Le deuxième chapitre porte sur une étude des nombres et polynômes de Bernoulli. Les sommes de puissances d'entiers est le point de départ afin de comprendre la naissance des nombres de Bernoulli. Nous rappelons les principaux théorèmes sur les nombres de Bernoulli et nous démontrons certains résultats tels que le théorème de Von-Staudt et Clausen, la relation entre les nombres de Bernoulli et la fonction zêta de Riemann.

Le troisième chapitre constitue la partie essentielle de ce mémoire. Nous détaillons les démonstrations des nombreux résultats contenues dans l'article de H. M. Srivastava et A. Pintér [Remarks on some relationships between the Bernoulli and Euler polynomials, Appl. Math. Lett. $17.375 - 380.(2004)$], qui ont été prouvé par des méthodes analytiques. Le principal outils utilisé dans la deuxième partie de ce chapitre est la technique probabiliste proposé dans l'article de P. Sun [Moment representation of Bernoulli polynomial, Euler

polynomial and Gegenbauer polynomials, Statist. Probab. Lett. $77.748 - 775.(2007).$] afin de redémontrer les résultats de de H. M. Srivastava et A. Pintér.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre est consacré aux définitions et notations dont on aura besoin dans les chapitres suivants. Le lecteur pourra consulter principalementles ouvrages de Comet [3], Graham, Knuth et Patashnik [1] , T.Arakawa, T.Ibukiyama et M.Kaneko[2].

1.1 Notations

On note $\delta_{n,m}$ le symbole de Kronecker défini par :

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}.$$

Le produit des entiers positifs de 1 à n intervient très souvent en mathématique. On le note par le symbole spécial $n!$

$$n! = 1 \times 2 \times 3... \times (n-1) \times n,$$

pour des raisons de commodité, on définit aussi $0! = 1$.

Soient $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$, la factorielle descendente d'ordre n , notée $x^{\underline{n}}$ ou $(x)_n$ est définie par la relation suivante

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)...(x-n+1).$$

1.2 Dénombrement

Définition 1.2.1 *Une m-combinaison de m objets de $N = \{1, 2, ..., n\}$ est une partie M à m élément, le nombre de m-combinaison, noté $\binom{n}{m}$, vaut*

$$\begin{aligned}\binom{n}{m} &= \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!} \\ &= \frac{n!}{(n-m)!m!},\end{aligned}$$

avec $\binom{n}{m} = 0$, pour $m < 0$ ou $m > n$.

Définition 1.2.2 *Un m-arrangement d'une partie M à m éléments de N, est une partie dont les éléments sont numérotés.*

Le nombre de m-arrangements de N noté $(n)_m$, vaut

$$\begin{aligned}(n)_m &= n(n-1)...(n-m+1) \\ &= \frac{n!}{(n-m)!}.\end{aligned}$$

Définition 1.2.3 *On appelle permutation de N, noté P tout arrangement de l'ensemble N dans un ordre donné.*

Le nombre de permutations est égal à $n!$, car une permutation n'est autre qu'un n-arrangement de N.

Lemme 1.2.1 *$\forall n, r \in \mathbb{N}$, $n > r$ on a*

$$\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}.$$

En d'autre termes, Si $a + b = n$, alors

$$\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$$

Les nombres $\binom{n}{k}$ sont souvent appeles coefficients binomiaux.

On a $\forall a, b \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\end{aligned}$$

1.3 Fonction Gamma

Définition 1.3.1 *Pour tout $x \in \mathbb{C}$ telque $\Re(x) > 0$, on définit la fonction Gamma , notée Γ, par*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

En intégrant par partie, on obtient une conséquence immédiate, pour tout $x \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(x) > 0$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \ .$$

En particulier, on a pour $z = 1$, $\Gamma(1) = 1$, alors on peut déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ : \ \Gamma(n) = (n-1)!.$$

1.4 Fonction Béta

Définition 1.4.1 *Pour tout $x, y \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(x) > 0$ et $\Re(y) > 0$, on définit la fonction Béta , notée B, par*

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} \, dt.$$

On fait un changement de variable approprié on obtient des conséquences immédiates, pour tout $x, y \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(x) > 0$ et $\Re(y) > 0$, on a

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

$$B(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1} dt}{(1+t)^{x+y}}.$$

1.5 Les lois de probabilités

1.5.1 La loi de Bernoulli

Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si sa fonction de probabilité est de la forme

$$P(X = x) = \begin{cases} p & x = 0 \\ 1 - p & x = 1 \end{cases}.$$

1.5.2 La loi uniforme continue

Une variable aléatoire X suit la loi uniforme de paramètres a et b ou $(a, b \in \mathbb{R})$ et on note $X \sim U(a, b)$, si sa fonction de densité est

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1.5.3 La loi sécante hyperbolique

Une variable aléatoire X suit la loi sécante hyperbolique, si sa densité est

$$f_X(x) = \operatorname{sech}(\pi x)$$

1.5.4 La loi logistique

Une variable aléatoire X suit la loi logistique de paramètres μ et s, si sa densité est

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4s}\operatorname{sech}^2(\frac{x-\mu}{2s}) & x \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1.5.5 La loi de gamma

Une variable aléatoire X suit la loi de gamma de paramètres a et θ ou $(a, \theta > 0)$ et on note $X \sim \Gamma(a, \theta)$ si sa fonction de densité est

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\theta^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\theta x} & x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1.5.6 La loi de Laplace

Une variable aléatoire X suit la loi de Laplace de paramètres θ et s ou $(\theta, s > 0)$ et on note $X \sim L(\theta, s)$, si sa fonction de densité est

$$f_X(x) = \frac{1}{2s} e^{-|x-\theta|/s} \qquad x \in \mathbb{R}$$

1.6 Fonction caractéristique

On appelle fonction caractéristique d'une variable aléatoire X la fonction $\phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}).$$

Exemple 1.6.1 *Soit X une variable aléatoire suit la loi de Laplace du paramètre 0 et 1 ($X \sim L(0,1)$) , alors la fonction caractéristique de X est donné par*

$$\begin{aligned}
\phi_X(t) &= E(e^{itX}) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} e^{itx} e^{-|x|} dx \\
&= \int_0^{+\infty} \cos(tx) e^{-x} dx.
\end{aligned}$$

On utilise l'intégration par partie

$$\begin{aligned}
\phi_X(t) &= \left[-\cos(tx) e^{-x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} t \sin(tx) e^{-x} dx \\
&= 1 + \left[-t \sin(tx) e^{-x} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} t^2 \phi_X(t) \\
&= 1 - t^2 \phi_X(t).
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\phi_X(t) = \frac{1}{1+t^2} \tag{1.6.1}$$

Exemple 1.6.2 *Soit X une variable aléatoire suit la loi logistique de paramètre 0 et $\frac{1}{2\pi}$, la fonction caractéristique de X est donné par*

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= E(e^{itX}) \\ &= \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{itx} sech^2(\pi x)dx \\ &= \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\left(\frac{2}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}\right)^2 dx \\ &= 2\pi\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\frac{e^{2\pi x}}{\left(1+e^{2\pi x}\right)^2}dx\end{aligned}$$

On fait un changement de variable, on pose $y = e^{2\pi x}$ alors $dx = \frac{dy}{2\pi y}$, puis en utilisant les propriétés de la fonction Béta, on obtient

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \cancel{2}\ \cancel{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{y^{\frac{it}{2\pi}}\ \cancel{y}}{\left(1+y\right)^2}\frac{dy}{\cancel{2}\ \cancel{\pi}\ \cancel{y}} \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{y^{\frac{it}{2\pi}}}{\left(1+y\right)^2}dy \\ &= B\left(\frac{it}{2\pi}+1, 1-\frac{it}{2\pi}\right) \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{it}{2\pi}+1\right)\Gamma\left(\frac{it}{2\pi}-1\right)}{\Gamma\left(2\right)}\end{aligned}$$

On utilise les propriétés de la fonction Gamma, on obtient

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \frac{it}{2\pi}\Gamma\left(\frac{it}{2\pi}\right)\Gamma\left(\frac{it}{2\pi}-1\right) \\ &= \frac{it}{2\pi}\frac{\pi}{\sin\left(\frac{it}{2}\right)} \\ &= \frac{t/2}{-i\sin\left(\frac{it}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\phi_X(t) = \frac{t}{2}\sinh^{-1}\left(\frac{t}{2}\right). \tag{1.6.2}$$

1.7 Fonction génératrice des moments

On appelle fonction génératrice d'une variable aléatoire X la fonction $\phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$G_X(t) = E\left(e^{tx}\right)$$

La fonction génératrice des moments G_X et la fonction caractéristique ϕ_X d'une variable aléatoire X, sont liées par la relation suivante

$$G_X(t) = \phi_X(-it) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Exemple 1.7.1 *Soit X une variable aléatoire suit la loi Uniforme $[0,1]$, la fonction génératrice des moments de X est donnée par*

$$\begin{aligned} G_X(t) &= E\left(e^{tx}\right) \\ &= \int_0^1 e^{tx} dx. \end{aligned}$$

Alors

$$G_X(t) = \frac{e^t - 1}{t}. \tag{1.7.1}$$

Exemple 1.7.2 *Soit X une variable aléatoire suit la loi logistique de paramètre 0 et $\frac{1}{2\pi}$, la fonction génératrice de $iX - \frac{1}{2}$ est donné par*

$$\begin{aligned} G_{iX-\frac{1}{2}}(t) &= E\left(e^{t\left(ix-\frac{1}{2}\right)}\right) \\ &= e^{\frac{-t}{2}} E\left(e^{itx}\right) \end{aligned}$$

la formule (1.6.2) donne

$$\begin{aligned} G_{iX-\frac{1}{2}}(t) &= e^{\frac{-t}{2}} \frac{t}{2} \sinh^{-1}\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= e^{\frac{-t}{2}} \frac{t}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}}{e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}} \end{aligned}$$

Alors

$$G_{iX-\frac{1}{2}}(t) = \frac{t}{e^t - 1}. \tag{1.7.2}$$

1.8 Serie de puissance formelle

Définition 1.8.1 *On appelle série de puissance formelle tout série de la forme*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 x^0 + a_1 x^1 + ... + a_n x^n + ...$$

Où $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ sont des constantes données, appelées coefficients de la série.

La somme et le produit d deux séries de puissance formelles sont définie par

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{k=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

tel que

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

1.9 Fonction génératrice

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suit des nombres réels.On appelle fonction génératrice ordinaire de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la fonction

$$\Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

On appelle fonction génératrice exponentielle de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la fonction

$$\Psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$$

Remarque 1.9.1 *L'existence de telles fonctions nécessite la convergence de la série de terme général a_n et $\frac{a_n}{n!}$.*

1.10 Le produit infinit associe aux fonctions sinh et cosh

Définition 1.10.1 *Le produit infinit associe aux fonctions* $x \longrightarrow \cosh x$ *et* $x \longrightarrow \sinh x$ *est donné par*

$$\cosh x = \prod_{k=0}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{x}{(2k-1)\,\pi/2}\right)\right] \tag{1.10.1}$$

$$\sinh x = x\prod_{k=0}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{x}{2k\pi}\right)^2\right] \tag{1.10.2}$$

1.11 Les nombres de Stirling

On commence par des nombres proches des coefficients binomiaux, les nombres de Stirling, du nom de James Stirling (1692-1770). Il en existe en fait deux types, traditionnellement appelés "nombres de Stirling de première espèce" et "nombres de Stirling de deuxième espèce".

Les identités et les propriétés de ces nombres ont été principalement puisées de Graham, Knuth et Patashnik [1] , T.Arakawa,T.Ibukiyama et M.Kaneko[2].

Définition 1.11.1 *Le nombre de Stirling de première espèce, noté* $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$ *, compte le nombre de permutation de* $\{1, 2, 3, ..., n\}$ *ayant exactement* m *cycles* $(0 \leq m \leq n)$*. Le nombre de Stirling de première espèce signé est donné par*

$$S(n, m) = (-1)^{n-m} \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$$

Les nombres de Stirling de première espèce vérifient la relation de récurrence suivante

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \delta_{0,n} \\ \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix}, \quad n > 1. \end{cases} \tag{1.11.1}$$

La preuve de la récurrence (1.11.1)se fait de la façon suivante : on prend l'élément n.

Soit n forme un cycle réduit à lui-même et par conséquent, on a $\begin{bmatrix} n-1 \\ m-1 \end{bmatrix}$ façons d'avoir des permutations à $(m-1)$ cycles d'un ensemble à $(n-1)$ éléments. Soit il est contenu dans un cycle non réduit à un seul élément et par conséquent, on a $\begin{bmatrix} n-1 \\ m \end{bmatrix}$ manières d'obtenir des

permutations à m cycles d'un ensemble à $(n-1)$ éléments et $(n-1)$ possibilités d'ajouter n dans chacune de ces permutations. Le nombre total de ces permutations donne le nombre de permutations en m cycles d'un ensemble à n éléments. Par exemple le nombre de permutations de $\{1,2,3,4\}$ ayant exactement 2 cycles est

$$(1)\,(2\ 3\ 4)\,,(1)\,(2\ 4\ 3)\,,(2)\,(1\ 3\ 4)\,,(2)\,(1\ 4\ 3)$$
$$(3)\,(1\ 2\ 4)\,,(3)\,(1\ 4\ 2)\,,(4)\,(1\ 2\ 3)\,,(4)\,(1\ 3\ 2)$$
$$(1\ 2)\,(3\ 4)\,,(1\ 3)\,(2\ 4)\,,(1\ 4)\,(2\ 3)\,.$$

Alors

$$\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = 11$$

Définition 1.11.2 *Le nombre de Stirling de seconde espèce, noté* $\left\{{n \atop m}\right\}$ *,compte le nombre de partitions de l'ensemble* $\{1,2,3,...,n\}$ *en* m *sous-ensembles non vides* $(0 \leq m \leq n)$.

