**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

**Université Yahia Farès de Médéa**

**Faculté des Sciences**

**Département de Mathématiques et Informatique**



# Projet de fin d'étude

Présenté en vue de l'obtention du

Diplôme de Master en Mathématiques

## Option : Recherche Opérationnelle

**Thème**

# Contributions à la coloration de packing dans les graphes

Par

**KHEDACHI Hayat**

*Soutenu publiquement le 18/06/2026, devant le jury composé de :*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Azeddine | BENKACI | MCB | U.Y.F-Médéa | Président |
| Rachid | LEMDANI | MCA | U.Y.F-Médéa | Directeur de mémoire |
| Noureddine | IKHLEF ESCHOUF | Professeur | U.Y.F-Médéa | Examinateur |
| Abdelkader | SAHRAOUI | MCB | U.Y.F-Médéa | Examinateur |

# Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude de la coloration de packing des graphes. Une coloration de packing d'un graphe connexe $G$ est une attribution de couleurs à ses sommets telle que deux sommets de même couleur $i$ soient situés à une distance strictement supérieure à $i$. Le plus petit nombre de couleurs permettant une telle coloration est appelé le **nombre chromatique de packing** de $G$, noté $\chi_p(G)$.

L'objectif principal de ce travail est la détermination de valeurs exactes du nombre chromatique de packing pour plusieurs familles de graphes obtenues par la combinaison de la construction de Mycielski et de l'opération de puissance d'un graphe. Dans un premier temps, nous étudions le nombre chromatique de packing des graphes $\mu(P_n^3)$ et $\mu(C_n^3)$, où $P_n$ et $C_n$ désignent respectivement la chaîne et le cycle d'ordre $n$. Nous déterminons ensuite les valeurs exactes du nombre chromatique de packing des graphes $(\mu(P_n))^3$ et $(\mu(C_n))^3$. Par ailleurs, nous nous intéressons aux deuxième et troisième puissances du graphe de Mycielski de la troisième puissance d'une chaîne et d'un cycle. Plus précisément, nous établissons les valeurs exactes du nombre chromatique de packing des graphes $(\mu(P_n^3))^2$, $(\mu(C_n^3))^2$, $(\mu(P_n^3))^3$ et $(\mu(C_n^3))^3$.

Les résultats obtenus mettent en évidence l'influence de la construction de **Mycielski** et des **puissances** de graphes sur le comportement du nombre chromatique de packing et contribuent ainsi à une meilleure compréhension de cet invariant sur ces familles de graphes.

**Mots clés:** Nombre chromatique de packing, diamètre d'un graphe, graphe de puissance, graphe de Mycielski.

# Abstract

This Master's thesis is devoted to the study of packing coloring of graphs. A packing coloring of a connected graph $G$ is an assignment of colors to its vertices such that any two vertices receiving the same color $i$ are at a distance greater than $i$. The smallest number of colors required for such a coloring is called the **packing chromatic number** of $G$, denoted by $\chi_p(G)$.

The main objective of this work is to determine exact values of the packing chromatic number for several families of graphs obtained by combining the Mycielski construction and the power graph operation. First, we study the packing chromatic number of the graphs $\mu(P_n^3)$ and $\mu(C_n^3)$, where $P_n$ and $C_n$ denote the path and the cycle of order $n$, respectively. We then determine the exact values of the packing chromatic number of the graphs $(\mu(P_n))^3$ and $(\mu(C_n))^3$.

Furthermore, we investigate the second and third powers of the Mycielski graph of the third power of a path and a cycle. More precisely, we establish the exact values of the packing chromatic number of the graphs $(\mu(P_n^3))^2$, $(\mu(C_n^3))^2$, $(\mu(P_n^3))^3$ and $(\mu(C_n^3))^3$.

The obtained results highlight the influence of the **Mycielski** construction and graph **powers** on the behavior of the packing chromatic number, and thus contribute to a better understanding of this invariant for these families of graphs.

**Key words**: Packing chromatic number, diameter of a graph, power graph, Myceilski graph.

# ملخص


تركز هذا المذكرة على دراسة تلوين التعبئة (Packing coloring) في الرسوم البيانية. ويُعرّف تلوين الحزم للرسم البياني المتصل G على أنه إسناد ألوان إلى رؤوسه بحيث يكون كل رأسيْن يحملان نفس اللون $i$، على مسافة أكبر تمامًا من $i$. ويُسمّى أصغر عدد من الألوان التي تحقق هذا الشرط بـ **العدد اللوني للتعبئة** للرسم البياني G، ويُرمز له بـ $\chi_p(\mathrm{G})$. يهدف هذا العمل إلى تحديد القيم الدقيقة للعدد اللوني للتعبئة لعدة عائلات من الرسوم البيانية الناتجة عن الجمع بين بناء مايسلسكي (Mycielski construction) وعملية رفع قوة الرسم البياني. في البداية، ندرس العدد اللوني للتعبئة للرسوم البيانية $\mu(P_n^3)$ و $\mu(C_n^3)$، حيث يرمز $P_n$ إلى المسار و $C_n$ إلى الدورة من الرتبة $n$. ثم نقوم بتحديد القيم الدقيقة للعدد اللوني للتعبئة للرسوم البيانية $\left(\mu(P_\mathrm{n})\right)^3$ و $\left(\mu(C_\mathrm{n})\right)^3$. كما نهتم بالقوى الثانية والثالثة للرسم البياني الناتج عن تطبيق بناء مايسلسكي على القوة الثالثة للمسار والدورة. وبشكل أدق، نحدد القيم الدقيقة للعدد اللوني للتعبئة للرسوم البيانية $\left(\mu(P_n^3)\right)^2$ و $\left(\mu(C_n^3)\right)^2$ ، $\left(\mu(P_n^3)\right)^3$ و $\left(\mu(C_n^3)\right)^3$.

تُبرز النتائج المتحصل عليها تأثير بناء مايسلسكي وقوى الرسوم البيانية على سلوك العدد اللوني للتعبئة، وتساهم في تعميق فهم هذا الثابت على هذه العائلات من الرسوم البيانية.



**الكلمات المفتاحية :** عدد اللوني للتعبئة، قطر الرسم البياني، الرسم البياني للقوة، بناء مايسلسكي.

# Remerciements

Avant tout, je remercie **Allah**, le Tout-Puissant, de m'avoir accordé la force, le courage et la patience nécessaires pour mener à bien ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur **Rachid LEMDANI**, mon directeur de mémoire, pour son encadrement précieux, ses conseils avisés, sa disponibilité constante et son soutien tout au long de la réalisation de ce mémoire. Je le remercie sincèrement pour sa patience, sa rigueur scientifique ainsi que pour la confiance qu'il m'a accordée.

J'adresse également mes sincères remerciements à Monsieur **Azeddine BENKACI** pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Mes vifs remerciements s'adressent également aux membres du jury, Monsieur **Noureddine IKHLEF-ESCHOUF** et Monsieur **Abdelkader SAHRAOUI**, pour avoir accepté d'examiner ce travail et pour l'intérêt qu'ils lui portent.

Je tiens aussi à remercier chaleureusement ma famille pour son soutien indéfectible, ses encouragements permanents et sa présence à chaque étape de mon parcours.

Mes remerciements vont également à tous mes enseignants qui ont contribué à ma formation, ainsi qu'à mes amis pour leur aide, leur soutien et leurs encouragements.

Enfin, j'adresse mes sincères remerciements à toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à l'aboutissement de ce travail.

# Dédicace

À **mes très chers parents**,

Les sacrifices que vous avez consentis pour ma réussite m'ont permis d'atteindre ce jour si important. Les mots me manquent pour exprimer toute la reconnaissance, la fierté et le profond amour que je vous porte.

Veuillez trouver dans ce travail le témoignage de mon affection, de ma gratitude et de mon immense respect.

Qu'**Allah** vous accorde une longue vie, une bonne santé et vous protège de tout mal.

À mes chères sœurs, **Samah et Zahra**, ainsi qu'à mon cher frère **Ahmed**,

J'espère être à la hauteur de vos attentes. Que ce modeste travail soit l'expression de mon affection sincère et de ma profonde reconnaissance.

À ma chère compagne, **Ilhem**,

Pour son soutien moral, sa patience, ses encouragements constants et sa présence à mes côtés tout au long de ce parcours. Je lui adresse toute ma gratitude et mon affection.

À toute ma famille,

**KHEDACHI** et **GHERNAOUT**,

Sans exception, pour leur soutien, leurs encouragements et leur confiance.

À tous mes amis et à toutes les personnes qui m'ont aidé, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.

À vous tous, je dédie ce mémoire avec respect, reconnaissance et affection.

# Table des matières

**Résumé** II

**Abstract** III

ملخص IV

**Table des figures** X

**Introduction** XII

**1 Notions fondamentales sur la théorie des graphes** **1**

1.1 Concepts fondamentaux . . . . . 1

1.1.1 Graphe et sa présentation . . . . . 1

1.1.2 Graphe non orienté . . . . . 2

1.1.3 Graphe simple . . . . . 2

1.1.4 Multigraphe . . . . . 2

1.1.5 Voisinage, degré d'un sommet . . . . . 3

1.1.6 Distance, excentricité et diamètre . . . . . 4

1.1.7 Chaîne et Cycle . . . . . 4

1.1.8 Quelques graphes particuliers . . . . . 5

1.1.9 La couronne . . . . . 14

1.1.10 La couronne voisinage de deux graphes . . . . . 15

1.1.11 Joint de deux graphes . . . . . 16

1.1.12 Graphe puissance . . . . . 16

1.1.13 Graphe de Mycielski . . . . . 17
1.1.14 Invariants de graphes . . . . . 17
1.2 La coloration dans les graphes . . . . . 19
1.2.1 Coloration des sommets . . . . . 19
1.2.2 Le nombre chromatique . . . . . 20
1.2.3 Bornes sur le nombre chromatique . . . . . 20

**2 Quelques résultats obtenus sur le nombre de la coloration de packing 22**
2.1 Motivation et définition du problème de la coloration de packing . . . . . 22
2.1.1 i-packing . . . . . 23
2.1.2 Coloration de packing de certains graphes particuliers . . . . . 23
2.1.3 Graphes de petit nombre chromatique de packing . . . . . 25
2.1.4 Coloration de packing pour les arbres . . . . . 25
2.1.5 Coloration de packing de la couronne d'un graphe . . . . . 27
2.1.6 Coloration de packing du graphe puissance d'un cycle . . . . . 29
2.1.7 Coloration de packing du graphe de Mycielski . . . . . 29
2.1.8 Coloration de packing du graphe puissance du graphe de Mycielski . . 31

**3 Coloration de packing de quelques familles de graphes 34**
3.1 Coloration de packing de Mycielski de la troisième puissance d'une chaîne . . 34
3.2 Coloration de packing de Mycielski de la troisième puissance d'un cycle . . . 40
3.3 Coloration de packing de la troisième puissance de Mycielski d'une chaîne . . 44
3.4 Coloration de packing de la troisième puissance de Mycielski d'un cycle . . . 45
3.5 Coloration de packing de la deuxième puissance de Mycielski de la troisième puissance d'une chaîne . . . . . 47
3.6 Coloration de packing de la deuxième puissance de Mycielski de la troisième puissance d'un cycle . . . . . 49
3.7 Coloration de packing de la troisième puissance de Mycielski de la troisième puissance d'une chaîne . . . . . 51
3.8 Coloration de packing de la troisième puissance de Mycielski de la troisième

puissance d'un cycle . . . . . 53

**Conclusion et perspectives** **56**

# Table des figures


1.1.1 Un graphe simple ..... 2
1.1.2 Un multigraphe ..... 3
1.1.3 Une chaîne $C_5$ et cycle $C_6$ ..... 5
1.1.4 Un graphe, un sous graphe et un sous graphe partiel ..... 6
1.1.5 Un graphe complet $K_5$ ..... 7
1.1.6 Un cycle $C_6$ et son complémentaire ..... 7
1.1.7 Un graphe $G$, $2-$régulier ..... 8
1.1.8 Un graphe biparti ..... 9
1.1.9 Un graphe biparti complet $K_{2,3}$ ..... 10
1.1.10 Un graphe connexe ..... 11
1.1.11 Un sommet d'articulation ..... 11
1.1.12 Un arbre $T$ ..... 12
1.1.13 Une forêt $T$ ..... 13
1.1.14 Une étoile $K_{1,5}$ ..... 13
1.1.15 Une étoile double $S_{4,3}$ ..... 14
1.1.16 La subdivision d'un graphe $G$ ..... 14
1.1.17 La couronne de $C_4$ ..... 15
1.1.18 La couronne voisinnage $C_3 \bigstar P_2$ ..... 15
1.1.19 Le graphe joint de $G_1$ et $G_2$ ..... 16
1.1.20 Un geaphe puissonce $P_{13}^2$ ..... 16

1.1.21 Graphe de Mycielski de $K_3$ ..... 17

1.1.22 Une clique engendrée par $\{A, F, D, E\}$ ..... 18

1.1.23 Une recouvrement de $G$ ..... 19

2.1.1 Un graphe $G$ et un $T-$ajout du sommet $v$ ..... 25

2.1.2 Les plus petits arbres avec $\chi_p(T) = 4$ ..... 26

2.1.3 La couronne de $P_5$ ..... 27

2.1.4 Coloration de packing de $Cr(P_{11}), Cr(P_2)$ et $Cr(P_5)$ ..... 28

2.1.5 La couronne de $C_n$ ..... 28

2.1.6 Coloration de packing de $C_7^2$ ..... 29

2.1.7 Coloration de packing de $\mu(P_7)$ ..... 30

2.1.8 Coloration de packing de $\mu(C_7)$ ..... 31

2.1.9 Coloration de packing de $(\mu(P_6))^2$ ..... 32

2.1.10 Coloration de packing de $(\mu(C_8))^2$ ..... 33

3.1.1 Coloration de packing du graphe $\mu(P_{11}^3)$ ..... 37

3.1.2 Coloration de packing du graphe $\mu(P_{12}^3)$ ..... 38

3.1.3 Coloration de packing du graphe $\mu(P_{13}^3)$ ..... 40

3.2.1 Coloration de packing de $\mu\,(C_{22}^3)$ ..... 43

3.3.1 Coloration de packing de $(\mu(P_{11}))^3$ ..... 45

3.4.1 Coloration de packing de $(\mu(C_{11}))^3$ ..... 47

3.5.1 Coloration de packing de $(\mu(P_8^3))^2$ ..... 49

3.6.1 Coloration de packing de $(\mu(C_{15}^3))^2$ ..... 51

3.7.1 Coloration de packing de $(\mu(P_{11}^3))^3$ ..... 53

3.8.1 Coloration de packing de $(\mu(C_{22}^3))^3$ ..... 55

# Introduction

La théorie des graphes permet de modéliser de nombreux problèmes pratiques issus de divers domaines, notamment en technologie, tels que les réseaux informatiques, les réseaux routiers, le transport de marchandises, l'ordonnancement, l'électronique, la mécanique des solides ainsi que les réseaux de télécommunication.

Parmi les problèmes fondateurs ayant inspiré le développement de la théorie des graphes figure le problème des quatre couleurs. Celui-ci consiste à répondre à la question suivante : suffit-il de quatre couleurs pour colorer n'importe quelle carte géographique de sorte que deux régions adjacentes reçoivent des couleurs différentes? Mathématiquement, ce problème équivaut à se demander si l'on peut colorer les sommets d'un graphe planaire avec quatre couleurs de telle sorte que deux sommets adjacents aient des couleurs distinctes. Formulé sous forme de conjecture par F. Guthrie en 1852, ce problème est devenu l'un des plus célèbres en théorie des graphes. Sa résolution a été obtenue en 1977 par **Appel**, **Haken** et **Koch**, à l'aide de calculs assistés par ordinateur nécessitant plus de 1200 heures de calcul sur plusieurs machines. Une preuve plus simplifiée, mais toujours assistée par ordinateur, a ensuite été donnée par Robertson, Sanders, Seymour et Thomas. Malgré ces résultats, ce problème continue d'inspirer de nombreux travaux visant à obtenir une démonstration purement théorique.

De nos jours, plusieurs types de colorations de graphes ont été introduits dans la littérature. Celles-ci dépendent de la coloration des différents éléments du graphe (sommets, arêtes, faces, etc.), sous diverses contraintes supplémentaires. Parmi les ouvrages de référence, on peut citer celui de Jensen et Toft, Graph Coloring Problems, qui rassemble de nombreux résultats ainsi que plusieurs problèmes ouverts dans ce domaine.

En 2003, **Goddard**, **Hedetniemi**, **Harris** et **Rall** ont introduit la notion de coloration de packing des graphes. Cette coloration consiste à attribuer aux sommets d'un graphe $G$ un nombre minimal de couleurs, appelé nombre chromatique de packing et est noté $\chi_p(G)$, de telle sorte que si deux sommets $u$ et $v$ reçoivent la même couleur $\pi(u) = \pi(v)$, alors la distance dans le graphe vérifie $d_G(u, v) > \pi(u)$, où $\pi$ est une fonction de $V(G)$ dans l'ensemble des entiers naturels $\{1, 2, ...\}$. L'étude de cet invariant a suscité un intérêt croissant au cours des dernières années en raison de ses nombreuses applications, notamment dans les problèmes d'allocation de fréquences dans les réseaux de télécommunication. Plusieurs auteurs ont obtenu des résultats concernant le nombre chromatique de packing de différentes familles de graphes telles que les chemins, les cycles, les arbres, les graphes cordaux, les graphes d'intervalles ainsi que diverses classes de graphes obtenues à partir d'opérations sur les graphes. Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude du nombre chromatique de packing de graphes obtenus par différentes opérations classiques de la théorie des graphes. L'objectif principal est de déterminer des valeurs exactes de cet invariant pour plusieurs familles de graphes et d'analyser l'effet de ces opérations sur le comportement de la coloration de packing. Les résultats obtenus contribuent à une meilleure compréhension des relations entre la structure des graphes étudiés et leur nombre chromatique de packing.

Après une introduction générale, ce mémoire est organisé en trois chapitres.

Dans le **premier chapitre**, nous présentons les notions fondamentales de la théorie des graphes qui seront utilisées dans la suite du mémoire. Nous rappelons notamment les définitions et résultats de base relatifs aux graphes, aux distances, aux puissances de graphes et à la coloration classique (propre).

Le **deuxième chapitre** est consacré à la coloration de packing des graphes. Nous y présentons les définitions, notations et principaux résultats connus dans la littérature, notamment ceux rapportés dans [1, 3, 13, 14, 15, 16, 18, 19].

Dans le troisième chapitre, qui constitue la partie principale de ce travail, nous établissons les valeurs exactes du nombre chromatique de packing de plusieurs classes de graphes construites à partir des puissances de chemins et de cycles ainsi que de la construction de Mycielski. En particulier, nous déterminons les nombres chromatiques de packing des graphes $\mu(P_n^3)$, $\mu(C_n^3)$, $(\mu(P_n))^3$, $(\mu(C_n))^3$, $(\mu(P_n^3))^2$, $(\mu(C_n^3))^2$, $(\mu(P_n^3))^3$ et $(\mu(C_n^3))^3$. Toutes

les démonstrations sont détaillées et accompagnées de figures illustratives réalisées à l'aide du logiciel **GeoGebra**.

Enfin, nous terminons ce mémoire par une conclusion générale dans laquelle nous résumons les principaux résultats obtenus et proposons quelques perspectives de recherche.

