Republique Algerienne Democratique et Populaire
Ministere de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique
Universite Yahia Fares de Medea
Faculte des Sciences
Departement des Mathematiques et de l'Informatique



MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du

DIPLOME DE MASTER EN MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématiques et applications

par

Nadjat ABDELLI

Factorisation des fonctions entières

Soutenu le .... 2021 devant le jury composé de

Président :	Mr.Hocine AYADI	Université de Médéa
Examinateur :	Mr.Khaled BOUADJILA	Université de Médéa
Encadreur :	Mr.Haoues BAGUA	Université de Médéa

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2020 – 2021

REMERCIEMENT

Tout d'abord je tien remercier **ALLAH** le tout puissant de m'avoir donné la santé, la volonté, le courage et la patience pour d'entamer et de terminer ce mémoire.

Ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de **Mr Haoues.BAGUA**, on le remercie pour la qualité de leur encadrement exceptionnel, pour leur patience leur rigueur et leur disponibilité durant me préparation de ce mémoire.

Ce remerciement s'adresse également à tous les enseignants de la faculté des sciences université de Médéa en générale.

Je tiens à remercier sincèrement les membres du jury **Mr Hocine AYADI et Mr Khaled BOUADJILA** qui me font le grand honneur d'évetuer ce travail, pour leur présence, pour leur lecteur attentive de ce mémoire.

De peur d'en avoir oublier, je souhaite remercier tous ceux qui contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

ABDELLI Nadjat

DÉDICACE

je dédie ce travail :

A ma chère mère **Hadda.D** et mon chèr père **abdelkader** pour leur amour inestimable, leur tendresse, leurs sacrifices, leur soutien et toutes les valeur qu'ils ont su m'inculquer.

A mes chères sœurs et mes chèrs frères pour leurs mots d'encadrement, et leur près présences.

A tout ceux qui m'aiment (les amies, les camarades.....)

RÉSUMÉ

Le théorème de factorisation de Weierstrass affirme que chaque fonction entière peut être représentée comme un produit (éventuellement infini) impliquant ses zéros. Le théorème peut être considéré comme une extension du théorème fondamental de l'algèbre.

TABLE DES MATIÈRES

Résumé i

1 Résultats préliminaires et matériels 3

1.1 Fonctions holomorphes 3

1.1.1 Points singuliers isolés. 6

1.2 Fonctions entières 9

1.2.1 Définitions de base 9

2 Factorisation des fonctions entières 13

2.1 Produits infinis pour les nombres complexes 13

2.2 Produits infinis pour les fonctions 20

2.3 Factorisation de Weierstrass 23

3 Quelques compléments et exemples 30

3.1 Factorisation de la fonction sin 30

Conclusion 32

Bibliographie 33

INTRODUCTION

Le théorème de Weierstrass affirme que chaque fonction entière (une fonction entière est une fonction holomorphe définie sur tout le plan complexe exp : e^z, $\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $\sin z$, $\cos z$,...) peut être représentée comme un produit (éventuellement infini) impliquant ses zéros.

Le théorème peut être considéré comme une extension du théorème fondamental de l'algèbre, qui affirme que chaque polynôme $P(z) = a_n z^n + ... + a_0$, avec $a_0, a_n \neq 0$, peut être factorisé en facteurs linéaires sous la forme

$$P(z) = a_n \prod_{j=1}^{n} (z - z_j) = a_0 \prod_{j=1}^{n} (1 - \frac{z}{z_j})$$

où $z_1, ..., z_n$ les zéros de P.

Nous considérons la question de savoir si des fonctions entières avec une infinité de zéros peuvent être écrites comme des produits infinis d'une manière similaire.

Le petit théorème de Picard dit qu'une fonction entière non constante prend toutes les valeurs complexes une infinité de foi sauf une au plus.

Weierstrass a montré que pour toute fonction entière f d'ordre fini ρ et s'annulant sur les nombres complexes $a_n \neq 0$, il existe un polynôme $P(z)$ et un entier q tels que l'on ait

$$f(z) = z^m e^{p(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E(\frac{z}{a_n}, q)$$

avec $E(z, q) = (1 - z)e^{z + \frac{z^2}{2} + ... + \frac{z^n}{n}}$.

Ce mémoire se compose de trois chapitres :

Dans le premier chapitre, après un bref rappel sur les propriétés de fonctions holomorphes et en particulier les fonctions entières d'une variable complexe, nous introduisons le matériel de base nécessaire pour le développement de la factorisation des fonctions entières.

Le deuxième chapitre est consacré la convergence d'un produit infini et le résultat principal de ce mémoire théorème de Weierstrass pour les produits infinis

soit $f(z)$ est une fonction entière, supposons qu'elle possède des zéros en $a_1, a_2, a_3, ...$

avec $0 < |a_1| < |a_2| < |a_3| < ...$

et $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$. Alors en peut exprimer $f(z)$ sous la forme du produit infini

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{a_n}) exp\left(\frac{z}{a_n} + ... + \frac{1}{p_n}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{p_n}\right)$$

où $g(z)$ est une fonction entière et (p_n) est une suite d'entiers positives.

CHAPITRE 1

RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES ET MATÉRIELS

1.1 Fonctions holomorphes

Définition 1.1.1 ***(Limites)*** *Soit f est une fonction à valeurs complexes définie dans un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$, z_0 exclu, la définition habituelle donne*

$$\lim_{z \to z_o} f = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, t.q \quad 0 < |z - z_0| < \alpha \Rightarrow |f(z) - L| < \epsilon.$$

Définition 1.1.2 ***(Continuité)*** *On a*

$$f \text{ continue au point } z_0 \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Définition 1.1.3 ***(Dérivation)*** *Soit f définie dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ contenant z_0, on a*

$$f \text{ dérivable au point } z_0 \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

Définition 1.1.4 ***(Fonction holomorphe)***

$$f \text{ holomorphe dans } \Omega \text{ ouvert de } \mathbb{C} \Leftrightarrow f \text{ dérivable en tout point de } \Omega.$$