En d'autres termes, $\left\{{n \atop m}\right\}$ est le nombre de relation d'équivalence avec m classes sur un ensemble à n éléments. Ou encore, le nombre de distribution de n boules discernables dans m urnes indiscernables telle qu'aucune n'est vide.

Les nombres de Stirling de seconde espèce vérifient la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} \left\{{n \atop 0}\right\} = \delta_{0,n} \\ \left\{{n \atop m}\right\} = m\left\{{n-1 \atop m}\right\} + \left\{{n-1 \atop m-1}\right\}, \quad n > 1. \end{cases} \tag{1.11.2}$$

On obtient une preuve combinatoire de la relation (1.11.2) en tenant compte de l'élément n : si cet élément forme un singleton, alors on a $\left\{{n-1 \atop m-1}\right\}$ façons de partitionner les $(n-1)$

éléments restants. Si, d'autre part, l'élément n ne forme pas un singleton en lui-même, on a $\left\{{n-1 \atop m}\right\}$ possibilités de partitionner les $(n-1)$ éléments en m sous-ensembles, on a m possibilités de placer n dans chacune des partitions possibles. Puisque le membre gauche compte le nombre de toutes les partitions de $\left\{{n \atop m}\right\}$, le résultat est prouvé.

L'ensemble $\{1,2,3,4\}$ possède 7 partitions en deux sous-ensembles non vides

$$\{1,2,3\}\,\{4\}\ ,\{1,2,4\}\,\{3\}\,,\{1,3,4\}\,\{2\}\,,\{1,3,4\}\,\{1\}\,,\{1,2\}\,\{3,4\}\,,\{1,3\}\,\{2,4\}\,,\{1,4\}\,\{2,3\}$$

On donne le tableau des premières valeurs des nombres de Stirling de première espèce et de seconde espèce :

n\m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	2	3	1						
4	0	6	11	6	1					
5	0	24	50	35	10	1				
6	0	120	274	225	85	15	1			
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1		
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1	
9	0	40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1

Table 1.9.1-Nombres de Stirling de première espèce

n\m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

Table 1.9.2-Nombres de Stirling de seconde espèce

Proposition 1.11.1 *(T.Arakawa,T.Ibukiyama et M.Kaneko[2]) Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, on a*

(1)

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} -m \\ -n \end{Bmatrix}$$

(2)

$$\sum_{m=0}^{n} \left\{ n \atop m \right\} x^{\underline{m}} = x^n$$

(3)

$$x^{\underline{n}} = (-1)^n \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$$

(4)

$$\left\{ n \atop m \right\} = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{l=0}^{m} (-1)^l \binom{m}{l} l^n \tag{1.11.3}$$

(5)

$$\frac{(e^t - 1)^m}{m!} = \sum_{n=m}^{+\infty} \left\{ n \atop m \right\} \frac{t^n}{n!} \tag{1.11.4}$$

Preuve. (1) On pose

$$a_{n,m} = \left\{ -m \atop -n \right\}$$

On vérifie que $a_{n,m}$ satisfait la formule de récurrence (1.11.1) , on utilise la formule de récurrence (1.11.2), on obtient

$$\begin{cases} \left\{ 0 \atop -n \right\} = \delta_{0,n} \\ \left\{ -m+1 \atop -n \right\} = \left\{ -m \atop -n-1 \right\} - n \left\{ -m \atop -n \right\}, \quad n > 1. \end{cases}$$

Ceci implique que

$$\left\{ -m+1 \atop -n \right\} + n \left\{ -m \atop -n \right\} = \left\{ -m \atop -n-1 \right\}$$

Alors

$$a_{n+1,m} = a_{n,m-1} + n a_{n,m}$$

Qui n'est autre que la formule de récurrence (1.11.1).

(2) On utilise la même stratégie. à savoir, on pose $x^n = \sum_{m=0}^{n} a_{n,m} x^{\underline{m}}$ et vérifie que $a_{n,m}$ satisfait la même formule de récurrence (1.11.2) pour $n, m \geq 0$, pour la condition initiale il suffit de mettre $(a_{0,m} = 0)$, on a

$$x^{\underline{m+1}} = x^{\underline{m}}(x - m)$$

$$x^{\underline{m}}.x = x^{\underline{m+1}} + m x^{\underline{m}}$$

Alors

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{n+1} a_{n+1,m}x^{\underline{m}} = x^{n+1} = x^n.x \\ &= \sum_{m=0}^{n} a_{n,m}x^{\underline{m}}.x \\ &= \sum_{m=0}^{n} a_{n,m}(x^{\underline{m+1}} + mx^{\underline{m}}) \\ &= \sum_{m=1}^{n+1} a_{n,m-1}x^{\underline{m}} + \sum_{m=0}^{n} ma_{n,m}x^{\underline{m}}\end{aligned}$$

En comparant les coefficients de $x^{\underline{m}}$ des deux côtés, on obtient la relation de récurrence (1.11.2) , ici nous avons mis $(a_{n,-1} = a_{n,n+1} = 0)$.

(3) Elle est prouvé de façon similaire à ce qui précède.

(4) On vérifie que le côté droit de (1.11.3) satisfait la formule de récurrence (1.11.2), on le note par $a_{n,m}$, Il est facile de voir que pour $n \geq 1$ $(a_{0,0} = 1 \; et \; a_{n,0} = 0)$, pour $n = 0$ et $m \geq 1$ on a

$$a_{0,m} = \sum_{l=0}^{m} (-1)^l \binom{m}{l} = (1-1)^m = 0$$

Maintenant, on vérifie que si $ma_{n,m} + a_{n,m-1} = a_{n+1,m}$

$$\begin{aligned}ma_{n,m} + a_{n;m-1} &= \frac{(-1)^m}{(m-1)!}\sum_{l=0}^{m} (-1)^l \binom{m}{l} l^n + \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l \binom{m-1}{l} l^n \\ &= \frac{(-1)^m}{(m-1)!}\sum_{l=0}^{m} (-1)^l \left\{ \binom{m}{l} - \binom{m-1}{l} l^n \right\} \\ &= \frac{(-1)^m}{m!}\sum_{l=0}^{m} (-1)^l \binom{m}{l} l^{n+1} \\ &= a_{n+1,m}\end{aligned}$$

(5) Tout d'abord, on note que le côté droit de (1.11.4) peut être exprimé comme la somme de $n = 0$ (Si $n < m$, alors $\left\{ {n \atop m} \right\} = 0$) On utilise (1.11.3) et avec un simplification on

obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{n=m}^{+\infty} \left\{ n \atop m \right\} \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{l=0}^{m} (-1)^l \binom{m}{l} l^n \right\} \frac{t^n}{n!} \\
&= \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{l=0}^{m} (-1)^l \binom{m}{l} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(lt)^n}{n!} \right) \\
&= \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{l=0}^{m} (-1)^l \binom{m}{l} e^{lt} \\
&= \frac{(-1)^m}{m!} \left(1 - e^t\right)^m \\
&= \frac{(e^t - 1)^m}{m!}
\end{aligned}$$

Elle peut également être prouvé en écrivant $(e^t - 1)^m/m! = \sum_{n=m}^{+\infty} a_{n,m} \frac{t^n}{n!}$, et en vérifiant que $a_{n,m}$ satisfait la formule de récurrence (1.11.2). ■

Chapitre 2

Les nombres et les polynômes de Bernoulli

2.1 Une approche naturelle pour dériver les nombres de Bernoulli

Soient $n \in \{1, 2, ...\}$ et $m \in \{0, 1, 2, ...\}$. la somme de puissance $S_m(n-1)$ est définie par

$$S_m(n-1) = 1^m + 2^m + ... + (n-1)^m$$

Il est bien connu que

$$S_0(n-1) = (n-1), \qquad S_1(n-1) = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$$

Lemme 2.1.1 *(L.E.S.Coen[10])*$\forall n, m \in \mathbb{N}$ *on a*

$$n^{m+1} - n = \sum_{i=1}^{m} \binom{m+1}{i} S_i(n-1) \tag{2.1.1}$$

Preuve. *On utilise la formule de binôme de Newton*

$$(k+1)^{m+1} = \sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} k^i \text{ pour tout } k \in \{0, 1, 2, ...\}$$

Par la convention que $0^0 = 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^{m+1} &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} k^i \\
&= \sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} \sum_{k=0}^{n-1} k^i \\
&= \binom{m+1}{0} \sum_{k=0}^{n-1} k^0 + \sum_{i=1}^{m+1} \binom{m+1}{i} \sum_{k=0}^{n-1} k^i \\
&= n + \sum_{i=1}^{m+1} \binom{m+1}{i} S_i(n-1)
\end{aligned}$$

On pose $j = k + 1$ *il s'ensuit que*

$$\sum_{j=1}^{n} j^{m+1} = n + \sum_{i=1}^{m+1} \binom{m+1}{i} S_i(n-1)$$

alors

$$\sum_{j=1}^{n} j^{m+1} + n^{m+1} = n + \sum_{i=1}^{m} \binom{m+1}{i} S_i(n-1) + S_{m+1}(n-1)$$

ce qui donne

$$n^{m+1} = n + \sum_{i=1}^{m} \binom{m+1}{i} S_i(n-1)$$

■

La relation (2.1.1) permet donner $S_2(n-1), S_3(n-1)$ ... Par exemple, En remplaçant $m = 2$ dans (2.1.1), on obtient $S_2(n-1)$

$$n^3 - n = \binom{3}{1} S_1(n-1) + \binom{3}{2} S_2(n-1)$$

Il s'ensuit par une simplification des termes que :

$$\begin{aligned} S_2(n-1) &= \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \\ &= \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \end{aligned}$$

Le lemme suivant montre que $S_m(n-1)$ est un polynôme de n.

Lemme 2.1.2 *(L.E.S.Coen[10])Soit* $n \in \{2, 3...\}, m \in \{1, 2, ...\}$ *,les sommes* $S_m(n-1)$ *sont des polynômes de degré* $m+1$ *et de terme constant nul ainsi on a la formule*

$$S_m(n-1) = \sum_{j=0}^{m} c_{m,j} n^{m+1-j} \tag{2.1.2}$$

Ou $c_{m,j} \in \mathbb{R}$ *pour tout* $m \in \{1, 2, ...\}, j \in \{0, 1, ...m\}$

Preuve. La preuve se fait par récurrence, on a pour $m = 1$

$$S_1(n-1) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$$

Alors la relation est vraie pour $m = 1$

On supose que cette relation est vraie pour $m \leq k$ et prouvons qu'elle est vraie lorsque $m = k + 1$

En remplaçant $m = k + 1$ dans (2.1.1), on obtient

$$\begin{aligned} n^{k+2} - n &= \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k+2}{i} S_i(n-1) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \binom{k+2}{i} S_i(n-1) + (k+2) S_{k+1}(n-1) \end{aligned}$$

alors

$$S_{k+1}(n-1)=\frac{1}{k+2}\left[n^{k+2}-n-\sum_{i=1}^{k}\binom{k+2}{i}S_i(n-1)\right]$$

Donc $S_{k+1}(n-1)$ est aussi un pôlynome de degré $k+2$ et de terme constant nul. ■

Lemme 2.1.3 *(L.E.S.Coen[10])Soit $c_{m,j}\in\mathbb{R}$,pour tout $m\in\{2,3,...\}$, $j\in\{0,1,...m\}$ les sommes $S_m(n-1)$ sont définit par*

$$S_m(n-1)=\sum_{j=0}^{m}c_{m,j}n^{m+1-j} \tag{2.1.3}$$

les coefficients $c_{m,j}$ satisfont les relations suivants

$$c_{m,0}=\frac{1}{m+1} \tag{2.1.4}$$

$$c_{m,j}=-\frac{1}{m+1}\sum_{i=m-j}^{m-1}\binom{m+1}{i}c_{i,i+j-n}\qquad\forall j\in\{1,2,...,m-1\} \tag{2.1.5}$$

$$c_{m,m}=-\frac{1}{m+1}\left[\sum_{i=1}^{m-1}\binom{m+1}{i}c_{i,i}+1\right] \tag{2.1.6}$$

En outre, (2.1.4), (2.1.5), et (2.1.6) définissent les $c_{m,j}$ uniquement.