# Chapitre 1

# Notions fondamentales sur la théorie des graphes

Dans ce chapitre, nous présentons les notions fondamentales de la théorie des graphes ainsi que les définitions essentielles qui seront utilisées tout au long de ce mémoire. Nous introduisons également certains types de graphes et mettons en évidence leurs principales propriétés. Enfin, nous rappelons quelques paramètres de coloration propre les plus importants étudiés dans la littérature.

## 1.1 Concepts fondamentaux

### 1.1.1 Graphe et sa présentation

**Définition 1.1.1** *Soit un graphe $G = (V, E)$, défini par deux ensembles finis non vide, un ensemble de sommets $V$ et un ensemble d'arêtes $E$. Le cardinal de $V$ est appelé l'ordre de $G$, noté par $n(G)$ et le cardinal de $E$ est appelé la taille de $G$, noté par $m(G)$. Une arête $e \in E$ est une paire de sommets $(u, v)$, noté par $e = uv$, où $u$ et $v$ sont les extrémités de $e$. Dans ce cas, on dit que $u$ et $v$ sont adjacents et que $e$ est incidente à $u$ et $v$. Les graphes tiennent leur nom du fait qu'on peut les représenter graphiquement. A chaque sommet de $G$, on associe un point distinct du plan, et l'on relie par une courbe simple les points correspondant aux extrémités de chaque arête. Une boucle est une arête dont les deux extrémités sont confondues.*

### 1.1.2 Graphe non orienté

**Définition 1.1.2** *Un graphe non orienté peut être considéré comme un graphe orienté symétrique. Si un arc relie le sommet $u$ au sommet $v$, alors un autre arc relie le sommet $v$ au sommet $u$. Dans ce cas, on ne représente qu'un seul trait entre $u$ et $v$, appelé une arête.*

### 1.1.3 Graphe simple

**Définition 1.1.3** *Un graphe $G = (V, E)$ est dit simple s'il ne possède ni boucles ni arêtes multiples, c'est-à-dire qu'il n'existe pas deux arêtes distinctes joignant la même paire de sommets. La Figure* 1.1.1 *illustre un exemple de graphe simple.*

*Considérons le graphe simple $G = (V, E)$, où $V = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ et*

$E = \{AB, AG, BG, AF, FD, GD, EC, EG, CD\}$.

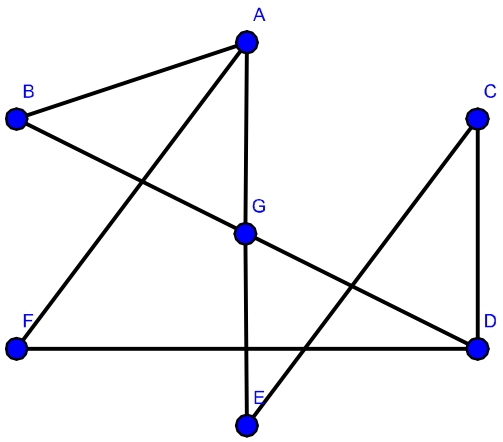



Figure 1.1.1. Un graphe simple

### 1.1.4 Multigraphe

**Définition 1.1.4** *Un multigraphe $G = (V, E)$ est un graphe dans lequel il peut exister plusieurs arêtes entre une paire de sommets. La Figure* 1.1.2 *illustre un multigraphe.*

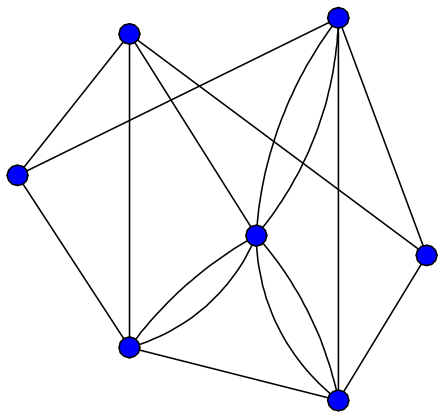


Figure 1.1.2. Un multigraphe

### 1.1.5 Voisinage, degré d'un sommet

**Définition 1.1.5** *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Pour un sommet $v$ de $G$, le voisinage ouvert de $v$ est*

$$N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}.$$

*Le voisinage fermé de $v$ est défini par*

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}.$$

*Pour un sous-ensemble $S \subseteq V(G)$, le voisinage ouvert de $S$ est*

$$N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G(v).$$

*le voisinage fermé de $S$ est*

$$N_G[S] = \cup_{v \in S} N_G[S].$$

*Le degré d'un sommet est la taille de son voisinage. Soit $v \in V(G)$, le degré de $v$ est noté par*

$$d_G(v) = |N_G(v)|.$$

*Le degré d'un graphe est le degré maximum de tous ses sommets, noté par*

$$\Delta(G) = \max\{d_G(v) : v \in V(G)\}.$$

*Le degré minimum d'un graphe est le degré minimum de tous ses sommets, noté par*

$$\delta(G) = \min\{d_G(v) : v \in V(G)\}.$$

*Par exemple pour le graphe $G$ de la Figure* 1.1.1*, le voisinage ouvert du sommet $A$ est $N_G(A) = \{B, G, F\}$ et son voisinage fermé est $N_G[A] = \{A, B, G, F\}$. Le graphe $G$ n'a pas de sommets isolés. Le degré minimum du $G$ est donc $\delta(G) = 2$ et le degré maximum est $\Delta(G) = 4$.*

### 1.1.6 Distance, excentricité et diamètre

**Définition 1.1.6** *Pour deux sommets $u$ et $v$ d'un graphe $G$ , on appelle distance entre $u$ et $v$, notée $d(u, v)$, la longueur de la plus courte chaîne joignante $u$ et $v$.*

*L'excentricité d'un sommet $v$ dans $G$ est: $exc(v) = \max\{d(v, w) : w \in V\}$. Un sommet de $G$ ayant une excentricité minimum est appelée un centre.*

*Le diamètre de $G$, noté $diam\ (G)$, est égal $\max\{exc(v) : v \in V\}$.*

*Par exemple pour le graphe $G(V, E)$ de la Figure* 1.1.1*, $d(A, C) = 3$, $exc(A) = 3$ et $diam(G) = 3$.*

### 1.1.7 Chaîne et Cycle

**Définition 1.1.7** *Une chaîne reliant deux sommets $x$ et $y$ dans un graphe $G$ est une suite alternée de sommets et d'arêtes telle que la première arête de la suite soit incidente à $x$, la dernière arête incidente à $y$, et que chaque arête intermédiaire soit adjacente à la précédente par l'une de ses extrémités.*

**Définition 1.1.8** *Une chaîne est dite simple si la suite qui la constitue ne contient pas de répétition d'arêtes, c'est-à-dire qu'aucune arête n'est parcourue plus d'une fois.*

*Une chaîne est dite élémentaire si la suite qui la constitue ne passe pas par le même sommet plus d'une fois, c'est-à-dire qu'aucun sommet n'y est répété.*

*On appelle cycle $C_n$ dans un graphe $G$ une chaîne fermée, c'est-à-dire une chaîne dont les sommets initial et terminal coïncident.*

*Un cycle simple est une chaîne simple qui se referme, c'est-à-dire une chaîne fermée ne contenant aucune répétition d'arêtes.*

*Un cycle élémentaire est une chaîne élémentaire qui se referme, c'est-à-dire une chaîne fermée ne contenant aucune répétition de sommets, sauf pour le sommet initial qui coïncide avec le sommet final.*

*Une roue, notée $W_n$, est un graphe formé d'un cycle $C_{n-1}$ avec un sommet supplémentaire connecté à tous les sommets du cycle.*

*La Figure* 1.1.3 *illustre une chaîne $P_5$ et un cycle $C_6$ .*

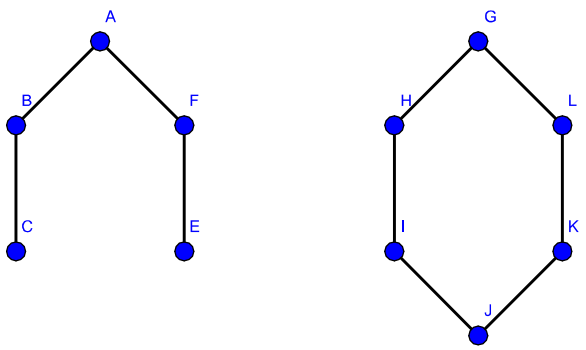



*Figure* 1.1.3. *Une chaîne $P_5$ et un cycle $C_6$*

### 1.1.8 Quelques graphes particuliers

#### Sous-graphes et graphes partiels

**Définition 1.1.9** *Soit $G = (V, E)$ un graphe avec $V$ sommets et $E$ arêtes.*

• *Le sous-graphe induit (ou engendré) par un ensemble de sommets $A \subseteq V$, est le graphe dont l'ensemble des sommets est $A$ et dont l'ensemble des arêtes est constitué de toutes les arêtes de $G$ ayant leurs deux extrémités dans $A$. Il est noté $G[A] = (A, \{xy : xy \in E \text{ et } \{x, y\} \subset A\})$.*

• Un graphe $H = (V_H, E_H)$ est un sous-graphe d'un graphe $G = (V(H), E(H))$ si $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$, chaque arête de $E(H)$ ayant ses extrémités dans $V(H)$. Un sous-graphe $H$ de $G$ est dit induit lorsque $E(H)$ contient toutes les arêtes de $G$ dont les deux extrémités appartiennent à $V(H)$, c'est-à-dire $E = \{\{u, v\} \in E, \{u, v\} \in V_H\}$. Ainsi, pour définir un sous-graphe induit de $G$, il suffit de choisir un sous-ensemble $A$ de $G$. Le sous-graphe induit correspondant est noté $G[A]$ ou $< A >$. On dit également que l'ensemble $A \subseteq V(G)$ engendre (ou induit) le sous-graphe $G[A]$.

• *Le graphe partiel de* $G$ défini par un ensemble d'arêtes $W \subseteq E(G)$ est le graphe ayant le même ensemble de sommets que $G$ et pour ensemble d'arêtes $W$. Il est noté $G[W] = (V(G), W)$. La figure 1.1.4 illustre un sous-graphe et un sous-graphe partiel.

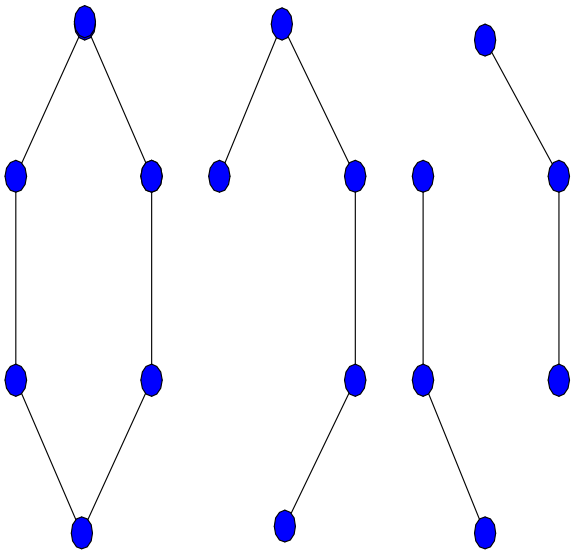


Figure 1.1.4. Un graphe, un sous-graphe et un sous graphe partiel

### Graphe complet

**Définition 1.1.10** *Un graphe complet est un graphe simple dans lequel toute paire de sommets distincts est reliée par une arête. Le graphe complet d'ordre* $n$ *est noté* $K_n$. *Chaque sommet de* $K_n$ *est adjacent à tous les autres sommets. Il est donc de degré* $n-1$. *La Figure* 1.1.5 *illustre un graphe complet* $K_5$.

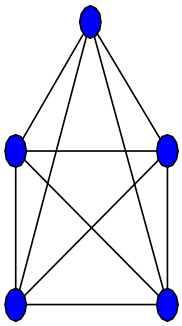


Figure 1.1.5. Un graphe complet $K_5$

### Graphe complémentaire

**Définition 1.1.11** *Le graphe complémentaire d'un graphe simple, noté* $\overline{G} = (V, \overline{E})$*, défini par* $V\ (\overline{G}) = V\ (G)$ *et* $E\left(\overline{G}\right) = \{u\ v : u, v \in V\,(G)\ \text{ et } u\ v\ \notin E(G)\}$.

*Le cycle* $C_6 = (V, E)$*, où* $V = \{A, B, C, D, F, G\}$ *et* $E = \{AB, BC, CD, DF, FG, GA\}$*, et son complémentaire* $\overline{C_6} = (V, \overline{E})$*, où* $E = \{AC, AD, AF, BG, BF, BD, CG, CF, DG\}$*. La Figure* 1.1.6 *représente un graphe* $C_6$ *et son complémentaire .*

**Remarque 1.1.1** *La superposition de* $G$ *et* $\overline{G}$ *donne un graphe complet.*

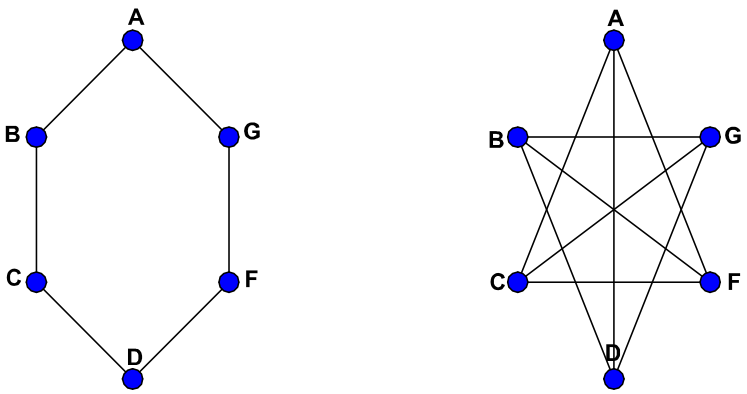



Figure 1.1.6. Un cycle $C_6$ et son complémentaire

### Un graphe k-régulier

**Définition 1.1.12** *Un graphe $G$ est dit $k-$régulier si tous ses sommets sont de degré $k$. La Figure* 1.1.7 *illustre un graphe $G$ est* 2*-régulier.*

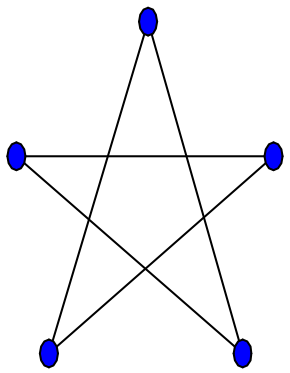


Figure 1.1.7. Un graphe $G$, 2-régulier

### Un graphe discret (nul)

**Définition 1.1.13** *Un graphe discret est un graphe sans arêtes. Tous ses sommets sont donc de degré nul ; c'est un graphe* $0-$*régulier.*

### Graphe biparti

**Définition 1.1.14** *Un graphe $G = (V, E)$ est dit biparti si son ensemble $V$ peut être partitionné en deux sous-ensembles disjoints $V_1$ et $V_2$ tels que chaque arête de $G$ relie un sommet de $V_1$ à un sommet de $V_2$. Autrement dit, deux sommets appartenant à un même sous-ensemble ne sont jamais adjacents. La Figure* 1.1.8 *illustre un graphe biparti.*

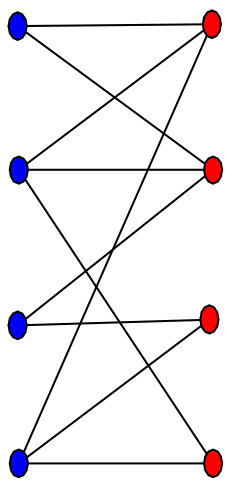


Figure 1.1.8. Un graphe biparti

### Un graphe biparti complet

**Définition 1.1.15** *Un graphe biparti est dit complet si chaque sommet de* $V_1$ *est adjacent à tous les sommets de* $V_2$*. Si* $|V_1| = p$ *et* $|V_2| = q$*, avec* $p, q \geq 1$*, alors le graphe biparti complet est noté* $K_{p,q}$*. Plus généralement, un graphe* $G = (V, E)$ *est dit* $k-$*parti* $(k \geq 2)$*, si son ensemble de sommets* $V$ *peut être partitionné en* $k$ *ensembles stables* $\{V_1, V_2, ...V_k\}$*. Le graphe est dit* $k-$*parti complet (ou multiparti complet) si, pour tous* $i \neq j$*, chaque sommet de* $V_i$ *est adjacent à chaque sommet de* $V_j$*. Autrement dit, deux sommets appartenant à des parties distinctes sont toujours adjacents, tandis que deux sommets d'une même partie ne le sont jamais. La Figure* 1.1.9 *illustre un graphe biparti complet.*

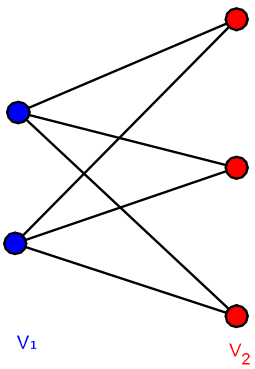



Figure 1.1.9. Un graphe biparti complet $K_{2,3}$

### Graphe connexe

**Définition 1.1.16** *Un graphe $G = (V, E)$ est dit connexe s'il existe une chaîne entre toute paire de sommets de $G$. Autrement dit, pour tous sommets $u, v \in V(G)$, il existe une chaîne reliant $u$ à $v$. Une composante connexe d'un graphe $G$ est un sous-graphe connexe maximal de $G$, c'est-à-dire un sous-graphe connexe qui n'est contenu dans aucun autre sous-graphe connexe de $G$.*

*Une arête $e$ d'un graphe $G$ est appelée* ***arête d'articulation*** *ou* ***isthme*** *si le graphe $G - e$ possède un nombre de composantes connexes strictement supérieur à celui de $G$. Autrement dit, la suppression de $e$ augmente le nombre de composantes connexes du graphe. En particulier, si $G$ est connexe, alors $G - e$ n'est plus connexe. La Figure* 1.1.10 *présente un exemple de graphe connexe.*

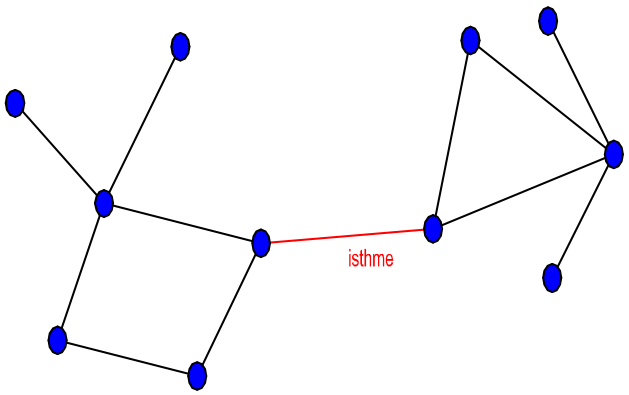



*Figure* 1.1.10. *Un graphe connexe*

### Sommet d'articulation

**Définition 1.1.17** *Un sommet $v$ d'un graphe $G$ est appelé sommet d'articulation si le graphe $G - v$ possède un nombre de composantes connexes strictement supérieur à celui de $G$. Autrement dit, la suppression du sommet $v$ augmente le nombre de composantes connexes du graphe. La Figure* 1.1.11 *illustre un exemple de sommet d'articulation.*