Théorème 1.1.1 *Soit f une fonction complexe définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ telle que $P = Ref$ et $Q = Imf$. Alors f est holomorphe sur Ω si et seulement si f et de classe C^1 et vérifie les équations de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Théorème 1.1.2 *Si f est holomorphe dans un ouvert Ω alors $P = Ref$ et $Q = Imf$ sont des fonctions harmoniques dans Ω (c'est-a-dire sont de classe C^2 et vérifient l'équation de Laplace $\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ dans Ω.)*

Théorème 1.1.3 ***(Théorème de Cauchy)*** *Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert Ω et Γ une courbe fermée simple orientée incluse dans Ω ainsi que son intérieur, alors $\int_\Gamma f(z)dz = 0$.*

Théorème 1.1.4 ***(Formule de Cauchy)*** *Soit f une fonction holomorphe dans un domaine D contenant une courbe simple fermée Γ dont l'intérieur Δ est inclus dans D alors, pour tout point a de Δ, on a*

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - a} dz$$

Théorème 1.1.5 *Si f est holomorphe dans un domaine D contenant une courbe fermée simple Γ dont l'intérieur Δ est inclus dans D, ses dérivées successives en un point a de Δ sont données par*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

Théorème 1.1.6 *(**Développement en série de Taylor**) Toute fonction holomorphe dans un domaine D est développable en série entière autour de tout point z_0 de D, le développement étant convergent dans le plus grand disque centré en z_0 et inclus dans D. Les coefficients a_n du développement sont donnés par la formule*

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}} du$$

Théorème 1.1.7 *(**Inégalités de Cauchy**) Soit f une fonction holomorphe dans un domaine contenant l'origine, $M(r)$ le maximum de $|f|$ sur le cercle $|z| = r$ inclus dans D, alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $r^n |a_n| \leqslant M(r)$, où $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.*

Théorème 1.1.8 *(**Principe du maximum**) Si f est holomorphe dans un domaine D et sur sa frontière et n'est pas constante, le maximum de son module dans le domaine et sur sa frontière est atteint en un point de la frontière.*

Définition 1.1.5 *(**Fonction entière**) Une fonction holomorphe dans tout le plan complexe est dite une fonction entière.*

Proposition 1.1.1 *L'ensemble des fonctions entières est identique à celui des séries entières dont le rayon de convergence est infini.*

Théorème 1.1.9 *(**Théorème de Cauchy-Hadamard**) Le rayon de convergence R d'une série entière à coefficients complexes $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est donné par :*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}.$$

Théorème 1.1.10 *(**Théorème de Liouville**) Si f est une fonction définie et holomorphe sur tout le plan complexe, alors f est constante dès lors qu'elle est bornée.*

1.1.1 Points singuliers isolés.

Étudions les points en lesquels est violée l'holomorphie des fonctions. Commençons par les plus élémentaires de ces points.

Définition 1.1.6 *On dit qu'un point $z_0 \in \mathbb{C}$ est un point singulier isolé d'une fonction f s'il existe un voisinage pointé de z_0 (i.e. un ensemble $\{0 < |z - z_0| < r\}$ si z_0 est fini ou un ensemble $\{R < |z| < \infty\}$ si $z_0 = \infty$) dans lequel f est holomorphe.*

On distingue trois types de points singuliers selon le comportement de f lorsque z tend vers un tel point.

Définition 1.1.7 *On dit qu'un point singulier z_0 d'une fonction f est*

1. *artificiel ou éliminable si $\lim_{z\longrightarrow z_0} |f(z)| = A < +\infty$;*
2. *un pôle si $\lim_{z\longrightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$;*
3. *essentiel si f ne possède ni une limite finie, ni une limite infinie lorsque $z \longrightarrow z_0$.*

Exemple 1.1.1 *Le point $z = 0$ est un point singulier éliminable pour la fonction $\frac{\sin z}{z}$ ceci découle du fait que pour $z \neq 0$ on a le développement suivant :*

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - ...,$$

d'où il s'ensuit que $\lim_{z \longrightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$.

Exemple 1.1.2 *Les fonctions $f(z) = \frac{1}{z^n}$, où $n > 0$ est un entier, présentent un pôle au point $z = 0$.*

Exemple 1.1.3 *Le point $z = 0$ est un point singulier essentiel de la fonction $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, car lorsque, par exemple, $z = x$ tend vers 0 suivant l'axe réel, les limites à droite et à gauche sont distinctes (la limite à droite est égale à l'infini, la limite à gauche, à 0) ; la fonction $e^{\frac{1}{z}} = \cos \frac{1}{y} - i \sin \frac{1}{y}$, n'admet pas de limite lorsque $z = iy$ tend vers 0 suivant l'axe imaginaire.*

Remarque 1.1.1 *Il peut de toute évidence exister des points singuliers non isolés. Par exemple, la fonction $\frac{1}{\sin \frac{\pi}{z}}$ présente des pôles en $z = \frac{1}{n}(n = \pm 1, \pm 2, ...)$, donc $z = 0$ est un point singulier non isolé qui est un point d'accumulation des pôles.*

Exemple 1.1.4 *La fonction*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n} = 1 + z^2 + z^4 + z^8 + ... \tag{1.1.1}$$

présente des points singuliers de nature plus compliquée. D'après la formule de Cauchy-Hadamard, la série (1.1.1) converge dans le disque $\{z : |z| < 1\}$ et par suite la fonction f est holomorphe dans ce disque. Elle tend vers l'infini lorsque z tend vers 1 suivant l'axe réel, donc le point $z = 1$ est un point singulier de f. Or

$$f(z^2) = 1 + z^4 + z^8 + ... = f(z) - z^2,$$

donc $f(z) = z^2 + f(z^2)$ tend aussi vers l'infini lorsque z tend vers -1 suivant un rayon du disque. De façon analogue, $f(z) = z^2 + z^4 + f(z^4)$, donc $f \to +\infty$ lorsque $z \to \pm i$ suivant un rayon du disque. D'une façon générale,

$$f(z) = z^2 + ... + z^{2^n} + f(z^{2^n}),$$

pour tout n naturel, donc $f \to +\infty$ lorsque z tend suivant un rayon vers tout point « dyadique » $z = e^{k.\frac{2\pi i}{2^n}}, (k = 0, 1, ..., 2^n - 1)$ du cercle. L'ensemble des points « dyadiques » étant partout dense sur le cercle $\{z : |z| = 1\}$, tout point de ce dernier est un point singulier de f. Donc f possède toute une ligne composée de points singuliers non isolés (une ligne singulière.)