Preuve. Les relations (2.1.1) et (2.1.2) donne

$$\begin{aligned}n^{m+1}-n&=\sum_{i=1}^{m}\binom{m+1}{i}\left[\sum_{j=0}^{i}C_{i,j}n^{i+1-j}\right]\\&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{i}\binom{m+1}{i}C_{i,j}n^{i+1-j}\end{aligned}$$

On pose $j=k-m+i$, on obtient

$$n^{m+1}-n=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=m-i}^{m}\binom{m+1}{i}c_{i,k-m+i}n^{m+1-k}$$

alors

$$n^{m+1} - n = \sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{k=m-i}^{m-1} \binom{m+1}{i} c_{i,k-m+i} n^{m+1-k} + \binom{m+1}{i} c_{i,i} n \right]$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=m-i}^{m-1} \binom{m+1}{i} c_{i,k-m+i} n^{m+1-k} + \sum_{i=1}^{m} \binom{m+1}{i} c_{i,i} n$$

On échange la sommation sur k et la sommation sur i, la double sommation au dessus est une sommation sur

$$A = \{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / 1 \leq i \leq m, m-i \leq k \leq m-1\}$$

Après interchangeabilité i et k on obtient un sommation sur

$$B = \{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / 0 \leq k \leq m-1, m-k \leq i \leq m\}$$

alors

$$n^{m+1} - n = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{k=m-k}^{m} \binom{m+1}{i} c_{i,k-m+i} n^{m+1-k} + \sum_{i=1}^{m} \binom{m+1}{i} c_{i,i} n$$
$$= \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{k=m-k}^{m} \binom{m+1}{i} c_{i,k-m+i} n^{m+1-k} + \sum_{i=m}^{m} \binom{m+1}{i} c_{i,i-m} + \sum_{i=1}^{m} \binom{m+1}{i} c_{i,i} n$$
$$= \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{k=m-k}^{m} \binom{m+1}{i} c_{i,k-m+i} n^{m+1-k} + (m+1) c_{m,0} + \sum_{i=1}^{m} \binom{m+1}{i} c_{i,i} n$$

En comparant les coefficients de puissance de n des deux côtés, on obtient

$$1 = (m+1) c_{m,0}$$
$$0 = \sum_{k=m-k}^{m} \binom{m+1}{i} c_{i,k-m+i} \ , \qquad 1 \leq k \leq m-1$$
$$-1 = \sum_{i=1}^{m} \binom{m+1}{i} c_{i,i}$$

alors

$$C_{m,0} = \frac{1}{m+1}$$
$$C_{i,k-m+i} = \sum_{k=m-k}^{m-1} \binom{m+1}{i} C_{i,k-m+i} \ , \qquad 1 \leq k \leq m-1$$
$$C_{m,m}(m+1) \ = -1 - \sum_{i=1}^{m-1} \binom{m+1}{i} C_{i,i} \ , \qquad 1 \leq k \leq m-1$$

Enfin, soit $b_{m,j}$ défini comme $S_m(n-1) = \sum_{j=0}^{m} b_{m,j} n^{m+1-j}$, alors $\{b_{m,j}\}$ satisfait (2.1.4) , (2.1.5) , (2.1.6) et par conséquent $b_{m,j} = c_{m,j}$. ■

Maintenant, on calcule plusieurs coefficients $c_{m,j}$ au moyen des formules (2.1.4) , (2.1.5) , (2.1.6)

On a

$$S_1(n-1) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \ , \ \ S_2(n-1) = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

alors

$$c_{1,0} = \frac{1}{2}, c_{1,1} = -\frac{1}{2}, c_{2,0} = \frac{1}{2}, c_{2,2} = \frac{1}{6}$$

On utilise le lemme (2,1,3) pour $m = 3$, on trouve

$$c_{3,0} = \frac{1}{4}, c_{3,1} = -\frac{1}{2}, c_{3,2} = \frac{1}{4}, c_{3,3} = 0$$

pour $m = 4$

$$c_{4,0} = \frac{1}{5}, c_{4,1} = -\frac{1}{2}, c_{4,2} = \frac{1}{3}, c_{4,3} = 0, c_{4,4} = -\frac{1}{30}$$

Calculant $c_{m,j}$ pour les premières valeurs de m et j, on obtient le tableau suivant

$$
\begin{array}{lccccccc}
m=1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & & & & \\
m=2 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & & & & \\
m=3 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & & & \\
m=4 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{30} & & \\
m=5 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{12} & 0 & -\frac{1}{12} & 0 & \\
m=6 & \frac{1}{7} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{42} \\
m=7 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{7}{12} & 0 & -\frac{7}{24} & 0 & \frac{1}{12} \quad 0
\end{array}
$$

Multipliant la première ligne par 2 ,la deuxième par 3 ...,la j^{ieme} par $(m+1)$,on obtient

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & -1 & & & & & & \\
1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & & & & & \\
1 & -2 & 1 & 0 & & & & \\
1 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{3} & 0 & -\frac{1}{6} & & & \\
1 & -3 & \frac{5}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & & \\
1 & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} & 0 & -\frac{7}{6} & 0 & \frac{1}{6} & \\
1 & -4 & \frac{14}{3} & 0 & -\frac{7}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0
\end{array}
$$

En exprimant le tableau ci-dessus par affacturage supplémentaire, en utilisant des coefficients binomiaux, on a

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\binom{2}{0}(1) & \binom{2}{1}(-\frac{1}{2}) & & & & & & & \\
\binom{3}{0}(1) & \binom{3}{1}(-\frac{1}{2}) & \binom{3}{2}(\frac{1}{6}) & & & & & & \\
\binom{4}{0}(1) & \binom{4}{1}(-\frac{1}{2}) & \binom{4}{2}(\frac{1}{6}) & \binom{4}{3}(0) & & & & & \\
\binom{5}{0}(1) & \binom{5}{1}(-\frac{1}{2}) & \binom{5}{2}(\frac{1}{6}) & \binom{5}{3}(0) & \binom{5}{4}(-\frac{1}{30}) & & & & \\
\binom{6}{0}(1) & \binom{6}{1}(-\frac{1}{2}) & \binom{6}{2}(\frac{1}{6}) & \binom{6}{3}(0) & \binom{6}{4}(-\frac{1}{30}) & \binom{6}{5}(0) & & & \\
\binom{7}{0}(1) & \binom{7}{1}(-\frac{1}{2}) & \binom{7}{2}(\frac{1}{6}) & \binom{7}{3}(0) & \binom{7}{4}(-\frac{1}{30}) & \binom{7}{5}(0) & \binom{7}{6}(\frac{1}{42}) & & \\
\binom{8}{0}(1) & \binom{8}{1}(-\frac{1}{2}) & \binom{8}{2}(\frac{1}{6}) & \binom{8}{3}(0) & \binom{8}{4}(-\frac{1}{30}) & \binom{8}{5}(0) & \binom{8}{6}(\frac{1}{42}) & \binom{8}{7}(0) &
\end{array}
$$

On vu un modèle dans chaque colonne où les nombres factorisés révèlent un élément commun à chaque colonne j, on l'exprime dans la remarque suivante.

Remarque 2.1.1 *le coefficient $c_{m,j}$ a la forme suivant*

$$c_{m,j} = \frac{1}{m+1}\binom{m+1}{j}B_j \tag{2.1.7a}$$

ou B_j est un constant par rapport à chaque colonne j

On prouve que l'énoncé de cette remarque est vraie dans le théorème (2.1.1) ci-dessous

Mais d'abord, on peut voir immédiatement que si l'observation est vraie, alors la forme des coefficients $B_0, B_1, B_2, ...$ est déterminé ,après avoir défini $B_0 = 1$. En effet, en remplaçant $j = m$ dans (2.1.7a) et (2.1.6) impliquent que

$$-\frac{1}{m+1}\binom{m+1}{m}B_m = -\frac{1}{m+1}\left[\sum_{i=1}^{m-1}\binom{m+1}{i}\frac{1}{i+1}\binom{i+1}{i}B_i + 1\right]$$

par simplification, on a

$$B_m = -\frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{m-1}\binom{m+1}{i}B_i$$

Cela donne l'idée de la définition suivante de $B_0, B_1, B_2, ...$, qui sont appelés nombres de Bernoulli..

Définition 2.1.1 *Les nombres de Bernoulli $B_0, B_1, B_2, ...$ sont les nombres rationels définis par*

$$B_0 = 1, \quad B_m = -\frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{m-1}\binom{m+1}{i}B_i \ , \qquad \forall\ m \in \{1, 2, ...\} \tag{2.1.8}$$

En substituant la valeur de $c_{m,j}$ donnée par (2.1.7a) en (2.1.2), on obtient l'idée du théorème suivant, ce qui prouve que la remarque (2.1.1) est vraie, parce que les $c_{m,j}$ sont uniques par le lemme (2.1.3).voisi quelque nombres de Bernoulli

$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = \frac{1}{30}, B_5 = 0, ...$

Théorème 2.1.1 *(L.E.S.Coen[10])Les sommes $S_m(n-1)$ peuvent être directement calculées par la formule*

$$S_m(n-1) = -\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k n^{m+1-k} \tag{2.1.9}$$

où $B_0, B_1, B_2, ...$ sont les nombres de Bernoulli.

Preuve. Par le lemme (2.1.3), il suffit de prouver que les coefficients

$$d_{m,k} = \frac{1}{m+1}\binom{m+1}{k}B_k$$

satisfont les formules (2.1.4), (2.1.5) et (2.1.6). soit $m \in \{2, ...\}$ on a

$$d_{m,0} = \frac{1}{m+1}\binom{m+1}{0}B_0 = \frac{1}{m+1}$$

alors le coefficient $d_{m,k}$ satisfait la formule (2.1.4)

Soit $j \in \{1, 2, ..., m-1\}$, montrons que ces coefficients satisfont également (2.1.5), les formules (2.1.8) et (2.1.9) nous donne

$$d_{m,j} = \frac{1}{m+1}\binom{m+1}{j}B_j = -\frac{1}{m+1}\left[\sum_{i=m-j}^{m-1}\binom{m+1}{i}\frac{1}{i+1}\binom{i+1}{i+j-m}B_{i+j-m}+1\right]$$

On pose $k = i + j - m$ alors

$$\frac{1}{m+1}\binom{m+1}{j}B_j = -\frac{1}{m+1}\left[\sum_{k=0}^{j-1}\binom{m+1}{k-j+m}\frac{1}{k-j+m+1}\binom{k-j+m+1}{i+j-m}B_{i+j-m}+1\right]$$

Après simplification

$$B_j = -\frac{1}{j+1}\sum_{i=1}^{j-1}\binom{j+1}{i}B_i$$

Ce qui est vrai par (2.1.8), alors le coefficient $d_{m,k}$ satisfait la formule (2.1.5)

montrons que ces coefficients satisfont également (2.1.6), les formules (2.1.8) et (2.1.9) nous donne

$$d_{m,m} = \frac{1}{m+1}\binom{m+1}{m}B_m = -\frac{1}{m+1}\left[\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m+1}{i}\frac{1}{i+1}\binom{i+1}{i}B_i+1\right]$$

Après simplification

$$B_j = -\frac{1}{j+1}\sum_{i=1}^{j-1}\binom{j+1}{i}B_i$$

Ce qui est vrai par (2.1.8), alors le coefficient $d_{m,k}$ satisfait la formule (2.1.6). ■

2.2 Somme des puissance d'entier à l'aide de l'algebre matricielle

Pour m impaire Beardon a prouvé que $S_1(n)$ divise $S_m(n)$,pour m paire,Il a constaté que $S_m(n)$ est un polynôme de degré impaire de n ,mais n'est pas un polynôme de $S_1(n)$ et que $S_2(n)$ divise $S_m(n)$ et le quotient est un polynôme de $S_1(n)$.

Beardon a rapporte que Faulhalber a connu ces conclusions ,Edward rappelé qu'il avait appris les algorithmes de Faulhalber et qu'il avait montrer que

$$S_m(n) = S_2(n)(c_1 + c_2(S_1(n)) + c_3(S_1(n))^2 + ... + c_{\frac{m}{3}}(S_1(n))^{\frac{m}{2}-1})$$

Pour m paire telque $m \geq 3$

$$S_m(n) = (S_1(n))^2(d_1 + d_2(S_1(n)) + d_3(S_1(n))^2 + ... + d_{\frac{m}{3}}(S_1(n))^{\frac{m-3}{2}})$$

les coefficients c_j et d_j depend de m.

Edwards a choisi de présenter les résultats en matrice pour $m = 2, 3, ...$

Pour $k = 1, 2, 3, ..., n$, on a

$$[k(k+1)]^m - [k(k-1)]^m = k^m \left[\sum_{i=1}^{m}(1-(-1)^i)\binom{m}{i}k^{m-i}\right]$$

ou $1-(-1)^i$ égale à 2 si i est impaire et 0 si i est paire

$$\begin{aligned} &= k^m \left[2\binom{m}{1}k^{m-1} + 2\binom{m}{2}k^{m-3} + ...\right] \\ &= 2\left[\binom{m}{1}k^{2m-1} + \binom{m}{2}k^{2m-2} + ...\right] \end{aligned}$$

On ajoute la somme sur k dans les deux coté

$$\sum_{k=1}^{n} [k(k+1)]^m - [k(k-1)]^m = [n(n+1)]^m$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 2\left[\binom{m}{1}k^{2m-1} + \binom{m}{2}k^{2m-3} + ... + \binom{m}{m-1}k^{m+1}\right]$$

$$= 2\left[\binom{m}{1}S_{2m-1}(n) + \binom{m}{2}S_{2m-3}(n) + ... + \binom{m}{m-1}S_{m+1}(n)\right]$$

$$= 2\sum_{j=0}^{\frac{m}{2}-1}\binom{m}{2j+1}S_{2m-(2j+1)}(n)$$

Pour dériver les polynômes paires, Edwards dévloppé $k^m(k+1)^{m+1} - k^{m+1}(k-1)^m$, et supprimé les puissances impaires en utilisant l'expansion de $[n(n+1)]^m$

On applique cette méthode pour

$m = 2 : [n(n+1)]^2 = 2\binom{2}{1}S_3(n)$

$m = 3 : [n(n+1)]^3 = 2\left[\binom{3}{1}S_5(n) + \binom{3}{3}S_3(n)\right]$

$m = 4 : [n(n+1)]^4 = 2\left[\binom{4}{1}S_7(n) + \binom{4}{3}S_5(n)\right]$

$m = 5 : [n(n+1)]^5 = 2\left[\binom{5}{1}S_9(n) + \binom{5}{3}S_7(n) + \binom{5}{5}S_5(n)\right]$

on a $S_1(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$ exprimer $S_m(n)$ comme un polynôme de n équivaut à exprimer $S_m(n)$ comme un polynôme de $u = n(n+1)$.