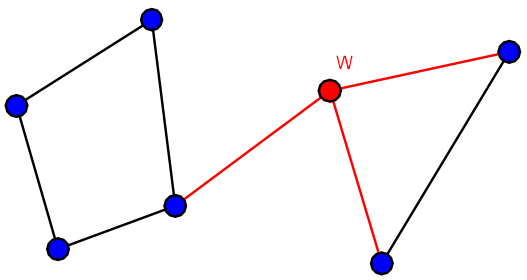



Figure 1.1.11. Un sommet d'articulation

### Graphe $h-$connexe

**Définition 1.1.18** *Pour un graphe connexe $G$, la connectivité $k(G)$ est le nombre minimum de sommets de $G$ dont la suppression déconnecte le graphe $G$ ou le réduit à un sommet isolé. $G$ est dit $h-$connexe si sa connectivité $k(G)$ est supérieure ou égale à $h$.*

### Arbre

**Définition 1.1.19** *On appelle **arbre**, et on note par $T$, un graphe connexe et sans cycle. Un arbre à $n$ sommets possède exactement $n-1$ arêtes. On appelle **feuille** d'un arbre un sommet de degré 1, également appelé sommet **pendant**. Dans un arbre $T$, tout sommet adjacent à une feuille est appelé **sommet support**. La **hauteur** $h(T)$ d'un arbre enraciné $T$ est la longueur du plus longue chaîne allant de la racine à une feuille. La Figure 1.1.12 représente un arbre.*

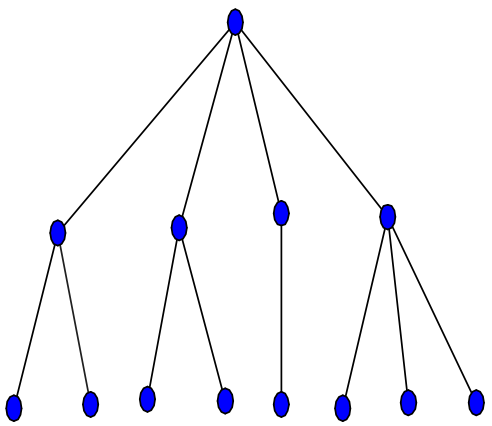


Figure 1.1.12. Un arbre $T$

### Forêt

**Définition 1.1.20** *Une **forêt** est un graphe sans cycle, dont chacune des composantes connexes est un arbre.. La Figure 1.1.13 représente une forêt.*

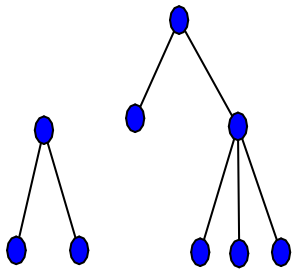


Figure 1.1.13. Une forêt $T$

### Étoile

**Définition 1.1.21** *On appelle* ***étoile,*** *noté* $K_{1,n}$*, l'arbre à* $n+1$ *sommets possédant un sommet de degré* $n$ *et* $n$ *feuilles. La Figure* 1.1.14 *illustre une étoile* $K_{1,5}$*.*

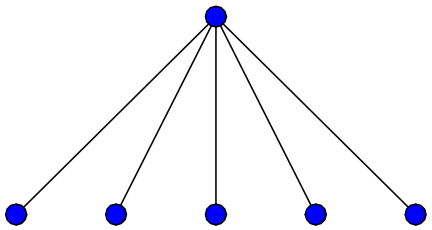


Figure 1.1.14. Une étoile $K_{1,5}$

### L'étoile double

**Définition 1.1.22** *On appelle* ***étoile double****, notée* $S_{p,q}$*, le graphe obtenu en reliant par une arête les centres de deux étoiles* $K_{1,p}$ *et* $K_{1,q}$*. La Figure* 1.1.15 *illustre une étoile double* $S_{4,3}$*.*

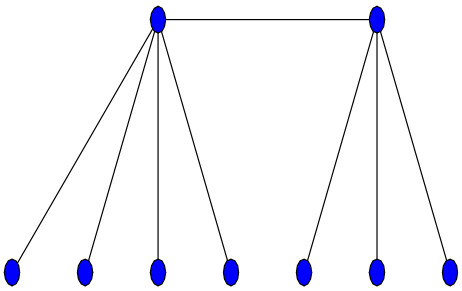


Figure 1.1.15. Une étoile double $S_{4,3}$

### La subdivision

**Définition 1.1.23** *Le* ***graphe subdivisé*** $S(G)$ *d'un graphe* $G$ *est le graphe obtenu en subdivisant chaque arête* $uv$ *de* $G$ *une seule fois (voir la Figure* 1.1.16*).*

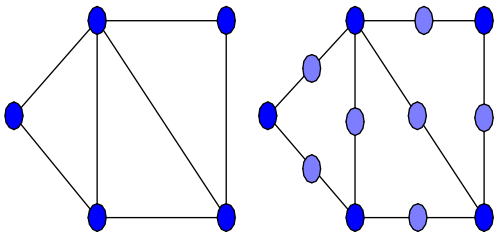


*Figure* 1.1.16. *La subdivision d'un graphe* $G$

## 1.1.9 La couronne

**Définition 1.1.24** *La* ***couronne*** *d'un graphe* $G = (V, E)$*, notée* $Cr(G)$*, est le graphe obtenu en attachant à chaque sommet de* $G$ *un nouveau sommet pendant. Il en résulte*

*que l'ordre de $Cr(G)$ est égal à $2|V|$ (voir la Figure 1.1.17).*

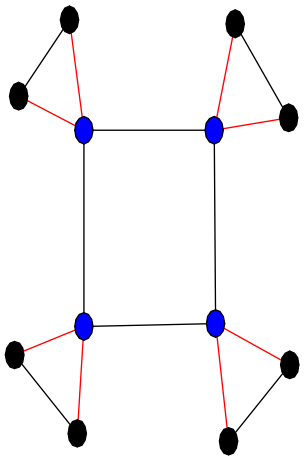


*Figure 1.1.17. La couronne de $C_4$*

### 1.1.10 La couronne voisinage de deux graphes

**Définition 1.1.25** *Soient $G_1$ et $G_2$ deux graphes d'ordres respectifs $n_1$ et $n_2$, et de tailles $m_1$, $m_2$ arêtes. La **couronne voisinage** $G_1 \bigstar G_2$ est le graphe obtenu en prenant $n_1$ copies de $G_2$, puis en reliant, pour chaque sommet $v_i \in V(G_1)$, $i \in \{1,..., n_1\}$, tous les sommets de la $i-$ème copie de $G_2$ aux voisins de $v_i$ dans $G_1$. Le graphe $G_1 \bigstar G_2$ possède $n_1 + n_1 n_2$ sommets et $n_1(2n_2 + 1) + n_1 n_2$ arêtes. En particulier, lorsque $G_2 = K_1$, le graphe $G_1 \bigstar G_2$ est appelé **graphe splitting** de $G_1$, noté $S'(G_1)$ (voir la Figure 1.1.18).*

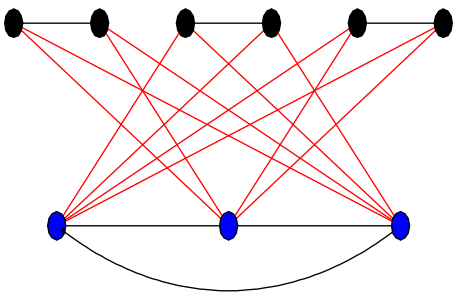


*Figure 1.1.18. La couronne voissinage $C_3 \bigstar P_2$*

### 1.1.11 Joint de deux graphes

**Définition 1.1.26** *Soient $G_1$ et $G_2$ deux graphes. Le graphe $G_1 + G_2$ est défini par $V(G_1 + G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$ et $E(G_1 + G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv \mid u \in V(G_1),\ v \in V(G_2)\ \}$. Autrement dit, $G_1 + G_2$ est obtenu en ajoutant une arête entre chaque sommet de $G_1$ et $G_2$. Ce graphe est appelé* ***graphe joint*** *de $G_1$ et $G_2$ (voir la Figure* 1.1.19*).*

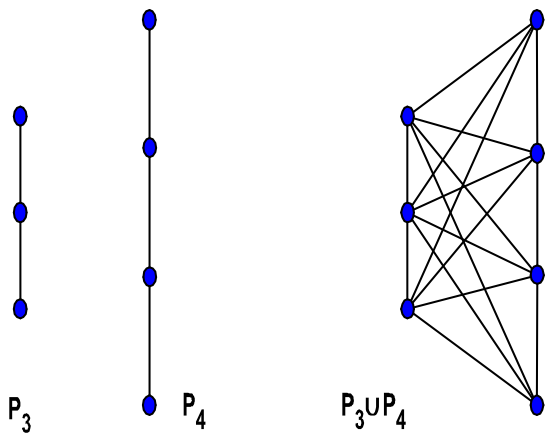



Figure 1.1.19. Le graphe joint de $P_3$ et $P_4$

### 1.1.12 Graphe puissance

**Définition 1.1.27** *Le graphe puissance d'un graphe $G$, noté $G^p$ pour $p \geq 0$, d'un graphe $G$, est le graphe obtenu à partir de $G$ en ajoutant une arête entre toute paire de sommets dont la distance dans $G$ est inférieure ou égale à $p$ (voir la Figure* 1.1.20*).*

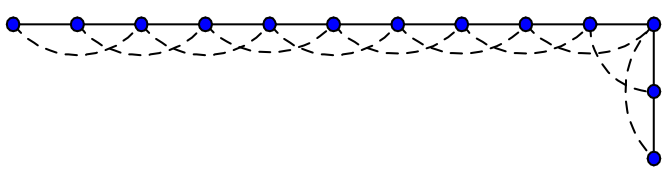


*Figure* 1.1.20. *Un graphe puissance $P_{13}^2$*

### 1.1.13 Graphe de Mycielski

**Définition 1.1.28** *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Le graphe de **Mycielski** de $G$, noté par $\mu(G)$, est un graphe connexe avec $V(\mu(G)) = V(G) \cup V' \cup \{W\}$, $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, où $V' = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ et $E(\mu(G)) = E(G) \cup E' \cup E''$ avec $E' = \{v_i x_j, v_j x_i$ : si et seulement si $v_i v_j \in E(G)$, $1 \leq j \leq n\}$ et $E'' = \{wx_i \mid 1 \leq i \leq n\}$. Autrement dit, à chaque sommet $v_i$ de $G$ on associe un nouveau sommet $x_i$, puis on relie $x_i$ à tous les voisins de $v_i$ dans $G$. Enfin, on ajoute un sommet supplémentaire $w$ adjacent à tous les sommets de $V'$. La Figure* 1.1.21 *illustre le graphe de Mycielski de $K_3$.*

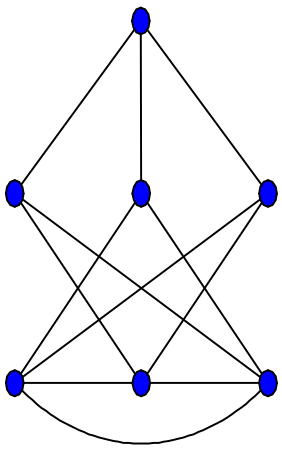


*Figure* 1.1.21. *Graphe de Mycielski de $K_3$*

### 1.1.14 Invariants de graphes

#### Clique

**Définition 1.1.29** *Une clique dans un graphe $G$ est un sous-ensemble de sommets deux à deux adjacents, c'est-à-dire un sous-graphe complet de $G$. Le nombre de clique $\omega(G)$ de $G$,*

*est le cardinal maximal d'une clique de $G$. Voir la Figure* 1.1.22.

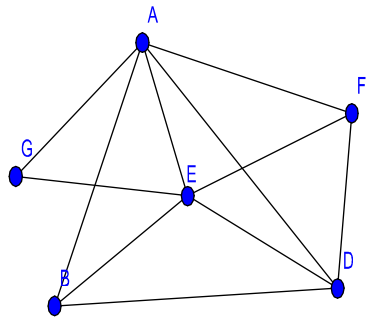



*Figure* 1.1.22. *Une clique engendrée par* $\{A, F, D, E\}$

### Stable

**Définition 1.1.30** *Etant donné un graphe simple $G$, on appelle ensemble stable de $G$ un ensemble de sommets deux à deux non adjacents.*

Un stable maximal de $G$ est un ensemble stable de cardinalité maximale. La cardinalité maximale d'un ensemble stable est appelée nombre de stabilité et est notée $\alpha(G)$.

### Transversal

**Définition 1.1.31** *Un* ***transversal*** *d'un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble $T \subseteq V$ de sommets qui couvre toutes les arêtes de $G$, c'est-à-dire que chaque arête de $G$ est incidente à au moins un sommet de $T$. On remarque qu'un transversal existe pour tout graphe et que, si $T$ est un transversat, alors $V \backslash T$ est un ensemble stable. Un transversal minimum est un transversal de cardinalité minimale. La cardinalité d'un transversal minimum est appelée* ***nombre transversal*** *et est notée $\tau(G)$.*

### Couplage

**Définition 1.1.32** *Etant donné un graphe $G = (V, E)$, on appelle un* ***couplage*** *$M$ dans $G$ un sous-ensemble d'arêtes de $E$ deux à deux non adjacentes. Un* ***couplage maximum*** *est un couplage de cardinal maximale. On désigne par $\alpha_0(G)$ la taille d'un couplage maximum dans $G$.*

*Un sommet $x$ de $G$ est dit saturé par le couplage $M$, s'il existe une arête de $M$ incidente à $x$. Un couplage qui sature tous les sommets de $G$ est appelé un couplage parfait de $G$, sinon, $x$ est dit insaturé par $M$ .*

### Recouvrement

**Définition 1.1.33** *Étant donné un graphe simple $G = (V, E)$ sans sommet isolé. On appelle* ***recouvrement*** *de $G$ un ensemble $R$ d'arêtes de $E$ qui couvre tous les sommets de $G$, c'est-à-dire que chaque sommet de $G$ est incident à au moins une arête de $R$.*

*Un* ***recouvrement minimum*** *est un recouvrement de cardinalité minimale. On désigne par $\upsilon(G)$ la taille d'un recouvrement minimum de $G$. Les arêtes en couleur rouge de la Fgure* 1.1.23 *forment un recouvrement de cardinalité minimale de $G$.*

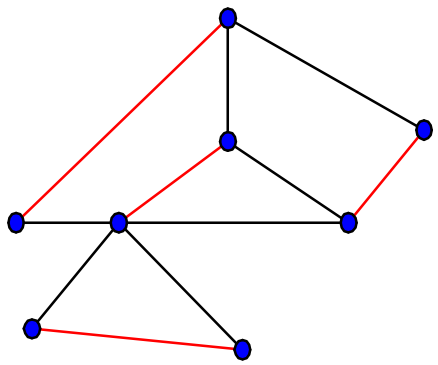


Figure 1.1.23. Un recouvrement de $G$

## 1.2 La coloration dans les graphes

### 1.2.1 Coloration des sommets

**Définition 1.2.1** *On appelle coloration des sommets d'un graphe, toute attribution d'une couleur à chaque sommet, c'est-à-dire une fonction $c : V \to \{1, 2, .., k\}$, où $k \in \mathbb{N}$.*

*Une coloration est dite* ***propre*** *si deux sommets adjacents reçoivent des couleurs différentes, c'est-à-dire $c(v) \neq c(w)$ pour toute paire de sommets adjacents $v, w \in V$.*

*Un graphe $G$ est dit $k-$**colorable** s'il existe une coloration propre de ses sommets utilisant au plus $k$ couleurs. sans que deux sommets voisins aient la même couleur.*

*Étant donné un graphe $G = (V, E)$. Une **coloration triviale** de $G$ consiste à attribuer une couleur distincte à chaque sommet. Ainsi, tout graphe à $n$ sommets admet une $n$ -coloration propre. Il est donc naturel de se demander quel est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer $G$. Cela conduit à la définition du nombre chromatique de $G$.*

### 1.2.2 Le nombre chromatique

**Définition 1.2.2** *Le **nombre chromatique** d'un graphe $G$, noté $\chi(G)$, est le plus petit nombre de couleurs nécessaires à une coloration propre des sommets de $G$.*

*Il peut également être défini comme le plus petit entier $k$ tel que $G$ admet une $k-$coloration propre. On dit aussi que $G$ est $\chi(G)-$chromatique.*

- Une **classe de couleur** $i$ est un ensemble stable de sommets de $V$ auxquels est attribuée la même couleur $i$.

**Exemple 1.2.1** *$G = P_3$ est $2-$ colorable, $\chi(G) = 2$.*

**Remarque 1.2.1** *Soit $G$ un graphe d'ordre $n$. Il est clair que $1 \leq \chi(G) \leq n$ .*

- *$\chi(G) = 1$ si et seulement si $G$ est un graphe discret.*
- *$\chi(G) = n$ si et seulement si $G$ est un graphe complet.*
- *Pour un cycle $C_n$,*

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2; & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 3; & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

### 1.2.3 Bornes sur le nombre chromatique

**Proposition 1.2.1** *[23] Si $H$ est un sous-graphe de $G$, alors*

$$\chi(H) \leq \chi(G).$$

**Proposition 1.2.2** *[23] Pour tout graphe $G$,*

$$\chi(G) \geq \omega(G).$$

*où $\omega(G)$ est la taille d'une clique maximum de $G$.*

**Proposition 1.2.3** *[19] Pour tout graphe $G$ d'ordre $n$,*

$$\left\lceil \frac{n}{\alpha}(G) \right\rceil \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

*oú $\alpha(G)$ est le nombre de stabilité de $G$, et $\Delta(G)$ est le degré maximum de $G$.*

**Proposition 1.2.4** *[2] Soit $G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre $n$,*

$$\chi(G) + \alpha(G) \leq n + 1.$$

**Proposition 1.2.5** *[18] Soit $G$ un graphe d'ordre $n$ et $\overline{G}$ son complémentaire,*

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1.$$

# Chapitre 2

# Quelques résultats obtenus sur le nombre de la coloration de packing

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats relatifs à la coloration de packing de certaines classes de graphes obtenus par différents chercheurs, notamment dans [4, 13, 15, 16]. Nous établissons ensuite les valeurs exactes du nombre chromatique de packing pour plusieurs familles de graphes simples, en particulier les graphes puissances et les graphes de Mycielski construits à partir des chaînes, des cycles et des arbres.

## 2.1 Motivation et définition du problème de la coloration de packing

Le problème de la coloration de packing a été posé à la suite de l'établissement de nombreuses règles et réglementations par la Commission des communications des États-Unis concernant l'attribution des fréquences de radio-diffusion aux stations de radio. En particulier, deux stations auxquelles est attribuée la même fréquence doivent être situées suffisamment loin l'une de l'autre afin que les émissions de l'une n'altèrent pas la réception de l'autre. La distance géographique entre deux stations partageant la même fréquence est donc directement liée à la puissance de leurs signaux de radio-diffusion.

### 2.1.1 i-packing

**Définition 2.1.1** *Un sous ensemble de sommets $V_i$ d'un graphe $G = (V, E)$ est dit $i-$packing si et seulement si la distance entre deux sommets quelconques de $V_i$ est supérieure à $i$.*

**Définition 2.1.2** *Soit $G = (V, E)$ un graphe et $k \in \mathbb{N}^\star$. La fonction $f : V \to \{1, ..., k\}$ est appelée* ***coloration de packing d'ordre*** *$k$ si, pour tous sommets $u$, $v \in V$, l'égalité $f(u) = f(v)$ implique $d(u, v) > f(u)$.*

*Le plus petit entier $k$ pour lequel $G$ admet une coloration de packing d'ordre $k$ est appelé le* ***nombre chromatique de packing*** *de $G$, noté $\chi_p(G)$. Une coloration de packing induit une partition $P_k = \{V_1, V_2, ..., V_k\}$ de $V$, où chaque $V_i$ est un ensemble $i-$packing. Notons que toute coloration de packing est une coloration propre, d'où $\chi(G) \leq \chi_p(G)$. De plus, pour tout sous-graphe $H$ de $G$, on a $\chi_p(H) \leq \chi_p(G)$.*

Dans tout ce qui suit, nous supposons que les graphes sont simples.

