Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr. Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de **Master en Mathématiques**

Spécialité :

Recherche Opérationnelle

par

ABDESLAMI Dalila

ATTAK Nadia

Thème

L'INDICE b-CHROMATIQUE DE CERTAINS GRAPHES PARTICULIERS

Soutenu publiquement le devant le jury composé de :

LEMDANI Rachid	**MAA U.Y.F.M**	**Président**
IKHLEF ESCHOUF Noureddine	**MCA U.Y.F.M**	**Encadreur**
ZAMIME Mohamed	**MCB U.Y.F.M**	**Examinateur**

Juin 2018

Table des matières

RESUME **7**

ABSTRACT **8**

RESUME **9**

Remerciements **10**

Dédicace **11**

Dédicace **12**

Introduction **13**

1 Notions fondamentales sur la théorie des graphes **17**

1.1 Notions sur les graphes 17

1.1.1 Graphes 17

1.1.2 Voisinages et degrés 18

1.1.3 Sous-graphes et graphe partiels 19

1.1.4 Chaînes et cycles 19

1.1.5 Distances, excentricité, diamètres, rayons et centres 20

1.1.6 Ensemble minimal (resp.maximal) / minimum (resp.maximum) 20

1.1.7 Graphes particuliers 21

1.1.8 Quelques paramètres de graphes 24

1.1.9 Quelques opérations sur les graphes 25

1.2 Complexité algorithmique 25

1.2.1 Problème de décision 26

1.2.2 Classes de complexité 26

1.3 Coloration dans les graphes 28

1.3.1 Coloration des sommets 28

1.3.2 Coloration des arêtes 30

2 Quelques résultats existants sur la b-coloration **33**

2.1 Résultats fondamentaux sur le nombre b-chromatique 33

2.2 Résultats fondamentaux sur l'indice b-chromatique 35

3 Indice b-chromatique de certains graphes particuliers **38**

3.1 L'indice b-chromatique de certains graphes classiques 38

3.2 l'indice b-chromatique de la roue 39

3.3 Indice b-chromatique d'une couronne d'une chaîne et d'un cycle 40

3.4 Indice b-chromatique du prisme d'une chaîne et d'un cycle 42

3.5 L'indice b-chromatique du graphe milieu et total d'une chaîne et d'un cycle . . 50

3.6 Graphe avec $b'(G) = 2$ 62

Conclusion et Perspectives **64**

Table des figures

1.1 Exemple d'un graphe simple 18

1.2 Exemple d'un graphe G avec un graphe partiel et un sous graphe de G. 19

1.3 Une chaine P_5 et un cycle C_5 20

1.4 Exemple d'un graphe connexe. 21

1.5 Un graphe complet d'ordre 4 (K_4). 21

1.6 Un graphe G et son complémentaire. 22

1.7 Un graphe 3-régulier. 22

1.8 Un graphe biparti complet $K_{3,3}$. 23

1.9 Un arbre T. 23

1.10 Une étoile K1,n. 23

1.11 Un graphe avec $\chi'(G) = 6$. 31

3.1 Exemple d'une roue W_4 39

3.2 une b-coloration d'arêtes de W_4 utilisant 5 couleurs 40

3.3 Exemple d'une couronne d'une chaîne (P_3) 40

3.4 Une b-coloration des arêtes de $Cr(P_n)$ avec 4 couleurs pour $n \in \{5,6,7\}$. 41

3.5 Une b-coloration des arêtes de Cr (P_8) avec 5couleurs 41

3.6 Une b-coloration des arêtes de $Cr(C_4)$. 42

3.7 Une b-coloration des arêtes de Cr (C_n) avec 5 couleurs pour $n \in \{5,6,7\}$. 43

3.8 Une b-coloration des arêtes de (P_3P_3) avec 3 couleurs 44

3.9 Une b-coloration des arêtes de P_4P_4 avec 4 couleurs. 45

3.10 Une b-coloration des arêtes de P_5P_5 avec 5 couleurs. 46

3.11 Une b-coloration des arêtes de P_5P_5 avec 4couleurs. 47

3.12 Une b-coloration des arêtes de P_6P_6avec 5couleurs. 47

3.13 Une b-coloration des arêtes de C_3C_3 avec 3 couleurs 49

3.14 Une b-coloration des arêtes de (C_5C_5) avec 5 couleurs. 49

3.15 Exemple d'un graphe milieu d'une chaîne (P_4). 50

3.16 Une b-coloration des arêtes de M(P_n) pour $n \in \{5,6,7\}$. 51

3.17 Une b-coloration des arêtes deM(P_n) pour $n \in \{8,9,10\}$. 52

3.18 Une b-coloration des arêtes deM (P_{11}). 52

3.19 Une b-coloration des arêtes de T (P_3). 53

3.20 Une b-coloration des arêtes de T (P_4). 53

3.21 Une b-coloration des arêtes de T (P_5) avec 6 couleurs. 54

3.22 Une b-coloration des arêtes de T (P_5). 54

3.23 Une b-coloration des arêtes de T (P_n) avec 6 couleurs pour $n \in \{6,7\}$. 54

3.24 Une b-coloration des arêtes de T (P_7). 55

3.25 Une b-coloration des arêtes avec 5 couleurs de M(C_n) pour $n \in \{3,4,5\}$. 55

3.26 Une b-coloration des arêtes de M(C_6). 56

3.27 Une b-coloration des arêtes de M(C_n) pour $n \in \{7,8\}$. 56

3.28 b-coloration d'arêtes de T(C_3) avec 6 couleurs. 57

3.29 b-coloration d'arêtes de T(C_4) avec 6 couleurs. 57

3.30 b-coloration d'arêtes de T(C_4) avec 7 couleurs. 59

3.31 Une b-coloration des arêtes de T(C_4) avec 7 couleurs. 59

3.32 b-coloration d'arêtes de T(C_4) avec 7 couleurs. 60

3.33 b-coloration d'arêtes de T(C_4) avec 7 couleurs. 60

3.34 b-coloration d'arêtes de T(C_4) avec 7 couleurs. 61

3.35 Une b-coloration des arêtes de $T(C_5)$ et $T(C_6)$. 61

3.36 Une b-coloration des arêtes de certains graphes 63

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Dr. Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de
Master en Mathématiques
Spécialité :
Recherche Opérationnelle
par

ABDESLAMI Dalila
ATTAK Nadia

Thème

L'INDICE b-CHROMATIQUE DE CERTAINS GRAPHES PARTICULIERS

Soutenu publiquement le devant le jury composé de :

Rachid LEMDANI	**MAA**	**U.Y.F.M**	**Président**
Noureddine IKHLEF ESCHOUF	**MCA**	**U.Y.F.M**	**Encadreur**
Mohamed ZAMIME	**MCB**	**U.Y.F.M**	**Examinateur**

Juin 2018

RESUME

Dans ce mémoire, notre étude est portée sur la b-coloration des arêtes et l'indice b-chromatique.

Une coloration propre des arêtes d'un graphe G est une affectation de couleur aux arêtes de G de sorte que deux arêtes ayant une extrémité commune ne reçoivent pas la même couleur.

La b-coloration des arêtes d'un graphe G est une coloration propre des arêtes de G de telle sorte que chaque classe de couleur possède au moins une arête adjacente à au moins une arête dans chacune des autres classes de couleur. Une telle arête est dite b-arête. L'indice b-chromatique, noté b' (G), est le nombre maximum de couleurs pour lequel G admet une b-coloration d'arêtes avec b' (G) couleurs.

Dans ce travail, nous déterminons l'indice b-chromatique de certains graphes classiques comme le cycle, la chaîne, la roue, la double étoile, la couronne d'une chaîne et d'un cycle, le prisme d'une chaîne et d'un cycle et du graphe milieu et total d'une chaîne et d'un cycle. En outre, nous donnons une caractérisation des graphes ayant pour indice b-chromatique égal à 2.

ABSTRACT

In this report, the aim of our work is to study the concept of the b-edge coloring and the b-chromatic index.

A proper edge coloring of a graph is an edge coloring such that no two adjacent edges are assigned the same color.

The b-edge coloring of a graph G is a proper edge coloring of G such that each color class has at least one edge adjacent to at least one edge in each of the other color classes. Such an edge is called b-edge.

The b-chromatic index, note b' (G), is the maximum number of colors for which G admits a b-coloring of edges with b' (G) colors

We determine the b-chromatic index of some classical graphs as the cycle, the path, the wheel, the double star, a corona of a path and cycle, the prism of a path and a cycle and the middle and total graph of a path and a cycle. In addition, we give a characterization of the graph having a b-chromatic index equal to 2.

RESUME

Remerciements

Avant tout nous remercions *ALLAH* tout puissant de nous avoir donné le courage et la patience pour terminer ce travail.

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce aux plusieurs personnes à qui nous voudrons témoigner toute notre reconnaissance.

Nous voudrons tout d'abord adresser toute notre gratitude à Monsieur *Noureddine IKHLEF ESCHOUF*, Maître de Conférences à l'université Dr. Yahia Farés de Médéa, d'avoir accepté d'encadrer notre mémoire, ainsi pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter notre réflexion.

Nous remercions sincèrement Monsieur *Rachid LEMDANI*, Maître Assistant à l'université Dr. YAHIA FARES de Médéa, pour nous avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Nous remercions également Monsieur *ZAMIME Mohamed*, Maître de Conférences à l'université Dr. YAHIA FARES de Médéa, pour l'honneur qu'il nous a fait en acceptant d'examiner ce travail.

Nous voudrons également exprimer nos sincères remerciements à mademoiselle *Amel BENDALI-BRAHAM* pour ses précieux conseils, sa disponibilité et son aide et sa confiance tout au long de ce travail de recherche.

Nous remercions très sincèrement Monsieur *BENAICHOUCHE-Noureddine*, Maître Assistant à l'université Dr. Yahia Farés de Médéa qui nous a beaucoup aidés dans ce mémoire.

Dédicace

ATTAK Nadia

Je m'incline devant *ALLAH* le tout puissant qui m'a ouvert les portes du savoir et m'a aidé à la franchir

Je dédie ce modeste travail à :

Mon père source de respect, en témoignage de ma grande reconnaissance pour tout l'effort et le soutien moral et matériel qu'il m'a toujours apporté *Saïd*.

Ma chère et tendre mère, source d'affection, d'amour, de courage et d'inspiration qui a tant sacrifié pour me voir atteindre ce jour *Fatima*.

Mes très chères sœurs *Dalila, Fouzia, Noura* et mes très chers frères *Abd El Hamid, Djamel, Ahmed, Rabeh, Messoud, Abd Essalem* pour tout l'effort et leur soutien moral, leurs encouragements et leur patience durant la réalisation de ce travail.

Toute la famille *ATTAK*.

Ma camarade et binôme *ABDESLAMI Dalila*.

Mon intime amie et ma chère *LAOUFI Khadidja*.

Je dédie et remercie spécialement la personne qui est toujours à ma côté dans les moments difficiles et qui m'a donné toujours le courage et leur soutien moral, leur patience durant la réalisation de ce travail, le plus proche *Omar*.

Enfin, merci d'avance à ceux que j'ai porté dans mon cœur et je n'ai pas pu citer le nom.

Dédicace

ABDESLAMI Dalila

Je tien à dédier ce modeste travail à tous ceux qui m'ont encouragé durant toute la période de réalisation de ce travail.

En particulier, à

Mes chers parents *Nadir* et *Khadidja* qui partagent mes joies et mes pensées, et se sacrifient pour me voir réussir.

Mes chers frères *Amer, Fateh* et *Ibrahim*.

Mes chers sœurs *Ameria, Wahiba, Fatna, Salima* et *Malika*.

Mes nièces *Zohour*, *Aya* et *Manar*.

Ma chère tante *Fatima Zouhra* et chers oncles *Nadir* et *Rachid*.

Ma Binôme : *ATTAK Nadia*.

Mes amis *Souade, Amina, Hassiba, Sihame, Faiza, Saliha, Monira, Nadjet* et *khaoula* réalisant aussi leurs mémoires de Master, pour l'entraide dans les moments difficiles.

Et merci toute la famille *ABDESLAMI* et *GHAIDI*.

Introduction

La *théorie des graphes* est un très vaste domaine, en évolution constante tant du point de vue des applications que de celui des recherches fondamentales et constitue aujourd'hui un corpus de connaissances très important. La théorie des graphes est née au $18^{ème}$ siècle en essayant de trouver des solutions à des problèmes considérés comme étant des curiosités mathématiques. Elle est devenue une branche des mathématiques discrètes au début du $20^{ème}$ siècle grâce aux travaux de König, de Menger, de Cayley, puis de Berge et d'Erdos. Les graphes constituent à la fois une théorie et un outil qui permettent de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude de graphes.

Un *graphe* est un dessin géométrique défini par deux ensembles, son ensemble de *sommets* et son ensemble d'*arêtes* (arcs, si le graphe est orienté), une arête étant une paire de sommets reliés. La théorie des graphes introduit de nombreuses des familles de graphes qui vérifient certaines propriétés. Les domaines d'applications des graphes sont diverses, justifiant une recherche importante, on peut citer les réseaux de communication, la gestion de la production et les problèmes d'ordonnancement des tâches, les flots dans les réseaux, la chimie, la physique et l'économie, etc..

En 1852, un jeune englais Francis Guthrie s'est demandé s'il est possible de colorer toute carte géographique avec seulement quatre couleurs de sorte que deux pays frontaliers sont colorés différemment. Ce n'est qu'en 1976, que deux chercheurs K. Appel et W. Haken ont pu répondre affirmativement à la conjecture des quatre couleurs à l'aide d'un ordinateur. La recherche d'une réponse à ce problème est à l'origine de nombreux résultats relatifs à la coloration dans les graphes.

Soit G = (V, E) un graphe simple, d'ensemble de sommets V et ensemble d'arêtes. Une *coloration propre des sommets* est une application c de V dans N qui affecte une couleur (entier

positif) à chaque sommet, telle que deux sommets adjacents n'ont pas la même couleur. Une *classe de couleur i* est un ensemble de sommets qui ont la même couleur.

Le nombre minimum de couleurs utilisées dans la coloration c est dit le *nombre chromatique*, noté $\chi(G)$. Une coloration propre qui utilise un nombre minimum de couleurs est dite *coloration classique* ou bien χ-*coloration*. Beaucoup de paramètres de coloration sont dérivées de la coloration classique, la plupart de ces paramètres minimisent le nombre de couleurs nécessaires. Il existe d'autres qui ont pour objet la maximisation du nombre de couleurs.