Maintenant on peut exprimé les coefficients des sommes des puissances impaires sous forme matricielle

$$u^2\begin{pmatrix}1\\u\\u^2\\u^3\end{pmatrix} = 2.\begin{pmatrix}2&0&0&0\\1&3&0&0\\0&4&4&0\\0&1&10&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}S_3(n)\\S_5(n)\\S_7(n)\\S_9(n)\end{pmatrix}$$

alors

$$u^2\begin{pmatrix}1\\u\\u^2\\u^3\end{pmatrix} = 2.\begin{pmatrix}2&0&0&0\\1&3&0&0\\0&4&4&0\\0&1&10&5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}S_3(n)\\S_5(n)\\S_7(n)\\S_9(n)\end{pmatrix}$$

La représentation matricielle des coefficients des sommes des puissances paires et donnée par

$$\begin{pmatrix} S_2(n) \\ S_4(n) \\ S_6(n) \\ S_8(n) \end{pmatrix} = \frac{u}{2}(2n+1) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 14 & 9 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}$$

Si on pose

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 14 & 9 \end{pmatrix}$$

Edwards donne les formules pour chaque élément des deux matrices

pour $A = (a_{ij})$

$$a_{ij} = \binom{i+1}{2(i-j)+1}$$

pour $B = (b_{ij})$

$$b_{ij} = a_{ij} + \binom{i}{2(i-j)+1}$$

En divisant les éléments dans chaque colonne de A par l'élément diagonale dans cette colonne, et en divisant les éléments de chaque ligne de B par l'élément diagonale dans cette ligne, on obtient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 14 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

On note

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

donc

$$A^{-1}C = DB^{-1}$$

alors

$$A^{-1} = DB^{-1}C^{-1}$$

Maintenant, on peut determiner $S_{m+1}(n)$ a partir de $S_m(n)$.

2.3 Approche de calcul des sommes des puissances par calcul intégral

On considière une approche contemporaine de la sommation des puissances des entiers qui a été découverte par J.A. Johnson (1986). Cette méthode dérive les formules en utilisant le calcul des polynômes. On commence par la définition suivante qui nous donne une relation récursive.

Définition 2.3.1 *On pose*

$$f_0(x) = x \quad , \quad f_{m+1}(x) = (m+1)\left[\int_0^x f_m(t)dt - x\int_0^1 f_m(t)dt\right] + x$$

Ensuite, on va prouver un théorème, qui a été formulé à partir des résultats de Johnson, qui nous donnera la connexion entre la fonction $f_m(n)$ et la somme $S_m(n)$.

Théorème 2.3.1 *(L.E.S.Coen [10]):le polynôme $f_m(n)$ satisfait la relation suivant*

$$f_m(n) = S_m(n) = 1^m + 2^m + ... + n^m \tag{2.3.1}$$

$$\textit{pour tout } n \in \{1, 2, ...\} \ , \ m \in \{0, 1, ...\}$$

Preuve. : La preuve se fait par récurrence, on suppose par induction que

$$f_m(x+1) = f_m(x) + (x+1)^m, \quad f_m(0) = 0$$

pour tout $m \in \{0, 1, 2....\}, x \geq 0$.

Lorsque $m = 0$,la première équation devient : $f_0(x+1) = x+1 = f_0(x) + (x+1)^0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,alors l'équation est vrai pour $m = 0$,soit $k \in \{0, 1, ...\}$ on suppose que (2.3.1) est vrai jusqu'à k et en montrant qu'elle est vrai pour $m = k+1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, par définition de f_{k+1}

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x+1) - f_k(x) &= (k+1)\left[\int_0^{x+1} f_k(t)dt - (x+1)\int_0^1 f_k(t)dt\right] + (x+1) \\ &\quad - (k+1)\left[\left[\int_0^x f_k(t)dt - x\int_0^1 f_k(t)dt\right] + x\right] \\ &= (k+1)\left[\int_0^{x+1} f_k(t)dt - \int_0^x f_k(t)dt - \int_0^1 f_k(t)dt\right] + 1 \end{aligned}$$

Il s'ensuit par la différenciation que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[f_{k+1}(x+1) - f_k(x)\right] &= (k+1)(x+1)^k \\ &= \frac{d}{dx}(x+1)^{k+1}. \end{aligned}$$

Donc, il existe une constante $c \in R$ telle que

$$f_{k+1}(x+1) - f_{k+1}(x) - (x+1)^{k+1} = c\ , \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Lorsque $x = 0$,on obtient : $c = 0$,alors

$$f_{k+1}(x+1) = f_{k+1}(x) + (x+1)^{k+1}, \forall x \in \mathbb{R} \tag{2.3.2}$$

Ce qui prouve l'hypothèse pour $m = k+1$

Soit $m \in \{0, 1, ...\}$ être fixé,par la définition de f_m,on a $f_m(1) = 1$,D'autre part,$S_m(1) = 1^m = 1$,donc la conclusion de la théorème est vrai pour $n = 1$,Soit $k \in \{1, 2, ...\}$ tel que $f_m(k) = S_m(k)$.

On prouve que $f_m(k+1) = S_m(k+1)$,en possant $x = k$ et $m = k+1$ dans (2.3.2), on obtient

$$f_m(k+1) = f_m(k) + (k+1)^m$$

Par l'hypothèse de l'induction, $f_m(k) = S_m(k)$. Il s'ensuit que $S_{m+1}(k) = S_m(k) + (k+1)^m$, alors

$$f_m(k+1) = S_{m+1}(k)$$

■

Exemple 2.3.1 *On peut trouve la formule de $S_{10}(n)$ a partir de $S_9(n)$ par cette nouvelle méthode*

$$\begin{aligned} f_{10}(x) &= (9+1)\left[\int_0^x f_9(n)dt - x\int_0^1 f_9(n)dt\right] + x \\ &= 10\int_0^x \left(\frac{1}{10}t^{10} + \frac{1}{2}t^9 + \frac{3}{4}t^8 - \frac{7}{10}t^6 + \frac{1}{2}t^4 - \frac{3}{20}t^2\right)dt \\ &\quad - (10x)\int_0^1 \left(\frac{1}{10}t^{10} + \frac{1}{2}t^9 + \frac{3}{4}t^8 - \frac{7}{10}t^6 + \frac{1}{2}t^4 - \frac{3}{20}t^2\right)dt + x \\ &= \frac{1}{11}x^{11} + \frac{1}{2}x^{10} + \frac{5}{6}x^9 - x^7 + x^5 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{66}x \end{aligned}$$

2.4 Fonction génératrice exponentielle S(z) associe aux $\mathbf{S}_m(n-1)$

Proposition 2.4.1 *(R.L.Graham,D.E.Knuth et O.patashnik[1])Pour n fixé, la fonction génératrice exponentielle de la suite des sommes des puissances $S_m(n-1)$ est donnée par*

$$S(z,n) = \frac{1-e^{nz}}{1-e^{z}} \tag{2.4.1}$$

Preuve. On a par définition

$$\begin{aligned} S(z,n) &= \sum_{m=0}^{+\infty} S_m(n-1)\frac{z^m}{m!} = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n-1} k^m \frac{z^m}{m!} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{kz} \end{aligned}$$

La somme $\sum_{k=0}^{n-1} e^{kz}$ compatible avec une somme d'une suit geométrique de raison e^z, alors

$$S(z,n) = \frac{1-e^{nz}}{1-e^{z}}$$

■

2.5 Quelque propriétés associe aux nombres de Bernoulli $\mathbf{B}_n$

Proposition 2.5.1 *(R.L.Graham,D.E.Knuth et O.patashnik[1])La fonction génératrice exponentielle de la suite des nombres de Bernoulli B_n est donnée par*

$$B(z) = \frac{z}{e^{z}-1} \tag{2.5.1}$$

Preuve. Il sufiit de prouvé que $(e^z-1)\,B(z)=z$, le developpement de la fonction $x\to e^x-1$ en série entiére nous donne

$$\begin{aligned}(e^x-1)(\sum_{n=0}^{+\infty}b_n\frac{z^n}{n!}) &= (\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{z^{m+1}}{(m+1)!})(\sum_{n=0}^{+\infty}b_n\frac{z^n}{n!})\\ &= \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n}{n!}\frac{1}{(m+1-n)!}z^{m+1}\\ &= \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}b_k\right)\frac{z^{m+1}}{(m+1)!}\end{aligned}$$

Pour $m=0$

$$\sum_{k=0}^{0}\binom{1}{k}b_k=b_0=1$$

Pour $m\neq 0$, la formule de récurrence (2.1.8) nous donne

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}b_k=0$$

cela implique que

$$(e^x-1)(\sum_{n=0}^{+\infty}B_n\frac{z^n}{n!})=z+0=z$$

on obtient le résultat

$$B(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n\frac{z^n}{n!}=\frac{z}{e^z-1}$$

■

Lemme 2.5.1 *(??)*

$$B_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k\ ,\ \forall n\in\{2,3,4,...\} \tag{2.5.2}$$

Preuve. En possant $n=1$ et $m=n-1$ dans (2.1.9), on trouve

$$S_{n-1}(0)=-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_k=0$$

Cela implique que

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_k = 0$$

On déduit que pour tout $n \in \{2,3,4,...\}$

$$B_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k$$

■

Théorème 2.5.1 *(R.J.Meirer[14])*

$$B_{2n+1} = 0, \quad n = 1,2,3,... \tag{2.5.3}$$

Preuve. En remplçant z par $-z$ dans (2.5.1) on trouve $B(-z)$, et en soustrayant $B(-z)$ de $B(z)$, on obtient

$$\begin{aligned} B(z) - B(-z) &= \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{e^{-z} - 1} = -z \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{(-1)^n z^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[1 - (-1)^n\right] B_n \frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

On transfére $-z$ vers la gauche, aprés on développe la somme, on trouve

$$z + 0B_0 + 2zB_1 + 0B_2\frac{z^2}{2!} + 2B_3\frac{z^3}{3!} + ... = 0$$

Cela peut être réécrite sous la forme

$$(1 + 2B_1)z + \sum_{n=0}^{+\infty} 2B_{2n+1}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$$

alors, on peut déduit que

$$B_1 = -\frac{1}{2}\ , B_{2n+1} = 0, \quad n = 1,2,3,...$$

■

2.5.1 Formule pour les nombres de Bernoulli impliquant les nombres de stirling

Une formule exprimant les nombres de Bernoulli comme une somme finie impliquant les nombres de Stirling du deuxième type a été connue au moins depuis Kronecker, qui est bien définie dans le théorème suivante.

Théorème 2.5.2 *(T.Arakawa, T.Ibukiyama et M.Kaneko[2])*

$$B_n = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m m! \left\{ {n \atop m} \right\}}{m+1} \ ,(n \geq 0) \tag{2.5.4}$$

Preuve. La formule (2.5.1) peut être réécrite sous la forme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{z^n}{n!} = -\frac{\ln(1-(1-e^z))}{1-e^z}$$

Le développement de la fonction $z \to -\frac{\ln(1-z)}{z}$ en série entière, est donné par

$$-\frac{\ln(1-z)}{z} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{z^m}{(m+1)!} \tag{2.5.5}$$

Si on remplace z par $(1-e^z)$ dans (2.5.5) , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{z^n}{n!} &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(1-e^z)^m}{(m+1)!} \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{m!}{m+1} \frac{(e^z-1)^m}{m!} \end{aligned}$$

En utilisant la relation (1.11.4), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{z^n}{n!} &= \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{m!}{m+1} \sum_{n=m}^{+\infty} \left\{ {n \atop m} \right\} \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m m! \left\{ {n \atop m} \right\}}{m+1} \right) \frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

D'ou, on obtient le résultat par l'identification. ■

2.5.2 Théorème de Clausen et Von Staudt

Les dénominateurs des nombres de Bernoulli peuvent être complètement déterminés ceci est dû à Clausen et Von Staudt.plus précisément, la partie fractionnaire de B_n est donnée par le théorème suivant .

Théorème 2.5.3 *(T.Arakawa,T.Ibukiyama et M.Kaneko[2]) Pour tout entier $n \geq 1, B_n$ peut être écrire comme*

$$B_n = \sum_{\substack{p\,:\,premier \\ p-1/n}}^{+\infty} \frac{1}{p} + c_n \ \ , \ (c_n \ entier) \tag{2.5.6}$$

Ici la somme s'exécute sur tous les nombres premiers p telsque $p-1$ divise n.

Preuve. L'énoncé est clairement vraie pour $n = 1$, soit n un est un entier pair supérieur ou égal à 2, comme le numérateur de chaque terme $\frac{(-1)^m m!\left\{ {n \atop m} \right\}}{m+1}$ dans la côté droit de la formule (2.5.4) est un entier , alors les seuls nombres premiers qui contribuent au dénominateur de B_n sont les diviseurs de $m+1$, il en résulte qu'un nombre premier p telque $p > n+1$ ne peut pas être un diviseur du dénominateur de B_n.

On suppose d'abord que $m+1$ soit un nombre composite $m+1 = ab$, $1 < a, b < m$:

Si $a \neq b$ alors ab divise $m!$, et ainsi $\frac{(-1)^m m!\left\{ {n \atop m} \right\}}{m+1}$ est un entier .

Si $a = b$ et $2a \leq m$ alors a *et* $2a$ divise $m!$, et ainsi $a^2 = m+1$ cela implique que $\frac{(-1)^m m!\left\{ {n \atop m} \right\}}{m+1}$ est un entier .

Si $a = b$ et $2a > m$ alors $2a \geq m+1$ et $m+1 = a^2 \geq 2a \geq m+1$ cela implique $a^2 = 2a$,alors $a = 2$ dans ce cas $m = 3$ et ce terme apparaît lorsque $n > 3$ (n *est pair*). En utilisant l'identité (1.11.3)

$$\begin{aligned} (-1)^m m!\left\{ {n \atop m} \right\} &= \sum_{l=0}^{3} (-1)^l \binom{3}{l} l^n \\ &= 0 - 3 + 3.2^n - 3^n \\ &= 1 - (-1)^n \equiv 0\,[4] \end{aligned}$$

Cela montre que $\frac{(-1)^m m!\left\{ {n \atop m} \right\}}{m+1}$ est entier .