Théorème 1.1.11 ***(Laurent.)*** *Soient $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine contenant la couronne $C_{z_0}(r, R)$ (centre z_o, rayons r et R, avec $0 < r < R$) et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors*

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad r < |z - z_0| < R \tag{1.1.2}$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta, \tag{1.1.3}$$

C_ρ désignant le cercle de centre z_0 et de rayon $\rho (r < \rho < R)$ parcouru dans le sens positif.

Définition 1.1.8 *La série (1.1.2) dont les coefficients sont définis par les formules (1.1.3) s'appelle série de Laurent de la fonction f dans la couronne $C_{z_0}(r, R)$. L'ensemble des puissances positives s'appelle partie régulière de cette série, celui des puissances négatives, partie principale .*

La nature d'un point singulier isolé $z = z_0$ est étroitement liée à celle de la série de Laurent de la fonction dans un voisinage pointé de z_0 (nous dirons plus brièvement série de Laurent au voisinage de a). Pour les points finis z_0 ce lien est exprimé par les trois théorèmes suivants.

Théorème 1.1.12 *Un point singulier isolé $z_0 \in \mathbb{C}$ d'une fonction f est éliminable si et seulement si la série de Laurent de f au voisinage de z_0 ne contient pas la partie principale :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{1.1.4}$$

Remarque 1.1.2 *En prolongeant f par continuité au point z_0, i.e. en posant $f(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z)$, on obtient une fonction holomorphe en z_0 (c'est-à-dire $z \to z_0$ on élimine la singularité en z_0). Ceci justifie le terme de « point éliminable ». Nous conviendrons dans la suite que ces points sont réguliers et non pas singuliers pour la fonction étudiée.*

Théorème 1.1.13 *Un point singulier isolé $a \in \mathbb{C}$ d'une fonction f est un pôle si et seulement si la partie principale de la série de f dans un voisinage pointé de z_0 ne contient qu'un nombre*

fini de termes non nuls :

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad m > 0. \tag{1.1.5}$$

Théorème 1.1.14 *Un point singulier isolé z_0 d'une fonction f est essentiel si et seulement si la partie principale de la série de Laurent de f dans un voisinage pointé de z_0 contient une infinité de termes non nuls.*

Remarque 1.1.3 *Ce théorème est en fait déjà contenu dans les théorèmes 1.1.12 et 1.1.13 (si la partie principale contient une infinité de termes, le point z_0 ne peut être ni éliminable, ni un pôle, si z_0 est un point singulier essentiel, la partie principale ne peut ni pas exister, ni contenir un nombre fini de termes).*

Théorème 1.1.15 ***(Théorèmes de Picard)***

1. *Le petit théorème de Picard dit qu'une fonction entière non constante prend tout nombre complexe comme valeur, sauf peut-être un.*
2. *Le grand théorème de Picard dit qu'une fonction holomorphe ayant une singularité essentielle prend, sur tout voisinage de cette singularité, tout nombre complexe une infinité de fois comme valeur, sauf peut-être un.*

Remarque 1.1.4 *Le « sauf peut-être un» dans ces énoncés est nécessaire, comme le montrent les exemples suivants. La fonction entière $z \mapsto \mathrm{e}^z$ (l'exponentielle complexe) ne s'annule pas. Elle possède même une singularité essentielle en l'infini (c'est une fonction transcendante). La fonction $z \mapsto \mathrm{e}^{1/z}$ est un exemple de fonction ne s'annulant pas avec singularité essentielle bornée (au point 0).*

1.2 Fonctions entières

1.2.1 Définitions de base

Dans ce qui suit $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ désigne une fonction entière transcendante c'est-à-dire ayant un nombre infini de coefficients a_k non nuls.

Définition 1.2.1 ***(Le module maximal)*** *Soit f une fonction entière. et soit $r > 0$. On définit le module maximal sur le cercle $|z| = r$, par*

$$M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}. \tag{1.2.1}$$

Remarque 1.2.1 *D'après le principe du maximum, nous avons*

$$M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| \leqslant r\}.$$

De plus $M(r, f)$ est une fonction strictement croissante si f est non constante.

Exemple 1.2.1

$$M(r, \cos z) = \max_{|z|\leqslant r} |\cos z|$$

Puisque

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + ..., \quad |z| < \infty,$$

alors

$$|\cos z| \leqslant 1 + \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^4}{4!} + ...$$

Donc

$$|\cos z| \leqslant 1 + \frac{r^2}{2!} + \frac{r^4}{4!} + ... = \cosh r.$$

Par suite

$$|\cos z| \leqslant \frac{e^r + e^{-r}}{2}, \quad |z| \leqslant r.$$

En remarquant que

$$\cos ir = \frac{e^r + e^{-r}}{2}$$

On déduit que

$$M(r, \cos z) = \frac{e^r + e^{-r}}{2}.$$

De même

$$M(r, \sin z) = \frac{e^r - e^{-r}}{2}, \qquad M(r, e^z) = e^r.$$

Définition 1.2.2 *(**Ordre**) L'ordre ρ d'une fonction entière $f(z)$ non identiquement nulle, est défini par*

$$\rho = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r,f)}{\log\log M(r,e^z)} = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r,f)}{\log r},$$

Exemple 1.2.2 *Si $f(z) = \cos z$ on a*

$$M(r,\cos z) = \frac{e^r + e^{-r}}{2} = e^r \frac{1+e^{-2r}}{2}$$

Comme

$$\frac{\log\log M(r,\cos z)}{\log r} = \frac{\log\left|r\left(1 + r^{-1}\left(\log\frac{1+e^{-2r}}{2}\right)\right)\right|}{\log r},$$

il vient que

$$\rho = \limsup_{r\to\infty}\left(1 + \frac{\log\left(1 + r^{-1}\left(\log\frac{1+e^{-2r}}{2}\right)\right)}{\log r}\right) = 1,$$

Définition 1.2.3 *(**Fonction méromorphe**) Une fonction méromorphe est une fonction holomorphe dans tout le plan complexe, sauf éventuellement sur un ensemble de points isolés dont chacun est un pôle pour la fonction.*