Une façon de minimiser le nombre de couleurs d'un graphe consiste, à partir d'une coloration propre donnée, de réduire le nombre de classes de couleurs en fissionnant des classes de couleurs différentes. Cette technique de coloration est impossible s'il existe une arête entre toute paire de stables, d'où l'introduction de la a-coloration et du nombre a-chromatique par Harary, Hedetniemi et Prins en 1967 [6]. Une *a-coloration* est une coloration propre telle que pour toute paire de couleurs différentes i et j, le sous-graphe engendré par les deux classes de couleur i et j, contient au moins une arête. Le nombre a-chromatique, noté $\psi(G)$, est le nombre maximum de classes de couleur dans une a-coloration. Il est à noter que cette coloration et ce paramètre ne font pas l'objet d'une étude approfondie dans ce mémoire, mais comme ils ont été à l'origine des colorations et des paramètres qui ont retenu notre attention, nous donnons un aperçu des principaux résultats de la littérature liés à la a-coloration et au paramètre a-chromatique.

Un autre paramètre de coloration a été défini à partir du nombre a-chromatique. D'où, en 1999, la notion de la a-coloration a inspiré Irving et Manlove [1, 2] à introduire un autre type de coloration, d'où une autre manière de réduire le nombre de couleurs dans un graphe a été introduite. Elle consiste à essayer, à partir d'une coloration propre donnée du graphe, de réduire le nombre de couleurs en transférant les sommets de la même classe vers les autres classes de couleur, d'où la définition de la b-coloration. Une *b-coloration*, dite aussi *coloration dominante*, est une coloration propre telle que toute classe de couleur i contient un sommet adjacent à au moins un sommet de chaque classe de couleur $j \neq i$. Ce sommet est dit sommet b-dominant de couleur i (ou bien en bref b-sommet). Le *nombre b-chromatique* d'un graphe G, noté $b(G)$, est le nombre maximum de classes de couleur dans une b-coloration.

Il existe plusieurs type de coloration, on cite à titre d'exemple la *coloration des arêtes*. Le problème de *coloration des arêtes* d'un graphe est l'un des problèmes fondamentaux dans la théorie des graphes. Une *coloration propre d'arêtes* consiste à attribuer à chaque arête d'un graphe G = (V, E) une couleur de sorte que deux arêtes de E ayant une extrémité commune ne reçoivent pas la même couleur. Un ensemble d'arêtes qui ne sont pas adjacentes s'appelle un *couplage*, et ce dernier est une *classe de couleur*. Puisque chaque ensemble d'arêtes colorées avec la même couleur est un couplage, une coloration des arêtes d'un graphe est en effet une partition de E en couplages. *L'indice chromatique*, noté $\chi'(G)$, est le plus petit entier k pour lequel le graphe G admet une coloration d'arêtes propre de G avec k couleurs. L'indice chromatique d'un graphe G est le nombre chromatique de son graphe de ligne, autrement dit si $\mathscr{L}(G)$ est le graphe de ligne de G, alors $\chi'(G) = \chi(\mathscr{L}(G))$.

Il est assez naturel de réflechir à la version arête de la b-coloration d'un graphe.

Une *b-coloration des arêtes* d'un graphe G est une coloration propre des arêtes de G de telle sorte que chaque classe de couleur possède au moins une arête adjacente à au moins une arête dans chacune des autres classes de couleur. Une telle arête est dite *b-arête*. *L'indice b-chromatique*, noté $b'(G)$, est le nombre maximum de couleurs pour lequel G admet une b-coloration d'arêtes avec $b'(G)$ couleurs.

Ce mémoire est structuré en trois chapitres, voici description.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions de théorie des graphes nécessaires à la compréhension de ce mémoire. Nous donnons également un petit aperçu de quelques notions élémentaires de la complexité algorithmique. Puis, nous définissons la coloration des sommets et la coloration des arêtes dans les graphes.

Dans la deuxième chapitre, nous exposons brièvement quelques résultats fondamentaux obtenu sur la b-coloration des sommets, où nous citons quelques bornes et valeurs exactes du nombre b-chromatique pour certaines classes de graphes et des résultats établis dans le domaine de la b-coloration des arêtes.

Le troisième chapitre porte sur notre contribution, d'où nous donnons la valeur exacte de l'indice b-chromatique de certains graphes, comme la chaîne, le cycle, la roue, la double étoile, la couronne d'une chaîne et d'un cycle, le prisme d'une chaîne et d'un cycle et le graphe milieu et le graphe total d'une chaîne et d'un cycle. De plus, nous caractérisons les

graphes ayant pour indice b-chromatique égal à 2.

Chapitre 1

Notions fondamentales sur la théorie des graphes

Dans la première partie de ce chapitre, nous présentons des notions classiques de la théorie des graphes ainsi des notations usuelles, dont nous aurons besoin durant la réalisation de ce travail. Dans la deuxième partie, nous exposons un petit aperçu sur la complexité algorithmique, dans le but de savoir la complexité des problèmes rencontrés en théorie des graphes. La dernière partie, est destinée à quelques types de coloration de graphes et leurs paramètres associés. Où, nous définissons la coloration des sommets et la coloration des arêtes dans les graphes.

1.1 Notions sur les graphes

1.1.1 Graphes

Un graphe G = (V, E) est constitué d'un ensemble fini et non vide V d'éléments appelés *sommets,* et d'un ensemble E de paires de divers sommets, appelées *arêtes.*

— On appelle *ordre* d'un graphe G , noté n, le nombre de ses sommets et qui est égal au cardinal de V, et taille de G, noté m, le cardinal de E. Les sommets sont notés de manière usuelle par des lettres minuscules : v_1 v_2 v_3 etc...

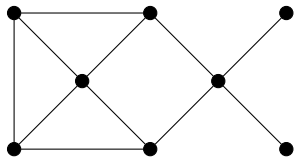


FIGURE 1.1 – Exemple d'un graphe simple

Pour $v_1, v_2 \in V$, on note par v_1v_2 ou (v_1v_2) une arête entre v_1 et v_2.

— Deux sommets peuvent être liés par plusieurs arêtes, on les appelle arêtes *multiples*. Une *boucle* est une arête dont ses extrémités sont confondues.

— Un graphe est dit *simple* s'il est sans boucles et sans arêtes multiples.

— Deux graphes G et G′ sont isomorphes s'il existe une bijection $f : V(G) \longrightarrow V(G')$ telle que pour tous $v_1, v_2 \in V$, on a $v_1v_2 \in E(G)$ si et seulement si $f(u)f(v) \in E(G')$.

1.1.2 Voisinages et degrés

— Deux sommets v_1 et v_2 sont *adjacents* si l'arête v_1v_2 existe dans E. Les sommets v_1 et v_2 sont alors dits *voisins*.

— Deux arêtes sont dites adjacentes si elles ont une extrémité commune.

— Une arête est *incidente* à un sommet v, si v est l'une de ses extrémités.

— Le *voisinage ouvert* d'un sommet v de G, noté par $N_G(v)$, est défini par l'ensemble$N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E\}$.

— Le *voisinage fermé* de v, noté par $N_G[v]$, est défini par $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$.

— L'ensemble $N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G(v)$ (resp. $N_G[S] = \cup_{v \in S} N_G(v) \cup S$) est le voisinage ouvert (resp. fermé) du sous ensemble $S \subseteq V$. Parfois pour alléger les notations et s'il n'y a aucune confusion sur le graphe G, les voisinages ouvert et fermé d'un sommet v seront notés par $N(v)$ et $N[v]$ respectivement. De même, nous utiliserons les notations $N(S)$ et $N[S]$ au lieu de $N_G(S)$ et $N_G[S]$ respectivement.

— Le *degré* d'un sommet v de G, noté par $d_G(v)$, est le nombre d'arêtes incidentes à v. Dans un graphe simple, $d_G(v) = |N(v)|$. Un sommet de degré nul est dit sommet *isolé* et un sommet de degré un est dit sommet *pendant*, et un sommet qui est adjacent à un sommet pendant est dit *support*. On note par $\Delta(G)$ et $\delta(G)$ le degré maximum et le degré minimum de G respectivement. S'il n'y a aucun risque de confusion, on écrira

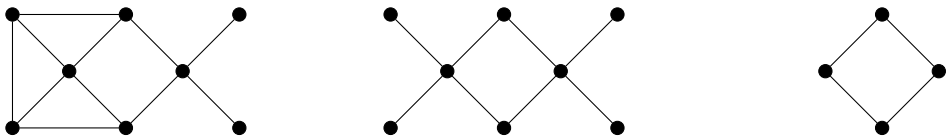
$d(v)$, Δ, et δ pour désigner $d_G(v)$, $\Delta(G)$ et $\delta(G)$ respectivement.

1.1.3 Sous-graphes et graphe partiels

Soit G = (V, E) un graphe.

Un graphe *partiel* de G est un graphe H = (V, E′) tel que E′ est un sous ensemble de E.

Pour un sous-ensemble S ⊆ V, le *sous-graphe* induit par S, noté G [S], est le graphe G′ = (S, E(S)), dont l'ensemble des sommets est S et l'ensemble des arêtes E(S) est formé de toutes les arêtes de G ayant leurs deux extrémités dans S. Autrement dit, on obtient G′ en enlevant un ou plusieurs sommets au graphe G, ainsi que toutes les arêtes incidentes à ces sommets.



Graphe simple G | Graphe partiel de G | Sous graphe de G

FIGURE 1.2 – Exemple d'un graphe G avec un graphe partiel et un sous graphe de G.

1.1.4 Chaînes et cycles

Soit G = (V, E) un graphe.

— Une *chaîne* P de G est une séquence finie de sommets $v_1, v_2, \ldots, v_k$, où pour tout $i = 1, ..., k-1$ (v_i, v_{i+1}) est une arête de G pour tout $i \neq j$. Les sommets v_1 et v_k sont les *extrémités* de la chaîne P, et les sommets $v_2, v_3, \ldots, v_{k-1}$ sont les *sommets interieurs* de P.

— Une chaîne P est *simple* si chaque arête de P est emprunté une seule fois.

— Une chaîne P est *élémentaire* si elle ne passe pas deux fois par le même sommet.

— Dans une chaîne P, une arête qui relie deux sommets non consicutifs est dite une *corde*.

— Une chaîne minimale induite par n sommets, notée par P_n, est une chaîne élémentaire sans corde.

— Un *cycle* est une chaîne dont ses deux extrémités sont confondues. On note par C_n le cycle induit par n sommets. De la même manière, on définit *cycle simple* et *cycle élémentaire*.

— La *longueur* d'un cycle est le nombre de ses arêtes.

— La *maille* d'un graphe G, notée $g(G)$, est la longueur du plus petit cycle dans G.



FIGURE 1.3 – Une chaine P_5 et un cycle C_5

1.1.5 Distances, excentricité, diamètres, rayons et centres

Soit G = (V, E) *un graphe et* u, v *deux sommets de* V.

— La *distance* entre u et v, notée $dist(u,v)$, est la longueur de la plus courte chaîne joignant u et v.

— *L'excentricité* de v , noté $exc(v)$, est définie $exc(v) = \max\{dist(v,w) : w \in V\}$.

— Le *diamètre* de G est $diam(G) = \max\{exc(v) : v \in V\}$.

— Le *rayon* de G est $r(G) = \min\{exc(v) : v \in V\}$.

— Un sommet de G ayant une excentricité minimale est appelé *centre*.

1.1.6 Ensemble minimal (resp.maximal) / minimum (resp.maximum)

— Un sous-ensemble A de V est dit *minimal* (resp. *maximal*) par rapport à une propriété $\mathscr{P}$, s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq A$ (resp. $B \supseteq A$) tel que G [B] vérifie $\mathscr{P}$.

— Un sous-ensemble A de V est dit *minimum* ou de *taille minimale* (resp. *maximum* ou de *taille maximale*) par rapport à une propriété $\mathscr{P}$, s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq V$

tel que G [B] vérifie $\mathscr{P}$ et |A| > |B| (resp.|B| > |A|) où |A| est le cardinal de l'ensemble A, c'est-à-dire le nombre de ses éléments.

1.1.7 Graphes particuliers

— Un grapheG = (V, E) est *connexe* si pour toute paire de sommets distincts du graphe il existe une chaîne les reliant. Une *composante connexe* d'un graphe est un sous-graphe maximal connexe

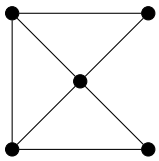


FIGURE 1.4 – Exemple d'un graphe connexe.

— Une arête $e \in$ E est dite *isthme* si le graphe G′ = (V, E − {e}) n'est pas connexe. Un sommet $v \in$ V est dit *sommet d'articulation* si le graphe G′ = (V − {v}, E) n'est pas connexe.

— Un graphe *complet* est un graphe simple où chaque sommet est relié à tous les autres du graphe. Le graphe complet d'ordre n est noté K_n. Dans ce graphe chaque sommet est de degré $n-1$.

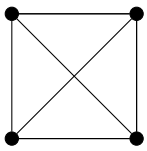
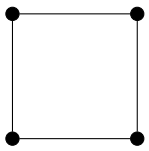


FIGURE 1.5 – Un graphe complet d'ordre 4 (K_4).

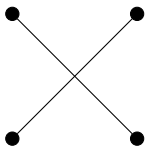
— Un graphe G = (V, E) est dit *planaire* s'il peut être dessiné dans le plan de sorte que ses arêtes ne se croisent pas.

— Un graphe *discret,* noté D_n, est un graphe sans arêtes.

— *Le graphe complémentaire* d'un graphe simple G = (V, E) noté $\overline{G} = (V, \overline{E})$, est le graphe défini par $V(\overline{G}) = V(G)$ et $\overline{E} = E(\overline{G}) = \{uv : u \in V(G), v \in V(G) \text{ et } uv \notin E(G)\}$.



Graphe G



Complémentaire de G

FIGURE 1.6 – Un graphe G et son complémentaire.

— Un graphe dont tous les sommets ont le même degré est dit *régulier*. Si le degré commun est d, alors on dit que le graphe est *d-régulier*. Un graphe 3-régulier est aussi appelé cubique.