En suit ,on suppose que $m+1$ égal à un nombre premier p.comme $p-1 \leq n$, il s'ensuit de (1.11.3) que

$$\begin{aligned}(-1)^m m!\left\{ {n \atop m} \right\} &= \sum_{l=0}^{p-1}(-1)^l \binom{p-1}{l} l^n \\ &\equiv \sum_{l=0}^{p-1} l^n \,[p] \quad , \left(car : \binom{p-1}{l} \equiv (-1)^l \,[p] \right) \\ &\equiv \begin{cases} -1 \;\; [p] & si \; p-1 \; \text{div ise} \; n \\ 0 \;\; [p] & si \; p-1 \; ne \; \text{div ise pas} \; n \end{cases}\end{aligned}$$

La dernière congruence peut être vue comme suit

Si $p-1$ divise n, alors le fait que $\sum_{l=0}^{p-1} l^n \equiv p-1 \equiv -1\,[p]$ suit du petit théorème de petit Fermat (i.e : $l^{p-1} \equiv 1\,[p]$ si l et p sont premier entre eux)

Si $p-1$ ne divise pas n. on choisie c telque $c^n \not\equiv 1\,[p]$ (par exemple : une racine primitive modulo p), lorsque l execute de 1 à $p-1$ alors $cl \; mod \; p$ execute aussi de 1 à $p-1$, ainsi on a

$$\sum_{l=0}^{p-1}(cl)^n \equiv \sum_{l=0}^{p-1} l^n \,[p]$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} c^n \sum_{l=0}^{p-1} l^n &\equiv \sum_{l=0}^{p-1} l^n \,[p] \\ (c^n-1)\sum_{l=0}^{p-1} l^n &\equiv 0\,[p] \\ \sum_{l=0}^{p-1} l^n &\equiv 0\,[p] \end{aligned}$$

On peut conclu que

Si $m+1=p$,alors $\frac{(-1)^m m!\left\{ {n \atop m} \right\}}{m+1}$ est un entier si $p-1$ ne divise pas n, mais si $p-1$ divise n alors : $\frac{(-1)^m m!\left\{ {n \atop m} \right\}}{m+1}$ n'est pas un entier mais la conguence ci-dessus montre quelle devient un entier si on lui ajoute $\frac{1}{p}$. ■

2.6 Les polynomes de Bernoulli

Théorème 2.6.1 *(1)Il existe une unique suit de polynomes* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathbb{R}[X]$ *telle que*

$$\begin{cases} A_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, A_n' = nA_{n-1} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 A_n(t)dt = 0 \end{cases} \tag{2.6.1}$$

Preuve. Le preuve se fait par récurrence, l'initiation étant triviale, En supposant que la suit construire jusqu'a A_{n-1}, A_n ayant pour dérivée le polynôme nA_{n-1} on a

$$A_n = n\int_0^x A_{n-1}(t)dt + c_n = 0$$

Ou c_n est une constant, il rest à satisfaire la dernière condition

$$\begin{aligned} &\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 A_n(t)dt = 0 \\ &\iff n\int_0^1\int_0^t A_{n-1}(s)dsdt + c_n = 0 \\ &\iff c_n = -n\int_0^1\int_0^t A_{n-1}(s)dsdt \end{aligned}$$

Cette constant étant parfaitement déterminée, le polynome A_n ainsi construit est unique.

■

Tout polynôme vérifie les proprietes précédent s'appelle polynôme de Bernoulli et on le note généralement par $B_n(x)$.

Voici quelque polynômes de Bernoulli :

$B_0(x) = 1$ $\qquad$ $B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$

$B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ $\qquad$ $B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$

$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$ $\qquad$ $B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}$

$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ $\qquad$ $B_5(x) = x^7 - \frac{7}{6}x^6 + \frac{7}{2}x^9 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{6}x$

Proposition 2.6.1

$$\forall n \geq 2 \quad B_n(1) = B_n(0) \tag{2.6.2}$$

Preuve. Sachant que

$$\forall n \geq 2 \ , \ B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B_n'(t)dt$$

on déduit de (2.6.1) que $B_n'(t) = nB_{n-1}(t)$ et que

$$B_n(1) - B_n(0) = n\int_0^1 B_{n-1}(t)dt = 0$$

■

Proposition 2.6.2

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x) \tag{2.6.3}$$

Preuve. On note

$$Q_n = (-1)^n B_n(1-x)$$

On peut montrer que $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifier les trois proprietés qui entrent dans la définition des polynômes de Bernoulli .

Comme il sont uniques, on en déduit

$$Q_n = B_n(x)$$

■

Proposition 2.6.3

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \ , \ B_{2p+1}(0) = B_{2p+1}(1) = 0 \tag{2.6.4}$$

Preuve. On applique (2.6.2) et (2.6.3), on a pour $p \geq 1$

$$\begin{aligned} B_{2p+1}(1) &= B_{2p+1}(0) \\ &= (-1)^{2p+1} B_{2p+1}(0) = -B_{2p+1}(0) \end{aligned}$$

On en déduit

$$B_{2p+1}(0) = B_{2p+1}(1) = 0$$

■

Théorème 2.6.2 *On a la relation suivant entre les nombres de Bernoulli et les polynômes de Bernoulli*

$$\forall p \in \mathbb{N} \ , \ B_p = B_p(0) \tag{2.6.5}$$

Preuve. On note $B'_p = B_p(0)$.

L'dentité (2.6.4) nous donne immédiatement que $B'_{2p+1} = 0$ dès que $p \geq 1$.

Par une récurrence immédiate, on a, pour $n \in \mathbb{N}$

$$B_n^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k}(x) \ , \ \text{car} : \ B_n^{'}(x) = nB_{n-k}(x)$$

On déduit : $\forall n \in \mathbb{N} \ , \forall k \in [|0, n|]$

$$B_n^{(k)}(0) = \frac{n!}{(n-k)!} B'_{n-k}$$

En applique le dévloppement de Taylor de $B_n(x)$ en 0, On trouve

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B'_{n-k} x^k$$

On obtient pour $p \geq 0$ que

$$\begin{aligned} B'_p = B_p(0) = B_p(1) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B'_k \\ &= B'_p + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B'_k \end{aligned}$$

Alors, les suites $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B'_n)_{\ n\in\mathbb{N}}$ répondent aux mêmes relations de récurrence et $b_0 = B'_0$,elles sont égales. ■

Théorème 2.6.3 *Etant donné les premiers n nombres de Bernoulli ,l'égalité suivante est satisfaite*

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k} \tag{2.6.6}$$

Preuve. Il suffit de montrer que cette nouvelle formule de $B_n(x)$ satisfait les trois proprieté qui sont trouve dans la définition (2.6.1)

1- En posant $n = 0$ dans (2.6.6), on trouve

$$B_0(x) = B_0 = 1$$

2- Si on dérive (2.6.6) par rapport à x, on obtient

$$\begin{aligned}
B'_n(x) &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k x^{n-k}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n}(n-k)\binom{n}{k}B_k x^{n-k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!(n-k)}{k!(n-k)!}B_k x^{n-k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k-1)!}B_k x^{n-k-1} \\
&= n\sum_{k=0}^{n}\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}B_k x^{n-k-1} \\
B'_n(x) &= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}B_k x^{n-k-1}
\end{aligned}$$

Comme $\binom{n-1}{n} = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
B'_n(x) &= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}b_k x^{n-k-1} \\
&= nB_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

3-Si on intègre (2.6.6) par rapport à x sur l'intervalle $[0,1]$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^1 B_n(x)dx &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k x^{n-k} dx \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k \int_0^1 x^{n-k} dx \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{b_k}{n-k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \frac{b_k}{n-k+1} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!} b_k \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} b_k
\end{aligned}$$

On déduit de la relation (2.1.8) que

$$\int_0^1 B_n(x)dx = 0$$

■

On peut exprimer $B_n(x)$ comme $(B+x)^n$ et B^{n-k} comme B_{n-k}, on trouve une nouvelle identité dans la théorème suivante.

Théorème 2.6.4 *(Z.I.Borevich,I.R.Shafarevich[11])Pour tout $n \in \{1,2,3...\}$, la somme $S_m(n-1)$ satisfait la formule*

$$(m+1)S_m(n-1) = (n+B)^{m+1} - B^{m+1} \qquad m \geq 1 \tag{2.6.7}$$

Preuve. En utilisant le développent de la fonction $z \to e^{Bz}$ en série entière, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{+\infty} (n+B)^m \frac{z^m}{m!} - \sum_{m=0}^{+\infty} B^m \frac{z^m}{m!} &= e^{(n+B)z} - e^{Bz} \\
&= e^{Bz}(e^{nz} - 1)
\end{aligned}$$

Si on revenu d'exprimer B^m comme B_m, on trouve

$$\begin{aligned} e^{Bz} &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(Bz)^m}{m!} \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} B_m \frac{z^m}{m!} \end{aligned}$$

Il s'ensuit de (2.5.1) que

$$e^{Bz} = \frac{z}{e^z - 1} \tag{2.6.8}$$

Il s'ensuit aussi de (2.4.1) et (2.6.8) que

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{+\infty} ((n+B)^m - B^m) \frac{z^{m+1}}{(m+1)!} &= z \frac{e^{nz} - 1}{e^z - 1} \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} S_m(n-1) \frac{z^{m+1}}{m!} \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} (m+1) S_m(n-1) \frac{z^{m+1}}{(m+1)!} \end{aligned}$$

On obtient le résultat par l'identification

$$(m+1) S_m(n-1) = (n+B)^{m+1} - B^{m+1}$$

■

Proposition 2.6.4 *(R.L.Graham,D.E.Knuth,O.patashnik[1])La fonction génératrice exponentielle de la suite des polynômes de Bernoulli $B_n(x)$ est donnée par*

$$B(x,z) = \frac{z e^{xz}}{e^z - 1} \tag{2.6.9}$$

Preuve. On a par définition

$$B(x,z) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n(x) \frac{z^n}{n!}$$

Les relation (2.4.1) et (2.6.6), donne

$$\begin{aligned} B(x,z) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k x^{n-k}\frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k z^k}{k!}\frac{x^{n-k}z^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_n z^n}{n!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(xz)^k}{k!} \\ &= \frac{ze^{xz}}{e^z-1} \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve. ■

Proposition 2.6.5 *(voir[12],[13]) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, les polynômes de Bernoulli vérifient les identités suivantes*

1)

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}, \quad n \geq 1. \tag{2.6.10}$$

2)

$$B(-x) = (-1)^n(B_n(x) + nx^{n-1}), \quad n \geq 0 \tag{2.6.11}$$

3)

$$B_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k(x)y^{n-k}, \quad n \geq 0. \tag{2.6.12}$$

4)

$$m^{1-n}B_n(mx) = \sum_{k=0}^{m-1}B(x+\frac{k}{m}). \quad n \geq 0, m \geq 1 \tag{2.6.13}$$

Preuve. 1)-On a l'identité

$$z\frac{e^{(x+1)z}}{e^z-1} - z\frac{e^{xz}}{e^z-1} = ze^{xz}$$

En appliquant la relation (2.6.9) et en utilisant le dévloppement en série entière de la fonction $z \to e^{xz}$, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{+\infty}(B_n(x+1)-B_n(x))\frac{z^n}{n!} &= ze^{xz}\\ &= \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}z^{n+1}\\ &= \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(n+1)x^n z^{n+1}}{(n+1)!}\\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} nx^{n-1}\ \frac{z^n}{n!}\end{aligned}$$

D'ou par identification

$$B_n(x+1)-B_n(x) = nx^{n-1}$$

2)-En remplaçant x par $x+1$ dans (2.6.3), on trouve

$$B_n(-x) = (-1)^n B_n(x+1)$$

D'aprés la formule (2.6.10), on obtient

$$B_n(-x) = (-1)^n(B_n(x)+nx^{n-1})$$

3)- Cette identité est prouvée comme suit

On applique la relation (2.6.9) en remplaçant x par $x+y$ et aprés en utilisant le développement en série entière la fonction $z \to e^{yz}$, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{+\infty}B_n(x+y)\frac{z^n}{n!} &= \frac{ze^{(x+y)z}}{e^z-1}\\ &= \frac{ze^{xz}}{e^z-1}e^{yz}\\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}B_n(x)\frac{z^n}{n!}\right)\times\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(zy)^k}{k!}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}B_k(x)\frac{z^k(zy)^{n-k}}{k!(n-k)!}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k(x)y^{n-k}\frac{z^n}{n!}\end{aligned}$$

Par identification on obtient le résultat

$$B_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(x) y^{n-k}$$

4)- On applique la relation (2.6.9) en remplaçant x par $x + \frac{k}{m}$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} B_n(x+\frac{k}{m})\frac{z^n}{n!} &= \frac{ze^{(x+\frac{k}{m})z}}{e^z-1} \\ &= \frac{ze^{xz}}{e^z-1} e^{\frac{kz}{m}} \end{aligned}$$

Maintenant,on fait la somme sur k dans les deux côtes,pour $k = 0, 1, 2, ...m-1$

$$\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{n=0}^{+\infty} B_n(x+\frac{k}{m})\frac{z^n}{n!} = \frac{ze^{xz}}{e^z-1}\sum_{k=0}^{m-1} e^{\frac{kz}{m}} \tag{2.6.14}$$

La somme $\sum_{k=0}^{m-1} e^{\frac{kz}{m}}$ compatible avec une somme d'une suit geométrique de raison $e^{\frac{z}{m}}$, alors

$$\sum_{k=0}^{m-1} e^{\frac{kz}{m}} = \frac{e^z-1}{e^{z/m}-1} \tag{2.6.15}$$

Les deux relations (2.6.14) et (2.6.15) donne

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{n=0}^{+\infty} B_n(x+\frac{k}{m})\frac{z^n}{n!} &= \frac{ze^{xz}}{e^z-1}\frac{e^z-1}{e^{z/m}-1} \\ &= \frac{ze^{xz}}{e^{z/m}-1} \end{aligned}$$

En remplacant x par mx et z par z/m dans (2.6.9), on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{n=0}^{+\infty} B_n(x+\frac{k}{m})\frac{z^n}{n!} &= m\sum_{n=0}^{+\infty} B_n(mx)\frac{\left(\frac{z}{m}\right)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} m^{1-n} B_n(mx)\frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

Par identification, on obtient

$$m^{1-n} B_n(mx) = \sum_{k=0}^{m-1} B_n(x+\frac{k}{m})$$

■

2.7 La relation entre les nombres de Bernoulli et la fonction zéta

Le théorème suivant a pour objet est de présenter une formule entre la fonction zéta Riemann et les nombres de Bernoulli.