### 2.1.2 Coloration de packing de certains graphes particuliers

Tout graphe $G$ d'ordre $n$ admet une coloration de packing d'ordre $n$. En effet, il suffit d'affecter à chaque sommet de $V(G)$, un entier distinct appartenant à l'ensemble $\{1, ..., n\}$. Ainsi, l'ordre du graphe constitue une borne supérieure naturelle du nombre chromatique de packing, bien qu'elle ne soit pas toujours optimale. Les trois propositions suivantes donnent les valeurs exactes du nombre chromatique de packing d'une chaîne, d'un cycle et d'un graphe complet.

**Proposition 2.1.1** *[4] Pour $2 \leq n \leq 3$, $\chi_p(P_n) = 2$, et pour $n \geq 4$, $\chi_p(P_n) = 3$.*

*En effet, l'affectation des couleurs $1, 2, 1, 3, ...$ aux sommets $u_1, u_2, ..., u_n$ du graphe $P_n$ constitue une coloration de packing optimale. Par conséquent, $\chi_p(P_n) = 3$, pour tout $n \geq 4$.*

**Proposition 2.1.2** *[4] Pour un cycle $C_n$,*

$$\chi_p(C_n) = \begin{cases} 3; & \text{si } n \equiv 0\,[4] \text{ ou } n = 3, \\ 4; & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Une coloration de packing optimale de $C_n$ est obtenue en attribuant aux sommets $v_1, ..., v_n$ les couleurs selon les séquences suivantes :*

$$
\begin{aligned}
&1,2,1,3,1,2,1,3,...,1,2,1,3 && \text{si } n = 4r,\\
&1,2,1,3,1,2,1,3,...,1,2,1,3,4 && \text{si } n = 4r+1,\\
&1,2,1,3,1,2,1,3,...,1,2,1,3,1,4 && \text{si } n = 4r+2,\\
&1,2,1,3,1,2,1,3,...,1,2,1,3,1,2,4 && \text{si } n = 4r+3.
\end{aligned}
$$

Ces affectations satisfont les contraintes d'une coloration de packing et utilisent le nombre minimal de couleurs.

**Proposition 2.1.3** *[4] Soit $G$ un graphe complet. Alors $\chi_p\ (K_n) = n$.*

Les propositions suivantes présentent quelques bornes sur le nombre chromatique de packing d'un graphe.

**Proposition 2.1.4** *[4] Pour tout graphe $G$, $\chi_p(G) \leq \tau(G)+1$. De plus, l'égalité est vérifiée lorsque le diamètre de $G$ est égal à 2.*

**Proposition 2.1.5** *[4] Soit $G$ un graphe biparti de diamètre 3. Alors*

$$\tau(G) \leq \chi_p(G) \leq \tau(G) + 1.$$

**Proposition 2.1.6** *[4] Pour tout graphe $G$,*

$$\omega\,(G) \leq \chi\,(G) \leq \chi_p(G).$$

**Proposition 2.1.7** *[4] Soit $G$ un graphe. Si $\chi(G) = \chi_p(G)$, alors $\omega(G) \geq \chi(G) - 2$.*

**Proposition 2.1.8** *[4] Soit $G$ un graphe connexe. Alors, $\chi_p\,(G) = 2$ si et seulement si $G$ est une étoile.*

**Proposition 2.1.9** *[4] Pour tout sous graphe $H$ d'un graphe $G$,*

$$\chi_p(H) \leq \chi_p(G).$$

### 2.1.3 Graphes de petit nombre chromatique de packing

En utilisant le fait qu'un graphe $G$ tel que $\chi_p(G) = 2$ ne contient pas $P_4$ comme sous-graphe induit et vérifie $diam(G) \leq 2$, on déduit d'après la Proposition **2.1.4**, que $\tau(G) = 1$, c'est-à-dire que $G$ est une étoile. On obtient ainsi une caractérisation des graphes dont le nombre chromatique de packing est égal à 2.

**Proposition 2.1.10** *[4] Pour un graphe connexe $G$, $\chi_p(G) = 2$ si et seulement si $G$ est une étoile.*

**Proposition 2.1.11** *[4] Soit $G$ un graphe $2-$connexe. Alors $\chi_p(G) = 3$ si et seulement si $G = S(H)$, où $H$ est un multi-graphe biparti, ou bien $G$ est le joint de $K_2$ et d'un graphe stable. Pour un sommet $v$, on définit un $T-$ajout de $v$ comme étant l'opération qui consiste à ajouter un sommet $w_v$, un ensemble stable $X_v$, l'arête $vw_v$, ainsi que quelques arêtes entre $\{v, w_v\}$ et $X_v$. Voir la Figure* 2.1.1.

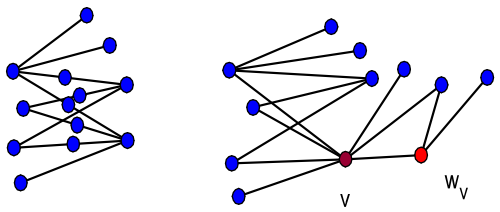



Figure 2.1.1. Un graphe $G$ et un $T-$ajout du sommet $v$

**Proposition 2.1.12** *[4] Soit $G$ un graphe. Alors $\chi_p(G) = 3$ si et seulement si $G$ peut être obtenu à partir d'un certain multigraphe biparti $H$, de bipartition $(V_2, V_3)$, en subdivisant chaque arête exactement une fois, en ajoutant des feuilles à certains sommets de $V_2 \cup V_3$, puis en effectuant un unique $T$-ajout sur certains sommets de $V_3$.*

### 2.1.4 Coloration de packing pour les arbres

Nous nous intéressons aux arbres ayant un nombre chromatique de packing élevé. Pour cela, il est nécessaire d'examiner les cas de petite taille. Un arbre de diamètre 2 (une étoile) a un

nombre chromatique de packing égal à 2. Un arbre de diamètre 3 a un nombre chromatique de packing égal à 3. Le cas des arbres de diamètre 4 est plus complexe, mais **Goddard et al** [4] ont donné une formule explicite basée sur le sommet central et ses voisins de degré 1, 2 et 3 et supérieur ou égal à 4. Pour cela, on appelle **sommet faible** un sommet de degré inférieur ou égal à **3**, et **sommet fort** un sommet de degré supérieur ou égal à **4**. Soit $T$ un arbre de diamètre 4 avec un sommet central $v$. Pour $i = 1, 2, 3$, soit $n_i$ le nombre de voisins de $v$ de degré $i$, et soit $L$ le nombre de voisins forts de $v$. Alors nous avons la proposition suivante:

**Proposition 2.1.13** *[4] Soit $T$ un arbre de diamètre 4. Si $L = 0$, alors*

$$\chi_p(T) = \begin{cases} 4; & si \quad n_3 \geq 2 \quad et \quad n_1 + n_2 + n_3 \geq 3, \\ 3; & sinon. \end{cases}$$

*et si $L > 0$, alors*

$$\chi_p(T) = \begin{cases} L+3; & si \quad n_3 \geq 1 \quad et \quad n_1 + n_2 + n_3 \geq 2, \\ L+1; & si \quad n_1 = n_2 = n_3 = 0, \\ L+2; & sinon. \end{cases}$$

**Proposition 2.1.14** *[4] L'ordre minimum d'un arbre vérifiant $\chi_p(T) = 2$ est 2. Pour $\chi_p(T) = 3$, il est 4, et pour $\chi_p(T) = 4$, il est 8. En outre, $P_4$ est l'unique arbre à 4 sommets nécessitant 3 couleurs. Les deux arbres de 8 sommets nécessitant 4 couleurs sont:*

(*i*) *L'arbre de diamètre 4 avec $n_3 = 2$, $n_1 = 1$ et $L = n_2 = 0$, est appelé $A_8$.*

(*ii*) *L'arbre de diamètre 5 dont les deux sommets centraux sont de degré 3 et dont chacun de ces sommets centraux possède trois voisins de degrés 1, 2 et 3 respectivement est appelé $B_8$. Voir la Figure 2.1.2.*

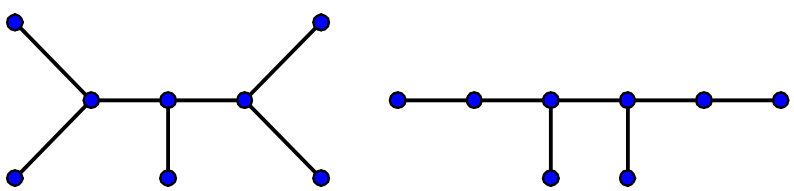


Figure 2.1.2. Les plus petits arbres avec $\chi_p\ (T) = 4$

**Proposition 2.1.15** *[4] Soit $T$ un arbre différent de $P_4$. Supposons que $T$ contienne une chaîne $\{t\ u\ v\ w\}$, où $t$ est de degré 1, et $u$ et $v$ sont de degré 2. Alors $\chi_p(T) = \chi_p(T-t)$.*

**Théorème 2.1.1** *[4] Pour tout arbre $T$ d'ordre $n$,*

$$\chi_p(T) \leq \frac{n+7}{4}$$

*excepter quand $n = 4$ ou 8, et cette borne est atteinte.*

### 2.1.5 Coloration de packing de la couronne d'un graphe

Dans cette section, nous présentons les valeurs exactes du nombre chromatique de packing des couronnes des chaînes et des cycles, déterminées par [21]. Des valeurs exactes ainsi que des bornes pour différentes classes de chenilles sont également énoncées. On définit la **couronne** d'un graphe $G$, notée $Cr(G)$, comme le graphe obtenu à partir d'une copie de $G$ en ajoutant un sommet pendant à chaque sommet de $G$.

#### La couronne d'une chaîne

Soit $P_n = \{x_1, ..., x_n\}$ une chaîne de longueur $n$ et $Cr(P_n)$ la couronne de $P_n$. Notons par $y_1, ..., y_n$ les sommets pendants adjacents aux sommets $x_1, ..., x_n$ respectivement.

Voir la Figure 2.1.3

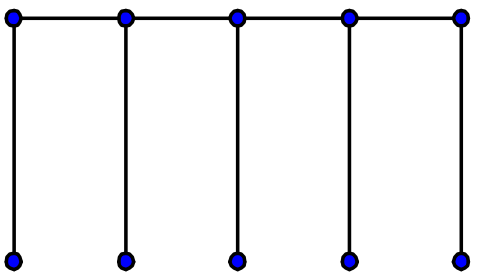


Figure 2.1.3. La couronne de $P_5$

**Proposition 2.1.16** *[16] Pour tout entier $n$, $n \geq 10$,*

(1) *Pour* $n = 2$, $\chi_p(Cr(P_n)) = 3$.

(2) *Pour* $n \in \{3, ..., 9\}$, $\chi_p(Cr(P_n)) = 4$.

(3) *Pour* $n \geq 10$, $\chi_p(Cr(P_n)) = 5$.

*Voir la Figure* 2.1.4

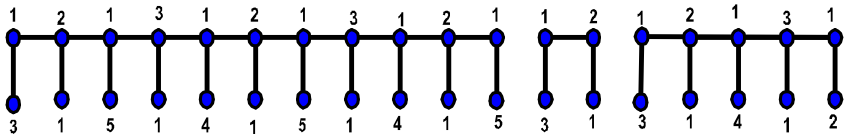



Figure 2.1.4. Coloration de packing de $Cr(P_{11})$, $Cr(P_2)$ et $Cr(P_5)$

**La couronne d'un cycle**

Soit $Cr(C_n)$ la couronne d'un cycle $C_n = \{x_1, ..., x_n\}$ de longueur $n$. Notons par $y_1, ..., y_n$ les sommets pendants adjacents aux sommets de $C_n$. Voir la Figure 2.1.5

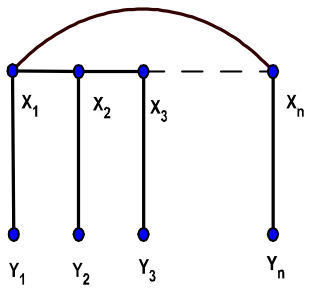



Figure 2.1.5. La couronne de $C_n$

Pour la couronne du cycle, il y'a un résultat identique à celui de la couronne d'une chaîne. Pour les autres valeurs de $n$, le résultat est donné par la proposition suivante:

**Proposition 2.1.17** *[16] Pour tout entier $n$,*

$$\chi_p\left(Cr\left(C_n\right)\right) = \begin{cases} 4; & si \quad n \in \{3,4\}, \\ 5; & sinon. \end{cases}$$

### 2.1.6 Coloration de packing du graphe puissance d'un cycle

**Proposition 2.1.18** *[13] Pour tout $n \geq 3$,*

$$\chi_p(C_n^2) = \begin{cases} n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1; \, n \leq 9, \\ \geq n - \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1; \, n > 9. \end{cases}$$

La Figure 2.1.6 illustre un graphe puissance d'un cycle $C_7^2$.

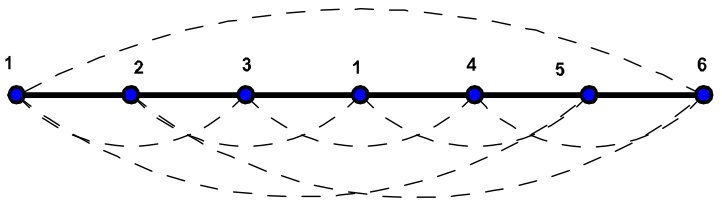



Figure 2.1.6. Coloration de packing de $C_7^2$

### 2.1.7 Coloration de packing du graphe de Mycielski

Cette section présente des résultats sur la coloration de packing du graphe de Mycielski appliquée aux chaînes et aux cycles.

#### Coloration de packing du graphe de Mycielski d'une chaîne

**Théorème 2.1.2** *[15] Si $P_n$ est une chaîne d'ordre $n \geq 2$, alors*

$$\chi_p(\mu(P_n)) = \begin{cases} n - \lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor - \lfloor \frac{n-2}{9} \rfloor - \lfloor \frac{n-6}{9} \rfloor + 1; & \text{si } n \neq 3, \\ 4; & \text{si } n = 3. \end{cases}.$$

La Figure 2.1.7 ci-dessous présente une coloration de packing du graphe $\mu(P_7)$.

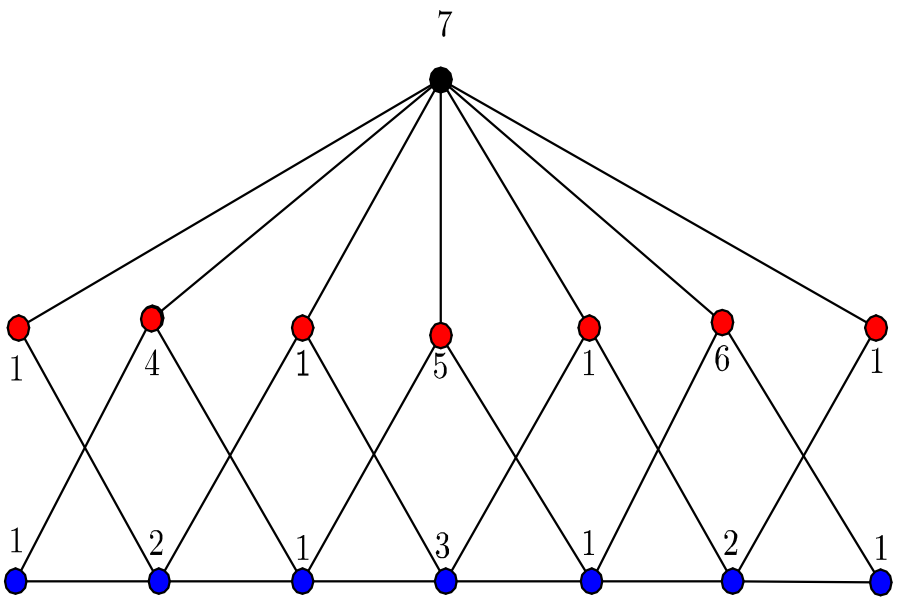



Figure2.1.7. Coloration de packing de $\mu(P_7)$

**Coloration de packing du graphe de Mycielski d'un cycle**

**Théorème 2.1.3** *[15] Pour tout* $n \geq 4$,

$$\chi_p(\mu(C_n)) = \begin{cases} n - \left\lfloor \frac{n-3}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-4}{9} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-8}{9} \right\rfloor + 1; & \text{si } n \neq 3, \\ 5; & \text{si } n = 3. \end{cases}$$

La figure suivante présente une coloration de packing du graphe $\mu(C_7)$.

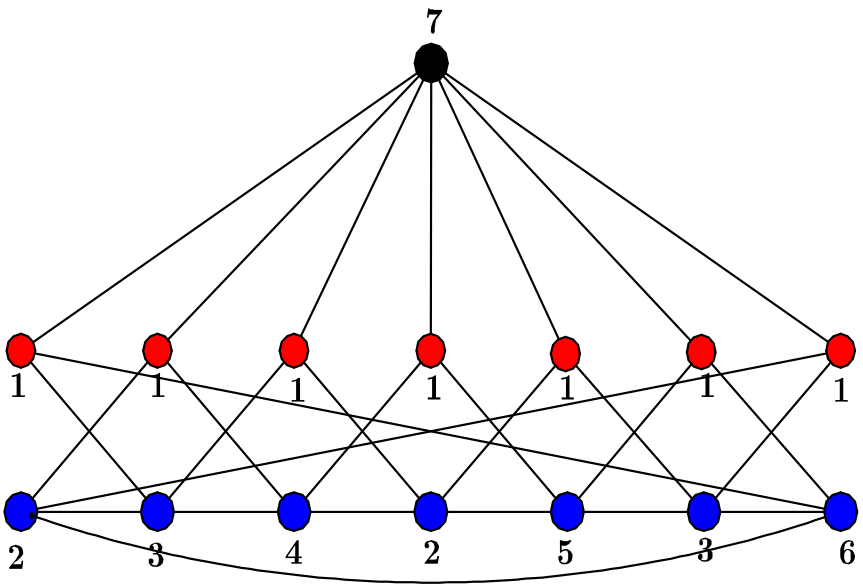



Figure 2.1.8. Coloration de packing de $\mu(C_7)$

### 2.1.8 Coloration de packing du graphe puissance du graphe de Mycielski

Cette section présente des résultats sur la coloration de packing du graphe puissance de Mycielski, appliquée aux chaînes et aux cycles.

#### Coloration de packing du graphe puissance de Mycielski d'une chaîne

**Théorème 2.1.4** *[15] Pour tout $n \geq 2$,*

$$\chi_p((\mu(P_n))^2) = 2n - \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 1.$$

La figure suivante fournit une coloration de packing du graphe $(\mu(P_6))^2$.