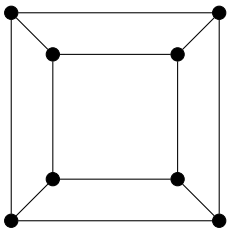


FIGURE 1.7 – Un graphe 3-régulier.

— Un graphe est dit *d-arête régulier* si toutes ses arêtes sont de degré d. Le graphe présenté dans la figure précédente est 4-arête régulier.

— Un graphe G = (V, E) est dit *biparti* si V peut se partager en deux sous-ensembles V_1 et V_2, de sorte que toutes les arêtes du graphe relient un sommet de V_1 à un sommet de V_2. *Un graphe biparti complet* est un graphe biparti ayant la propriété supplémentaire suivante : tous les sommets de V_1 sont adjacents à tous les sommets de V_2. Si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$, alors le graphe biparti complet est noté $K_{p,q}$.

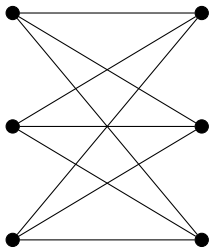


FIGURE 1.8 – Un graphe biparti complet $K_{3,3}$.

— On appelle *arbre,* et on note par T, un graphe connexe et sans cycles. Un arbre comporte exactement $(n-1)$ arêtes. Un arbre est dit trivial (resp. non trivial) s'il contient un seul sommet (resp. au moins deux sommets). On appelle *feuille* d'un arbre, un sommet de degré 1 (sommet pendant).

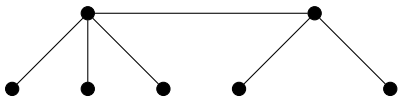


FIGURE 1.9 – Un arbre T.

— On appelle *étoile,* et on note par $K_{1,n}$, $(n \geq 3)$, l'arbre à $n+1$ sommets ayant n feuilles. Une *double étoile,* notée $S_{r,s}$ est le graphe obtenu en ajoutant une arête reliant deux centre de deux étoile $K_{1,r}$ et $K_{1,s}$.

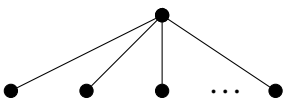


FIGURE 1.10 – Une étoile K1,n.

— Un *cactus* est un graphe où chaque arête appartient à au plus un cycle, de plus un cactus qui contient un seul cycle est dit *un cycle.*

— Un graphe est dit *sans griffe* (ou sans $K_{1,3}$) s'il ne contient pas $K_{1,3}$ comme sous-graphe induit.

— Soit G = (V, E) un graphe. Le *graphe adjoint* de G (ou *graphe de ligne*), noté $\mathscr{L}$(G), est le graphe obtenu en associant un sommet à chaque arête de G et en reliant deux sommets par une arête si les arêtes de G correspondant à ces deux sommets sont adjacentes.

— Une chenille est un arbre dont chaque sommet de degré au moins trois, a au plus deux voisins différents des feuilles.

Une façon de caractériser une chenille, est qu'il est un arbre pour lequel, si on enlève les feuilles, il reste une chaîne.

1.1.8 Quelques paramètres de graphes

— Une *clique* d'un graphe G = (V, E) est un sous-graphe complet. La taille d'une clique est le nombre de ses sommets. Une clique de taille p est notée par K_p. Le cardinal d'une clique maximum de G est noté par $\omega(G)$.

— *Un stable* dans un graphe G, appelé aussi, *ensemble indépendant*, est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents.

— Le cardinal d'un stable maximum de G , noté $\alpha(G)$, est appelé *nombre de stabilité* de G.

— Soit G = (V, E) un graphe. Un *couplage* M dans un graphe G est un sous-ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes, et on note $\beta(G)$ la taille du couplage maximum dans G. Un sommet x de G est dit *saturé* par le couplage M s'il existe une arête de M incidente à x, sinon x est dit *insaturé*. Un couplage qui sature tous les sommets de G est appelé un *couplage parfait* dans G. Un couplage est dit *parfait* s'il sature tous les sommets du graphe G.

— Soit G = (V, E) un graphe simple. Un sous-ensemble $S \subseteq V$ est un *dominant* de G, si tous sommet de $V - S$ est adjacent à au moins un sommet de S.

1.1.9 Quelques opérations sur les graphes

— Soit G = (V, E) un graphe simple. Et soient v un sommet de G, et e une arête de G. On note G − v le sous-graphe engendré par l'ensemble V \{v}, c'est-à-dire : G − v est le graphe obtenu à partir de G en supprimant le sommet v et toutes les arêtes incidentes à v. On note G − e le graphe G′ = (V, E \{e}), c'est -à-dire G − e est le graphe obtenu à partir de G en supprimant l'arête e (les sommets incidents à e ne sont pas supprimés). Pour un sous-ensemble de sommets S ⊆ V , on note G − S le sous-graphe engendré par V ⧹S.

— La *somme cartésienne* (ou *produit cartésien*) de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$, noté $G_1 \square G_2$, est le graphe G = (V, E) tel que V(G) = {$(u, v) : u \in V(G_1), v \in V(G_2)$} et deux sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont adjacents si $u_1 = u_2$ et $v_1 v_2 \in E_2$ ou $v_1 = v_2$ et $u_1 u_2 \in E_1$.

— Soient G et H deux graphes. *L'union* de G et H est le graphe G + H dont l'ensemble des sommets est V(G) ∪ V(H) et l'ensemble des arêtes est E(G) ∪ E(H). Pour un entier k donné, l'union de k copies de G est notée par kG.

— Le *joint* de G et H est le graphe noté G ∨ H obtenu à partir de G + H en ajoutant toutes les arêtes entre G et H.

— Le *produit cartésien* G□H est le graphe ayant pour ensemble de sommets V (G) × V (H) et dont deux sommets (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont reliés par une arête si et seulement si soit $x_1 x_2 \in$ E (G) et $y_1 y_2$, soit $y_1 y_2 \in$ E et $x_1 = x_2$. Autrement dit, deux sommets du produit G□H sont adjacents si et seulement si les sommets de l'une de leurs coordonnées sont égaux et ceux de l'autre coordonnée sont adjacents.

— Le *produit direct* G × H est le graphe ayant pour ensemble de sommets V(G) × V(H) et dont deux sommets $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$ sont reliés par une arête si et seulement si $x_1 x_2 \in$ E(G) et $y_1 y_2 \in$ E(H).

1.2 Complexité algorithmique

La théorie de la complexité s'intéresse à l'étude formelle de la difficulté des problèmes en informatique et plus précisément à leur résolution de façon efficace, en tenant compte le temps de calcul et les données stuquées en mémoire.

1.2.1 Problème de décision

Chaque problème informatique peut se réduire à un problème de *décision*, c'est-à-dire un problème formulé comme une question dont la réponse est Oui ou Non. Un problème qui n'est pas formulé de cette manière peut être très simplement transformé en un problème de décision équivalent. Le problème du voyageur de commerce, qui cherche, dans un graphe, à trouver la taille du cycle le plus court passant une fois par chaque sommet, peut s'énoncer en un problème de décision ainsi : Existe-t-il un cycle passant une et une seule fois par chaque sommet tel que la somme des coûts des arcs utilisés soit inférieure à k, avec $k \in \mathbb{N}$. Ce problème est équivalent au problème du voyageur de commerce au sens où si l'on sait résoudre efficacement l'un, on sait aussi résoudre efficacement l'autre.

1.2.2 Classes de complexité

La théorie de la complexité repose sur la définition de classes de complexité qui permettent de classer les problèmes en fonction de la complexité des algorithmes qui existent pour les résoudre.

Classe P :

Un problème p est dit Polynomial (ie. $p \in$P), s'il peut être résolu par un algorithme déterministe en un temps polynomial.

Prenons par exemple le problème de la connexité dans un graphe. Étant donné un graphe à n sommets, il s'agit de savoir si toutes les paires de sommets sont reliées par un chemin. Pour le résoudre, on dispose de l'algorithme de parcours en profondeur qui va construire un arbre couvrant du graphe à partir d'un sommet. Si cet arbre contient tous les sommets du graphe, alors le graphe est connexe. Le temps nécessaire pour construire cet arbre est au plus n^2, donc le problème est bien dans la classe P.

Les problèmes dans P correspondent en fait à tous les problèmes facilement solubles.

Classe NP :

Un problème p est NP, s'il est résoluble par un algorithme Non déterministe en un temps polynomial par rapport à la taille de l'instance.

De façon équivalente, c'est la classe des problèmes qui admettent un algorithme dans P qui, étant donné une solution du problème NP, est capable de répondre oui ou non.

Intuitivement, les problèmes dans NP sont tous les problèmes qui peuvent être résolus en énumérant l'ensemble des solutions possibles et en les testant avec un algorithme polynomial.

Par exemple, la recherche de cycle hamiltonien dans un graphe peut se faire avec deux algorithmes :

— Le premier génère l'ensemble des cycles (ce qui est exponentiel) ;
— Le second teste les solutions (en temps polynomial).

On constate, immédiatement, que P⊂NP.

Problème NP-Complet :

Un problème est NP-difficile si ce problème est au moins aussi dur que tous les problèmes dans NP. Formellement, on définit une notion de réduction : Soient p et p' deux problèmes. Une réduction de p' à p est un algorithme transformant toute instance de p' en une instance de p. Ainsi, si l'on a un algorithme pour résoudre p, on sait aussi résoudre p'. p est donc au moins aussi difficile à résoudre que p'. Les problèmes les plus étudiés sont les problèmes NP -complets, parce qu'on ne sait pas les résoudre efficacement à cause de leur indéterminisme. Il est clair que P∈NP, puisqu'un algorithme déterministe est un algorithme non déterministe particulier.

p est alors NP-difficile si pour tout problème p'de NP, p'se réduit à p. Quand on parle de problèmes NP-difficiles on s'autorise uniquement des réductions dans P, c'est-à-dire que l'algorithme qui calcule le passage d'une instance de p' à une instance de p est polynomial.

Classe NP-complet :

Le problème étant dans NP et NP-difficile, il est NP-complet, autrement dit, les problèmes NP-complets sont les plus difficiles de la classe NP.

1.3 Coloration dans les graphes

Les problème de colorations sont aux cœurs de la théorie des graphes et font l'objet, à ce titre, de nombreuses recherches. Ils apparaissent dans de nombreux problèmes pratiques ou théoriques. En effet, de nombreux problèmes pratiques peuvent être modélisés comme des problèmes de coloration de graphes. À titre d'exemple, nous pouvons citer les problèmes d'ordonnancement. Il existe plusieurs types de colorations, comme la *coloration des sommets* et la *coloration des arêtes*.

1.3.1 Coloration des sommets

Historiquement, en 1852, Francis Guthrie a posé le premier problème de coloration c'est "*le problème des quatre couleurs*", c'était de monter qu'il ne faut pas plus de quatre couleurs pour colorer une carte géographique, de manière à éviter que les pays frontaliers aient la même couleur. La preuve de ce problème, n'a été donnée qu'en 1976, où deux chercheurs américains, K.Appel et W.Haken [3, 4] ont pu le résoudre, à l'aide d'un calcul par ordinateur.

Le problème des quatres couleurs est l'un des problèmes de colorations de graphes, qui ont suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs, et donc la notion de coloration de graphe fait l'objet de nombreuses études engendrant une littérateure très dense en théorie des graphes. La coloration des sommets est sans doute le concept le plus connu et le plus étudié en théorie des graphes.

Définition 1.3.1 *Une coloration propre d'un graphe* $G = (V, E)$ *est une application* $c : V \longrightarrow \mathbb{N}$ *qui affecte une couleur à chaque sommet de* G *telle que deux sommets voisins n'ont pas la même couleur. Si le graphe est coloré avec k couleurs, on dit qu'il est k-coloriable.*

Dans ce domaine de coloration plusieurs paramètres ont été définis. Le paramètre le plus connu est le *nombre chromatique*.

Définition 1.3.2 *Le nombre chromatique d'un graphe* G = (V,E)*, noté* χ(G)*, est le nombre minimum de couleurs nécessaire permettant de donner une coloration propre à* G.

Le problème de décision lié à ce paramètre est NP-complet dans le cas général. Pour cette raison, beaucoup de travaux ont été consacrés pour borner le nombre chromatique en fonction d'autres paramètres. Un des résultats classiques en termes de borne du nombre chromatique est celui de R. Brooks [5].

Théorème 1.3.1 *[5] Pour tout graphe* G *de degré maximum*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Pour le graphe complet $K_{\Delta(G)+1}$on a $\chi(K_{\Delta(G)+1}) = \Delta(G) + 1$, et pour le cycle impair C_n on a $\chi(C_n) = \Delta(G) + 1 = 3$.

Plusieurs paramètres de coloration sont découlés du nombre chromatique χ(G), la majorité de ces paramètres ont pour objet la minimisation du nombre de couleurs requis pour colorer un graphe, tandis que d'autres paramètres cherchent à maximiser le nombre de couleurs, comme le nombre *a*-chromatique, noté ψ(G).

Une façon de minimiser le nombre de couleurs d'un graphe consiste, à partir d'une coloration propre donnée, de réduire le nombre de classes de couleurs en fissionnant des classes de couleurs différentes. Cette technique de coloration est impossible s'il existe une arête entre toute classe de couleurs, d'où l'introduction de la *a*-coloration et du nombre *a*-chromatique par Harary, Hedetniemi et Prins en 1967 [6].

Définition 1.3.3 *Une a-coloration est une coloration propre telle que pour toute paire de couleurs différentes i et j, le sous-graphe engendré par les deux classes de couleur i et j, contient au moins une arête. Le nombre a-chromatique, noté* ψ(G)*, est le nombre maximum de classes de couleur dans une a-coloration.*

Il est à noter que cette coloration et ce paramètre ne font pas l'objet d'une étude approfondie dans ce mémoire, mais comme ils ont été à l'origine des colorations et des paramètres qui ont retenu notre attention, nous donnons un aperçu des principaux résultats de la littérature liés à la *a*-coloration et au paramètre *a*-chromatique.