Remarque 1.2.2 *Toute fonction méromorphe peut s'écrire comme le rapport de deux fonctions entières (dont celle du dénominateur n'est pas identiquement nulle) ; les pôles de la fonction correspondent aux zéros du dénominateur.*

Des exemples de fonctions méromorphes sont :

Exemple 1.2.3 *Toutes les fonctions rationnelles comme $\frac{z^3-2z+1}{z^5+3z-1}$.*

Exemple 1.2.4 *les fonctions $\frac{e^z}{z}, \tan(z), \frac{\sin(z)}{(z-1)^2}$ ou même la fonction gamma d'Euler et la fonction zêta de Riemann.*

Des exemples de fonctions non méromorphes sont :

Exemple 1.2.5 *Toutes les fonctions algébriques (non rationnelles) (ex. : $\sqrt{z}$) et plus généralement toute fonction présentant un point de branchement algébrique ;*

Exemple 1.2.6 *Toutes les fonctions ayant un point de branchement logarithmique (ex. :* $\log(z)$*);*

CHAPITRE 2

FACTORISATION DES FONCTIONS ENTIÈRES

2.1 Produits infinis pour les nombres complexes

Définition 2.1.1 *Soit* $\{z_n\}$ *une suite de nombres complexes, et nous écrivons* $p_n = \prod_1^n z_i$ *pour désigner le nième produit partiel de* $\{z_n\}$. *Si* $p_n \to p$ *comme* $n \to \infty$. *Nous disons que le produit infini existe et désignons la limite par*

$$p = \lim p_n = \prod_1^\infty z_i.$$

Si p_n *ne tend pas vers un nombre fini ou* $p_n \to 0$, *alors nous disons que* $\prod_1^\infty z_i$ *diverges.*

Exemple 2.1.1 *Déterminez la convergence de* $(1+1)(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})....$

On défini

$$p_n = \begin{cases} (1+1)(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})...(1-\frac{1}{n}), & \textit{n paire;} \\ (1+1)(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})...(1+\frac{1}{n}), & \textit{n impaire.} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} (1+1)\frac{1}{2}\frac{4}{3}\frac{3}{4}...\frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n} = 1, & \textit{n paire;} \\ (1+1)\frac{1}{2}\frac{4}{3}\frac{3}{4}...\frac{n-1}{n-2}\frac{n-2}{n-1}\frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n}, & \textit{n impaire.} \end{cases}$$

D'où $p_n \to 1$, *lorsque* $n \to \infty$, *et nous concluons qu'en*

$$(1+1)(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})... = 1.$$

Notez que nous avons également

$$(1+1)(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})... = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right).$$

A partir de l'exemple 2.1.1, nous voyons que le dernier chiffre $1-\frac{(-1)^n}{n}$ *du produit partiel* p_n *tend à un comme* $n \to \infty$. *Ceci est vrai en générale.*
Pour supposer $p_n \to p$, *alors* $z_n = \frac{\prod_1^N z_i}{\prod_1^{N-1} z_i} \to \frac{p}{p} = 1$ *comme* $N \to \infty$. *Au vu de cette observation, il sera plus commode pour nous de considérer le produit infini de la forme* $\prod_1^{\infty}(1+a_n)$ *où* $a_n \to 0$ *comme* $n \to \infty$ *si le produit infini converge. Nous prouvons maintenant un critère de convergence fondamental.*

Théorème 2.1.1 *Le produit infini* $\prod_1^{\infty}(1+a_n)$ *est convergent si et seulement si, étant donné* $\epsilon > 0$, *il existe un* $N > 0$ *tel que*

$$|(1+a_{n+1})...(1+a_m) - 1| < \epsilon$$

pour tout $m > n \geq N$.

Preuve 2.1.1 *Supposons*

$$\prod_1^{\infty}(1+a_i) = p.$$

Soit p_n *le nième produit partiel de*

$$\prod_1^{\infty}(1+a_i),$$

alors p_n *est une suit de Cauchy dans* $\mathbb{C}$. *Autrement dit, étant donné* $\epsilon > 0$, *il existe un* N *tel*

que

$$|p_n| > \frac{|p|}{2}$$

et

$$|p_n - p_m| < \epsilon \frac{|p|}{2}$$

pour tout $m > n \geq N$. *Donc*

$$\begin{aligned} |(1 + a_{n+1})...(1 + a_m) - 1| &= |P_n| \left| \frac{p_m}{p_n} - 1 \right| \frac{1}{|p_n|} \\ &= |p_m - p_n| \frac{1}{|p_n|} \\ &< \epsilon \frac{|p|}{2} \frac{2}{|p|} = \epsilon \end{aligned}$$

pour tout $m > n \geq N$, *comme demandé.*

Inversement, supposons que $1 > \epsilon > 0$, *il existe un* N *tel que pour* $m > n \geq N$, *nous avons*

$$\left| \frac{p_m}{p_n} - 1 \right| < \epsilon.$$

Soit

$$p'_k = \frac{p_k}{N}$$

pour tout $K \geq N$ *et* N *fixe, alors*

$$1 - \epsilon < |p'_k| < 1 + \epsilon < 2.$$

Notez que l'hypothèse équivaut à

$$\left| \frac{p'_m}{p'_n} - 1 \right| < \epsilon.$$

C'est-à-dire

$$|p'_m - p'_n| < \epsilon |p'_n| < 2\epsilon$$

pour tout $m > n \geq N$. *Donc* $\{p'_m\}$ *est une suite de Cauchy. Alors* $\{p_n\}$ *est une de Cauchy et converge en* $\mathbb{C}$.

Si tous les a_n *sont positifs. Alors nous avons*

Proposition 2.1.1 *Supposons que tous les* $a_n > 0$. *Alors*

$$prod(1 + a_n)$$

converge si et seulement si $\sum a_n$ *converge.*

Preuve 2.1.2 *Supposons que*

$$\prod(1+a_n)$$

converge. D'après

$$a_1 + ... + a_n \leq (1+a_1)...(1+a_n)$$

nous concluons immédiatement que

$$\sum a_n < \infty.$$

Inversement, puisque

$$1 + a < e^a$$

pour toute $a > 0$*, donc*

$$(1+a_1)...(1+a_n) < e^{a_1+...+a_n}.$$

Ainsi

$$\prod(1+a_i)$$

converge.