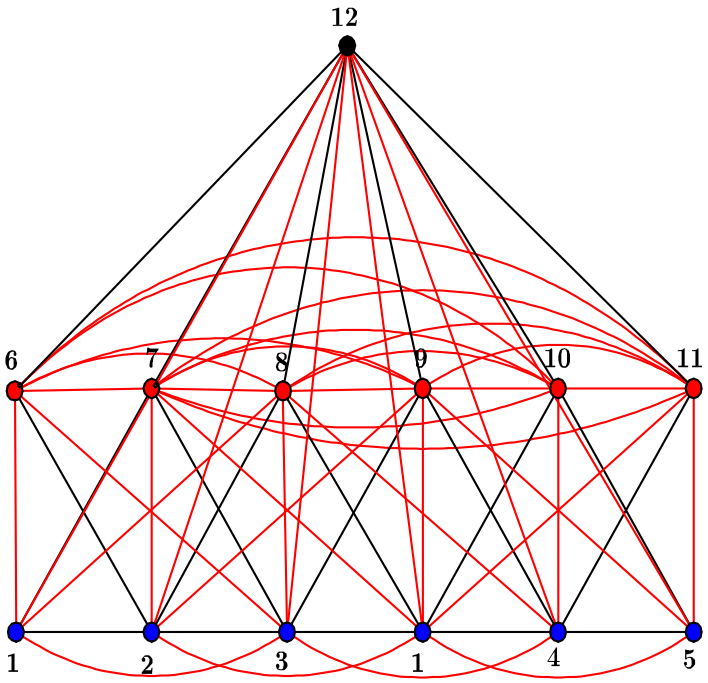



Figure 2.1.9. Coloration de packing de $(\mu(P_6))^2$

**Coloration de packing du graphe puissance de Mycielski d'un cycle**

**Théorème 2.1.5** *[15] Pour tout* $n \geq 3$,

$$\chi_p((\mu(C_n))^2) = 2n - \lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor + 1.$$

La Figure 2.1.10 fournit une coloration de packing de $(\mu(C_8))^2$.

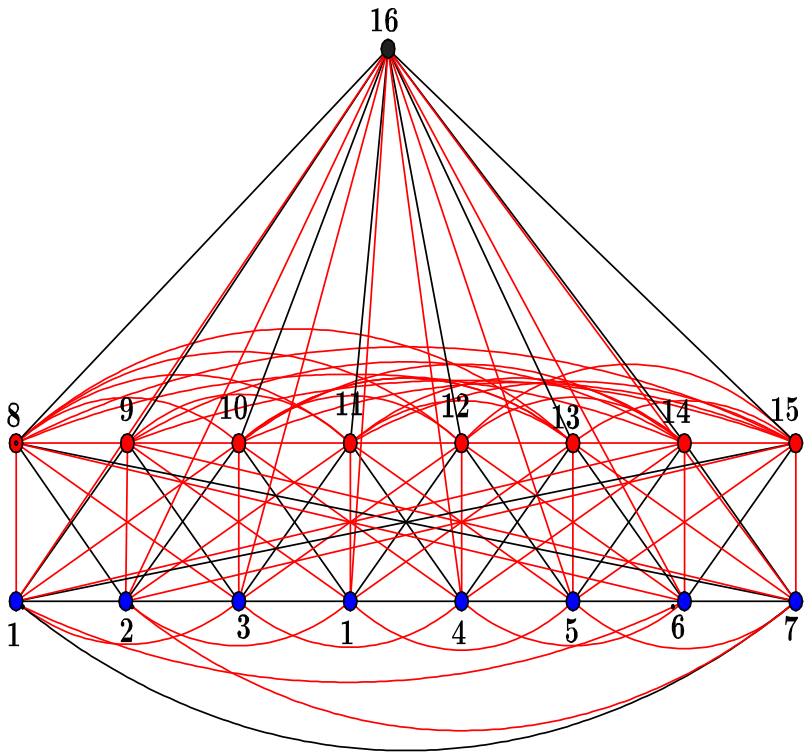



Figure 2.1.10. Coloration de packing de $(\mu(C_8))^2$

# Chapitre 3

# Coloration de packing de quelques familles de graphes

Nous présentons ici nos principaux résultats concernant la détermination du nombre chromatique de packing pour différentes familles de graphes. Plus précisément, nous étudions les graphes suivants : $\mu(P_n^3)$, $\mu(C_n^3)$, $(\mu(P_n))^3$, $(\mu(C_n))^3$, $(\mu(P_n^3))^2$, $(\mu(C_n^3))^2$, $(\mu(P_n^3))^3$ et $(\mu(C_n^3))^3$.

## 3.1 Coloration de packing de Mycielski de la troisième puissance d'une chaîne

Avant de déterminer le nombre chromatique de packing du graphe $\mu(P_n^3)$, nous introduisons le lemme suivant. Nous utilisons les notations suivantes. Soit $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ l'ensemble des sommets de $P_n^3$, et soit $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ l'ensemble des sommets correspondants aux sommets de $V$ dans la construction de $\mu(P_n^3)$. Par définition, chaque sommet $x_i$ est adjacent à tous les voisins de $v_i$ dans $P_n^3$, et le sommet $\omega$ est adjacent à tous les sommets de $X$.

**Lemme 3.1.1** *Soit $n \geq 2$ et soit $\mu(P_n^3)$ le graphe de Mycielski de $P_n^3$. Dans toute coloration de packing optimale de $\mu(P_n^3)$, aucun des sommets $x_i$, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, ni le sommet $\omega$, ne reçoit la couleur 2 ou 3.*

**Preuve.** On observe d'abord que, pour tout $i \neq j$, on a $d(x_i, x_j) \leq 2$ dans $\mu(P_n^3)$, car $x_i - \omega - x_j$ est une chaîne de longueur 2. De plus, $d(\omega, x_i) = 1$ pour tout $i$. Ainsi, deux sommets quelconques de $X \cup \{\omega\}$ sont à une distance au plus 2.

Considérons la couleur 2. Dans une coloration de packing, les sommets colorés 2 doivent être à distance strictement supérieure à 2. Comme tous les sommets de $X \cup \{\omega\}$ sont mutuellement à distance au plus 2, au plus un seul sommet de cet ensemble peut recevoir la couleur 2.

Or, dans $P_n^3$, il existe plusieurs sommets deux à deux à distance au moins égale 3, ce qui permet plusieurs occurrences de la couleur 2 sur la chaîne. Autrement dit, certains sommets de $V$ sont suffisamment éloignés les uns des autres pour recevoir simultanément la couleur 2.

Si on attribuait la couleur 2 à un sommet de $X \cup \{\omega\}$, cela empêcherait son utilisation sur certains sommets de $V$. Par conséquent, l'utilisation de la couleur 2 sur l'ensemble $X \cup \{\omega\}$, augmenterait le nombre total de couleurs nécessaires dans $\mu(P_n^3)$. Cela contredit l'optimalité de la coloration.

Un raisonnement analogue s'applique à la couleur 3. Les sommets colorés 3 doivent être à une distance strictement supérieure à 3. Or, dans $P_n^3$, il existe des ensembles de sommets suffisamment éloignés (distance au moins 4) permettant plusieurs occurrences de la couleur 3 sur $V$. Attribuer la couleur 3 à un sommet de $X \cup \{\omega\}$ restreindrait inutilement son utilisation sur ces ensembles, ce qui est incompatible avec l'optimalité.

Par conséquent, dans toute coloration de packing optimale de $\mu(P_n^3)$, aucun sommet de l'ensemble $\{x_i;\ 1 \leq i \leq n\} \cup \{\omega\}$ ne peut recevoir la couleur 2 ou 3. ■

**Remarque 3.1.1** *Comme le graphe $\mu(P_n^3)$ est un sous-graphe de $\mu(C_n^3)$, et que le diamètre de $\mu(C_n^3)$ est plus petit (ou ne dépasse pas celui de $\mu(P_n^3)$), le lemme précédent reste valable pour le graphe $\mu(C_n^3)$.*

**Théorème 3.1.1** *Pour tout $n \geq 11$,*

$$\chi_p(\mu(P_n^3)) = n - \left\lfloor \frac{n-1}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-2}{12} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-12}{21} \right\rfloor + 1.$$

**Preuve.** On note par $v_i$, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets de la chaîne $P_n$ et par $x_i$, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets correspondants aux sommets $v_i, i \in \{1, ..., n\}$ dans le graphe $\mu(P_n^3)$. Soit $w$ le sommet relié à tous les sommets $x_i$, $i \in \{1, ..., n\}$. Le graphe $\mu(P_n^3)$ est de diamètre 4 pour $n \geq 11$, et donc $|c^{-1}(i)| \leq 1$ pour tout couleur $i \geq 4$. Alors, d'après le lemme 3.1.1, aucun sommet du sous graphe $\{x_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{\omega\}$ peut recevoir la couleur 2 ou 3, et que ces deux couleurs sont utilisées sur la chaîne $P_n$. Nous distinguons les cas suivants concernant l'utilisation de la couleur 1.

**Cas 1.** $c(x_i) = 1$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. Ainsi, les $n$ sommets $x_i$ de $\mu(P_n^3)$ sont colorés par la couleur 1. Les couleurs 2 et 3 sont utilisées sur la chaîne $P_n$ selon la coloration séquentielle suivante: $23c_1c_2c_3c_4c_52c_6c_7c_83c_9c_{10}2c_{11}c_{12}c_{13}c_{14}c_{15}c_{16}, ...$ où les couleurs $c_i$, $i \in \{1, ..., 16\}$ sont deux à deux distinctes et différentes de 1, 2 et 3. Pour déterminer le nombre de sommets colorés par 2 et 3, procédons comme suit. Pour la couleur 2, posons $c(v_i) = 2$ pour $i = 7k + 1$, $1 \leq i \leq n$. Ainsi, le nombre de sommets de $\mu(P_n^3)$ colorés par 2 est $\lfloor \frac{n-1}{7} \rfloor$ +1. Pour la couleur 3, posons $c(v_i) = \begin{cases} 3; & \text{pour } i = 21k + 2,\ 2 \leq i \leq n, \\ 3; & \text{pour } i = 21k + 12,\ 12 \leq i \leq n. \end{cases}$

On obtient alors $\lfloor \frac{n-2}{21} \rfloor + 1 + \lfloor \frac{n-12}{21} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{n-2}{21} \rfloor + \lfloor \frac{n-12}{21} \rfloor + 2$ sommets de $\mu(P_n^3)$ colorés par 3. Au total, nous avons $n + \lfloor \frac{n-1}{7} \rfloor + 1 + \lfloor \frac{n-2}{21} \rfloor + \lfloor \frac{n-12}{21} \rfloor + 2 = n + \lfloor \frac{n-1}{7} \rfloor + \lfloor \frac{n-2}{21} \rfloor + \lfloor \frac{n-12}{21} \rfloor + 3$ sommets de $\mu(P_n^3)$ colorés par 1, 2 et 3. Les autres sommets du graphe reçoivent des couleurs différentes de 1, 2 et 3. Comme $|V(\mu(P_n^3))| = 2n + 1$, on obtient $\chi_p(\mu(P_n))^3 \geq (2n + 1) - (n + \lfloor \frac{n-1}{7} \rfloor + \lfloor \frac{n-2}{21} \rfloor + \lfloor \frac{n-12}{21} \rfloor + 3) + 3 = n - \lfloor \frac{n-1}{7} \rfloor - \lfloor \frac{n-2}{21} \rfloor - \lfloor \frac{n-12}{21} \rfloor + 1$.

La figure suivante donne une coloration de packing de $\mu(P_{11}^3)$.

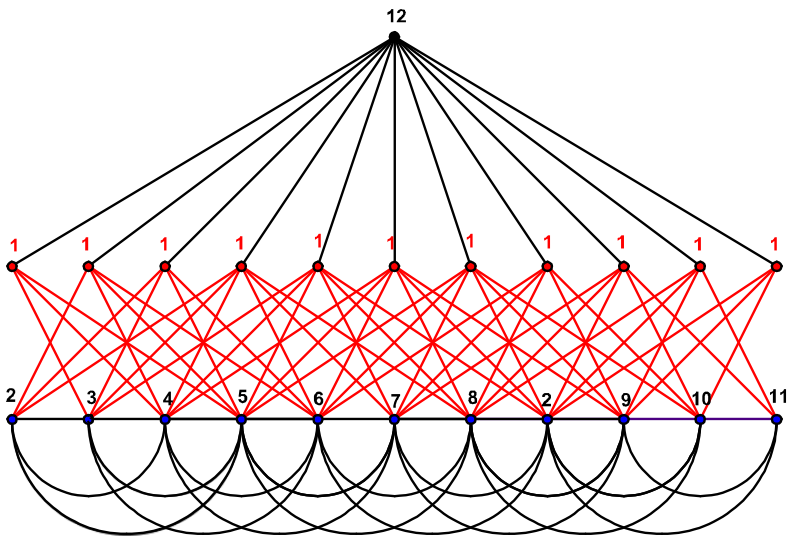



Figure 3.1.1. Coloration de packing du graphe $\mu(P_{11}^3)$.

**Cas 2.** $c(x_i) = c(v_i) = 1$ pour $i = 4k+1$, avec $i \in \{1, ..., n\}$. Ainsi, nous avons $\left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor + 1$ sommets colorés par la couleur 1 dans le sous-graphe engendré par l'ensemble des sommets $\{x_i,\ 1 \leq i \leq n\}$. Sur la chaîne $P_n^3$, on utilise la séquence de couleurs suivante:

$123c_1 1c_2c_3c_4 12c_5c_6 13c_7c_8 12c_9c_{10} 1c_{11}c_{12} 312c_{13}c_{14} 1c_{15}c_{16}c_{17}, ....$ Pour déterminer le nombre des sommets colorés par 1, 2 et 3 sur la chaîne $P_n$, on procède comme suit. Pour la couleur 1, on applique la même méthode que précédemment; ainsi, nous obtenons $\left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor + 1$ sommets colorés par 1. Pour la couleur 2, posons $c(v_i) = 2$ pour $i = 8k+2$, $i \in \{2, ..., n\}$. Donc, nous obtenons $\left\lfloor \frac{n-2}{8} \right\rfloor + 1$ sommets de $\mu(P_n^3)$ colorés par 2. Pour la couleur 3, on utilise la coloration suivante: $c(v_i) = \begin{cases} 3; & \text{pour } i = 32k+3,\ 3 \leq i \leq n, \\ 3; & \text{pour } i = 32k+14,\ 14 \leq i \leq n, \\ 3; & \text{pour } i = 32k+24,\ 24 \leq i \leq n. \end{cases}$

Ainsi, on obtient $\left\lfloor \frac{n-3}{32} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{n-14}{32} \right\rfloor + 1 \left\lfloor \frac{n-24}{32} \right\rfloor + 1$ sommets colorés par 3, c'est-à-dire $\left\lfloor \frac{n-3}{32} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-14}{32} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-24}{32} \right\rfloor + 3$. Au total, nous avons $2\left(\left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor + 1\right) + \left\lfloor \frac{n-2}{8} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{n-3}{32} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-14}{32} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-24}{32} \right\rfloor + 3$ sommets de $\mu(P_n^3)$ colorés par 1, 2 et 3, soit $2\left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-2}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-3}{32} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-14}{32} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-24}{32} \right\rfloor + 6$. Les autres sommets du graphe reçoivent des couleurs distinctes de 1, 2 et 3. Comme $|V(\mu(P_n^3))| = 2n+1$, on obtient $\chi_p(\mu(P_n^3)) \geq (2n+1) -$

$\left(2\left\lfloor\frac{n-1}{4}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n-2}{8}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n-3}{32}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n-14}{32}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n-24}{32}\right\rfloor+6\right)+3$, d'où $\chi_p(\mu(P_n^3)) \geq 2n-2\left\lfloor\frac{n-1}{4}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n-2}{8}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n-3}{32}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n-14}{32}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n-24}{32}\right\rfloor-2$ (Voir Figure 3.1.2).

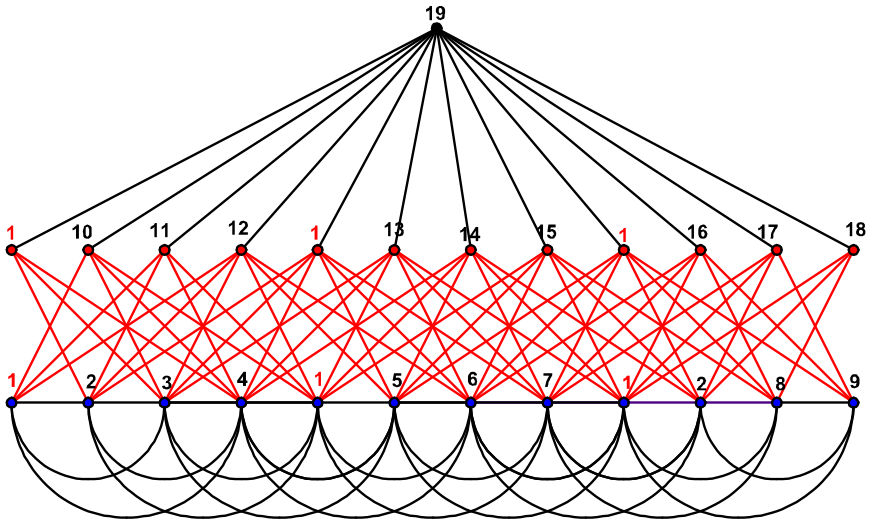



Figure 3.1.2. Coloration de packing de $\mu(P_{12}^3)$.

**Cas** 3. $c(\omega) = c(v_i) = 1$ pour $i = 4k+1$ , $i \in \{1,...,n\}$. Dans ce cas, on utilise la séquence de couleurs $123c_1 1c_2c_3c_4 12c_5c_6 13c_7c_8 12c_9c_{10} 1c_{11}c_{12} 312c_{13}c_{14} 1c_{15}c_{16}c_{17},...$ sur la chaîne $P_n$ . Ainsi, nous avons $\left\lfloor\frac{n-1}{4}\right\rfloor+1+1=\left\lfloor\frac{n-1}{4}\right\rfloor+2$ sommets de $\mu(P_n^3)$ colorés par la couleur 1. Les couleurs 2 et 3 sont utililsées sur la chaîne $P_n$ comme suit. Pour la couleur 2, on utilise la méthode suivante: $c(v_i) = 2$ pour $i = 8k+2$, $i \in \{2,...,n\}$. Donc, nous obtenons $\left\lfloor\frac{n-2}{8}\right\rfloor+1$ sommets de $\mu(P_n^3)$ colorés par la couleur 2. Pour la couleur 3, on utilise la méthode suivante: $c(v_i) = \begin{cases} 3; & \text{pour } i = 32k+3,\ 3 \leq i \leq n, \\ 3; & \text{pour } i = 32k+14,\ 14 \leq i \leq n, \\ 3; & \text{pour } i = 32k+24,\ 24 \leq i \leq n. \end{cases}$

On obtient alors $\left\lfloor\frac{n-3}{32}\right\rfloor+1+\left\lfloor\frac{n-14}{32}\right\rfloor+1\left\lfloor\frac{n-24}{32}\right\rfloor+1$ sommets colorés par la couleur 3, c'est-à-dire $\left\lfloor\frac{n-3}{32}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n-14}{32}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n-24}{32}\right\rfloor+3$. Au total, nous avons $\left\lfloor\frac{n-1}{4}\right\rfloor+2+\left\lfloor\frac{n-2}{8}\right\rfloor+1+\left\lfloor\frac{n-3}{32}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n-14}{32}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n-24}{32}\right\rfloor+3$ sommets de $\mu(P_n^3)$ colorés par 1, 2 et 3, soit $\left\lfloor\frac{n-1}{4}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n-2}{8}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n-3}{32}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n-14}{32}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n-24}{32}\right\rfloor+6$ . Les autres sommets du graphe reçoivent des couleurs distinctes de 1, 2 et 3. Comme $|V(\mu(P_n^3))| = 2n+1$, on obtient

$\chi_p(\mu(P_n^3)) \geq (2n+1) - \left(\left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-2}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-3}{32} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-14}{32} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-24}{32} \right\rfloor + 6\right) + 3$, d'où $\chi_p(\mu(P_n^3)) \geq 2n - \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-2}{8} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-3}{32} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-14}{32} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-24}{32} \right\rfloor - 2$.