Un autre paramètre de coloration a été défini à partir du nombre a-chromatique. D'où, en 1999, la notion de la a-coloration a inspiré Irving et Manlove [1, 2] à introduire un autre type de coloration, d'où une autre manière de réduire le nombre de couleurs dans un graphe a été introduite. Elle consiste à essayer, à partir d'une coloration propre donnée du graphe, de réduire le nombre de couleurs en transférant les sommets de la même classe vers les autres classes de couleur, d'où la définition de la b-coloration.

Définition 1.3.4 *Une b-coloration des sommets, dite aussi coloration dominante, est une coloration propre telle que toute classe de couleur i contient un sommet adjacent à au moins un sommet de chaque classe de couleur $j \neq i$. Ce sommet est dit sommet b-dominant de couleur i (ou en bref b-sommet). Le nombre b-chromatique d'un graphe* G*, noté* $b(\mathrm{G})$*, est le nombre maximum de classes de couleur dans une b-coloration.*

Toute $\chi(\mathrm{G})$-coloration satisfait la définition de la b-coloration, et cette dernière vérifie la définition de la a-coloration, alors le résultat suivant est immédiat.

$$\chi(\mathrm{G}) \leq b(\mathrm{G}) \leq \psi(\mathrm{G}).$$

1.3.2 Coloration des arêtes

Le problème de *coloration des arêtes* d'un graphe est l'un des problèmes fondamentaux dans la théorie des graphes. Une coloration *propre* d'arêtes consiste à attribuer à chaque arête d'un graphe $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ une couleur de sorte que deux arêtes de E ayant une extrémité commune ne reçoivent pas la même couleur. Un ensemble d'arêtes qui ne sont pas adjacentes s'appelle un *couplage*. Puisque chaque ensemble d'arêtes colorées avec la même couleur est un couplage, une coloration des arêtes d'un graphe est en effet une partition de E en couplages. *L'indice chromatique*, noté $\chi'(\mathrm{G})$, est le plus petit entier k pour lequel le graphe G admet une coloration d'arêtes propre de G avec k couleurs. L'indice chromatique d'un graphe G est le nombre chromatique de son graphe de ligne, autrement dit si $\mathscr{L}(\mathrm{G})$ est le graphe de ligne de G, alors $\chi'(\mathrm{G}) = \chi(\mathscr{L}(\mathrm{G}))$.

La Figure 1.11 illustre une coloration des arêtes d'un graphe avec six couleurs.

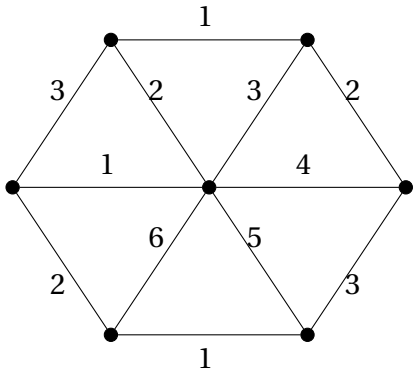


FIGURE 1.11 – Un graphe avec $\chi'(G) = 6$.

Historiquement, le problème de la coloration des arêtes a été posé en relation avec la conjecture des quatre couleurs, en 1880. Le premier article traitant le problème de la coloration des arêtes a été écrit par Tait en 1880, où il a prouvé que le problème des quatre couleurs est équivalent au problème de coloration des arêtes des graphes planaires cubiques avec trois couleurs [40].

Vizing [38] a montré que la coloration des arêtes d'un graphe G peut s'effectuer à l'aide d'au plus $\Delta(G) + 1$ couleurs. Et, donc

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Si $\chi'(G) = \Delta(G)$, alors G est dit de *classe* 1, sinon il est dit de *classe* 2. Un *problème de classification* est un problème de décider si un graphe est de la classe 1 ou de la classe 2. Du point de vue compléxité, Holyer [39] a prouvé que le problème de décision correspondant à l'appartenance d'un graphe simple à l'une des deux classes est NP-complet.

Il est assez naturel de refléchir à la version arête de la *b*-coloration d'un graphe. C'est ce que nous allons présenter dans la suite.

Définition 1.3.5 *Une b-coloration des arêtes d'un graphe* G *est une coloration propre des arêtes de* G *de telle sorte que chaque classe de couleur possède au moins une arête incidente à au moins une arête dans chacune des autres classes de couleur. Une telle arête est dite b-arête. L'indice b-chromatique, noté* $b'(G)$*, est le nombre maximum de couleurs pour lequel* G *admet une b-coloration d'arêtes avec* $b'(G)$ *couleurs.*

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à la b-coloration des arêtes.

Chapitre 2

Quelques résultats existants sur la b-coloration

Dans la première section de ce chapitre, nous exposons brièvement quelques résultats fondamentaux obtenu sur la b-coloration des sommets, bornes et valeurs exactes du nombre b-chromatique pour certaines classes de graphes. Dans la deuxième section, nous présentons les principaux résultats établis dans le domaine de la b-coloration des arêtes.

2.1 Résultats fondamentaux sur le nombre b-chromatique

Le concept de la b-coloration a été amplement étudié par de nombreux chercheurs, qui sont parvenus à établir quelques résultats. Parmi eux, on cite Irving et Monlove [1], qui ont prouvé que la détermination du nombre b-chromatique est en général NP-complet, même restreint aux graphes bipartis [10]. Par contre, ce problème sera polynomial pour les arbres [1, 2]. Comme la détermination du nombre b-chromatique est assez difficile, et puisqu'il n'existe pas d'algorithme polynomial déterminant ce paramètre, beaucoup de chercheurs ont été incité à établir des bornes qui l'encadrent, dans le but de chercher sa valeur exacte ou approximative pour certaines classes de graphes.

Plusieurs travaux ont été consacrés pour délimiter le nombre b-chromatique d'un graphe. Mentionnons quelques résultats atteints, dans ce cadre, et commençons par la proposition suivante qui est dû à Irving et Monlove [1, 2], où ils sont parvenus à démontrer que le

nombre b-chromatique d'un graphe est toujours majoré par $\Delta(G)+1$.

Proposition 2.1.1 *[1, 2] Tout graphe* G *satisfait*

$$b(G) \leq \Delta(G)+1.$$

oú $\Delta(G)$ *est le degré maximum de* G.

Irving et Monlove ont observé que pour un graphe G admet une b-coloration avec k couleurs, il doit avoir au moins k sommets de degré au moins $k-1$, dans [1, 2]. À partir de cette observation ils ont défini le m-degré d'un graphe comme suit.

Définition 2.1.1 *Soit les sommets* $v_1, v_2, ...v_n$ *d'un graphe* G *tels que :* $d_G(v_1) \geq d_G(v_2) \geq ... \geq d_G(v_n)$. *Le* m*-degré de* G, *noté* $m(G)$ *est défini comme suit*

$$m(G) = max\{i : d(v_i) \geq i-1\}.$$

Tout sommet v de degré au moins $m(G)-1$ est dit un sommet *dense*.

Les mêmes auteurs de [1, 2] ont établi le résultat suivant.

Proposition 2.1.2 *[1, 2] Pour tout graphe* G, $b(G) \leq m(G)$.

Dans [15], Kouider et Mahéo ont donné les valeurs exactes du nombre b-chromatique pour des graphes simples.

Proposition 2.1.3 *[15] Soient* P_n *et* C_n *respectivement une chaîne et un cycle d'ordre n avec* $n \geq 5$. *Alors*

$$b(P_n) = b(C_n) = 3.$$

Proposition 2.1.4 *[15] Pour tout* $n, p \in \mathbb{N}$, $b(K_{n,p}) = 2$, *où* $K_{n,p}$ *est un graphe biparti complet.*

Dans [20], les auteurs ont montré que le nombre b-chromatique du joint de deux graphes est égal à la somme de leurs nombres b-chromatiques.

Théorème 2.1.1 *[20] Soit* G *un graphe. Si* G *est le joint de deux graphes* G_1 *et* G_2 *de sommets disjoints, alors* $b(G) = b(G_1) + b(G_2)$.

Ils ont montré également que le nombre b-chromatique d'un stable S_n et d'un graphe complet K_n (les deux sont d'ordre n) est égal à 1 et n respectivement.

Pour plus d'information le lecteur est invité de lire [30].

2.2 Résultats fondamentaux sur l'indice b-chromatique

Jusqu'à ce jour, il n'existe que cinq article qui s'intéressent à 'indice b-chromatique d'un graphe. Dans cette section, nous allons exposer les résultats majeurs concernant ce paramètre.

Dans un premier, Jakovac et Peterin [32] ont donné des bornes de l'indice b-chromatique. En effet, soit $e = uv$ une arête d'un graphe G = (V, E). Si $d_G(u) = d_G(v) = \Delta(G)$, alors il facile de voir que l'arête e peut avoir au plus $2\Delta(G) - 2$ couleurs dans son voisinage ($\Delta(G) - 1$ de chaque extrémité u et v). De plus, il évident que e peut prendre une couleur différente de celles qui apparaissent dans son voisinage. D'où, il est immédiat de voir que $2\Delta(G) - 1$ est une borne supérieure de $b'(G)$.

Pour un graphe G, le paramètre $m'(G)$ est défini comme le plus grand entier m' tel que G a au moins m' arêtes de degré au moins $m'(G) - 1$. Cela signifie que $m'(G)$ est un majorant de $b'(G)$.

En effet, pour que G admette une b-coloration avec k couleurs, il doit avoir nécessairement au moins k arêtes de degré au moins $k-1$. D'où $b'(G) \leq m'(G)$. Une arête de degré au moins $m'(G) - 1$ est dite *arête dense*. En outre, toute coloration propre d'arêtes d'un graphe G utilisant $\chi'(G)$ couleurs est une b-coloration d'arêtes de G. Donc,

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq b'(G) \leq m'(G) \leq 2\Delta(G) - 1. \tag{2.1}$$

Dans [31], Lima et al. ont prouvé que le problème de décider si $m'(G) = b'(G)$ est NP-complet. Tandis que Jakovac et Peterin [32] ont prouvé que le problème est résoluble en temps polynomial dans le cas d'un arbre. En effet, ils ont montré que l'indice b-chromatique d'un arbre est égal à $m'(T)$ ou bien à $m'(T)-1$. En revanche, Silva a trouvé un contre exemple, où la valeur de $b'(T) - m'(T)$ peut être large [34]. Également, dans [33], Campos et Silva ont montré que cette différence peut être arbitrairement large dans le cas des graphes en blocs sans griffe qui sont des graphes de ligne des arbres. Cependant, pour certaines classes d'arbres la différence entre $m'(G)$ et $b'(G)$ peut prendre des petites valeurs.

Dans [31], les auteurs ont parvenu à établir le résultat suivant.

Théorème 2.2.1 *[31] Soit* G *un graphe de ligne d'une chenille. Alors,* $b(G)$ *est égal à* $m(G)$ *ou à* $m(G) - 1$. *De plus, la valeur de* $b(G)$ *peut être déterminée en temps polynomial.*

Également, les mêmes auteurs de [31] ont montré que si G est un graphe de ligne d'une chenille, alors une b-coloration des sommets de G avec $m(G)-1$ couleurs existe et peut être trouvé en temps polynomial.

Dans [35], Koch et Peterin ont porté leur travail sur les produits directs des graphes. Cette étude a permis de donner des bornes de l'indice b-chromatique du produit direct de deux graphes. De plus, les auteurs de [35] ont fournis d'autres résultats généraux pour de nombreux produits directs de graphes réguliers. Ainsi, dans le même papier, les auteurs ont introduit un modèle de programmation linéaire destiné au problème de la b-coloration des arêtes, où il est utilisé pour calculer des valeurs exactes de l'indice b-chromatique du produit direct de certaines classes de graphes spéciaux comme le produit direct de deux chaînes et de deux cycles. D'où, ils ont pu déterminer la valeur exacte de ce paramètre dans le cas du produit direct d'un graphe bipartite avec une clique d'ordre deux K_2, de deux chaînes et de deux cycles [35].

Dans [32], les auteurs ont étudié les graphes réguliers. Pour un Sommet v de G, soit $S_2(v)$ être l'ensemble de tous les sommets de G qui sont à la distance 2 à v. Nous définissons le graphe $G[v]$ comme le sous-graphe de G induit par $N(v) \cup S_2(v)$

Théorème 2.2.2 *[32] Soit* G *est un graphe d-régulier avec $diam(G) \geq 4$ et soient u, v deux sommets de distance au moins* 4. *Si* $G[u]$ *et* $G[v]$ *sont des graphes de classe 1 avec* $\Delta(G[u]) = \Delta(G[v]) = d-1$, *alors*

$$b'(G) = 2d-1.$$

Un autre résultat s'intéressant aux graphes réguliers dû à Jakovac et Peterin [32].

Corollaire 2.2.1 *[32] Si* G *est un graphe d-régulier sans griffe avec $g \geq 5$, alors*

$$b'(G) = 2d-1$$

.

Théorème 2.2.3 *[32] Si* G *est un graphe d-régulier biparti avec $diam(G) \geq 4$, alors :*

$$b'(G) = 2d-1$$

.

Jakovac et Peterin [32], ils se sont intéressés également à l'étude des graphes cubiques, où ils ont établi les résultats suivants.

Lemme 2.2.1 *[32] Soit* G *un graphe* 3*-régulier. Si* G *contient un cycle* C_5 *où une chaîne* P_6 *comme sous-graphe induit, alors*

$$b'(G) = 5$$

.

Théorème 2.2.4 *[32] Soit* G *un graphe cubique et connexe. Alors* $b'(G) = 5$ *si et seulement si* G *n'est pas l'un des graphes suivant :* K_4, $K_3 \square K_2$, $K_{3,3}$, *ou* Q_3. *En outre,* $b'(K_4) = b'\left(K_{3,3}\right) = 3$ *et* $b'(K_3 \square K_2) = b'(Q_3) = 4$.

Jakovac et Peterin [32] ont établi le lemme suivant.

Lemme 2.2.2 *[32] Si* G *est un graphe d-arête-régulier de degré minimum* $\delta(G) \geq 4$ *et* $b'(G) = d+1$, *alors au plus deux arêtes de n'importe quel cycle d'ordre* 4 *et au plus deux arêtes de n'importe quel triangle peuvent être des b-arêtes dans une b-coloration d'arête de* G *avec* $d+1$ *couleurs.*

En utilisant le lemme précédent, Jakovac et Peterin ont montré que $b'(K_n) < m'(K_n)$ pour tout $n \geq 4$ [32], et dans le même article, ils ont prouvé que $b'\left(K_{p,q}\right) < m'\left(K_{p,q}\right)$ pour $q \geq p \geq 3$ et que $b'\left(K_{3,3}\right) = 3$ [32]. Dans le même papier, ils ont prouvé aussi que si G est un graphe 3-régulier contenant un cycle C_5 ou bien une chaîne P_6 comme un sous-graphe induit, alors

$$b'(G) = 5$$

.