Définition 2.1.2 *On dit que le produit infini* $\prod(1+a_n)$ *est absolument convergent si le produit* $\prod(1+|a_n|)$ *converge.*
Nous rappelons de l'exemple 2.1.1 que le produit infini

$$(1+1)(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})...$$

n'est pas absolument convergente. Cependant, l'inverse est certainement vrai.

Théorème 2.1.2 *Si* $\prod(1+|a_n|)$ *converge, alors* $\prod(1+a_n)$ *converge.*

Preuve 2.1.3 *Méthode I :*
Le résultat découle immédiatement de l'observation que

$$|(1+a_{n+1})...(1+a_m) - 1| \leq (1+|a_{n+1}|)...(1+|a_m|) - 1,$$

est par le théorème 2.1.1

Méthode II :

Soit $p_n = \prod_1^n (1 + a_i)$ *et* $P_n = \prod_1^n (1 + |a_i|)$. *Alors*

$$p_n - p_{n-1} = (1 + a_1)...(1 + a_{n-1})a_n,$$

$$P_n - P_{n-1} = (1 + |a_1|)...(1 + |a_{n-1}|)|a_n|,$$

et

$$|p_n - p_{n-1}| \leq P_n - P_{n-1}.$$

Depuis $P_n \to \prod_1^\infty (1 + |a_i|)$, *on a* $\sum_2^n (P_i - P_{i-1}) = P_n - P_1$ *converge.*
Mais alors $\sum_2^\infty (p_i - p_{i-1})$ *convergente aussi absolument par l'inégalité ci-dessus.*
D'où la limite

$$prod(1 + a_n)$$

existe.

Théorème 2.1.3 *Un produit* $\prod(1+a_n)$ *est absolument convergente si est seulement si* $\sum a_n$ *converge absolument.*

Preuve 2.1.4 *Si*

$$\prod_1^\infty (1 + |a_n|)$$

converge alors

$$\sum |a_n|$$

doit converger d'après la proposition 2.1.1. L'inverse découle également de la proposition 2.1.1.
On en déduit immédiatement que

Proposition 2.1.2 *Le produit* $\prod_1^\infty (1 + a_n)$ *converge si la somme* $\sum_1^\infty a_n$ *converge absolument.*
Nous passons ensuite à l'énoncé "si $\prod(1 + a_n) = p$, *alors* $\sum \log(1 + a_n) = \log p$*". tient ? ici* $\log p$ *est le logarithme principal*

Proposition 2.1.3 *Si* $\sum \log(1 + a_n)$ *converge, alors* $\prod(1 + a_n)$ *converge. Si* $\prod(1 + a_n)$ *converge, alors* $\sum \log(1 + a_n)$ *converge vers une branche de* $\log\left(\prod(1 + a_n)\right)$.

Preuve 2.1.5 *Soit*

$$s_n = \sum_1^n \log(1 + a_i)$$

alors l'hypothèse implique que

$$s_n \to \sum_1^\infty \log(1 + a_i) = s,$$

disons, comme $n \to \infty$. *Autrement dit*

$$\prod_1^n (1 + a_i) = e^{s_n} \to e^s, n \to \infty$$

i.e.

$$\prod_1^\infty (1 + a_i) = e^s.$$

Supposons maintenant que

$$p = \prod_1^\infty (1 + a_i)$$

converge. Soit

$$p_n = \prod_1^n (1 + a_i).$$

Alors nous devons avoir

$$\log \frac{p_n}{p} \to 0$$

comme $n \to \infty$. *Nous le décomposons comme*

$$\log \frac{p_n}{p} = S_n - \log p + h_n(2\pi i).$$

Puis

$$\log \frac{p_{n+1}}{p} - \log \frac{p_n}{p} = \log(1 + a_{n+1}) + (h_{n+1} + h_n)2\pi i.$$

Mais le côté gauche a tendance à zéro en tant que $n \to \infty$. *Enregistrez également* $\log(1 + a_{n+1}) \to 0$ *comme* $n \to \infty$. *Ainsi*

$$h_{n+1} - h_n = 0$$

pour tout n *suffisamment grande. Qu'il en soit ainsi* h.

Puis

$$s_n - \log p + h(2\pi i) = \log \frac{p_n}{p} \to 0.$$

C'est

$$s_n \to S = \log p - h(2\pi i)$$

qui répond à la question posée auparavant la proposition.

Enfin, nous donnons un critère pour le produit absolument convergent

$$\prod (1 + a_i)$$

en terme de

$$\sum \log(1 + a_i).$$

Théorème 2.1.4 $\prod_1^\infty (1+a_i)$ *converge absolument si et seulement si* $\sum_1^\infty \log(1+a_i)$ *converge absolument.*

Preuve 2.1.6 *Le résultat découle immédiatement du théorème 2.1.3 et du limite*

$$\lim_{z\to 0} \frac{\log(1+z)}{z} = 1.$$

Il suffit d'afficher

$$\sum |\log(1 + a_i)|$$

et

$$\sum |a_i|$$

un converges et diverges ensembles. Les détails sont laissés au lecteur.

Exemple 2.1.2

1. $\prod_1^\infty \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$ *converge chaque fois que* $\alpha > 1$.
2. $\prod_1^\infty \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{1}{3}$.
3. $$\prod_1^\infty \left(1 + \frac{x}{n}\right) = \begin{cases} +\infty, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$
4. $\prod(1 + z^n)$ *est absolument convergent pour tout* $|z| < 1$.
5. *Si* $\sum a_n$ *converge également, alors* $\prod(1 + a_n z)$ *converge absolument pour tout* z. *par*

exemple

$$\prod\left(1+\frac{z}{n^2}\right)$$

converge absolument.