Comme $2n - \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-2}{8} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-3}{32} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-14}{32} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-24}{32} \right\rfloor - 2 \geq 2n - 2\left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-2}{8} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-3}{32} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-14}{32} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-24}{32} \right\rfloor - 2 \geq n - \left\lfloor \frac{n-1}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-2}{21} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-12}{21} \right\rfloor + 1$ pour tout $n \geq 11$, on conclut que $\chi_p(\mu(P_n^3)) \geq n - \left\lfloor \frac{n-1}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-2}{12} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-12}{21} \right\rfloor + 1$.

Pour montrer la borne supérieure, on construit une coloration $(n - \left\lfloor \frac{n-1}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-2}{21} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-12}{21} \right\rfloor + 1)-$packing comme suit. On assigne la couleur 1 à tous les sommets $\{x_i; 1 \leq i \leq n\}$. Assigne les couleurs 2 et 3 sont attribuées aux sommets $\{v_i; 1 \leq i \leq n\}$ de la maniére suivante: $c(v_i) = 2$ pour $i = 7k+1$, $1 \leq i \leq n$, pour la couleur 2, et

$$c(v_i) = \begin{cases} 3; & \text{pour } i = 21k+2,\ 2 \leq i \leq n, \\ 3; & \text{pour } i = 21k+12,\ 12 \leq i \leq n, \end{cases}$$

pour la couleur 3. Ainsi, nous avons $n + \left\lfloor \frac{n-1}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-2}{21} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-12}{21} \right\rfloor + 3$ sommets colorés par 1, 2 et 3. Les autres sommets du graphe reçoivent $(2n+1) - (n + \left\lfloor \frac{n-1}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-2}{21} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-12}{21} \right\rfloor + 3)$ couleurs additinnelles distinctes, soit $n - \left\lfloor \frac{n-1}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-2}{21} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-12}{21} \right\rfloor - 2$ . Donc, le nombre total de couleurs utilisées est $n - \left\lfloor \frac{n-1}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-2}{21} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-12}{21} \right\rfloor + 1$. Par conséquent, $\chi_p(\mu(P_n^3)) \leq n - \left\lfloor \frac{n-1}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-2}{21} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-12}{21} \right\rfloor + 1$. Finalement, $\chi_p(\mu(P_n^3)) = n - \left\lfloor \frac{n-1}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-2}{12} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-12}{21} \right\rfloor + 1$.

■

La Figure 3.1.3 donne une coloration de packing de $\mu(P_{13}^3)$.

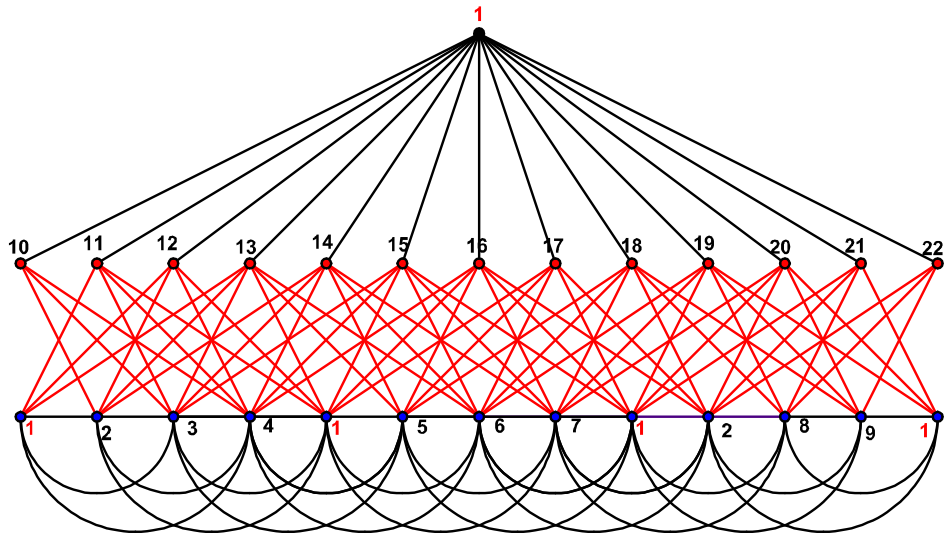



Figure 3.1.3. Coloration de packing de $\mu(P_{13}^3)$.

## 3.2 Coloration de packing de Mycielski de la troisième puissance d'un cycle

**Théorème 3.2.1** *Pour tout* $n \geq 22$,

$$\chi_p(\mu(C_n^3)) = n - \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-10}{21} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-20}{21} \right\rfloor + 2.$$

**Preuve.** On note par $v_i$, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets du cycle $C_n$, et par $x_i$, $i \in \{1, ..., n\}$, les sommets correspondants aux sommets $v_i$, $i \in \{1, ..., n\}$ dans le graphe $\mu(C_n^3)$. On note par $\omega$ le sommet adjacent à tous les sommets $x_i$, $i \in \{1, ..., n\}$.

Comme $diam\,(\mu(C_n^3)) = 4$ pour $n \geq 22$, les seules couleurs pouvant être répétées plusieurs fois sont 1, 2 et 3. Par conséquent, il reste à déterminer le nombre de sommets colorés par 1, 2 et 3. D'après le lemme 3.1.1, les sommets $x_i$, $i \in \{1, ..., n\}$, ne pouvent pas être colorés par les couleurs 2 et 3 dans une coloration de packing optimale. Nous distinguons donc les cas suivants selon l'utilisation de la couleur 1.

**Cas 1.** $c(x_i) = 1$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. Ainsi, nous avons $n$ sommets de $\mu(C_n^3)$ colorés par la couleur 1. Les couleurs 2 et 3 sont utilisées pour colorer les sommets du cycle $C_n$ en utilisant la séquence suivante $23c_1c_2c_3c_4c_52c_6c_7c_83c_9c_{10}2c_{11}c_{12}c_{13}c_{14}c_{15}c_{16}, ...$, où les couleurs $c_1$,..., $c_{16}$ sont des couleurs distinctes de 1, 2 et 3 dans chaque bloc de la séquence. Pour déterminer le nombre de sommets colorés par 2 et 3, on utilise la méthode suivante. Pour la couleur 2, posons $c(v_i) = 2$ pour $i = 7k + 1$ et $1 \leq i \leq n - 6$. Ainsi, on obtient $\left\lfloor \frac{n-7}{7} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor$ sommets colorés par la couleur 2 dans $\mu(C_n^3)$. Pour la couleur 3, on utilise la méthode suivante: $c(v_i) = \begin{cases} 3; & \text{pour } i = 21k + 2,\ 2 \leq i \leq n - 8, \\ 3; & \text{pour } i = 21k + 12,\ 12 \leq i \leq n - 8. \end{cases}$

Donc, nous obtenons $\left\lfloor \frac{n-10}{21} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{n-20}{21} \right\rfloor + 1$ sommets colorés par la couleur 3, c'est-à-dire $\left\lfloor \frac{n-10}{21} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-20}{21} \right\rfloor + 2$. Au total, nous avons $n + \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-10}{21} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-20}{21} \right\rfloor + 2$ sommets colorés par 1, 2 et 3 dans $\mu(C_n^3)$. Comme $|V(\mu(C_n^3))| = 2n + 1$, on obtient $\chi_p(\mu(C_n^3)) \geq (2n + 1) - \left(n + \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-10}{21} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-20}{21} \right\rfloor + 2\right) + 3$, d'où $\chi_p(\mu(C_n^3)) \geq n - \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-10}{21} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-20}{21} \right\rfloor + 2$.

**Cas 2.** La couleur 1 est utilisée sur les sommets $x_i$ et $v_i$, $i \in \{1, ..., n\}$. Comme $diam\,(\mu(C_n^3)) = 4$, les seules couleurs pouvant être répétées plusieurs fois sont $1, 2$ et 3. Par conséquent, il reste à déterminer le nombre de sommets colorés par 1, 2 et 3. Pour les sommets $v_i$, $i \in \{1, ..., n\}$, On utilise la séquence de couleurs suivante :

$123c_11c_2c_3c_412c_5c_613c_7c_812c_9c_{10}1c_{11}c_{12}312c_{13}c_{14}1c_{15}c_{16}c_{17}, ....$ où les couleurs $c_1, c_2, ..., c_{17}$ sont deux à deux distinctes et différentes de $1, 2$ et 3 dans chaque bloc de la séquence. Pour déterminer le nombre de sommets colorés par 1, 2 et 3, on procède comme suit. Pour la couleur 1, posons $c(v_i) = 1$ pour $i = 4k + 1$, $1 \leq i \leq n - 3$. Donc, nous obtenons $\left\lfloor \frac{n-4}{4} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ sommets $v_i$ colorés par la couleur 1. Sur les sommets $x_i$, $i \in \{1, ..., n\}$, la couleur 1 est utilisée comme suit: $c(x_i) = 1$ pour $i = 4k + 1$, $1 \leq i \leq n$. Par conséquent, on obtient $\left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor + 1$ sommets $x_i$ colorés par la couleur 1. Au total, nous avons $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor + 1$ sommets colorés par 1 dans $\mu(C_n^3)$. Pour la couleur 2, posons $c(v_i) = 2$ pour $i = 8k + 2$, $2 \leq i \leq n - 6$. Donc, nous obtenons $\left\lfloor \frac{n-8}{8} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor$ sommets colorés par la couleur 2 dans $\mu(C_n^3)$. Pour la couleur 3, posons $c(v_i) = \begin{cases} 3; & \text{pour } i = 32k + 3,\ 3 \leq i \leq n - 7, \\ 3; & \text{pour } i = 32k + 14,\ 14 \leq i \leq n - 7, \\ 3; & \text{pour } i = 32k + 24,\ 24 \leq i \leq n - 7. \end{cases}$

Donc, nous obtenons $\left\lfloor \frac{n-10}{32} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{n-21}{32} \right\rfloor + 1 \left\lfloor \frac{n-31}{32} \right\rfloor + 1$ sommets colorés par la couleur 3, c'est-à-dire $\left\lfloor \frac{n-10}{32} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-21}{32} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-31}{32} \right\rfloor + 3$ sommets colorés par la couleur 3 sur $\mu(C_n^3)$.

Au total, on obtient $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + \lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor + \lfloor \frac{n}{8} \rfloor + \lfloor \frac{n-10}{32} \rfloor + \lfloor \frac{n-21}{32} \rfloor + \lfloor \frac{n-31}{32} \rfloor + 4$ sommets colorés par $1, 2$ et $3$ dans $\mu(C_n^3)$. Comme $|V(\mu(C_n^3))| = 2n+1$, on obtient $\chi_p(\mu(C_n^3)) \geq (2n+1) - \big(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + \lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor + \lfloor \frac{n}{8} \rfloor + \lfloor \frac{n-10}{32} \rfloor + \lfloor \frac{n-21}{32} \rfloor + \lfloor \frac{n-31}{32} \rfloor + 4\big) + 3$, d'où $\chi_p(\mu(C_n^3)) \geq 2n - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor - \lfloor \frac{n}{8} \rfloor - \lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor - \lfloor \frac{n-10}{32} \rfloor - \lfloor \frac{n-21}{32} \rfloor - \lfloor \frac{n-31}{32} \rfloor$.

**Cas 3.** $c(\omega) = c(v_i) = 1$ pour $i = 4k+1$, $1 \leq i \leq n-3$. Dans ce cas, on utilise la même séquence de couleurs que dans le **Cas** 2. Ainsi, nous avons $\lfloor \frac{n-4}{4} \rfloor + 1 + 1 = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$ sommets de $\mu(C_n^3)$ colorés par la couleur 1. Les couleurs 2 et 3 sont utililsées sur le cycle $C_n$ comme suit. Pour la couleur 2, on utilise la méthode suivante: $c(v_i) = 2$ pour $i = 8k+2$, $2 \leq i \leq n-6$. Donc, nous obtenons $\lfloor \frac{n-8}{8} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{n}{8} \rfloor$ sommets de $\mu(C_n^3)$ colorés par 2. Pour la couleur 3, on utilise la coloration suivante: $c(v_i) = \begin{cases} 3; & \text{pour } i = 32k+3,\ 3 \leq i \leq n-7, \\ 3; & \text{pour } i = 32k+14,\ 14 \leq i \leq n-7, \\ 3; & \text{pour } i = 32k+24,\ 24 \leq i \leq n-7. \end{cases}$

Ainsi, nous obtenons $\lfloor \frac{n-10}{32} \rfloor + 1 + \lfloor \frac{n-21}{32} \rfloor + 1 + \lfloor \frac{n-31}{32} \rfloor + 1$ sommets colorés par la couleur 3, soit $\lfloor \frac{n-10}{32} \rfloor + \lfloor \frac{n-21}{32} \rfloor + \lfloor \frac{n-31}{32} \rfloor + 3$. Au total, nous obtenons $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1 + \lfloor \frac{n}{8} \rfloor + \lfloor \frac{n-10}{32} \rfloor + \lfloor \frac{n-21}{32} \rfloor + \lfloor \frac{n-31}{32} \rfloor + 3$ sommets colorés par $1, 2$ et $3$ dans $\mu(C_n^3)$, c'est-à-dire $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + \lfloor \frac{n}{8} \rfloor + \lfloor \frac{n-10}{32} \rfloor + \lfloor \frac{n-21}{32} \rfloor + \lfloor \frac{n-31}{32} \rfloor + 4$. Comme $|V(\mu(C_n^3))| = 2n+1$, on obtient $\chi_p(\mu(C_n^3)) \geq (2n+1) - \big(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + \lfloor \frac{n}{8} \rfloor + \lfloor \frac{n-10}{32} \rfloor + \lfloor \frac{n-21}{32} \rfloor + \lfloor \frac{n-31}{32} \rfloor + 4\big) + 3$; d'où $\chi_p(\mu(C_n^3)) \geq 2n - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor - \lfloor \frac{n}{8} \rfloor - \lfloor \frac{n-10}{32} \rfloor - \lfloor \frac{n-21}{32} \rfloor - \lfloor \frac{n-31}{32} \rfloor$. En utilisant les inégalités de comparaison des parties entières, on obtient ensuite la minoration souhaitée: $2n - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor - \lfloor \frac{n}{8} \rfloor - \lfloor \frac{n-10}{32} \rfloor - \lfloor \frac{n-21}{32} \rfloor - \lfloor \frac{n-31}{32} \rfloor \geq 2n - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor - \lfloor \frac{n}{8} \rfloor - \lfloor \frac{n-1}{4} \rfloor - \lfloor \frac{n-10}{32} \rfloor - \lfloor \frac{n-21}{32} \rfloor - \lfloor \frac{n-31}{32} \rfloor \geq n - \lfloor \frac{n}{7} \rfloor - \lfloor \frac{n-10}{21} \rfloor - \lfloor \frac{n-20}{21} \rfloor + 2$ pour tout $n \geq 22$. On conclut que $\chi_p(\mu(C_n^3)) \geq n - \lfloor \frac{n}{7} \rfloor - \lfloor \frac{n-10}{12} \rfloor - \lfloor \frac{n-20}{21} \rfloor + 2$.

Pour montrer la borne supérieure, on construit une coloration $(n - \lfloor \frac{n}{7} \rfloor - \lfloor \frac{n-10}{21} \rfloor - \lfloor \frac{n-20}{21} \rfloor + 2)-$packing comme suit. Assignons la couleur 1 à tous les sommets $\{x_i; 1 \leq i \leq n\}$. Ainsi, nous avons $n$ sommets colorés par la couleur 1 dans $\mu(C_n^3)$. On assigne les couleurs 2 et 3 aux sommets $\{v_i; 1 \leq i \leq n\}$, de la manière suivante. Pour la couleur 2, on pose $c(v_i) = 2$ pour $i = 7k+1, 1 \leq i \leq n-6$, et pour la couleur 3,

$$c(v_i) = \begin{cases} 3; & \text{pour } i = 21k+2,\ 2 \leq i \leq n-8, \\ 3; & \text{pour } i = 21k+12,\ 12 \leq i \leq n-8. \end{cases}$$

Ainsi, nous obtenons $n + \lfloor \frac{n}{7} \rfloor + \lfloor \frac{n-10}{21} \rfloor + \lfloor \frac{n-20}{21} \rfloor + 2$ sommets colorés par les couleurs 1, 2 et 3. Les autres sommets du graphe reçoivent $(2n+1) - (n + \lfloor \frac{n}{7} \rfloor + \lfloor \frac{n-10}{21} \rfloor + \lfloor \frac{n-20}{21} \rfloor + 2)$ couleurs

additionnelles, soit $n-\lfloor\frac{n}{7}\rfloor-\lfloor\frac{n-10}{21}\rfloor-\lfloor\frac{n-20}{21}\rfloor-1$. Donc, le nombre total de couleurs utilisées est $n-\lfloor\frac{n}{7}\rfloor-\lfloor\frac{n-10}{21}\rfloor-\lfloor\frac{n-20}{21}\rfloor+2$, et ainsi $\chi_p(\mu(C_n^3))\leq n-\lfloor\frac{n}{7}\rfloor-\lfloor\frac{n-10}{21}\rfloor-\lfloor\frac{n-20}{21}\rfloor+2$. Par conséquent, $\chi_p(\mu(C_n^3))=n-\lfloor\frac{n}{7}\rfloor-\lfloor\frac{n-10}{12}\rfloor-\lfloor\frac{n-20}{21}\rfloor+2$. ■

La figure suivante montre une coloration de packing de $\mu(C_{22}^3)$.