Pour plus d'information le lecteur est invité de lire [32], [35], [31],[34], [33] et [30].

Chapitre 3

Indice b-chromatique de certains graphes particuliers

Notre étude dans ce chapitre porte sur la b-coloration des arêtes. Nous donnons la valeur exacte de l'indice b-chromatique de certains graphes, comme la chaîne, le cycle, la roue, la double étoile, le prisme d'une chaîne et d'un cycle, la couronne d'une chaîne et d'un cycle et le graphe milieu et le graphe total d'une chaîne et d'un cycle. De plus, nous allons caractériser les graphes ayant pour indice b-chromatique égal à 2.

3.1 L'indice b-chromatique de certains graphes classiques

Dans cette section, nous déterminons la valeur exacte de l'indice b-chromatique dans le cas d'un cycle et d'une chaîne.

Proposition 3.1.1 *Soit* P_n *une chaîne à n sommets. Alors,*

$$b'(\mathrm{P}_n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 2 \text{ ;} \\ 2 \text{ si } n \in \{3,4,5\} \text{ ;} \\ 3 \text{ si } n \geq 6. \end{cases}$$

Preuve. Il est facile de vérifier que le graphe de ligne d'une chaîne d'ordre n est une chaîne d'ordre $(n-1)$. Ainsi, vu que $b'(\mathrm{P}_n) = b(\mathscr{L}(\mathrm{P}_n)) = b(\mathrm{P}_{n-1})$, il s'ensuit alors que $b'(\mathrm{P}_2) = b(\mathrm{P}_1) = 1$, $b'(\mathrm{P}_n) = b(\mathrm{P}_{n-1}) = 2$ pour $n \in \{3,4,5\}$, et $b'(\mathrm{P}_n) = b(\mathrm{P}_{n-1}) = 3$ pour $n \geq 6$. ■

Proposition 3.1.2 *Soit* C_n *un cycle d'ordre n. Alors,*

$$b'(C_n) = \begin{cases} 2 \text{ si } n = 4 ; \\ 3 \text{ si } n = 3 \text{ ou } n \geq 5. \end{cases}$$

Preuve. Puisque le graphe de ligne de C_n est un cycle à n sommets, alors $b'(C_n) = b(C_n)$. De ce fait $b'(C_n) = 2$ si $n = 4$ et $b'(C_n) = 3$ sinon. ■

Maintenant, nous allons déterminer la valeur exacte de l'indice b-chromatique de la roue W_n ($W_n = C_n \vee K_1$).

3.2 l'indice b-chromatique de la roue

Définition 3.2.1 *Le graphe roue* W_n *est un graphe d'ordre* $n \geq 4$ *avec* $2(n-1)$ *le nombre d'arêtes, formé en ajoutant un sommet universel adjacents à tous les sommets de cycle* $C_n - 1$.

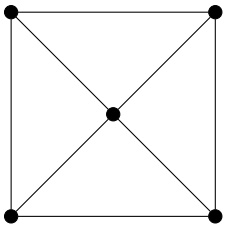


FIGURE 3.1 – Exemple d'une roue W_4 .

Proposition 3.2.1 *Soit* $W_n = (V, E)$ *une roue d'ordre* $n+1 \geq 5$. *Alors,*

$$b'(W_n) = \begin{cases} 5 \text{ si } n = 4 ; \\ n \text{ si } n \geq 5. \end{cases}$$

Preuve. Pour $n = 4$, il est facile de vérifier que $m'(W_4) = 5$. En utilisant (2.1), on constate que $b'(W_n) \leq 5$, et l'égalité est obtenue en exhibant une b-coloration d'arêtes de W_4 utilisant 5 couleurs (Voir Figure 3.2).

Pour $n \geq 5$, on a $m'(W_n) = \Delta(W_n) = n$, par conséquent (2.1) donne $b'(W_n) = n$. ■

Proposition 3.2.2 *Soit* $S_{l,k}$ *un double étoile avec* $l \geq k \geq 1$. *Alors* $b'(S_{l,k}) = l + 1$.

Preuve. Le résultat est immédiat d'après (2.1) puisque $m'(S_{l,k}) = \Delta(S_{l,k}) = l + 1$. ■

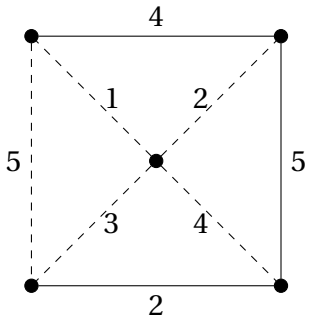


FIGURE 3.2 – une b-coloration d'arêtes de W_4 utilisant 5 couleurs

3.3 Indice b-chromatique d'une couronne d'une chaîne et d'un cycle

Dans cette section, nous donnons les valeurs exactes de l'indice b-chromatiques d'une couronne d'une chaîne P_n et d'un cycle C_n. Dans un premier lieu, nous définissons la couronne d'un graphe.

Définition 3.3.1 *On appelle couronne d'un graphe* G *, notée* Cr (G) *ou* $G \circ K_1$*, le graphe obtenu en attachant à chaque sommet de* G *un sommet pendant.*



FIGURE 3.3 – Exemple d'une couronne d'une chaîne (P_3) .

D'après la définition de la couronne d'un graphe G = (V,E), il est évident que Cr (G) est d'ordre $2|V(G)|$.

Théorème 3.3.1 *Soit* P_n *une chaîne d'ordre n. Alors,*

$$i)\ b'(Cr(P_n)) = \begin{cases} 2\ si\ n = 2\ ; \\ 3\ si\ n \in \{3,4\}\ ; \\ 4\ si\ n \in \{5,6,7\}\ ; \\ 5\ si\ n \geq 8. \end{cases}$$

Preuve. Pour $n = 2$, $Cr(P_2)$ est isomorphe à P_4, et donc d'après le Théorème 3.1.1, $b'(Cr(P_2)) = b'(P_4) = 2$.

Pour $n \in \{3,4\}$, on a $m'(Cr(P_n)) = \Delta(Cr(P_n)) = 3$, et d'après (2.1), on obtient $b'(Cr(P_n)) = 3$.

Pour $n = \{5,6,7\}$, il est facile de vérifier que $m'(Cr(P_n)) = 4$. Donc (2.1) impliqe que $b'(Cr(P_n)) \leq 4$. L'égalité est obtenue en exhibant une b-coloration d'arêtes de $Cr(P_n)$ utilisant 4 couleurs (Voir Figure 3.4).

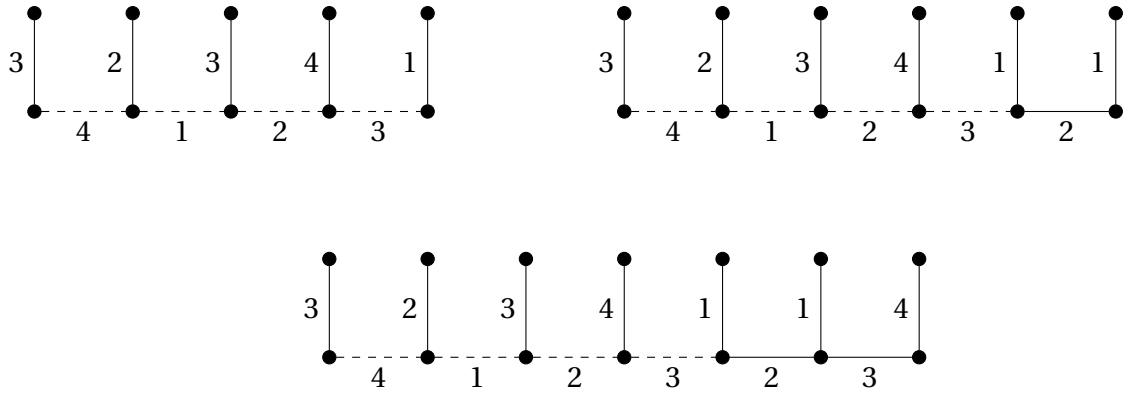


FIGURE 3.4 – Une b-coloration des arêtes de $Cr(P_n)$ avec 4 couleurs pour $n \in \{5,6,7\}$.

Pour $n \geq 8$, Il est facile de voir que $m'(Cr(P_8)) = 5$, alors (2.1) implique que $b'(Cr(P_8)) \leq 5$. D'autre part, la Figure 3.5 présente une b-coloration des arêtes de $Cr(P_8)$ avec 5 couleurs. Par conséquent, $b'(Cr(P_8)) = 5$. Supposons maintenant que $n \geq 9$ et soit $H = Cr(P_8)$ un sous-graphe de $Cr(P_n)$. Considérons une b-coloration c d'arêtes de H avec 5 couleurs (coloration partielle de $Cr(P_n)$). Comme pour $n \geq 8$, le degré maximum des arêtes est $2\Delta(G) - 2 = 4$ et $Cr(P_8)$ admet une b-coloration des arêtes avec $2\Delta(Cr(P_n)) - 1$ couleurs, alors c peut s'étendre à $Cr(P_n)$. Donc, $b'(Cr(P_n)) = 5$.

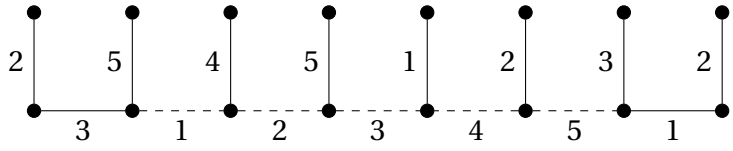


FIGURE 3.5 – Une b-coloration des arêtes de Cr (P_8) avec 5couleurs .

■

Dans le théorème suivant nous donnons la valeur exacte de l'indice b-chromatique de la couronne d'un cycle

Théorème 3.3.2 *Soit* C_n *un cycle d'ordre* n. *Alors,*

$$ii)\ b'(Cr(C_n)) = \begin{cases} 3\ si\ n = 3\ ; \\ 4\ si\ n = 4\ ; \\ 5\ si\ n \geq 5. \end{cases}$$

Preuve. Pour $n = 3$. Il n'est pas difficile de voir que $m'(Cr(C_3)) = 3$ et que $\Delta(Cr(C_3)) = 3$. Donc, d'après (2.1), il en résulte que $b'(Cr(C_3)) = 3$.

Pour $n = 4$, Il est facile de voir que $m'(Cr(C_4)) = 4$, alors (2.1) implique que $b'(Cr(C_4)) \leq 4$. D'autre part, la Figure 3.6 présente une b-coloration des arêtes de $Cr(C_4)$ avec 4 couleurs. Par conséquent, $b'(Cr(C_4)) = 4$.

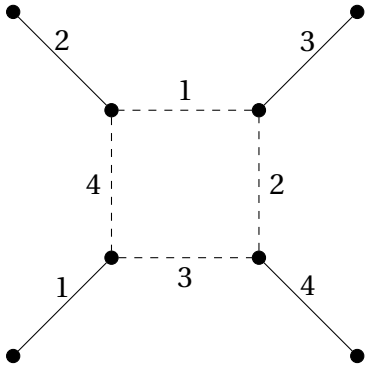


FIGURE 3.6 – Une b-coloration des arêtes de $Cr(C_4)$.

Pour $n \geq 5$. Il est facile de voir que $m'(Cr(C_n)) = 5$, alors (2.1) implique que $b'(Cr(C_n)) \leq 5$. Pour obtenir l'égalité, nous donnons une b-coloration à $Cr(C_n)$. Pour $n \in \{5,6,7\}$, la Figure 3.7 présente une b-coloration des arêtes de $Cr(C_5)$, $Cr(C_6)$ et $Cr(C_7)$ avec 5 couleurs.

Supposons maintenant que $n \geq 8$ et soit $H = Cr(P_8)$ un sous-graphe partiel de $Cr(C_n)$. Considérons une b-coloration c d'arêtes de H avec 5 couleurs (coloration partielle de $Cr(C_n)$). Comme pour $n \geq 8$, le degré maximum des arêtes est $2\Delta(Cr(C_n)) - 2 = 4$ et $Cr(P_8)$ admet une b-coloration des arêtes avec $2\Delta(Cr(P_n)) - 1$ couleurs, alors c peut s'étendre à $Cr(C_n)$. Donc, $b'(Cr(C_n)) = 5$. ■

3.4 Indice b-chromatique du prisme d'une chaîne et d'un cycle

Dans cette section, nous donnons les valeurs exactes de l'indice b-chromatique du prisme d'une chaîne et d'un cycle.

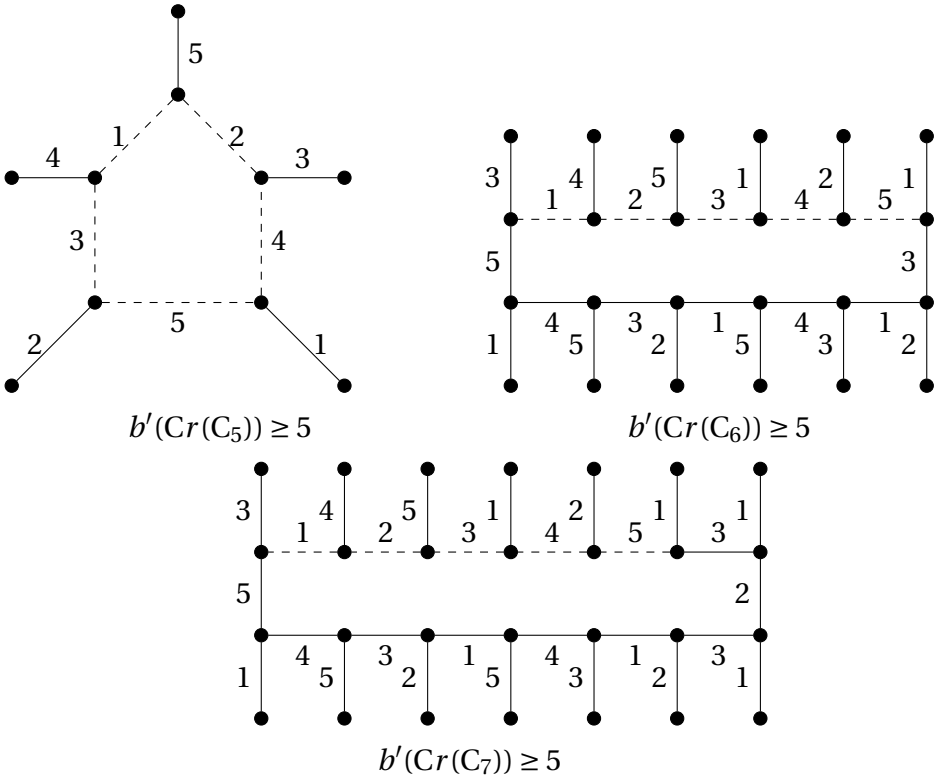


FIGURE 3.7 – Une b-coloration des arêtes de $Cr\ (C_n)$ avec 5 couleurs pour $n \in \{5,6,7\}$.