6. *Si* $\sum a_n$ *et* $\sum |a_n|^2$ *sont convergentes, alors* $\prod(1+a_n)$ *est convergent, (Indice :*$log(1+a_n) = a_n + O(|a_n|^2)$*).*
7. *Supposons* $a_{2n-1} = \frac{-1}{\sqrt{n+1}}, a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$*. Alors* $\prod(1+a_n)$ *converge, mais* $\sum a_n$ *et* $\sum a_n^2$ *et les deux divergent.*
8. *Si* a_n *est réel et* $\sum a_n$ *est convergent, alors le produit* $\prod(1+a_n)$ *converge ou diverge vers zéro selon que* $\sum a_n^2$ *converge ou diverge respectivement.*

2.2 Produits infinis pour les fonctions

Il n'est pas difficile de voir que les principaux résultats de la section précédente peuvent être généralisés à un produit infini de fonctions.
Soit G une région de $\mathbb{C}$, et f_n une suite de fonctions analytiques défini sur G.

Théorème 2.2.1 *Soit* $f_n \subset H(G)$ *et* $\sum_1^\infty |f_n|$ *converge uniformément sur toutes les feuilles compactes de* G*. Alors le produit infini*

$$\prod(1+f_n(z))$$

converge uniformément à une fonction analytique f *sur* G*, i.e.* $\prod_1^\infty(1+f_n) = f \in H(G)$*. De plus,* f *a un zéro à ceux -ci, et seulement les points de* G *auxquels au moins un des facteurs est égal à arre L'ancre d'un tel zéro est fini et est égal à la somme des ordres vanish auquel ces facteurs.*

Preuve 2.2.1 *Soit* K *tout sous ensemble compact de* G*. Étant donné que*

$$\sum |f_n|$$

converge uniformément sur K*, il existe un* $M > 0$ *tel que* $\sum_1^\infty |f_n(z)| < M$ *pour tout* $z \in K$*. Ainsi, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a*

$$(1+|f_1(z)|)\ldots(1+|f_n(z)|) \leq e^{|f_1(z)|+\ldots+|f_n(z)|} < e^M$$

Pour tous $z \in K$. Fixer

$$P_n(z) = \prod_1^\infty (1 + |f_i(z)|)\,.$$

Alors

$$\begin{aligned} P_n(z) - P_{n-1}(z) &= (1 + |f_1(z)|)\,...\,(1 + |f_{n-1}(z)|)\,|f_n(z)| \\ &< e^M |f_n(z)| \end{aligned}$$

pour tout $n \geq 2$ et tout $z \in K$. D'où

$$\begin{aligned} \left| \prod_1^n (1 + f_i(z)) - (1 + f_1(z)) \right| &\leq \sum_{i=2}^n (P_i(z) - P_{I-1}(z)) \\ &< e^M \sum_{i=2}^n |f_i(z)| < e^{2M} \end{aligned}$$

Pour tout $z \in K$. On en déduit donc

$$\prod_1^\infty (1 + f_i(z)) - (1 + f_1(z))$$

converge uniformément sur K. Mais $H(G)$ est complet, donc

$$\prod_1^\infty (1 + f_i(z)) - (1 + f_1(z))$$

est analytique et d'où $\prod_1^\infty (1 + f_i(z)$ est analytique sur K. Mais K est arbitraire, donc

$$\prod_1^\infty (1 + f_i(z))$$

est analytique sur G.

Puisque

$$\sum |f_n(z)| < \infty$$

pour chaque $z \in K$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_n^\infty |f_i(z)| < \frac{1}{2}$$

pour tout $n > N$. *Supposons maintenant que* $z \in K$ *et* $f(z) = 0$. *Il s'ensuit que*

$$\prod_{N+1}^{\infty} (1 + f_i(z)) \neq 0$$

sur K *et donc le ordre de zéro est égal à la somme des ordres de ces facteurs*

$$(i.e. \prod_{1}^{N} (1 + f_i(z))$$

nulle.

Remarque 2.2.1 *Il est clairement d'après la preuve du théorème 2.1.4 que la* $\sum |f_i(z)|$ *et la* $\sum |\log(1 + f_i(z))|$ *convergent et divergent ensemble. Pouvons-nous reformuler le théorème 2.2.1 de telle sorte que l'hypothèse* $\sum |f_i| < \infty$ *est remplacé par*

$$\sum |\log(1 + f_i)| < \infty.$$

Il ressort que les deux conditions sont utiles dans les applications.

2.3 Factorisation de Weierstrass

Supposons f qu'il soit entière et non disparaissant. Ensuite, nous pouvons écrire f comme e^g où g est une fonction entière. Si f n'a qu'un nombre fini de zéros (peut être répété) $z_1, z_2, ..., z_n$, disons, alors

$$\frac{f}{(z-z_1)...(z-z_n)}$$

est entière et ne disparaît pas. Ainsi nous avons

$$f(z) = \prod_{i=1}^{n}(z-z_i)e^g.$$

Une question naturelle est pour représentation pour f comme ci-dessus lorsque f a un nombre infini de zéros. Nous pouvons également considérer la question ci-dessus comme un problème d'interpolation : Étant donné $z_1, z_2, ...z_n, ...$ et $w_1, w_2, ..., w_n, ...$, on trouvons une fonction entière f telle que $f(z_i) = w_i$ pour $i = 1, 2, 3, ...$ Si $w_i = 0$ pour $i = 1, 2, ...$, alors notre question devenir un cas particulier du problème d'interpolation.
Ainsi, une estimation naturelle d'une réponse de l'interpolation est la fonction

$$f(z) = z^m e^g \prod_{1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_i}\right).$$

Mais on ne sait pas si une telle fonction existe puisque le produit infini peut diverger. D'après la proposition 2.1.2, $\prod_{1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_i}\right)$ converge si

$$\sum\left|\frac{z}{z_i}\right| = |z|\sum\left|\frac{1}{z_i}\right|$$

est convergent pour chaque z. Donc si $z_n = n^2$, puis

$$\sum\left|\frac{1}{z_n}\right| = \sum\frac{1}{n^2} < \infty$$

et ainsi f a la forme factorisée ci-dessus. Weierstrass a pu créer un facteur de production convergent appelé facteur primaire de sorte qu'une factorisation de f existe toujours eu égard à la sépence z_n.