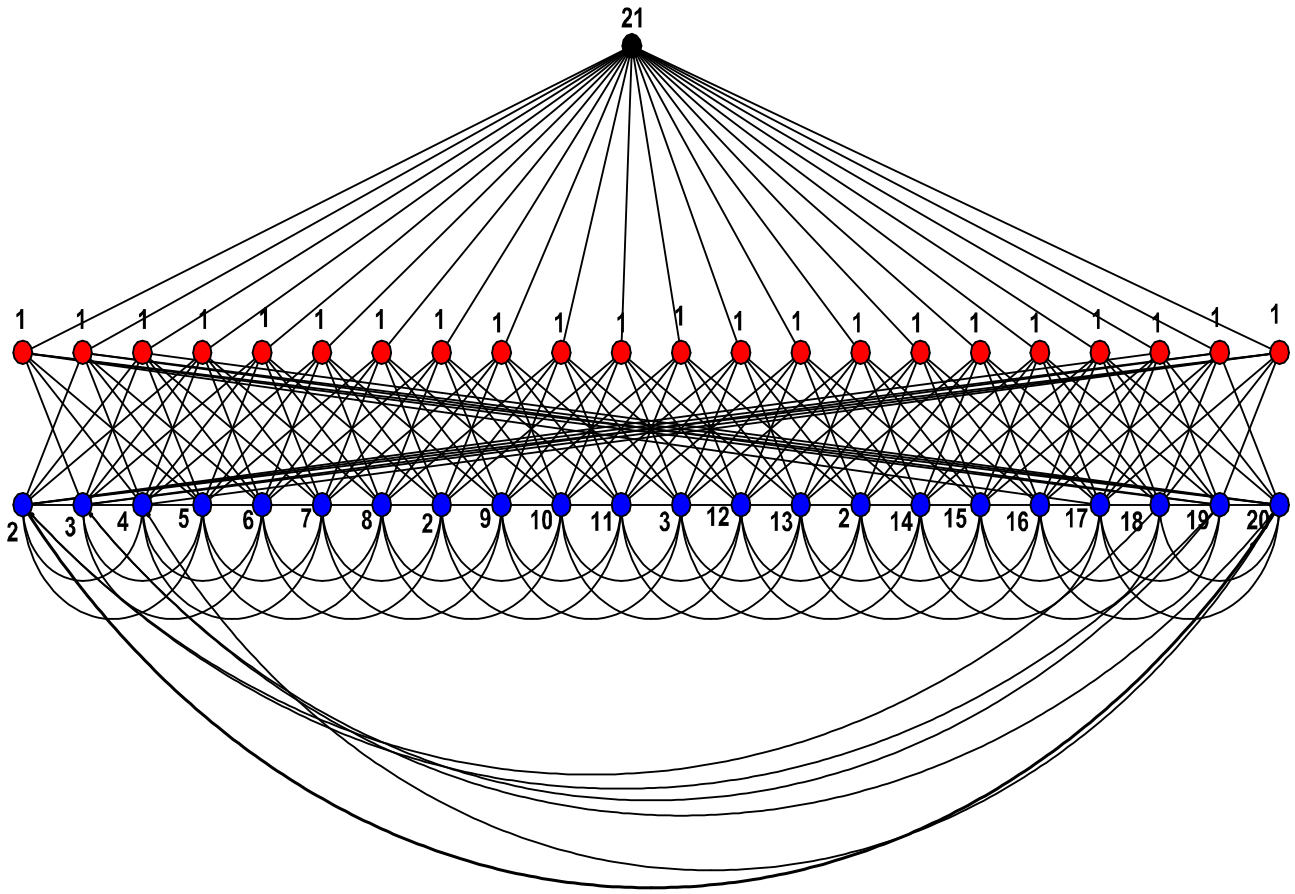



Figure 3.2.1. Coloration de packing de $\mu(C_{22}^3)$.

## 3.3 Coloration de packing de la troisième puissance de Mycielski d'une chaîne

**Théorème 3.3.1** *Pour tout* $n \geq 4$,

$$\chi_p\left((\mu(P_n))^3\right) = 2n - \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor + 1.$$

**Preuve.** On note pour $v_i$, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets de la chaîne $P_n$ et par $x_i$, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets correspondants aux sommets $v_i$, $i \in \{1, ..., n\}$ dans le graphe $(\mu(P_n))^3$. On note par $\omega$ le sommet adjacent à tous les sommets $x_i$, $i \in \{1, ..., n\}$. Notons par $c$ une coloration de parking optimale sur $(\mu(P_n))^3$. Comme $(\mu(P_n))^3$ est de diamètre 2, il résulte que $|c^{-1}(i)| \leq 1$ pour tout $i \geq 2$.

Par conséquent, la coloration optimale est celle qui utilise la couleur 1 le plus grand nombre de fois possible. Le sous-graphe engendré par les sommets $\{x_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{\omega\}$ dans $(\mu(P_n))^3$ est un graphe complet. Ainsi, l'utilisation de la couleur 1 sur ce sous-graphe augmente nécessairement le nombre total de couleurs utilisées dans $(\mu(P_n))^3$. Par suite $c(u) \neq 1$ pour tout $u \in \{x_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{\omega\}$.

Posons alors $c(v_i) = 1$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. Nous obtenons ainsi $\left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor + 1$ sommets colorés par la couleur 1 dans $(\mu(P_n))^3$. Comme $|V((\mu(P_n))^3)| = 2n + 1$, on obtient $\chi_p((\mu(P_n))^3) \geq 2n + 1 - \left(\left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor + 1\right) + 1$; d'où $\chi_p((\mu(P_n))^3) \geq 2n - \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor + 1$. Pour montrer que $\chi_p((\mu(P_n))^3) \leq 2n - \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor + 1$, on construit une coloration $(2n - \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor + 1)-$packing. Assignons la couleur 1 aux sommets de l'ensemble $\{v_i, 1 \leq i \leq n\}$ de la manière suivante: posons $c(v_i) = 1$ pour $i = 4k + 1$, $1 \leq i \leq n$, c'est-à-dire à $\left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor + 1$ sommets. Les sommets restants du graphe reçoivent des couleurs distinctes appartenant à l'ensemble $\left\{2, 3, ..., 2n - \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor\right\}$. Par conséquent, le nombre total de couleurs utilisées est $2n - \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor + 1$, et ainsi $\chi_p((\mu(P_n))^3) \leq 2n - \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor + 1$. Finalement, $\chi_p((\mu(P_n))^3) = 2n - \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor + 1$. ■

La figure suivante donne une coloration de packing de $(\mu(P_{11}))^3$.

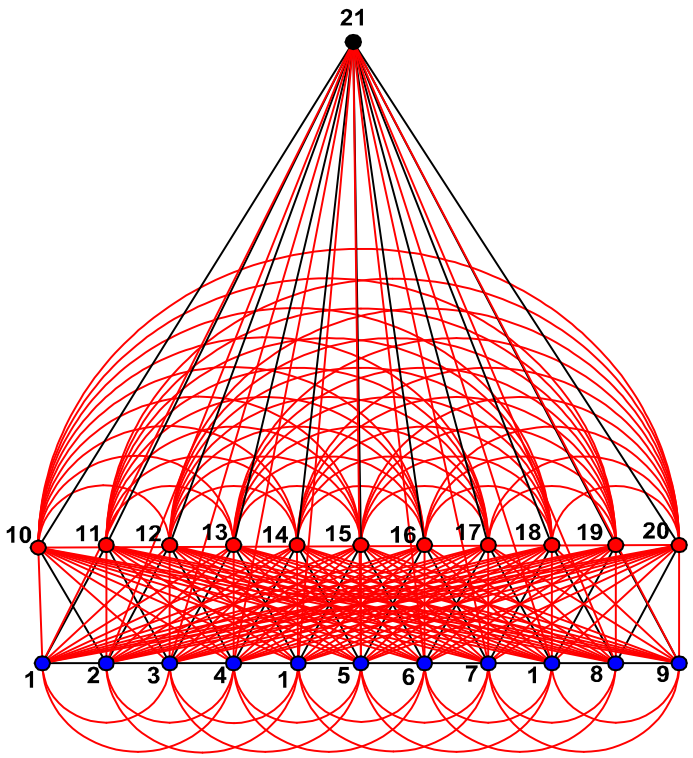



Figure 3.3.1. Coloration de packing de $(\mu(P_{11}))^3$

## 3.4 Coloration de packing de la troisième puissance de Mycielski d'un cycle

**Théorème 3.4.1** *Pour tout* $n \geq 5$,

$$\chi_p\left((\mu(C_n))^3\right) = 2n - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 2.$$

**Preuve.** On note pour $v_i$, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets du cycle $C_n$ et par $x_i$, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets correspondants aux sommets $v_i$, $i \in \{1, ..., n\}$ dans le graphe $(\mu(C_n))^3$. On note également par $\omega$ le sommet relié à tous les sommets $x_i$, $i \in \{1, ..., n\}$. Soit $c$ une coloration de parking optimale sur le graphe $(\mu(C_n))^3$. Comme ce graphe est de diamètre 2, on a $|c^{-1}(i)| \leq 1$ pour tout $i \geq 2$.

Par conséquent, la coloration optimale est celle qui utilise la couleur 1 le plus grand nombre de fois possible. Le sous-graphe engendré par les sommets $\{x_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{\omega\}$ dans $(\mu(C_n))^3$ est une graphe complet. Ainsi, l'utilisation de la couleur 1 sur ce sous-graphe augemente nécessairement le nombre total de couleurs utilisées dans $(\mu(C_n))^3$. Par suite, $c(x_i) \neq 1$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$.

Posons alors $c(v_i) = 1$ pour $i = 4n+1,\ 1 \leq i \leq n-3$. Nous obtenons ainsi $\left\lfloor \frac{n-4}{4} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ sommets colorés par la couleur 1 dans $(\mu(C_n))^3$. Comme $|V((\mu(C_n))^3)| = 2n+1$, on obtient $\chi_p((\mu(C_n))^3) \geq 2n+1-\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1 = 2n - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 2$. Pour montrer que $\chi_p((\mu(C_n))^3) \leq 2n - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 2$, on construit une coloration $(2n - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 2)-$packing. Assignons la couleur 1 aux sommets de l'ensemble $\{v_i, 1 \leq i \leq n\}$, $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ fois. Les sommets restants du graphe reçoivent des couleurs distinctes appartenant à l'ensemble $\left\{2, 3, ...,\ 2n - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1\right\}$. Par conséquent, le nombre total de couleurs utilisées est $2n - \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor + 1$, et ainsi $\chi_p((\mu(P_n))^3) \leq 2n - \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor + 1$. Finalement, $\chi_p((\mu(P_n))^3) = 2n - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 2$. ■

La figure suivante illustre une coloration de packing de $(\mu(C_{11}))^3$.

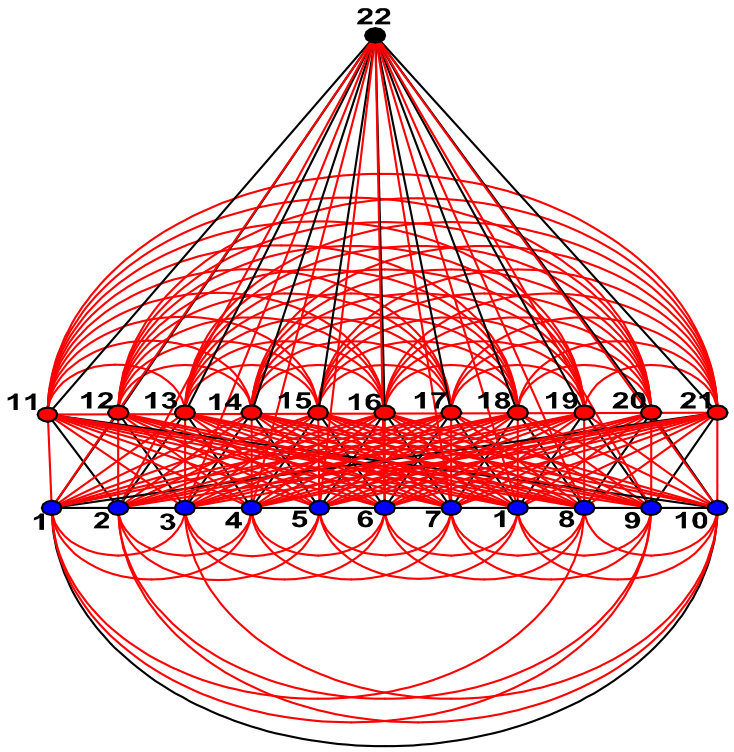



Figure 3.4.1. Coloration de packing de $(\mu(C_{11}))^3$

## 3.5 Coloration de packing de la deuxième puissance de Mycielski de la troisième puissance d'une chaîne

**Théorème 3.5.1** *Pour tout* $n \geq 8$,

$$\chi_p\left((\mu(P_n^3))^2\right) = 2n - \left\lfloor \frac{n-1}{7} \right\rfloor + 1.$$

**Preuve.** On note pour $v_i$, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets de la chaîne $P_n$ et par $x_i$, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommet correspondants aux sommets $v_i$ dans le graphe $(\mu(P_n^3))^2$. On note également par $\omega$ le sommet relié à tous les sommets $x_i$, $i \in \{1, ..., n\}$. Soit $c$ une coloration de parking optimale sur le graphe $(\mu(P_n^3))^2$. Comme ce graphe est de diamètre 2, on a $|c^{-1}(i)| \leq 1$ pour tout $i \geq 2$.

Par conséquent, la coloration optimale utilise la couleur 1 le plus grand nombre de fois possible. Le sous-graphe engendré par les sommets $\{x_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{\omega\}$ dans $(\mu(P_n^3))^2$ est un graphe complet. Ainsi, l'utilisation de la couleur 1 sur ce sous-graphe augmenterait nécessairement le nombre total de couleurs dans $(\mu(P_n^3))^3$. Par suite, $c(x_i) \neq 1$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$.

Posons $c(v_i) = 1$ pour $i = 7n + 1$ et $1 \leq i \leq n$. Ainsi, nous avons $\left\lfloor \frac{n-1}{7} \right\rfloor + 1$ sommets colorés par la couleur 1 dans $(\mu(P_n^3))^2$. Comme $|V((\mu(P_n^3))^2)| = 2n + 1$, on obtient la borne inférieure $\chi_p((\mu(P_n^3))^2) \geq 2n + 1 - \left(\left\lfloor \frac{n-1}{7} \right\rfloor + 1\right) + 1 = 2n - \left\lfloor \frac{n-1}{7} \right\rfloor + 1$, et par conséquent $\chi_p((\mu(P_n^3))^2) \geq 2n - \left\lfloor \frac{n-1}{7} \right\rfloor + 1$. Pour montrer que $\chi_p((\mu(P_n^3))^2) \leq 2n - \left\lfloor \frac{n-1}{7} \right\rfloor + 1$, colorons $\left\lfloor \frac{n-1}{7} \right\rfloor + 1$ sommets de la chaîne $P_n$ avec la couleur 1, et colorons tous les autres sommets du graphe avec des couleurs distinctes de 1. Le nombre de couleurs additionnelles utilisées est $(2n + 1) - (\left\lfloor \frac{n-1}{7} \right\rfloor + 1) = 2n - \left\lfloor \frac{n-1}{7} \right\rfloor$. Ainsi, le nombre total de couleurs utilisées est $2n - \left\lfloor \frac{n-1}{7} \right\rfloor + 1$, et donc $\chi_p((\mu(P_n^3))^2) \leq 2n - \left\lfloor \frac{n-1}{7} \right\rfloor + 1$. En combinant les deux bornes, on conclut que $\chi_p((\mu(P_n^3))^2) = 2n - \left\lfloor \frac{n-1}{7} \right\rfloor + 1$. ■

La Figure 3.5.1 fournit une coloration de packing de $(\mu(P_8^3))^2$.

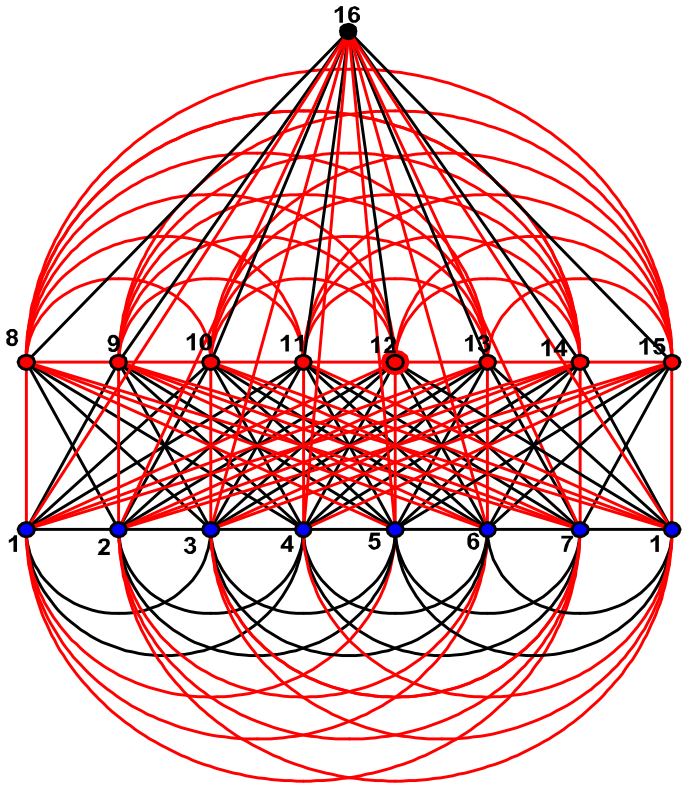



Figure 3.5.1. Coloration de packing de $(\mu(P_8^3))^2$

## 3.6 Coloration de packing de la deuxième puissance de Mycielski de la troisième puissance d'un cycle

**Théorème 3.6.1** *Pour tout* $n \geq 14$,

$$\chi_p\left((\mu(C_n^3))^2\right) = 2n - \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + 2.$$

**Preuve.** On note par $v_i$, $i \in \{1, ..., n\}$ les sommets du cycle $C_n$ et par $x_i$, $i \in \{1, ..., n\}$. Les sommets correspondants aux sommets $v_i$ dans le graphe $(\mu(C_n^3))^2$. On note également par $\omega$ le sommet relié aux sommets $x_i$, $i \in \{1, ..., n\}$. Soit $c$ une coloration de parking optimale sur le graphe $(\mu(P_n^3))^3$. Comme $diam((\mu(C_n^3))^2) = 2$, on a $|c^{-1}(i)| \leq 1$ pour tout $i \geq 2$.

Par conséquent, la coloration de packing optimale utilise la couleur 1 le plus grand nombre de fois possible. Le sous-graphe engendré par les sommets $\{x_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{\omega\}$

dans $(\mu(C_n^3))^2$ est un graphe complet. Par conséquent, utiliser la couleur 1 sur ce sous-graphe augmenterait nécessairement le nombre total de couleurs dans $(\mu(C_n^3))^2$. Ainsi, on a $c(u) \neq 1$ pour tout sommet $u \in \{x_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{\omega\}$. Pour obtenir une coloration optimale, on peut assigner la couleur 1 aux sommets du cycle $C_n$ de la manière suivante. Posons $c(v_i) = 1$ pour $i = 7n + 1$ et $1 \leq i \leq n - 6$. Ainsi, on obtient $\left\lfloor \frac{n-7}{7} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor$ sommets colorés par la couleur 1 dans $(\mu(C_n^3))^2$. Comme $|V((\mu(C_n^3))^2)| = 2n + 1$, la borne inférieure pour le nombre de couleurs est $\chi_p((\mu(C_n^3))^2) \geq 2n + 1 - \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + 1 = 2n - \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + 2$. Pour la borne supérieure, on colore $\left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor$ sommets du cycle $C_n$ par la couleur 1, et on attribue à tous les autres sommets des couleurs distinctes. Le nombre de couleurs additionnelles est $2n - \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + 1$. Ainsi, le nombre total de couleurs utilisées est $2n - \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + 2$, ce qui donne $\chi_p((\mu(C_n^3))^2) \leq 2n - \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + 2$. En combinant les deux bornes, on obtient la valeur exacte $\chi_p((\mu(C_n^3))^2) = 2n - \left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor + 2$. ■

La figure suivante montre une coloration de packing de $(\mu(C_{15}^3))^2$.