Définition 3.4.1 *Soit* G = (V, E) *un graphe. On appelle le prisme de* G *le graphe formé à partir de l'union disjointe de deux copies de* G *en ajoutant les arêtes d'un couplage parfait entre les sommets correspondants de* G *et sa copie.*

Théorème 3.4.1 *Soit* P_n *une chaîne d'ordre n. Alors,*

$$i)\ b'(P_nP_n) = \begin{cases} 2\ si\ n = 2\ ; \\ 3\ si\ n = 3\ ; \\ 4\ si\ n \in \{4,5\}\ ; \\ 5\ si\ n \geq 6. \end{cases}$$

Preuve. Pour $n = 2$, il est facile de voir que P_2P_2est isomorphe à C_4, et donc d'après le Théorème 3.1.2, $b'(P_2P_2) = b'(C_4) = 2$.

Soient $V = \{v_1, ..., v_n\}$ les sommets d'une chaîne P_n et $U = \{u_1, ..., u_n\}$ les sommets d'une copie de P_n. Alors, $V(P_nP_n) = V \cup U$ et $E(P_nP_n) = \left(\cup_{i=1}^{n-1}\{v_iv_{i+1}, u_iu_{i+1}\}\right) \cup \left(\cup_{i=1}^{n}\{v_iu_i\}\right)$, et soit c une b-coloration des arêtes de P_nP_n avec $k = b'(P_nP_n)$ couleurs.

Pour $n = 3$, $\Delta(P_3P_3) = 3$, donc (2.1) implique que $b'(P_3P_3) \geq 3$. Il reste de montrer que $b'(P_3P_3) \leq 3$. Supposons au contraire que $b'(P_3P_3) \geq 4$. Vu que $m'(P_3P_3) = 4$, alors (2.1) donne $b'(P_3P_3) = 4$. Comme $|E(P_3P_3)| = 7$, alors il existe au moins une classe de couleur qui possède exactement une seule arête, disons e. Il est immédiat de voir que e est une b-arête de couleur non répétée. Donc, toutes les autres b-arêtes, de couleur différentes à celle de e, sont adjacentes à e. Il est facile de voir que P_3P_3 comporte exactement 5 arêtes denses. Montrons que $e = v_2u_2$. Supposons le contraire. Alors, $e \in \{v_1v_2, v_2v_3, u_1u_2, u_2u_3\}$. Supposons que $e = v_1v_2$. Alors, puisque e est de degré 3 et toutes les b-arêtes sont adjacents à e, alors ces dernières sont denses. Mais, dans ce cas l'arête v_1u_1 n'est pas dense, contradiction. Par conséquent, $e = v_2u_2$. Supposons que $e = v_2u_2$ est une b-arête de couleur 1 et sans perte de généralité et par symétrie supposons que v_1v_2, v_2v_3 et u_1u_2 sont les b-arêtes de couleurs 2, 3 et 4 respectivement. Vu que l'arête v_1v_2 b-arête de couleur 2, alors elle a besoin de la couleur 4 dans sont voisinage, alors v_1u_1 doit avoir la couleur 4, mais dans ce cas la coloration ne sera plus propre, contradiction . En conséquence, $b'(P_3P_3) = 3$.

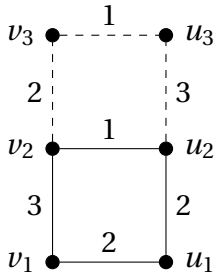


FIGURE 3.8 – Une b-coloration des arêtes de (P_3P_3) avec 3 couleurs .

Pour $n = 4$, $m'(P_4P_4) = 4$ alors (2.1) implique que $b'(P_4P_4) \leq 4$. D'autre part, la Figure 3.9 présente une b-coloration des arêtes de P_4P_4 avec 4 couleurs. Par conséquent, $b'(P_4P_4) = 4$.

Pour $n = 5$, la Figure 3.11 présente une b-coloration d'arêtes de P_5P_5 avec 4 couleurs. Donc $b'(P_5P_5) \geq 4$. Il reste de montrer que $b'(P_5P_5) \leq 4$. Supposons au contraire que $b'(P_3P_3) \geq 5$. Vu que $m'(P_5P_5) = 5$, alors (2.1) donne $b'(P_5P_5) = 5$. Comme P_5P_5 comporte 7 arêtes denses parmi $|E(P_3P_3)| = 13$ arêtes, alors sans perte de généralité, les b-arêtes prennent l'une des huit formes de la Figure 3.10 (les b-arêtes sont dessinées en gras).

Puisque le degré de tous les arêtes denses est 4 et $b'(P_5P_5) = 5$, alors

chaque b-arête n'est pas adjacente à deux arêtes de même couleur. (3.1)

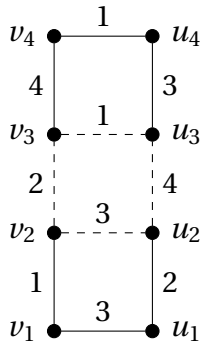


FIGURE 3.9 – Une b-coloration des arêtes de P_4P_4 avec 4 couleurs.

Supposons que les cinq b-arêtes prennent la Forme (1) de la Figure 3.10. Comme v_2v_3 est une b-arête de couleur 1 alors $c(v_1v_2) = 5$, de plus comme v_2u_2 est une b-arête de couleur 3 alors $c(u_1u_2) = 4$ et $c(u_2u_3) = 2$. Mais dans ce cas, la b-arête v_3u_3 est adjacente à deux arêtes de couleur 2, contradiction avec (3.1).

Supposons que les cinq b-arêtes prennent la forme (2) de la Figure 3.10. Comme l'arête v_3v_4 est une b-arête de couleur 2, alors elle a besoin des couleurs 4 et 5 dans son voisinage, donc $c(v_3u_3) \in \{4,5\}$, mais dans ce cas c ne sera plus propre, contradiction.

Supposons que les cinq b-arêtes prennent la Forme (3) de la Figure 3.10. Comme l'arête v_3v_4 est une b-arête de couleur 2, alors elle a besoin de la couleur 5 dans son voisinage, alors $c(v_4v_5) = 5$, mais dans ce cas, la b-arête v_4u_4 est adjacente à deux arêtes de couleur 5, contradiction avec (3.1).

Supposons que les cinq b-arêtes prennent la Forme (4) de la Figure 3.10. Comme l'arête u_2u_3 est une b-arête de couleur 4, alors elle a besoin des couleurs 1 et 2 dans son voisinage, et puisque c est une coloration propre alors il est clair que $c(u_1u_2) = 1$ et $c(v_2u_2) = 2$, mais dans ce cas la b-arête v_2v_3 est adjacente à deux arêtes de couleur 2, contradiction avec (3.1).

Supposons que les cinq b-arêtes prennent la Forme (5) de la Figure 3.10. Comme l'arête v_3u_3 est une b-arête de couleur 3, alors $c(u_3u_4) = 4$, mais dans ce cas c ne sera plus propre, contradiction.

Supposons que les cinq b-arêtes prennent la Forme (6) de la Figure 3.10. Comme l'arête v_3u_3 est une b-arête de couleur 3, alors elle a besoin de la couleur 2 dans son voisinage, donc $c(v_2v_3) = 2$ ou bien $c(u_2u_3) = 2$ mais dans ce cas c ne sera plus propre, contradiction.

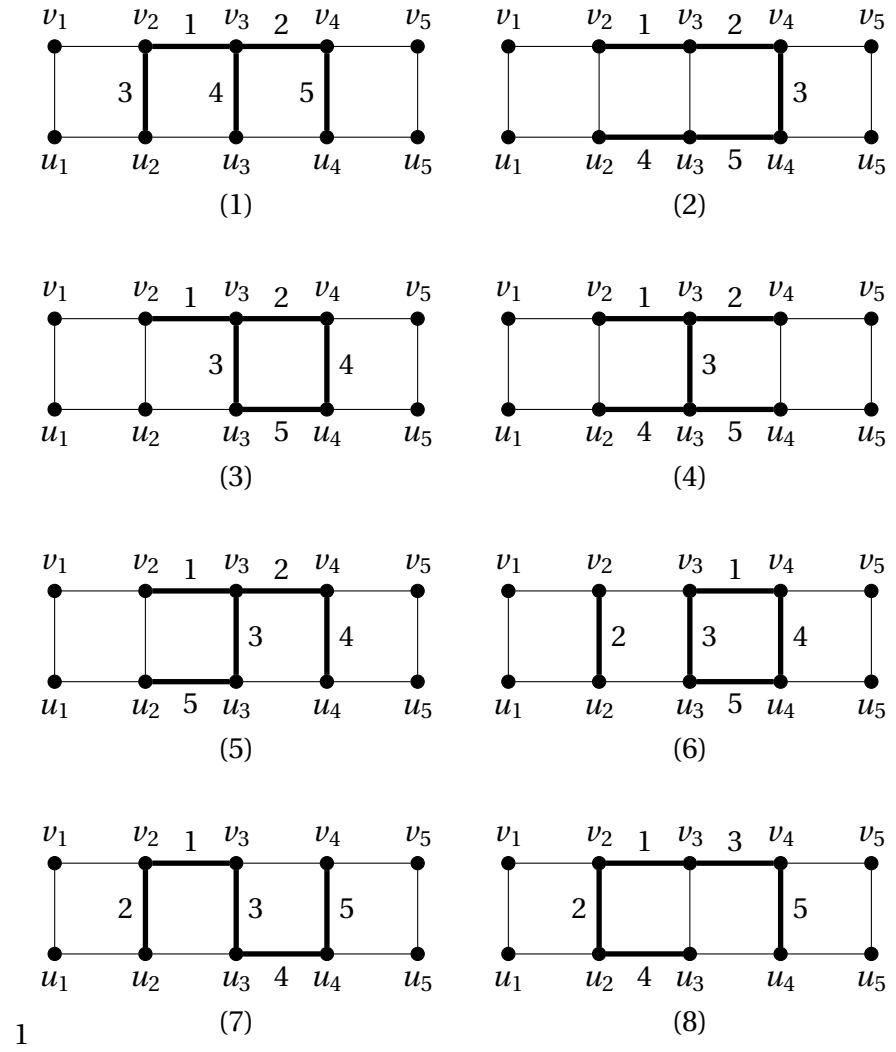


FIGURE 3.10 – Une b-coloration des arêtes de P_5P_5 avec 5 couleurs.

Supposons que les cinq b-arêtes prennent la Forme (7) de la Figure 3.10. Comme l'arête v_2v_3 est une b-arête de couleur 1, alors elle a besoin des couleurs 4 et 5 dans son voisinage, et puisque c est une coloration propre alors il est clair que $c(v_1v_2) = 5$ et $c(v_3v_4) = 4$, mais dans ce cas, la b-arête v_3u_3 est adjacente à deux arêtes de couleur 4, contradiction avec (3.1).

Supposons que les cinq b-arêtes prennent la Forme (8) de la Figure 3.10. Comme l'arête v_3v_4 est une b-arête de couleur 3, alors elle a besoin des couleurs 2 et 4 dans son voisinage, et puisque c est une coloration propre alors il est clair que $c(v_3u_3) = 2$ et $c(v_4v_5) = 4$, mais dans ce cas, la b-arête u_2u_3 est adjacente à deux arêtes de couleur 2, contradiction avec (3.1).

Alors, aucun cas ne peut se produire. En conséquence, $b'(P_5P_5) = 4$ Pour $n \geq 6$, Il est fa-

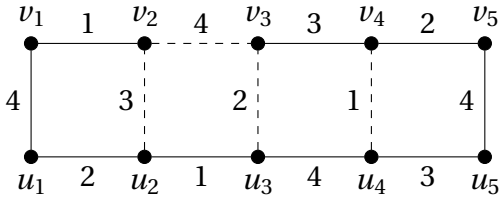


FIGURE 3.11 – Une b-coloration des arêtes de P_5P_5 avec 4couleurs.

cile de voir que $m'(P_6P_6) = 5$, et d'après (2.1), on constate que $b'(P_6P_6) \leq 5$. D'autre part, la Figure 3.12 présente une b-coloration des arêtes de P_6P_6 avec 5couleurs. Par conséquent, $b'(P_6P_6) = 5$. Supposons maintenant que $n \geq 7$ et soit $H = P_6P_6$ un sous-graphe de (P_nP_n).

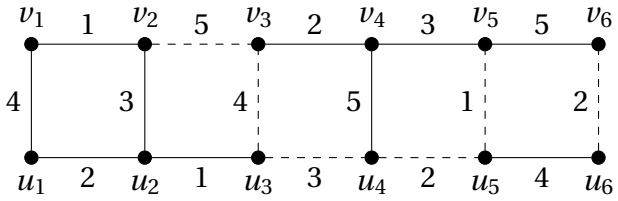


FIGURE 3.12 – Une b-coloration des arêtes de P_6P_6avec 5couleurs.