Théorème 2.7.1 *(1)On dispose d'une formule simple déterminant z aux entiers pairs positifs, faisant intervenir les nombres de Bernoulli.*

En effet, pour tout $q \geq 1$

$$\zeta(2q) = \frac{(2\pi)^{2q}}{(-1)^{q-1}2(2q)!}B_{2q}. \tag{2.7.1}$$

Preuve. On définit la suite $(f_q)_{q\geq 1}$ par : $\forall x \in [0, 2\pi[\,,\ f_q(x) = B_{2q}(\frac{x}{2\pi})$, f_q étant 2π-périodique.

f_q coïncide avec un polynôme sur $[0, 2\pi[$ donc y est continue.

Et $\lim\limits_{x\to 2\pi^-} f_q(x) = B_{2q}(1) = B_{2q}(0) = f_q(0) = f_q(2\pi)$ donc $f_q$est continue en 2π.

Par 2π-périodicité, $f_q$est continue sur $\mathbb{R}$. Par construction, elle est également de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Alors les condition de dirichlet sont vérifier et la série de Fourier de f_q converge donc uniformément vers f_q.

Aussi, soit $x \in \mathbb{R}; \exists k \in \mathbb{Z}, \exists y \in [0, 2\pi[\,, y = x + 2k\pi$, ainsi

$$f_q(x) = f_q(y) = B_{2q}(\frac{y}{2\pi}) = (-1)^{2q}B_{2q}(1 - \frac{y}{2\pi}) = f_q(2\pi - y) = f_q(-x)\ ,\ \textit{donc } f_q \textit{ est paire.}$$

On a donc

$$\forall q \geq 1, \forall x \in \mathbb{R},\ f_q(x) = \frac{a_{0,q}}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k,q}cos(kx).$$

Si $k = 0$

$$a_{0,q} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_q(t)dt = 2\int_0^1 B_{2q}(u)du = 0 \quad telque\ 2\pi u = t$$

Si $q = 1$ et $K \neq 0$

$$\begin{aligned}
a_{1,q} &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_1(t)\cos(kt)dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} B_2(\frac{t}{2\pi})\cos(kt)dt \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{4\pi^2} - \frac{t}{2\pi} + \frac{1}{6}\right)\cos(kt)dt \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\left[\left(\frac{t^2}{4\pi^2} - \frac{t}{2\pi} + \frac{1}{6}\right)\frac{\sin(kt)}{k}dt\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(\frac{t}{2\pi^2} - \frac{1}{2\pi}\right)\frac{\sin(kt)}{k}dt\right\} \\
&= -\frac{1}{\pi^2 k}\int_0^{\pi}\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\sin(kt)dt \\
&= -\frac{1}{\pi^2 k}\left\{\left[\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\frac{(-\cos(kt))}{k}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{1}{\pi k}\cos(kt)dt\right\} \\
&= -\frac{1}{\pi^2 k}\left\{-\frac{1}{k} + \frac{1}{\pi k}\int_0^{\pi}\cos(kt)dt\right\} \\
&= \frac{1}{\pi^2 k} - \frac{1}{\pi^3 k^2}\left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi^2 k}
\end{aligned}$$

Si $q \neq 1$ et $k \neq 0$:

$$
\begin{aligned}
a_{k,q} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_q(t)\cos(kt)dt \\
&= 2\int_0^1 B_{2q}(u)\cos(2\pi ku)du \quad telque \ : 2\pi u = t \\
&= 2\left\{\left[B_{2q}(u)\frac{\sin(2\pi ku)}{2\pi k}\right]_0^1 - \int_0^1 2qB_{2q-1}(u)\frac{\sin(2\pi ku)}{2\pi k}du\right\} \\
&= -2\frac{(2q)}{2\pi k}\int_0^1 B_{2q-1}(u)\sin(2\pi ku)du \\
&= -2\frac{(2q)}{2\pi k}\left\{\left[B_{2q-1}(u)\left(\frac{-\cos(2\pi ku)}{2\pi k}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 (2q-1)B_{2q-2}(u)\left(\frac{-\cos(2\pi ku)}{2\pi k}\right)du\right\} \\
&= -2\frac{(2q)(2q-1)}{(2\pi k)^2}\int_0^1 B_{2q-2}(u)\cos(2\pi ku)du \quad (car \ : B_{2q-2}(1) = B_{2q-2}(0)) \\
&= -2\frac{(2q)(2q-1)}{(2\pi k)^2}a_{k,q-1} \\
&= (-1)^{q-1}\frac{(2q)(2q-1)\times ...\times 4\times 3}{(2\pi k)^{2q-2}}a_{k,1} \\
&= (-1)^{q-1}2\frac{(2q)!}{(2\pi k)^{2q}} \quad \left(car \ : a_{k,1} = \frac{1}{\pi^2 k^2}\right)
\end{aligned}
$$

Donc

$$f_q(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{q-1}2\frac{(2q)!}{(2\pi k)^{2q}}cos(kx)$$

En particulier

$$
\begin{aligned}
B_{2q} = f_q(0) &= \frac{(-1)^{q-1}2(2q)!}{(2\pi)^{2q}}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2q}} \\
&= \frac{(-1)^{q-1}2(2q)!}{(2\pi)^{2q}}\zeta(2q)
\end{aligned}
$$

D'ou le résultat

$$\zeta(2q) = \frac{(2\pi)^{2q}}{(-1)^{q-1}2(2q)!}B_{2q}$$

■

Proposition 2.7.1 *(1)Soit $q \geq 1$ .Si q est impaire , alors b_{2q} est possitif.Au contraire, si q est pair, alors b_{2q} est négatif.*

Preuve. En appliquant (2.7.1) ,et pour $s > 1$, $\zeta(s)$ est clairement positif. ■

Chapitre 3

La représentation probabiliste des polynômes de Bernoulli,polynômes d' Euler et polynômes de Gegenbauer

On étudie dans ce chapitre des résultats obtenus par P.Sun[15] expriment la représentation des polynômes de Bernoulli , polynômes d' Euler et les polynôme de Gegenbauer par le moment d'ordre n de certain variable aléatoire. Par ces résultats, on peut prouver des relations entre ces polynômes généralisés on utilise les outiles probabilistes comme ceux de H.M.Srivastava, A.Pintér[19].

On peut retrouver dans [15],[16], et [19] les identités et les propriétés donnés ci-dessous.

D'abord, on définit le polynôme d'Euler et le polynôme de Gegenbauer par leurs fonctions génératrices , pour le polynôme de Bernoulli, leur fonction génératrice est déja définie dans le chapitre précédent .

Définition 3.0.1 *On définit les polynômes d'Euler et de ceux de Gegenbauer par leurs fonctions génératrices*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{2e^{tx}}{e^t+1} \tag{3.0.1}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} G_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} = \left(1-2tx+t^2\right)^{-\alpha} \tag{3.0.2}$$

Théorème 3.0.2 *(P.Sun [15])Soit $L_1, L_2, ..., L_n, ..$ une suit des variables aléatoires i.d.d $\sim L(0,1)$, on a*

$$B_n(x) = E\left(iL_e + x - \frac{1}{2}\right)^n, n \geq 0 \tag{3.0.3}$$

$$E_n(x) = E\left(iL_0 + x - \frac{1}{2}\right)^n, n \geq 0 \tag{3.0.4}$$

tells que les variables aléatoires L_e, L_0 sont donné par

$$L_e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{L_k}{2k\pi},\ L_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{L_k}{(2k-1)\pi}.$$

Preuve. la relation (1.6.1) montre que la fonction caractéristique de la v.a $L_k/2k\pi$ est donné par

$$\begin{aligned}\phi_{\frac{L_k}{2k\pi}}(t) &= \frac{1}{\left(\frac{t}{2k\pi}\right)^2 + 1} \\ &= \left[\left(\frac{t}{2k\pi}\right)^2 + 1\right]^{-1}\end{aligned}$$

étant donné que $L_1, L_2, ..., L_n$ des variables aléatoires symétriques i.i.d $\sim L(0,1)$, alors la fonction caractéristique de L_e est donné par

$$\phi_{L_e}(t) = \prod_{k=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{t}{2k\pi}\right)^2 + 1\right]^{-1}$$

On utilise la relation (1.10.2), on trouve

$$\begin{aligned}\phi_{L_e}(t) &= \frac{t/2}{\sinh(t/2)} \\ &= \frac{t/2}{\left[e^{t/2} - e^{-t/2}\right]/2} \\ &= \frac{te^{t/2}}{e^t - 1}\end{aligned}$$

Par définition, il est connu que

$$\begin{aligned}\phi_{L_e}(t) &= E(e^{itl_e}) \\ &= E\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(itl_e)^n}{n!}\right)\end{aligned}$$

alors

$$\phi_{L_e}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} E(il_e)^n \frac{t^n}{n!} \tag{3.0.5}$$

Les relations (2.6.9) et (3.0.5) donnent

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!} &= \frac{te^{t/2}}{e^t-1} \times e^{t(x-1/2)} \\
&= \left[\sum_{n=0}^{+\infty} E(il_e)^n \frac{t^n}{n!}\right]\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\left(x-\frac{1}{2}\right)^n \frac{t^n}{n!}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} E(il_e)^n \left(x-\frac{1}{2}\right)^{n-k}\right)\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} E\left(iL_e + x - \frac{1}{2}\right)^n \frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

On obtient par identification

$$B_n(x) = E\left(iL_e + x - \frac{1}{2}\right)^n$$

De manière similaire on peut prouver (3.0.4)

la relation (1.6.1) montre que la fonction caractéristique de la v.a $L_k/(2k-1)\pi$ est donné par

$$\begin{aligned}
\phi_{\frac{L_k}{(2k-1)\pi}}(t) &= \frac{1}{\left(\frac{t}{(2k-1)\pi}\right)^2 + 1} \\
&= \left[\left(\frac{t}{(2k-1)\pi}\right)^2 + 1\right]^{-1}
\end{aligned}$$

étant donné que $L_1, L_2, ..., L_n$ des variables aléatoires symétriques i.i.d $\sim L(0,1)$, alors la fonction caractéristique de L_0 est donné par

$$\phi_{L_0}(t) = \prod_{k=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{t}{(2k-1)\pi}\right)^2 + 1\right]^{-1}$$

La relation (1.10.1) donne

$$\begin{aligned}
\phi_{L_0}(t) &= \frac{1}{\cosh(t/2)} \\
&= \frac{1}{\left[e^{t/2} + e^{-t/2}\right]/2} \\
&= \frac{2e^{t/2}}{e^t + 1}
\end{aligned}$$

Par définition, il est connu que

$$\begin{aligned}\phi_{L_0}(t) &= E(e^{itl_0}) \\ &= E\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(itl_0)^n}{n!}\right)\end{aligned}$$

alors

$$\phi_{L_0}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} E(il_0)^n \frac{t^n}{n!} \tag{3.0.6}$$

Les relations (3.0.1) et (3.0.6) donnent

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!} &= \frac{2e^{t/2}}{e^t+1}\times e^{t(x-1/2)} \\ &= \phi_{L_0}(t)\times\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\left(x-\frac{1}{2}\right)^n\frac{t^n}{n!}\right] \\ &= \left[\sum_{n=0}^{+\infty}E(il_0)^n\frac{t^n}{n!}\right]\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\left(x-\frac{1}{2}\right)^n\frac{t^n}{n!}\right] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E(il_0)^n\left(x-\frac{1}{2}\right)^{n-k}\right)\frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}E\left(iL_0+x-\frac{1}{2}\right)^n\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

On obtient par identification

$$E_n(x) = E\left(iL_0+x-\frac{1}{2}\right)^n$$

■

Théorème 3.0.3 *(P.Sun [15])Soit X, Y deux variables aléatoires i.d.d $\sim \Gamma(\alpha,1), (ou\ \alpha>1)$ on a*

$$C_n^{\alpha}(x) = \frac{1}{n!}E\left[(x+\sqrt{x^2-1})X + (x-\sqrt{x^2-1})Y\right]^n, \quad n\geq 0$$

Preuve. Par la relation (3.0.2), on trouve

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}C_n^{\alpha}(x)(it)^n &= \left(1-2(it)x-t^2\right)^{-\alpha} \\ &= \left[1-i(x+\sqrt{x^2-1})t\right]^{-\alpha}\left[1-i(x-\sqrt{x^2-1})t\right]^{-\alpha}\end{aligned}$$