Définition 2.3.1 *Soit $p \geq 0$ est un entier. Nous définissons les facteurs de Weierstrass*

principal par

$$E_p(Z) = E(z,p) = \begin{cases} (1-z)exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + ... + \frac{z^p}{p}\right), p \geq 1; \\ 1-z, \qquad p = 0. \end{cases}$$

Théorème 2.3.1 *(Théorème de factorisation de Weierstrass) Soit* $\{a_n\}$ *est une suite de nombres complexes avec* $\lim a_n = \infty$*. Alors il existe une fonction entière* f *avec* $f(a_n) = 0$ *pour tout* n *et* f *a un zéro à* $z = 0$ *d'ordre* $m \geq 0$*. En réalité,*f *est donné par*

$$\begin{aligned} f(z) &= z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{P_n}\left(\frac{z}{a_n}\right) \\ &= z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) exp\left[\frac{z}{a_n} + ... + \frac{1}{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p_n}\right] \end{aligned}$$

où $g(z)$ *est une fonction entière et* $\{p_n\}$ *est une suite d'entiers positives pour laquelle*

$$\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1} < \infty$$

pour chaque $r > 0$*.*

Remarque 2.3.1 *(i)* $p_n = n - 1$ *satisfait toujours l'hypothèse. l'idée est de choisir* $\{p_n\}$ *aussi simple que possible.*

(ii) La factorisation ci-dessus a déjà pris en compte la multiplicité des $\{a_n\}$

Lemme 2.3.1 *Soit* p *est un entier positif. Puis*

(i) $|E_p(z) - 1| \leq |z|^{p+1}$ *si* $|z| \leq 1$ *;*

(ii) $|\log E_p(z)| < \frac{k}{k-1}|z|^{p+1}$*, si* $|z| < \frac{1}{k}$ *et* $k > 1$ *;*

(iii) $|E_p(z) - 1| < 6|z|^{p+1}$*, si* $|z| < \frac{1}{2}$*.*

Preuve 2.3.1 *(i) Nous développons* E_P *en une série de puissance*

$$E_p(z) = 1 + \sum_{1}^{\infty} a_k z^k$$

où tout a_k *ce qui est réel. Différencier les rendements des deux côtés*

$$E_p'(z) = \sum_{1}^{\infty} k a_k z^{k-1} \tag{2.3.1}$$

Mais le côté gauche est égal à

$$\begin{aligned} E'p(z) &= [(1-z)(1+z+z^2+...+z^{p-1}-1]exp\left(z+\frac{z^2}{2}+...+\frac{z^p}{p}\right) \\ &= [(1-z^p)-1]exp\left(z+\frac{z^2}{2}+...+\frac{z^p}{p}\right). \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

En comparent les coefficients de 2.3.1 et 2.3.2, on en déduit que

$$a_1 = ... = a_p = 0$$

et $a_k \leq 0$ *pour le reste de* k.

Donc pour $|z| \leq 1$,

$$\begin{aligned} |E_p(z)-1| &= \left|\sum_{p+1}^{\infty} a_k z^k\right| \\ &= |z^{p+1}|\left|\sum_{0}^{\infty} a_{p+k+1} z^k\right| \\ &\leq |z|^{p+1}\sum_{0}^{\infty}|a_{p+k+1}| \\ &= -|z|^{p+1}\sum_{0}^{\infty} a_{p+k+1} = |z|^{p+1} \end{aligned}$$

Puisque

$$0 = E_p(1) = 1 + \sum_{p+1}^{\infty} a_k$$

et donc

$$\sum |a_k| = -\sum a_k = 1.$$

(ii) Puisque

$$\begin{aligned}
|\log E_p(z) &= \left|\log(1-z) + z + \frac{z^2}{2} + ... + \frac{z^p}{p}\right| \\
&= \left|\left(-z - \frac{z^2}{2} - ...\right) + z + \frac{z^2}{2} + ... + \frac{z^p}{p}\right| \\
&= \left| -\frac{1}{p+1}z^{p+1} - \frac{1}{p+2}z^{p+2} - ...\right| \\
&\leq |z|^{p+1}\left(\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2}|z| + \frac{1}{p+3}|z|^2 + ...\right) \\
&\leq |z|^{p+1}(1 + |z| + |z|^2 + ...) \\
&< |z|^{p+1}\left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + ...\right) = \frac{k}{k-1}|z|^{p+1}.
\end{aligned}$$

(iii) Par la définition de $E_p(z)$,

$$\begin{aligned}
|E_p(z) - 1| &= \left|(1-z)exp\left(z + \frac{z^2}{2} + ... + \frac{z^p}{p}\right) - 1\right| \\
&\leq \left(\frac{|z|^{p+1}}{p+1} + \frac{|u|^{p+2}}{p+2} + ...\right) - 1 \\
&\left(par 1 - z = exp\left(-z - \frac{z^2}{1} - ...\right)\right) \\
&\leq exp[|z|^{p+1}(1 + |z| + |z|^2 + ...)] - 1 \\
&= exp\left(|z|^{p+1}\frac{1}{1-|z|}\right) - 1 \\
&< exp(2|z|^{p+1}) - 1 \\
&\leq 2|z|^{p+1}exp(2|z|^{p+1}).\because e^x - 1 \leq xe^x pour x \geq 0 \\
&< 2|z|^{p+1}e^1 < 6|z|^{p+1}.
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant prouver le théorème 2.3.1

Preuve 2.3.2 *Soit $\{a_n\}$ être la suite donnée de nombres complexes telle que $a_n \to \infty$ comme $n \to \infty$. Ainsi étant donné toute $|z| = r$, nous peut trouver un $N > 0$ tel que*

$$|a_n| > 2r,$$

ou alors

$$\left|\frac{z}{a_n}\right| < \frac{1}{2}$$

pour $|z| < r$. *Ainsi lemme 2.3.1 donne*

$$\left|E_p\left(\frac{z}{a_n}\right) - 1\right|) < 6\left|\frac{z}{a_n}\right|^{p_n+1} < \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1}$$

Pour $n > N$ *et* $|z| < r$. *il résulte de l'hypothèse que la somme*

$$\sum (E_p(z/a_n) - 1)$$

converge uniformément et absolument sur tout sous-ensemble compact de $B(0, r)$. *Le théorème 2.2.1 implique que le produit infini*

$$\prod_1^\infty E_p(z/a_n)$$

converge vers une fonction analytique dans $B(0, r)$. *Mais* r *est arbitraire, donc c'est en fais une fonction entière.*

Supposons que ce soit$f$ *une fonction entière avec des zéros données par* a_n, *alors*

$$f/\prod_1^\infty E_{p_n}(z/a_n)$$

est sans zéro. On peut donc trouver une fonction entière g *tel que*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_1^\infty E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

où $m \geq 0$ *est un entier.*

Il est facile de voir que l'on peut toujours trouver la suite p_n *par choisir* $p_n = n - 1$. *Depuis*

$$\sum \left|\frac{r}{a_n}\right|^{p_n+1} < \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n < +\infty$$

pour chaque r. *Ceci complète la démonstration du théorème.*

Cette alternativement, on peut prouver le théorème en appliquant le lemme 2.3.1 (ii). *On choisit* $k > 1$ *et* N *si grand que* $|a_n| > kr$ *pour* $n > N$ *et* $|z| < r$.