Considérons une b-coloration c d'arêtes de H avec 5 couleurs (coloration partielle de (P_nP_n)). Comme pour $n \geq 7$, le degré maximum des arêtes est $2\Delta(P_nP_n) - 2 = 4$ et (P_6P_6) admet une b-coloration des arêtes avec $2\Delta(P_nP_n) - 1$ couleurs, alors c peut s'étendre à (P_nP_n). Donc, $b'(P_nP_n) = 5$. ■

Théorème 3.4.2 *Soit C_n un cycle d'ordre n. Alors,*

$$i)\ b'(C_nC_n) = \begin{cases} 4 \text{ si } n \in \{3,4\}\ ; \\ 5 \text{ si } n \geq 5\ ; \end{cases}$$

Preuve. Soient $V = \{v_1, ..., v_n\}$ les sommets d'un cycle C_n et $U = \{u_1, ..., u_n\}$ les sommets d'une copie de C_n. Alors, $V(C_nC_n) = V \cup U$ et $E(C_nC_n) = \left(\cup_{i=1}^{n-1} \{v_iv_{i+1}, u_iu_{i+1}\}\right) \cup \left(\cup_{i=1}^{n} \{v_iu_i\}\right) \cup \{v_1v_n, u_1u_n\}$, et soit c une b-coloration des arêtes de C_nC_n avec $k = b'(C_nC_n)$ couleurs.

Pour $n = 3$, montrons d'abord que $b'(C_3C_3) \geq 4$. Pour cela, il suffit de donner une b-coloration d'arêtes de C_3C_3 avec 4 couleurs (Voir Figure 3.4). Il reste de montrer que $b'(C_3C_3) \leq 4$. Supposons au contraire que $b'(C_3C_3) \geq 5$. Vu que $m'(C_3C_3) = 5$, alors (2.1) donne $b'(C_3C_3) = 5$. Comme C_3C_3 est 4-arête régulier, alors toutes ses arêtes sont denses. De plus, vu que $|E(C_3C_3)| = 9$, alors il existe au moins une classe de couleur contient exactement une seule

arête, disons e. Ceci signifie que e est une b-arête de couleur non répétée. Donc, toutes les autres b-arêtes, de couleurs différentes à celle de e, sont adjacentes à e. Par symétrie et sans perte de généralité, l'arête $e \in \{v_1u_1, v_1v_2, u_1u_2\}$. Sans perte de généralité, supposons que e est une b-arête de couleur 1. Si $e = v_1u_1$, alors $c(v_1v_2) = 2$, $c(v_1v_3) = 3$, $c(u_1u_2) = 4$ et $c(u_1u_3) = 5$. Comme v_1v_2 est une b-arête de couleur 2, alors elle a besoin de couleurs 4 et 5, comme c est propre alors $c(v_2v_3) = 4$ et $c(v_2u_2) = 5$. De plus, v_1v_3 est une b-arête de couleur 3, alors elle a besoin de 5 dans son voisinage, donc $c(u_3v_3) = 5$, mais dans ce cas c ne sera plus propre, contradiction. Maintenant, si $e = v_1v_2$, alors sans perte de généralité on pose $c(v_1v_3) = 2$, $c(v_2v_3) = 3$, $c(v_1u_1) = 4$ et $c(v_2u_2) = 5$. Vu que v_1v_3 est une b-arête, alors elle a besoin de la couleur 5 dans son voisinage, donc $c(u_3v_3) = 5$. Comme C_3C_3 est un graphe 4-arête régulier, alors chaque b-arête n'est pas adjacent à deux arêtes de même couleur, mais dans ce cas l'arête v_2v_3 est adjacentes à deux arêtes de couleur 5, contradiction. On obtient la même contradiction si $e = u_1u_2$. Par conséquent, $b'(C_3C_3) = 3$.

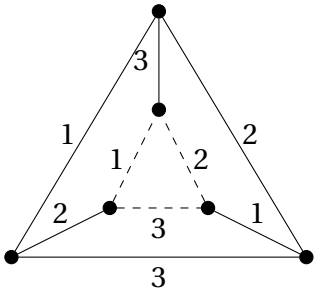


FIGURE 3.13 – Une b-coloration des arêtes de C_3C_3 avec 3 couleurs

Pour $n = 4$, il est facile de voir que C_4C_4 est cubique et il est isomorphe à Q_3 (cube), alors le Théorème 2.2.4 implique que $b'(C_4C_4) = b'(Q_3) = 4$.

Pour $n \geq 5$,il est facile de voir que $m'(C_nC_n) = 5$, alors (2.1) donne $b'(C_nC_n) \leq 5$. Pour obtenir l'égalité il suffit de donner une b-coloration des arêtes de C_nC_n en utilisant 5 couleurs. Pour $n = 5$, voir Figure 3.14,

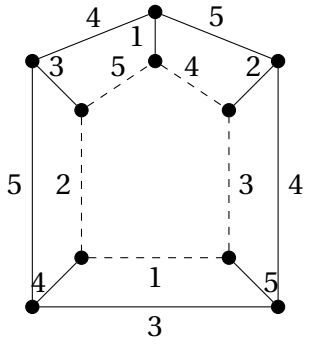


FIGURE 3.14 – Une b-coloration des arêtes de (C_5C_5) avec 5 couleurs.

Supposons maintenant que $n \geq 6$ et soit $H = Cr(P_6)$ un sous-graphe de C_nC_n. Considérons une b-coloration c d'arêtes de H avec 5 couleurs (coloration partielle de C_nC_n). Comme pour $n \geq 6$, le degré maximum des arêtes est $2\Delta(C_nC_n)-2 = 4$ et C_6C_6 admet une b-coloration des arêtes avec $2\Delta(Cr(P_n)) - 1$ couleurs, alors c peut s'étendre à C_nC_n pour $n \geq 7$. Donc, $b'(C_nC_n) = 5$ pour $n \geq 6$. ■

3.5 L'indice b-chromatique du graphe milieu et total d'une chaîne et d'un cycle

Dans cette section, nous donnons les valeurs exactes de l'indice b-chromatiques du graphe milieu et du graphe total d'une chaîne P_n et d'un cycle C_n.

Dans un premier lieu, nous définissons le graphe milieu et le graphe total d'un graphe.

Définition 3.5.1 *(Hamada et Yoshimura)[36] Soit* $G = (V, E)$ *un graphe simple. Le graphe milieu de* G*, noté* $M(G)$ *est défini comme suit : L'ensemble des sommets de* $M(G)$ *est* $V(G) \cup E(G)$*, et deux sommets* x, y *de* $M(G)$ *sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

— $x, y \in E(G)$ *et* x *est adjacent à* y *dans* G.

— $x \in V(G)$, $y \in E(G)$ *et* x *est incident à* y *dans* G.

Définition 3.5.2 *(Behzad)[37] Le graphe total d'un graphe* $G = (V, E)$*, noté* $T(G)$*, est défini comme suit. L'ensemble des sommets de* $T(G)$ *est* $V(G) \cup E(G)$*, et deux sommets* x, y *de* $T(G)$ *sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

— $x, y \in V(G)$ *et* x, y *sont adjacents dans* G.

— $x, y \in E(G)$ *et* x *est adjacent à* y *dans* G.

— $x \in V(G)$, $y \in E(G)$ *et* x *est incident à* y *dans* G.

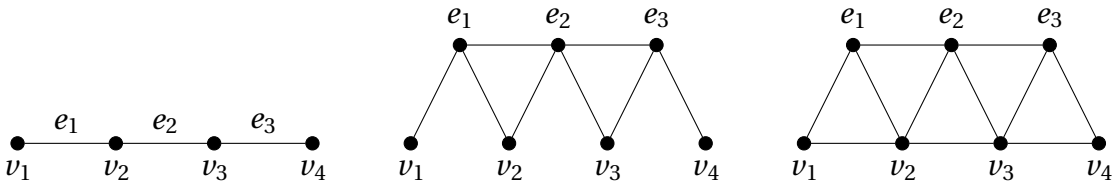


FIGURE 3.15 – Exemple d'un graphe milieu d'une chaîne (P_4).

Théorème 3.5.1 *Soit* P_n *une chaîne d'ordre n. Alors,*

$$i)\ b'(M(P_n)) = \begin{cases} n \text{ si } n \in \{2,3,4\} ; \\ 5 \text{ si } n \in \{5,6,7\} ; \\ 6 \text{ si } n \in \{8,9,10\} ; \\ 7 \text{ si } n \geq 11. \end{cases}, \quad ii)\ b'(T(P_n)) = \begin{cases} 3 \text{ si } n = 2 ; \\ 4 \text{ si } n = 3 ; \\ 5 \text{ si } n = 4 ; \\ 6 \text{ si } n = 5 ; \\ 6 \text{ ou } 7 \text{ si } n = 6 ; \\ 7 \text{ si } n \geq 7 \end{cases}.$$

Preuve. Posons $V(P_n) = \{v_1, ..., v_n\}$ et $E(P_n) = \{e_1, ..., e_{n-1}\}$ tel que $e_j = v_j v_{j+1}$ pour tout j, $1 \leq j \leq n-1$. Soit $M(P_n)$ (resp., $T(P_n)$) le graphe milieu (resp., total) de P_n d'ensemble de sommets $V(M(P_n)) = V(P_n) \cup E(P_n)$ (resp., $V(T(P_n)) = V(M(P_n))$ et d'ensemble d'arêtes $E(M(P_n)) = \{e_i e_{i+1}, e_j v_j, e_j v_{j+1} : 1 \leq i \leq n-2 \text{ et } 1 \leq j \leq n-1\}$ (resp., $E(T(P_n)) = E(M(P_n)) \cup \{v_j v_{j+1} : 1 \leq j \leq n-1\}$). *i*) Soit c une b-coloration d'arêtes de $M(P_n)$ (resp., $T(P_n)$) avec k couleurs.

Pour $n = 2$, il est facile de voir que $M(P_2)$ est isomorphe à P_3, donc d'après le Théorème 3.1.1 $b'(M(P_2)) = 2$.

Pour $n \in \{3,4\}$, il n'est pas difficile de voir que $m'(M(P_n)) = n$ et que $\Delta(M(P_n)) = n$. Donc, d'après (2.1), il en résulte que $b'(M(P_n)) = n$.

Les trois graphes illustrés dans la Figure 3.16 montrent que $b'(M(P_n)) \geq 5$ pour $n \in \{5,6,7\}$. Vu que $m'(M(P_n)) = 5$, alors $b'(M(P_n)) = 5$.

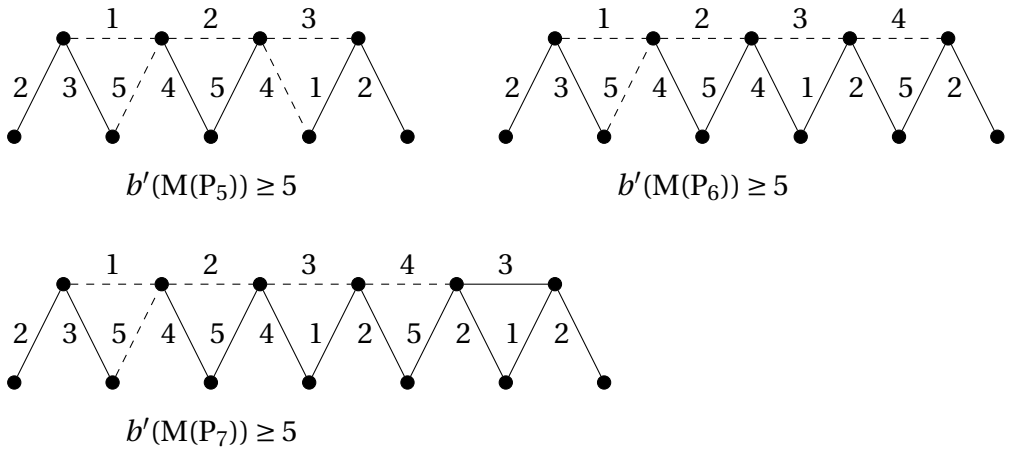


FIGURE 3.16 – Une b-coloration des arêtes de $M(P_n)$ pour $n \in \{5,6,7\}$.

Pour $n \in \{8,9,10\}$. Montrons que $b'(\mathrm{M}(\mathrm{P}_n)) \geq 6$. Pour cela, il suffit de donner une b-coloration d'arêtes de $\mathrm{M}(\mathrm{P}_n)$ avec 6 couleurs (Voir la Figure 3.17). De plus, il est facile de voir que $m'(\mathrm{M}(\mathrm{P}_n)) = 6$, alors $b'(\mathrm{M}(\mathrm{P}_n)) = 6$.

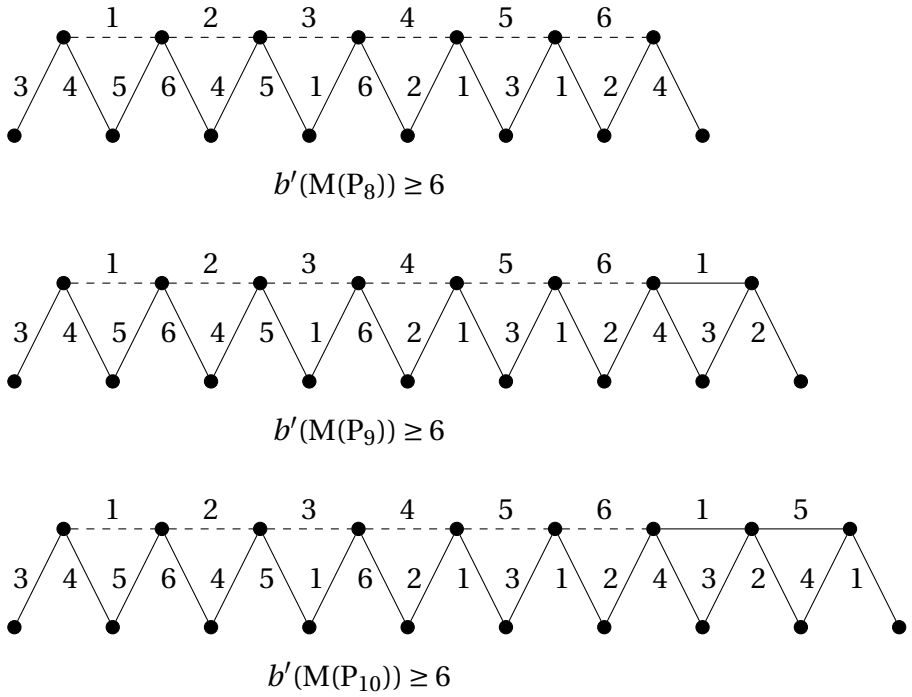


FIGURE 3.17 – Une b-coloration des arêtes de$\mathrm{M}(\mathrm{P}_n)$ pour $n \in \{8,9,10\}$.