Soit X, Y deux variables aléatoires i.d.d $\sim \Gamma(\alpha, 1), ou\ \alpha > 1$, alors la fonction caractéristique des variables aléatoires X, Y est donné par

$$\phi_X(t) = \phi_Y(t) = (1 - it)^{-\alpha} \tag{3.0.7}$$

On obtient de (3.0.2)et(3.0.7) que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} C_n^{\alpha}(x)(it)^n &= \phi_X((x + \sqrt{x^2-1})t)\phi_Y((x - \sqrt{x^2-1})t) \\ &= E(e^{it(x+\sqrt{x^2-1})X})E(e^{it(x-\sqrt{x^2-1})Y})\end{aligned}$$

Puisque X, Y deux v.a indépendent, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} C_n^{\alpha}(x)(it)^n = E(e^{it(x+\sqrt{x^2-1})X} e^{it(x-\sqrt{x^2-1})Y})$$

On utilise le développement en série entière de la fonction exponentielle, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} C_n^{\alpha}(x)(it)^n &= E\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(it(x + \sqrt{x^2-1})X\right)^n}{n!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(it(x - \sqrt{x^2-1})Y\right)^n}{n!}\right) \\ &= E\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{((x + \sqrt{x^2-1})X)^k}{k!} \frac{((x - \sqrt{x^2-1})Y)^{n-k}}{(n-k)!}\right)(it)^n\right) \\ &= E\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}((x + \sqrt{x^2-1})X)^k((x - \sqrt{x^2-1})Y)^{n-k}\right)\frac{(it)^n}{n!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} E\left((x + \sqrt{x^2-1})X + (x - \sqrt{x^2-1})Y\right)^n (it)^n\end{aligned}$$

Par identification

$$C_n^{\alpha}(x) = \frac{1}{n!} E\left((x + \sqrt{x^2-1})X + (x - \sqrt{x^2-1})Y\right)^n$$

■

Lemme 3.0.1 *la variable aléatoire L_e suit la loi logistique ayant une densité définie par*

$$f_{L_e}(x) = \frac{\pi}{2} \sec h^2(\pi x)$$

Preuve. Soit L_k une variable aléatoire suit la loi de laplace alors la fonction caracteristique de L_k et donné dans (1.6.1) par

$$\phi_{Lk}(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

alors la fonction caracteristique de $\frac{L_k}{2\pi k}$

$$\begin{aligned}\phi_{\frac{L_k}{2\pi k}}(t) &= \phi_{L_k}\left(\frac{t}{2\pi k}\right)\\ &= \left[1+\left(\frac{t}{2\pi k}\right)^2\right]^{-1}\end{aligned}$$

Soient $L_1, L_2, ..., L_n, ..$ une suit des variables aléatoires i.d.d $\sim L(0,1)$, on peut déduire

$$\begin{aligned}\phi_{L_e}(t) &= \phi_{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{L_k}{2\pi k}}(t)\\ &= \prod_{k=1}^{\infty}\left[1+\left(\frac{t}{2\pi k}\right)^2\right]^{-1}\\ &= \frac{t/2}{t/2\prod_{k=1}^{\infty}\left[1+\left(\frac{t/2}{\pi k}\right)^2\right]}\end{aligned}$$

Finalement, on peut déduire

$$\phi_{L_e}(t) = \frac{t}{2}\sinh^{-1}(t)$$

En regardant à la fonction caracteristique de la v.a L_e, on peut déduire que L_e suit la loi logistique. ■

3.1 La preuve probabiliste d'une relation entre les polynômes généralisé de Bernoulli et ceux d'Euler

H.Srivastava, C.Vignat [16] fournit des preuves probabilistes dans des relations entre les polynômes généralisés de Bernoulli et ceux d'Euler d'ordre α ($\alpha \in \mathbb{C}$) de degré n en x, qui ont été prouvés par H.Srivastava, A.Pintér[19] analytiquement.

D'abord, On définit les polynômes généralisés de Bernoulli et d'Euler par leurs fonctions génératrices.

Définition 3.1.1 *Pour un paramètre α ($\alpha \in \mathbb{C}$), le polynôme généralisé de Bernoulli $B_n^{(\alpha)}(x)$ et le polynome généralisé d'Euler $E_n^{(\alpha)}(x)$ sont définis par*

$$\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{\alpha} e^{xt} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} \qquad (|t| < 2\pi; 1^{\alpha} := 1) \tag{3.1.1}$$

$$\left(\frac{2}{e^t+1}\right)^{\alpha} e^{xt} = \sum_{n=0}^{+\infty} E_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} \qquad (|t| < \pi; 1^{\alpha} := 1) \tag{3.1.2}$$

il est claire que d'aprés les identités (2.6.9), (3.0.1), (3.1.1) et (3.1.2) pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$B_n^1(x) = B_n(x),\ E_n^1(x) = E_n(x)$$
$$B_n^0(x) = E_n^0(x) = x^n$$

Proposition 3.1.1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ les polynômes généralisés de Bernoulli vérifient les identités suivantes*

1)

$$B_n^{(\alpha+\beta)}(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_n^{(\alpha)}(x) B_{n-k}^{(\beta)}(y) \tag{3.1.3}$$

2)

$$B_n^{(\alpha)}(x+1) - B_n^{(\alpha)}(x) = nB_{n-1}^{(\alpha-1)}(x) \tag{3.1.4}$$

3)

$$B_n^{(\alpha)}(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_n^{(\alpha)}(y) x^{n-k} \tag{3.1.5}$$

Preuve. 1) On utilise la relation (3.1.1), en remplaçant α par $\alpha+\beta$ et x par $x+y$, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} B_n^{(\alpha+\beta)}(x+y)\frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{\alpha+\beta} e^{(x+y)t} \\
&= \left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{\alpha} e^{xt} \left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{\beta} e^{yt} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} B_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{+\infty} B_n^{(\beta)}(y)\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{(\alpha)}(x) B_{n-k}^{(\beta)}(y)\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

Par identification, on obtient le résultat.

2) On utilise la relation (3.1.1), on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} B_n^{(\alpha)}(x+1)\frac{t^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} B_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(B_n^{(\alpha)}(x+1) - B_n^{(\alpha)}(x)\right)\frac{t^n}{n!} \\ &= \left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{\alpha} e^{(x+1)t} - \left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{\alpha} e^{xt} \\ &= \left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{\alpha-1} te^{xt} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\, B_n^{(\alpha-1)}(x)\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} B_{n-1}^{(\alpha-1)}(x)\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

d'ou le résultat.

3) On pose $\beta = 0$ et on échange x et y dans (3.1.3), on obtient le résultat. ■

Proposition 3.1.2 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ les polynômes généralisés d'Euler vérifient les identités suivantes*

1)

$$E_n^{(\alpha+\beta)}(x+y) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} E_n^{(\alpha)}(x)E_{n-k}^{(\beta)}(y) \tag{3.1.6}$$

2)

$$E_n^{\alpha}(x+1) + E_n^{(\alpha)}(x) = 2E_{n-1}^{(\alpha-1)}(x) \tag{3.1.7}$$

3)

$$E_n^{(\alpha)}(x+y) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} E_n^{(\alpha)}(y)x^{n-k} \tag{3.1.8}$$

4)

$$E_n^{(\alpha-1)}(x) = \frac{1}{2}\left[E_n^{\alpha}(x) + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} E_k^{\alpha}(x)\right] \tag{3.1.9}$$

5)

$$x^n = \frac{1}{2}\left[E_n(x) + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} E_k(x)\right] \tag{3.1.10}$$

Preuve. 1) On utilise la formule (3.1.2), en remplaçant α par $\alpha+\beta$ et x par $x+y$, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}E_n^{(\alpha+\beta)}(x+y)\frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{2}{e^t+1}\right)^{\alpha+\beta}e^{(x+y)t}\\ &= \left(\frac{2}{e^t+1}\right)^{\alpha}e^{xt}\left(\frac{2}{e^t+1}\right)^{\beta}e^{yt}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}E_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!}\sum_{n=0}^{+\infty}E_n^{(\beta)}(y)\frac{t^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_k^{(\alpha)}(x)E_{n-k}^{(\beta)}(y)\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

Par identification, on obtient le résultat.

2)-En combinant $\sum_{n=0}^{+\infty}E_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}E_n^{(\alpha)}(x+1)\frac{t^n}{n!}$ et en utilisant la formule (3.1.2), on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}E_n^{(\alpha)}(x+1)\frac{t^n}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}E_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(E_n^{(\alpha)}(x+1)+E_n^{(\alpha)}(x)\right)\frac{t^n}{n!}\\ &= \left(\frac{2}{e^t+1}\right)^{\alpha}e^{(x+1)t}+\left(\frac{2}{e^t+1}\right)^{\alpha}e^{xt}\\ &= \left(\frac{2}{e^t+1}\right)^{\alpha-1}2e^{xt}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}2E_n^{(\alpha-1)}(x)\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

d'ou le résultat.

3) On pose $\beta=0$ et on échange x et y dans (3.1.6), on obtient le résultat.

4) la relation (3.1.7) donne

$$E_{n-1}^{(\alpha-1)}(x)=\frac{1}{2}\left[E_n^{(\alpha)}(x)+E_n^{\alpha}(x+1)\right] \tag{3.1.11}$$

On échange x et y, et on pose $y=1$ dans (3.1.8), on trouve

$$E_n^{(\alpha)}(x+1)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_n^{(\alpha)}(x) \tag{3.1.12}$$

Alors les formules (3.1.11) et (3.1.12) donne directement le résultat.

5)-On pose $\alpha=1$ dans (3.1.9), on obtient le résultat. ■

Srivastava et Pintér trouvent l'identité suivante

Théorème 3.1.1 *(H.Srivastava, A.Pintér[19]) Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a l'identité suivante*

$$B_n^{(\alpha)}(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[B_k^{(\alpha)}(y) + \frac{k}{2} B_{k-1}^{(\alpha-1)}(y) \right] E_{n-k}(x) \tag{3.1.13}$$

Preuve. Tout d'abord, en remplaçant de manière appropriée par (3.1.10) dans le côté droit de (3.1.5), on obtient

$$\begin{aligned} B_n^{(\alpha)}(x+y) &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{(\alpha)}(y) \left[E_{n-k}(x) + \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} E_j(x) \right] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{(\alpha)}(y) E_{n-k}(x) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{(\alpha)}(y) \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} E_j(x) \end{aligned}$$

En inversant l'ordre de sommation sur k et sur j, on obtient

$$B_n^{(\alpha)}(x+y) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{(\alpha)}(y) E_{n-k}(x) + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} E_j(x) \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} B_k^{(\alpha)}(y) \tag{3.1.14}$$

En posant $x = 1$ et $n \to n - j$ dans (3.1.5), on trouve

$$B_n^{(\alpha)}(x+y) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{(\alpha)}(y) E_{n-k}(x) + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_{n-j}^{(\alpha)}(y+1) E_j(x)$$

Ou, de manière équivalente

$$B_n^{(\alpha)}(x+y) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[B_k^{(\alpha)}(y) + B_k^{(\alpha)}(y+1) \right] E_{n-k}(x).$$

Finalement le résultat est obtenu grâce à (3.1.4). ■

Maintenant, nous posons une représentation probabiliste pour le polynôme généralisé de Bernoulli par le moment d'ordre n.

Théorème 3.1.2 *Soit $\left\{ L_e^{(k)} \right\}_{1 \le k \le \alpha}$ une suit des variables aléatoires i.d.d suit la loi logistique de paramètre 0 et $\frac{1}{2\pi}$, et $\left\{ L_0^{(k)} \right\}_{1 \le k \le \alpha}$ une suit des variables aléatoires i.d.d suit la loi sécant hyperbolique, on a*

$$B_n^{\alpha}(x) = E\left(x + \sum_{k=1}^{\alpha} \left(iL_e^{(k)} - \frac{1}{2} \right) \right)^n \quad (x \in \mathbb{R}; \alpha \in \mathbb{N}; n \in \mathbb{N}) \tag{3.1.15}$$

$$E_n^{(\alpha)}(x) = E\left(x + \sum_{k=1}^{\alpha} \left(iL_0^{(k)} - \frac{1}{2} \right) \right)^n \quad (x \in \mathbb{R}; \alpha \in \mathbb{N}; n \in \mathbb{N}) \tag{3.1.16}$$

Preuve. La preuve se fait par récurrence, pour $\alpha = 1$ on retrouve (3.0.3), on suppose que la relation est vraie pour n et prouvons qu'elle est vraie pour $n+1$.