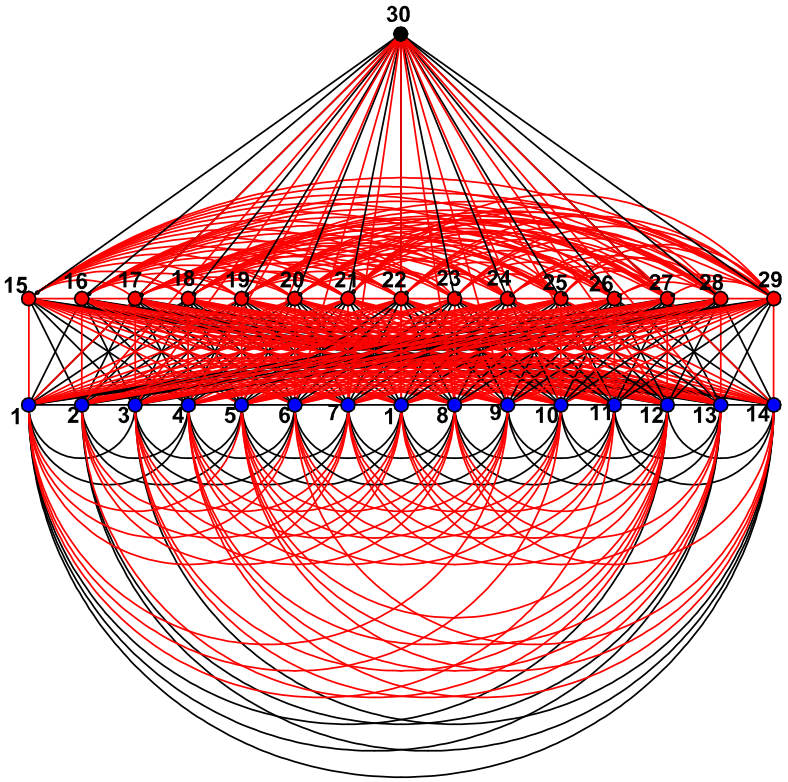



Figure 3.6.1. Coloration de packing de $(\mu(C_{15}^3))^2$

## 3.7 Coloration de packing de la troisième puissance de Mycielski de la troisième puissance d'une chaîne

**Théorème 3.7.1** *Pour tout* $n \geq 11$,

$$\chi_p\left((\mu(P_n^3))^3\right) = 2n - \left\lfloor \frac{n-1}{10} \right\rfloor + 1.$$

**Preuve.** Soient $v_i$, $i \in \{1, ..., n\}$, les sommets de la chaîne $P_n$ et $x_i$, $i \in \{1, ..., n\}$, les sommet correspondants dans le graphe $(\mu(P_n^3))^3$. On note également par $\omega$ le sommet adjacent à tous les sommets $x_i$, $i \in \{1, ..., n\}$. Soit $c$ une coloration de parking optimale sur le graphe $(\mu(P_n^3))^3$. Comme le graphe $(\mu(P_n^3))^3$ est de diamètre 2, toute couleur $i \geq 2$ ne peut être utilisée qu'une seule fois. Ainsi, $|c^{-1}(i)| \leq 1$ pour tout $i \geq 2$. Par conséquent,

dans une coloration de parking optimale, seule la couleur 1 peut être utilisée plusieurs fois. Considérons le sous-graphe induit par $\{x_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{\omega\}$. Ce sous-graphe est complet. Ainsi, deux sommets de cet ensemble ne peuvent recevoir la même couleur, et en particulier la couleur 1 ne peut y apparaître qu'une seule fois. Afin de maximiser le nombre de sommets colorés par la couleur 1, il est donc optimal de ne pas attribuer cette couleur aux sommets $x_i$. On obtient alors $c(x_i) \neq 1$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. Dans le graphe $P_n^3$, deux sommets $v_i$ et $v_j$ sont adjacents dans $(\mu(P_n^3))^3$ dès que $|i-j| \leq 9$. Par conséquent, les sommets pouvant recevoir simultanément la couleur 1 doivent être espacés d'au moins 10 indices. On peut alors choisir $c(v_{10k+1}) = 1$ pour tout $k$, $0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{10} \right\rfloor$. Ainsi, le nombre maximal de sommets colorés par la couleur 1 est $\left\lfloor \frac{n-1}{10} \right\rfloor + 1$. Comme $|V((\mu(P_n^3))^3)| = 2n+1$, et que toutes les autres couleurs sont utilisées au plus une fois, on obtient $\chi_p((\mu(P_n^3))^3) \geq 2n + 1 - \left(\left\lfloor \frac{n-1}{10} \right\rfloor + 1\right) + 1 = 2n - \left\lfloor \frac{n-1}{10} \right\rfloor + 1$. Réciproquement, considérons la coloration définie par $c(v_{10k+1}) = 1$ pour $0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{10} \right\rfloor$, et attribuons des couleurs distinctes à tous les autres sommets de $(\mu(P_n^3))^3$. Cette coloration est une coloration de parking, car deux sommets portant la couleur 1 sont à distance strictement supérieure à 3 dans $\mu(P_n^3)$, et donc non adjacents dans $(\mu(P_n^3))^3$. Le nombre total de couleurs utilisées est alors $(2n+1) - \left(\left\lfloor \frac{n-1}{10} \right\rfloor + 1\right) + 1 = 2n - \left\lfloor \frac{n-1}{10} \right\rfloor + 1$. Ainsi, $\chi_p((\mu(P_n^3))^3) \leq 2n - \left\lfloor \frac{n-1}{10} \right\rfloor + 1$. Finalement, $\chi_p((\mu(P_n^3))^3) = 2n - \left\lfloor \frac{n-1}{10} \right\rfloor + 1$. ■

La Figure 3.7.1 montre une coloration de packing de $\left(\mu(P_{11}^3)\right)^3$.

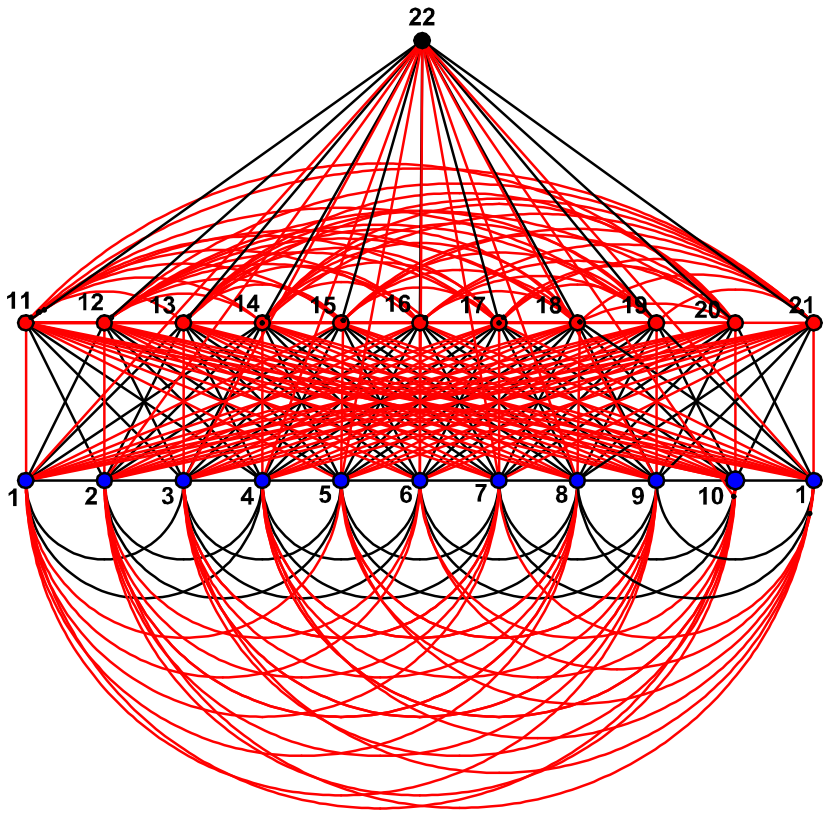



Figure 3.7.1. Coloration de packing de $(\mu(P_{11}^3))^3$

## 3.8 Coloration de packing de la troisième puissance de Mycielski de la troisième puissance d'un cycle

**Théorème 3.8.1** *Pour tout* $n \geq 20$,

$$\chi_p\left((\mu(C_n^3))^3\right) = 2n - \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor + 2.$$

**Preuve.** Soient $v_i$, $i \in \{1, ..., n\}$, les sommets du cycle $C_n$ et $x_i$, $i \in \{1, ..., n\}$, les sommets correspondants dans le graphe $(\mu(C_n^3))^3$. On note également par $\omega$ le sommet adjacent à tous les sommets $x_i$, $i \in \{1, ..., n\}$. Soit $c$ une coloration de parking optimale sur le graphe $(\mu(C_n^3))^3$. Le graphe $(\mu(C_n^3))^3$est de diamètre 2, et donc $|c^{-1}(i)| \leq 1$ pour tout

$i \geq 2$. Par conséquent, dans une coloration de parking optimale, seule la couleur 1 peut être utilisée plusieurs fois. Considérons le sous-graphe induit par $\{x_i;\ 1 \leq i \leq n\} \cup \{\omega\}$. Ce sous-graphe est complet, et donc deux sommets de cet ensemble ne peuvent recevoir la même couleur. En particulier, la couleur 1 ne peut y apparaître qu'une seule fois. Afin de maximiser le nombre de sommets colorés par la couleur 1, il est donc optimal de ne pas attribuer cette couleur aux sommets $x_i$, c'est à dire $c(x_i) \neq 1$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. Dans le graphe $C_n^3$ deux sommets $v_i$ et $v_j$ sont adjacents dans $(\mu(C_n^3))^3$ dès que leur distance sur le cycle est au plus 9. Par conséquent, les sommets pouvant recevoir simultanément la couleur 1 doivent être espacés d'au moins 10 indices. On peut alors choisir $c(v_i) = 1$ pour $i = 10k + 1,\ \ 1 \leq i \leq n - 9$, et donc, nous avons $\left\lfloor \frac{n-10}{10} \right\rfloor + 1 = \ \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor$ sommets colorés par la couleur 1 sur $(\mu(C_n^3))^3$. Comme $|V((\mu(C_n^3))^3)| = 2n + 1$, et que toutes les autres couleurs sont utilisées au plus une fois, on obtient $\chi_p((\mu(C_n^3))^3) \geq (2n+1) - \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor + 1 = 2n - \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor + 2$. Pour la borne supérieure, considérons la coloration définie par $c(v_{10k+1}) = 1$ pour tout $k$, $0 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n-10}{10} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor - 1$, et attribuons des couleurs distinctes à tous les autres sommets de $(\mu(C_n^3))^3$. Le nombre total de couleurs utilisées est alors $\left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor + (2n + 1) - \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor + 1 = 2n - \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor + 2$. Ainsi, $\chi_p((\mu(C_n^3))^3) \leq 2n - \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor + 2$. En combinant les bornes, on obtient finalement $\chi_p((\mu(C_n^3))^3) = 2n - \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor + 2$. ■

La figure suivante illustre une coloration de packing de $(\mu(C_{22}^3))^3$.

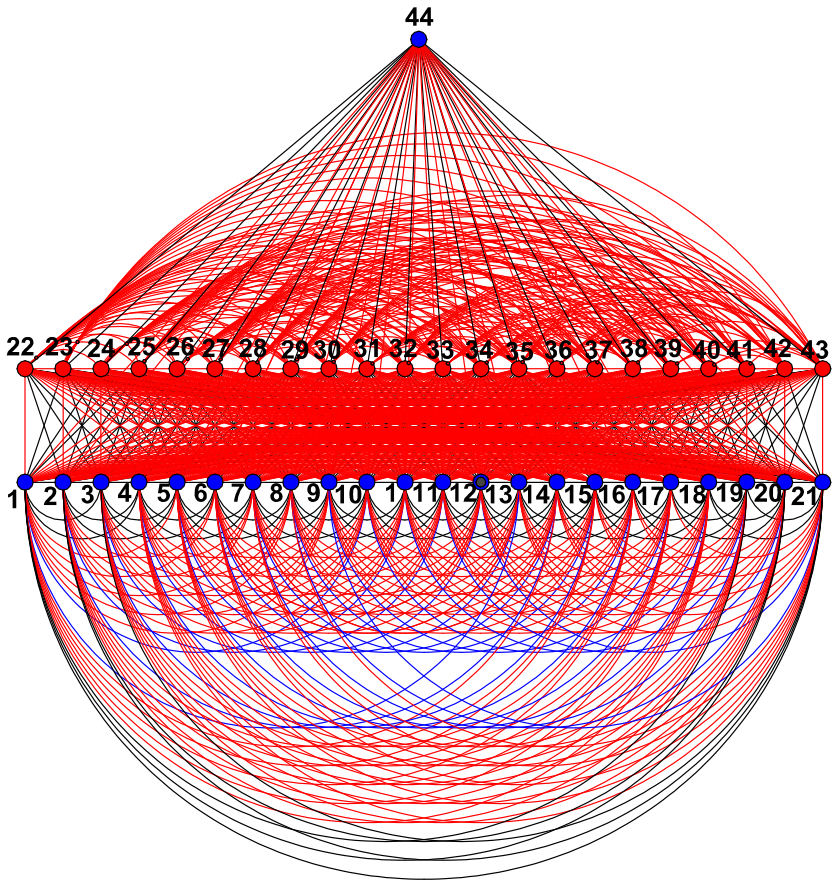



Figure 3.8.1. Coloration de packing de $\left(\mu(C_{22}^3)\right)^3$

# Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'étude du problème de la **coloration de packing**. Après avoir rappelé les notions de base de la théorie des graphes et présenté les résultats connus sur la coloration de packing, nous avons mené une étude approfondie du nombre chromatique de packing pour plusieurs classes de graphes obtenues à partir des opérations de **puissance** et de la construction de **Mycielski**. Les résultats obtenus ont permis de déterminer des valeurs exactes pour différentes familles de graphes dérivées des chaînes et des cycles.Cette étude a mis en évidence l'influence significative des opérations de puissance ainsi que de la construction de Mycielski sur le comportement du nombre chromatique de packing. Plus précisément, nous avons établi les valeurs exactes du nombre chromatique de packing pour les graphes $\mu(P_n^3)$, $\mu(C_n^3)$, $(\mu(P_n))^3$, $(\mu(C_n))^3$, $(\mu(P_n^3))^2$, $(\mu(C_n^3))^2$, $(\mu(P_n^3))^3$ et $(\mu(C_n^3))^3$. Ces résultats contribuent à une meilleure compréhension des interactions entre la coloration de packing et certaines transformations classiques de graphes. Ils constituent également une base pour de futures recherches portant sur la coloration de packing et ses interactions avec différentes transformations de graphes.

Comme perspectives de ce travail, nous proposons :

• Déterminer de nouvelles valeurs exactes du nombre chromatique de packing $\chi_p(G)$, et établir des bornes supérieures et inférieures pour diverses classes de graphes.

• Étudier le comportement du nombre chromatique de packing $\chi_p(G^p)$, pour $p \geq 2$, où $G^p$ désigne la $p-$ième puissance d'un graphe quelconque $G$.

• Analyser le nombre chromatique de packing des graphes puissances issus de différents produits de graphes (produit cartésien, produit fort, produit total, etc.).

• Étendre l'étude du nombre chromatique de packing des graphes de Mycielski $\chi_p(\mu(G))$ à d'autres familles de graphes et examiner l'impact de cette construction sur les propriétés de la coloration de packing.

# Bibliographie


[1] St. Aloysius College, Edathua, Kerala. The spectrum of neighborhood corona of graphs, Kerala, India, 689573.

[2] C. Berge. Graphes, North Holland, 1985.

[3] B. Bresãr, S. Klavsãr, D. F. Rall, On the packing chromatic number of cartesian products, Hexagonal lattice, and trees. Discrete Appl. Math., 155(17) : 2303- 2311; 2007.

[4] W. Goddard, S.M. Hedetniemi, J. M. Harris, D.F. Rall, Packing chromatic numbers of graphs, Ars Combin., 86 : 33-49, 2008.

[5] M. Joice Punitha, Kernel in Interconnection Networks, Ph.D thesis, University of Madras, March 2009.

[6] R. LEMDANI, CHABANE Kwider et ZAHED Ahmed, Sur le Nombre de Subdivision de la Domination Broadcast, 17/06/2015.

[7] R. LEMDANI, A.TAIBAOUI et O. MEZIOUD. Opérations sur le nombre de la coloration de packing. Mémoire Présenté pour l'obtention du diplome de master en recherche opérationnelle, juin 2015.

[8] R. LEMDANI, A. SOUADKIA et F.S DAHMANI, Opérations sur le nombre de la coloration broadcast de quelques types de graphes, Mémoire de Master, RO, 16/06/2016.

[9] R. LEMDANI, K BAKHTI et K. MELIANI, Opérations sur le nombre de la domination broadcast, Mémoire de Master, RO, 14/06/2017.

[10] R. LEMDANI, Y. MOUSSA et O. ALLOUCHE, Etude de la coloration packing dans les graphes, Mémoire de Master, RO, 18/06/2018.

[11] R. LEMDANI, C. OUNNAS et S. ZENIKHRI, Détermination du nombre de la coloration packing de certaines classes de graphes, Mémoire de Master, RO, 2019.

[12] R. LEMDANI, N.R. YAHIAOUI et B. BEN KOUIDER, Opérations sur le nombre de la coloration packing de certains types de graphes, Mémoire de Master, RO, 29/10/2020.

[13] R. LEMDANI. M. BESSERI et I. HADJADJ, Etude et détermination du nombre de la coloration de packing de quelques types de graphes, Mémoire de Master, RO, 18 Juillet, 2021.

[14] R. LEMDANI. R. SAYEH et O. OULD RAMOUL, Caractérisation des graphes à diamètre $d \geq 1$ avec leurs nombres chromatiques de packing. Université Yahia Farès de Médéa, 2022.

[15] R. LEMDANI, Packing Chromatic Numbers of Some Mycielski and Power Graphs. Palestine Journal of Mathematics, Vol $13(4)(2024), 1486 - 1498$.

[16] D. Laiche, Mémoire présenté pour l'obtention du diplome de magister en recherche opérationnelle. Sur les nombres broadcast chromatiques, USTHB, Bab Ezzouar, (2010).D. Laiche, Mémoire Présenté pour l'obtention du diplome de magister en recherche opérationnelle. Sur les nombres broadcast chromatiques, USTHB, Bab Ezzouar, (2010).

[17] D. Miller**.** Introduction à la théorie des graphes, www.apprendre-en-ligne.net/graphes, (2008).

[18] E. A. Nordhaus, J.W. Garddum. On complementary graphs. Ann. Monthly, 63:175 − 177, (1956).

[19] E. Sigward. Introduction à la théorie des graphes.

[20] Christian Sloper. Packing-coloring of trees, Reports in informatics ISSN 0333-3590, 2002.

[21] E. Sopena, Packing coloring of some undirected and oriented coronae graphs, University of Bordeaux, JUNE 2015.

[22] A. SOUADKIA, F.S. DAHMANI, Opérations sur le nombre de la coloration broadcast de quelques types de graphes, Mémoire de Master, 2016.

[23] M. A. Tahraoui. Coloring, packing and embedding of graphs. Thèse de doctorat, Université de Lyon, Décembre 2012.

[24] S. K. Vaidya et P. L. Vihol, Discussion on Some Interesting Topics in Graph Theory, Ph.D Thesis, Saurashtra University, Rajkot, April 2011.

[25] S. Velammel, Studies in Graph Theory : Covering, Independence, Domination and Related Topics, Ph.D. Thesis (Manonmaniam Sundaranar University),1997.

[26] A. William, S. Roy**,** Paking chromatic number of certain graphs. Department of Mathematics, Loyola College, Chennai 600034, INDIA.

[27] A. William, S. Roy, Packing Chromatic Number of Certain Trees and Cycle Related Graphs, Chennai 600034, INDIA.