Ainsi

$$\left|\log E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| < \frac{k}{k-1}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{p_n+1} < \frac{k}{k-1}\left(\frac{1}{k}\right)^{p_n+1}.$$

Choisir à nouveau $p_n = n-1$ *implique que le*

$$\sum |\log E_{p_n}(z/a_n)|$$

converge uniformément. La discussion dans la remarque après le théorème 2.2.1 montre que

$$\prod_1^\infty E_{p_n}(z/a_n)$$

converge vers une fonction entière. Vous pouvez remplir les détails à titre d'exercice.

Remarque 2.3.2 *Notez que certains garrot.... : Soit* a_n *être sequence de nombre complexe avec* $\lim a_n = \infty$*, alors il existe* p_n *telle que la suite* f *est une fonction entière*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_1^\infty E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

Où g *est une fonction entière.*

C'est parce que nous pouvons toujours obtenir l'estimation, donc

$$\left|E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right) - 1\right| < 6\left(\frac{1}{2}\right)^{p_n+1}$$

Par conséquent, toute séquence entière non négative croissante p_n *fera converger*

$$\sum |E_{p_n}(z/a_n) - 1|$$

uniformément.

Proposition 2.3.1 *Supposons que* G *est un art ouvert et* $\{f_n\} \subset H(G)$ *que* $f = \prod f_n$ *converge en* $H(G)$*. Puis*

(a) $f' = \sum_{k=1}^\infty \left(f_k' \prod_{n\neq k} f_n\right)$

(b) $\frac{f'}{f} = \sum_{k=1}^\infty \frac{f_k'}{f_k}$

Sur tout sous-ensemble compact $K \subset G$ *fourni* $f \neq 0$ *sur* K*. (voir Conway P.174)*

Preuve 2.3.3 *(croquis) pour* (a). *Considérons*

$$F_k' = \sum_{i=1}^{k} \left(f_i' \prod_{n \neq i} f_i \right) = \left(\prod_{1}^{k} f_i \right)'.$$

Par le théorème 2.3.1, puisque nous avons $F_k \to f$, *alors*

$$\left| f' - \sum_{i=1}^{k} \left(f_i' \prod_{n \neq i} f_n \right) \right|$$

converge en $H(G)$ *et* $f' = \sum_{i=1}^{\infty} \left(f_i' \prod_{n \neq i} f_n \right)$ *requis pour* (b), *soit* K *un ensemble compact arbitraire. Donc*

$$|f| > a > 0$$

pour tout $z \in K$. *Alors*

$$\left| \frac{f'}{f} - \frac{F_k'}{F_k} \right| = \left| \frac{f'F_k - fF_k'}{fF_k} \right| \to 0$$

comme $k \to \infty$ *depuis* $F_k' \to f'$ *et* $F_k \longrightarrow f$ *en* $H(G)$.

CHAPITRE 3

QUELQUES COMPLÉMENTS ET EXEMPLES

La forme donnée par le théorème de factorisation peut souvent se réécrire

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{a_n}$$

où les a_n sont les zéros de f, en pratique, la difficulté est le plus souvent de déterminer la fonction $g(z)$.

On a en particulier :

3.1 Factorisation de la fonction sin

On définit

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + ...$$

Comme cette série converge uniformément et absolument sur un disque fermé centré à l'origine, on pourrait réarranger les termes de telles sorte que

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

Il s'ensuit que chaque zéro de $\sin(\pi z)$ est simple.

En fait les zéros sont réels et égaux à : $0, \pm 1, , \pm 2, ..., \pm n, ...$

Soit a_k les zéros non nuls. Alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_k|}\right)^2 = \sum_{\binom{-\infty}{(n\neq 0)}}^{\infty} \left(\frac{r}{n}\right)^2 = r^2 \sum_{\binom{-\infty}{(n\neq 0)}}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

convergent toujours pour chaque $r > 0$ en choisissant $\{p_n\} = \{1\}$. Il résulte du théorème de factorisation de Weierstrass que

$$\begin{aligned} \sin \pi z &= z e^{g(z)} \prod_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n} \\ &= z e^{g(z)} \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \end{aligned}$$

pour une fonction entière $g(z)$.

On déduit de la proposition 2.3.1 que

$$\pi \cot \pi z = \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + g'(z) + \sum_{1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

converge uniformément besoin d'un résultat standard d'intégration de contour qui peut être trouvée à (Conway p122) $\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$ pour $z \in \mathbb{Z}$.

Donc g identiquement est une constante.

En fait $g(z) = \log \pi$ puisque $\frac{\sin \pi z}{\pi z} \to 1$ lorsque $z \to 0$,

finalement on obtient

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2}).$$

CONCLUSION

Le théorème qui porte le nom de Kart Weierstrass est étroitement lié à un résultat selon lequel chaque suite tendant vers l'infini à une fonction entière associée avec des zéros exactement aux points de cette suite.
Une généralisation du théorème l'étude aux fonctions méromorphes et permet de considérer une fonction méromorphe donnée comme un produit de trois facteurs : des termes dépendant des zéros et des pôles de la fonction, et une fonction holomorphe non nulle associée.

BIBLIOGRAPHIE

[1]

[2]

[3]

[4] **W.K.Hayman** ; Meromorphic functions ;Oxford Mathematical Monographs Claren- don Press, Oxford, 1964.