On a d'aprés l'identité (3.1.1)

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\alpha+1)}(x)\frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{\alpha+1} e^{xt} \\ &= \left(\frac{t}{e^t-1}\right)\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{\alpha} e^{xt}\end{aligned}$$

les identités (2.5.1) et (3.1.1) donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\alpha+1)}(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{\alpha}(x)\frac{t^n}{n!}$$

On peut trouver d'aprés les relation (2.6.5) et (3.0.3) que

$$\begin{aligned}B_n &= B_n(0) \\ &= E\left(iL_e^{(\alpha+1)} - \frac{1}{2}\right)^n\end{aligned}$$

Telle que $L_e^{(\alpha+1)}$ une variable aléatoire suit la loi logistique de paramètre 0 et $\frac{1}{2\pi}$ puis les variables aléatoires $L_e^{(1)}, L_e^{(2)}, ..., L_e^{(\alpha)}$ sont indépendants, ceci implique que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\alpha+1)}(x)\frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(iL_e^{(\alpha+1)} - \frac{1}{2}\right)^n \frac{t^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} E\left(x + \sum_{k=1}^{\alpha}\left(iL_e^{(k)} - \frac{1}{2}\right)\right)^n \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} E\left(iL_e^{(\alpha+1)} - \frac{1}{2}\right)^k E\left(x + \sum_{k=1}^{\alpha}\left(iL_e^{(k)} - \frac{1}{2}\right)\right)^{n-k} \frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

Puisque $\left\{L_e^{(k)}\right\}_{1\le k\le \alpha+1}$ une suite des variables aléatoires i.d.d, alors on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\alpha+1)}(x)\frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(iL_e^{(\alpha+1)} - \frac{1}{2}\right)^k \left(x + \sum_{k=1}^{\alpha}\left(iL_e^{(k)} - \frac{1}{2}\right)\right)^{n-k}\right) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E\left(x + \sum_{k=1}^{\alpha+1}\left(iL_e^{(k)} - \frac{1}{2}\right)\right)^n \frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

On obtient par identification l'identité (3.1.15)

De manière similaire on peut prouver l'identité (3.1.16) ■

Lemme 3.1.1 *Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, soient $\left\{L_e^{(k)}\right\}_{1\leq k\leq \alpha}, \left\{U_B^{(k)}\right\}_{1\leq k\leq \alpha}$ deux suites des variables aléatoires telle que $L_e^{(k)}$ suit la loi logistique de paramètre 0 et $\frac{1}{2\pi}$ et $U_B^{(k)}$ suit la loi uniforme $[0,1]$ avec $1 \leq k \leq \alpha$, et que les variables aléatoires $L_e^{(1)}, L_e^{(2)}, ...L_e^{(\alpha)}, U_B^{(1)}, U_B^{(2)}..., U_B^{(\alpha)}$ sont indépendants, pour tout fonction entière φ et pour tout $x \in \mathbb{C}$*

$$E\left[\varphi\left(x+\sum_{k=1}^{\alpha}\left(iL_e^{(k)}-\frac{1}{2}\right)+\sum_{k=1}^{\alpha}U_B^{(k)}\right)\right]=\varphi\left(x\right). \tag{3.1.17}$$

en outre, soient $\left\{L_0^{(k)}\right\}_{1\leq k\leq \alpha}, \left\{U_E^{(k)}\right\}_{1\leq k\leq \alpha}$ deux suites des variables aléatoires telle que $L_0^{(k)}$ suit la loi sécante hyperbolique et $U_E^{(k)}$ suit la loi de Bernoulli avec $1 \leq k \leq \alpha$ et que les variables aléatoires $L_0^{(1)}, L_0^{(2)}, ...L_0^{(\alpha)}, U_E^{(1)}, U_E^{(2)}..., U_E^{(\alpha)}$ sont indépendants, pour tout fonction entière φ et pour tout $x \in \mathbb{C}$

$$E\left[\varphi\left(x+\sum_{k=1}^{\alpha}\left(iL_0^{(k)}-\frac{1}{2}\right)+\sum_{k=1}^{\alpha}U_E^{(k)}\right)\right]=\varphi\left(x\right). \tag{3.1.18}$$

Preuve. Puisque φ une fonction entière alors il suffit de vérifier par exemple pour (3.1.17) que

$$E\left[\left(x+\sum_{k=1}^{\alpha}\left(iL_e^{(k)}-\frac{1}{2}\right)+\sum_{k=1}^{\alpha}U_B^{(k)}\right)^n\right]=x^n$$

Ce résultat peut être facilement dérivé en utilisant la fonction génératrice des moments coresponde aux variables aléatoires $\sum_{k=1}^{\alpha}\left(iL_e^{(k)}-\frac{1}{2}\right)$ et $\sum_{k=1}^{\alpha}U_B^{(k)}$.

étant donné que $\left\{L_e^{(k)}\right\}_{1\leq k\leq \alpha}$ est une suit des variables aléatoires i.d.d, alors $\left\{iL_e^{(k)}-\frac{1}{2}\right\}_{1\leq k\leq \alpha}$ est une autre suite des variables aléatoires i.i.d, ceci implique que

$$E\left[\exp\left(t\sum_{k=1}^{\alpha}\left(iL_e^{(k)}-\frac{1}{2}\right)\right)\right]=\prod_{k=1}^{\alpha}G_{iL_e^{(k)}-\frac{1}{2}}\left(t\right)$$

Ou $G_{iL_e^{(k)}-\frac{1}{2}}$ est une fonction génératrice de la v.a $iL_e^{(k)}-\frac{1}{2}$, En utilisant la formule (1.7.2) on obtient

$$E\left[\exp\left(t\sum_{k=1}^{\alpha}\left(iL_e^{(k)}-\frac{1}{2}\right)\right)\right]=\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{\alpha} \tag{3.1.19}$$

De manière similaire, on obtient la fonction génératrice de la variable aléatoire $\sum_{k=1}^{\alpha}U_B^{(k)}$, qui est donné par

$$E\left[\exp\left(t\sum_{k=1}^{\alpha}U_B^{(k)}\right)\right]=\left(\frac{e^t-1}{t}\right)^{\alpha} \tag{3.1.20}$$

Il s'ensuit de (3.1.19) et (3.1.20) que

$$E\left[\exp\left(t\left(\sum_{k=1}^{\alpha}\left(iL_e^{(k)}-\frac{1}{2}\right)+\sum_{k=1}^{\alpha}U_B^{(k)}\right)\right)\right]=1$$

En multipliant les deux côtés par e^{tx}, on obtient

$$E\left[\exp\left(t\left(x+\sum_{k=1}^{\alpha}\left(il_e^{(k)}-\frac{1}{2}\right)+\sum_{k=1}^{\alpha}U_B^{(k)}\right)\right)\right]=e^{tx}$$

On utilise le développement en série entière de la fonction exponentielle, on obtient

$$E\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}\left(x+\sum_{k=1}^{\alpha}\left(iL_e^{(k)}-\frac{1}{2}\right)+\sum_{k=1}^{\alpha}U_B^{(k)}\right)^n\right]=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}x^n$$

on peut déduire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}E\left[\left(x+\sum_{k=1}^{\alpha}\left(iL_e^{(k)}-\frac{1}{2}\right)+\sum_{k=1}^{\alpha}U_B^{(k)}\right)^n\right]=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}x^n$$

Finalement, on obtient le résultat par identification.

De manière similaire on peut prouver (3.1.18). ■

Lemme 3.1.2 *φ et ψ deux fonctions entières, si pour tout $x\in\mathbb{C}$*

$$E\left[\varphi\left(x+Z\right)\right]=E\left[\left(\psi\left(x+Z\right)\right)\right]$$

avec

$$Z=\sum_{k=1}^{\alpha}\left(iL_e^{(k)}-\frac{1}{2}\right),\sum_{k=1}^{\alpha}\left(iL_0^{(k)}-\frac{1}{2}\right),\sum_{k=1}^{\alpha}U_B^{(k)},\sum_{k=1}^{\alpha}U_E^{(k)}$$

alors

$$\varphi\left(x\right)=\psi\left(x\right)$$

Preuve. Par exemple, si $Z=\sum_{k=1}^{\alpha}U_B^{(k)}$, Le résultat qu'est affirmé par cet lemme est obtenu par le changement suivant

$$x\rightarrow x+\sum_{k=1}^{\alpha}\left(iL_e^{(k)}-\frac{1}{2}\right)$$

en utilisant lemme (3.1.1) , on obtient

$$\begin{cases} E\left[\varphi\left(x+\sum_{k=1}^{\alpha}\left(iL_e^{(k)}-\frac{1}{2}\right)+\sum_{k=1}^{\alpha}U_B^{(k)}\right)\right]=\varphi(x) \\ E\left[\psi\left(x+\sum_{k=1}^{\alpha}\left(iL_e^{(k)}-\frac{1}{2}\right)+\sum_{k=1}^{\alpha}U_B^{(k)}\right)\right]=\psi(x) \end{cases}$$

Alors notre preuve de ce lemme est achevé. ■

H.Srivastava, C.Vignat [16] découvre une autre approche pour prouver l'identité (3.1.1) consist des outiles probabilistes.

3.1.1 La preuve probabiliste du Théorème (3.1.1)

En supposant d'abord que $\alpha \in \mathbb{N}$, on remplce les variables x et y dans (3.1.13) par

$$x+U_E \qquad \text{et} \qquad y+\sum_{k=1}^{\alpha}U_B^{(k)}$$

respectivement. En utilisant l'identité (3.1.15) l'espérance mathématique du côté gauche de (3.1.13) est

$$\begin{aligned} E\left(B_n^{(\alpha)}(x+U_E+y+\sum_{k=1}^{\alpha}U_B^{(k)})\right) &= E\left(x+y+U_E\right)^n \\ &= \frac{1}{2}\left(x+y+1\right)^n+\frac{1}{2}\left(x+y\right)^n \end{aligned} \tag{3.1.21}$$

La même opération est effectuée pour le côté droit de (3.1.13), en appliquant lemme (3.1.1) et en utilisant l'identité (3.1.15) pour le première terme, on obtient

$$\begin{aligned} & E\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k^{(\alpha)}\left(y+\sum_{k=1}^{\alpha}U_B^{(k)}\right)E_{n-k}(x+U_E)\right] \\ &= E\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(y+\sum_{k=1}^{\alpha}\left(iL_e^{(k)}-\frac{1}{2}\right)+\sum_{k=1}^{\alpha}U_B^{(k)}\right)^k x^{n-k}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^k x^{n-k} \\ &= (x+y)^n \end{aligned} \tag{3.1.22}$$

En appliquant aussi lemme (3.1.1) et en utilisant l'identité (3.1.15) pour le second terme, on obtient

$$\begin{aligned}
&E\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{2}B_{k-1}^{(\alpha-1)}(y+\sum_{k=1}^{\alpha}U_B^{(k)})E_{n-k}(x+U_E)\right]\\
&=\frac{1}{2}\frac{d}{dy}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(y+\sum_{k=1}^{\alpha-1}\left(iL_e^{(k)}-\frac{1}{2}\right)+\sum_{k=1}^{\alpha}U_B^{(k)}\right)^k x^{n-k}\\
&=\frac{1}{2}\frac{d}{dy}\left\{E\left[\left(x+y+U_B^{(\alpha)}\right)^n\right]\right\}\\
&=\frac{1}{2}\frac{d}{dy}\left\{\frac{1}{n+1}\left[(x+y+1)^{(n+1)}-(x+y)^{(n+1)}\right]\right\}\\
&=\frac{1}{2}\left[(x+y+1)^n-(x+y)^n\right] \qquad (3.1.23)
\end{aligned}$$

En combinant (3.1.22) et (3.1.23), on obtient (3.1.21), par l'application de l'assertion du lemme (3.1.2) la preuve sera achevé.

Conclusion et perspectives

Le sujet de notre travail a été consacré a l'étude des nombres et polynômes de Bernoulli est ses généralisations par deux approches, classique et probabiliste.

Tout au long de ce mémoire, nous avons énonces dans le chapitre un quelques résultats sur les lois de probabilités, les nombres de Stirling, les séries formelle,..

Dans le deuxième chapitre, nous avons donné la définition des nombres et polynômes de Bernoulli, ainsi des propriétés élémentaires.

Dans le chapitre trois, nous avons présenté de nombreux résultats en détaillons les démonstrations par les deux approches, analytique et probabiliste.

Références

Bibliographie

[1] R.L.Graham, D.E.Knuth, et O.patashnik.Mathématiques concrètes : Fondation pour l'informatique. International thonson publishing franch, Second edition, 1994.

[2] T.Arakawa, T.Ibukiyama et M.Kaneko.Bernoulli and zéta function . Springer, Japan, 2014.

[3] L.Contet. Advanced combinatorics. D.Reidel publishing company, Dordrecht, Holland, USA, 1970.

[4] S.Lipschutz. Probabilites, Cours et Problèmes. McGraw-Hill Inc. Neuvième tirage, New York, 1973.

[5] T.M.Apostol. Introduction to Analytic Number Theory. Springer-Verlag, New York, 1976.

[6] S.Kotz, T.J.Kozubowski, K.Podgórski. The laplace distribution and generalizations, Springer Science+Business, New York, 2001.

[7] Y.Dodge. Statistique, Dictionnaire encyclopédique,Springer-verlag, France, 2007.

[8] S.Balac, L.Chupin. Analyse et algèbre, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2008.

[9] A.Warusfel, C.Deschamps. Mathématiques 2^{eme} année, cours et exercices corrigés, Dunod, Paris, 2001.

[10] Laura Elizabeth S. Coen. Sums of powers and the Bernoulli Numbers, Thesis Master of Arts in Mathematics in The Graduate School, Eastern Illinois University Charleston, Illinois, 1996.

[11] Z.I.Borevich, I.R.Shafarevich. Number Theory, Academic press Inc, 1996.

[12] V.Prasolov. Plynomials. Springer. 2004.

[13] H.Cohen. Number Theory. Volume 2 : Analytic and Modern Tools. Springer, 2007.

[14] R.J.Meier. Bernoulli number and polynomials.

[15] P.Sun. Moment representation of Bernoulli polynomial,Euler polynomial and Gegenbauer polynomials. Statistics & Probability Letters 77 (2007) 748–751.

[16] H. M. Srivastava, Christophe Vignat. Probabilistic Proofs of Some Relationships Between the Bernoulli and Euler Polynomials, European Journal of Pure and Applied Mathematics Vol. 5, No. 2, 2012, 97-107.

[17] Robert John Meier. Bernoulli Numbers and Polynomials Master of Science, Department of Mathematics, Kansas State University, Manhattan, Kansas, 1964.

[18] E.Lukacs. Characteristic Functions. Griffin, Second Edition, 1970.

[19] H. M. Srivastava, A. Pinter. Remarks on Some Relationships Between the Bernoulli and Euler Polynomials. Applied Mathematics Letters 17 (2004) 375-380.

[20] G.E.Andrews, R.Askey And R. Roy, special Functions. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 71, Cambridge University Press, 1999.

[21] P.Bogaert. Probabilités pour scientifiques et ingénieurs, Introduction au calcul des probabilités. de boeck,2006.

[22] M.J. Fischer. Generalized Hyperbolic Secant Distributions: With Applications to Finance.Springer, 2014.