Pour $n \geq 11$. Il est facile de voir que $m'(\mathrm{M}(\mathrm{P}_{11})) = 7$, alors (2.1) implique que $b'(\mathrm{M}(\mathrm{P}_{11})) \leq 7$. D'autre part, la Figure 3.18 présente une b-coloration des arêtes de $\mathrm{M}(\mathrm{P}_{11})$ avec 7 couleurs. Par conséquent, $b'(\mathrm{M}(\mathrm{P}_{11}) = 7$. Soit $\mathrm{H} = \mathrm{M}(\mathrm{P}_{11})$ un sous-graphe de $\mathrm{M}(\mathrm{P}_n)$ pour $n \geq 12$ et considérons une b-coloration c d'arêtes de H avec 7 couleurs (coloration partielle de $\mathrm{M}(\mathrm{P}_n)$). Comme pour $n \geq 12$, le degré maximum des arêtes est $2\Delta(\mathrm{G}) - 2 = 6$ et $\mathrm{M}(\mathrm{P}_n)$ admet une b-coloration des arêtes avec $2\Delta(\mathrm{M}(\mathrm{P}_n)) - 1$ couleurs, alors c peut s'étendre à $\mathrm{M}(\mathrm{P}_n)$. Donc, $b'(\mathrm{M}(\mathrm{P}_n)) = 7$.

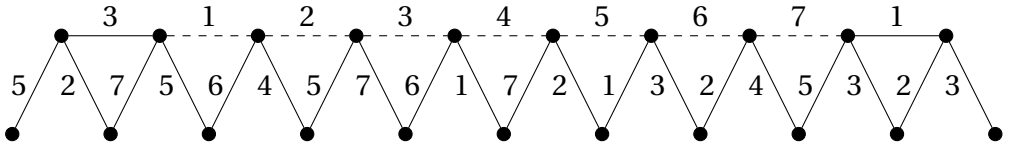


FIGURE 3.18 – Une b-coloration des arêtes deM (P_{11}).

Pour $n = 2$, $\mathrm{T}(\mathrm{P}_n)$ est isomorphe à C_3, et donc d'après le Théorème 3.1.2, $b'(\mathrm{T}(\mathrm{P}_2)) = 3$. Pour

$n = 3$, on a $m'(T(P_3)) = \Delta(T(P_3)) = 4$, et d'après (2.1), on obtient $b'(T(P_3)) = 4$.

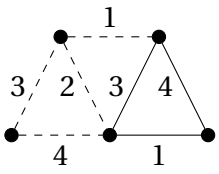


FIGURE 3.19 – Une b-coloration des arêtes de T (P_3).

Pour $n = 4$, montrons d'abord que $b'(T(P_4)) \geq 5$. Pour cela, il suffit de donner une b-coloration d'arêtes de $T(P_4)$ avec 5 couleurs (Voir Figure 3.20). Il reste de montrer que $b'(T(P_n)) \leq 5$. Supposons au contraire que $b'(T(P_4)) \geq 6$. Vu que $m'(T(P_4)) = 6$, alors (2.1) donne $b'(T(P_4)) = 6$. Comme $T(P_4)$ comporte 7 arêtes denses parmi $|E(T(P_4))| = 11$ arêtes, alors il existe au moins une classe de couleur qui possède exactement une seule arête, disons e. Ceci signifie que e est une b-arête de couleur non répétée. Donc, toutes les autres b-arêtes, de couleur différentes à celle de e, sont adjacentes à e. Montrons que $e \in \{e_2v_2, e_2v_3\}$. Supposons le contraire. Alors, soit $e = v_2v_3$ ou bien $e \in \{e_1v_2, e_3v_3, e_1e_2, e_2e_3\}$. Si $e = v_2v_3$ ou $\{e_1e_2, e_2e_3\}$ (resp., $e \in \{e_1v_2, e_2v_3\}$), alors il existe deux (resp., trois) arêtes denses non adjacentes à e. Comme $b'(T(P_4)) = 6$, alors au moins l'une de ces arêtes est une b-arête, ce qui contredit le fait que toutes les b-arêtes sont adjacentes à e. Par conséquent, $e \in \{e_2v_2, e_2v_3\}$. Par symétrie et sans perte de généralité, supposons que $e = e_2v_2$ est une b-arête de couleur 1 et $c(e_1v_2) = 2$, $c(e_1e_2) = 3$, $c(e_2e_3) = 4$, $c(e_2v_3) = 5$ et $c(v_2v_3) = 6$. Vu que les arêtes denses adjacentes à e sont des b-arêtes, alors e_1v_2 et e_1e_2 sont des b-arêtes de couleurs 2 et 3 respectivement. Alors, les arêtes e_1v_1 et v_1v_2 peuvent prendre les couleurs 4 et 5 respectivement, mais dans ce cas e_1e_2 aura une couleur manquante dans son voisinage, contradiction. En conséquence, $b'(T(P_4)) = 5$.

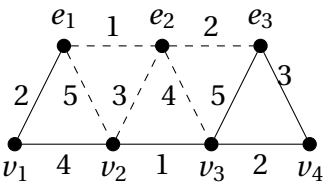


FIGURE 3.20 – Une b-coloration des arêtes de T (P_4).

Pour $n = 5$, la Figure 3.21 présente une b-coloration d'arêtes de T (P_5) avec 6 couleurs. De ce fait $b'(T(P_n)) \geq 6$.

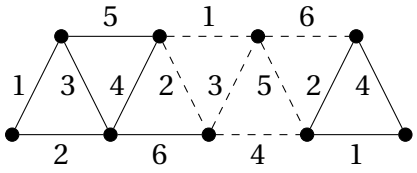


FIGURE 3.21 – Une b-coloration des arêtes de T (P_5) avec 6 couleurs.

Il reste de prouver que $b'(T(P_5)) \leq 6$. Il est facile de voir que $m'(T(P_5)) = 7$, car $T(P_5)$ a exactement 7 arêtes de degré 6, mais il n'a pas 8 arêtes de degré 7. Puisque $T(P_5)$ possède une b-coloration d'arêtes avec 6 couleurs, alors $6 \leq b'(T(P_5)) \leq 7$. Supposons que $b'(T(P_5)) = 7$. Alors, dans ce cas $T(P_5)$ possède exactement 7 b-arêtes. Ces arêtes (dessinées en gras dans la Figure 3.22) sont colorées différemment. L'arête v_3v_4 doit avoir dans son voisinage

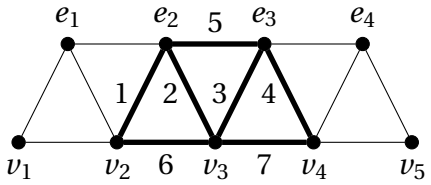


FIGURE 3.22 – Une b-coloration des arêtes de T (P_5).

la couleur 5, mais dans ce cas l'arête e_3v_4 aura dans son voisinage deux arêtes colorées avec la même couler 5, donc l'arête e_3v_4 ne peut pas être une b-arête, contradiction. D'où, $b'(T(P_5)) = 7$.

Pour $n = 6$, la Figure 3.23 présente une b-coloration d'arêtes de $T(P_n)$ avec 6 couleurs. De ce fait $b'(T(P_6)) \geq 6$. Pour $n = 7$, on a $m'(T(P_7)) = 7$, et d'après (2.1), on constate que $b'(T(P_7)) \leq$

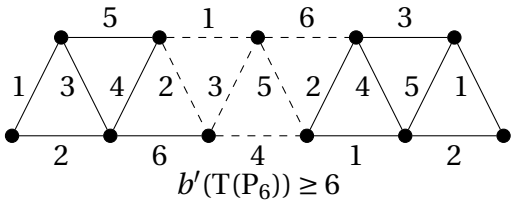


FIGURE 3.23 – Une b-coloration des arêtes de T (P_n) avec 6 couleurs pour $n \in \{6,7\}$.

7. D'autre part, la Figure 3.5 présente une b-coloration des arêtes de $T(P_7)$ avec 7 couleurs. Par conséquent, $b'(T(P_7) = 7$. Supposons maintenant que $n \geq 9$ et soit $H = T(P_7)$ un sous-graphe de $T(P_n)$. Considérons une b-coloration c des arêtes de H avec 7 couleurs (coloration

partielle de $T(P_n)$). Comme le degré maximum des arêtes de $T(P_n)$ est $2\Delta(T(P_n))-2 = 6$, alors c peut s'étendre à $T(P_n)$ avec 7 couleurs. D'où, $b'(T(P_n)) = 7$.

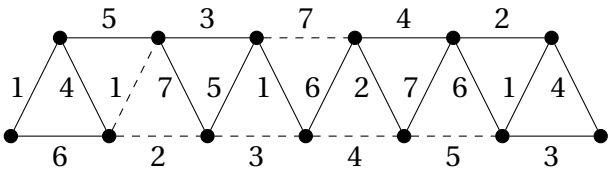


FIGURE 3.24 – Une b-coloration des arêtes de T (P_7).

■

Théorème 3.5.2 *Soit* C_n *un cycle d'ordre* n*. Alors,*

$$i)\ b'(M(C_n)) = \begin{cases} 5\ si\ n \in \{3,4,5\}\ ; \\ 6\ si\ n = 6\ ; \\ 7\ si\ n \geq 7. \end{cases}, \quad ii)\ b'(T(C_n)) = \begin{cases} 6\ si\ n \in \{3,4\}\ ; \\ 7\ si\ n \geq 5. \end{cases}.$$

Preuve. Posons $V(C_n) = \{v_1, ..., v_n\}$ et $E(C_n) = \{e_1, ..., e_n\}$ tel que $e_j = v_j v_{j+1}$ pour tout $j, \leq j \leq n-1$. Soit $M(C_n)$ (resp., $T(C_n)$) le graphe milieu (resp., total) de C_n d'ensemble de sommets $V(M(C_n)) = V(C_n) \cup E(C_n)$ (resp., $V(T(C_n)) = V(M(C_n))$ et d'ensemble d'arêtes $E(M(C_n)) = \{e_i e_{i+1}, e_i v_i, e_i v_{i+1} : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{e_1 e_n, e_n v_1\}$ (resp., $E(T(C_n)) = E(M(C_n)) \cup \{v_i v_{i+1} : 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{v_1 v_n\}$).

i) Soit c une b-coloration d'arêtes de $M(C_n)$ (resp., $T(C_n)$) avec k couleurs.

Pour $n \in \{3,4,5\}$. Pour montrer que $b'(M(C_n)) \geq 5$, il suffit de donner une b-coloration d'arêtes de $M(C_n)$ en utilisant 5 couleurs (Voir Figure 3.25). Il reste à montrer que $b'(M(C_n)) \leq 5$. En effet, vu que $m'(M(C_n)) = 5$, (2.1) donne $b'(M(C_n)) \leq 5$, et par conséquent $b'(M(C_n)) = 5$.

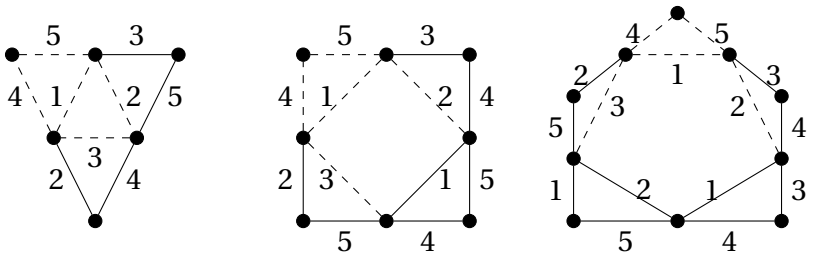


FIGURE 3.25 – Une b-coloration des arêtes avec 5 couleurs de $M(C_n)$ pour $n \in \{3,4,5\}$.

Pour $n = 6$, en exhibant une b-coloration d'arêtes de $M(C_n)$ avec 6 couleurs (Voir Figure 3.26), on constate que $b'(M(C_n)) \geq 6$. D'autre part, puisque $m'(M(C_n)) = 6$, on conclut que $b'(M(C_n)) = 6$.

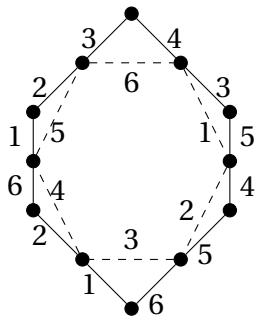
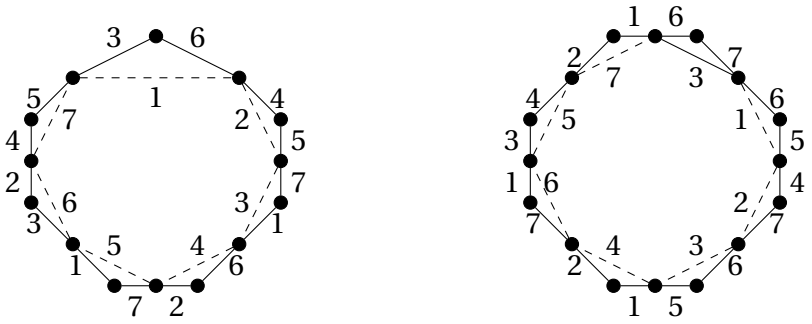


FIGURE 3.26 – Une b-coloration des arêtes de $M(C_6)$.

Pour $n \in \{7,8\}$. Pour prouver que $b'(M(C_n)) \geq 7$, nous donnons une b-coloration d'arêtes de $M(C_n)$ avec 7 couleurs (Voir Figure 3.27 pour $n \in \{7,8\}$).



$b'(M(C_7)) \geq 6$ $b'(M(C_8)) \geq 6$

FIGURE 3.27 – Une b-coloration des arêtes de $M(C_n)$ pour $n \in \{7,8\}$.

Pour $n \geq 9$, on commence d'abord par une coloration partielle d'arêtes de $M(C_n)$ avec 7 couleurs ensuite on étend cette coloration à toutes les arêtes de $M(C_n)$; cette extension est possible puisque le degré maximum des arêtes de $M(C_n)$ est égal à 6. Pour cela, considérons le sous-graphe H de $M(C_n)$ engendré par l'ensemble $A = \{e_i, v_j : 1 \leq i \leq 8,\ 1 \leq j \leq 9\}$. Nous colorons les arêtes de H comme suit. On affecte la couleur i aux arêtes $e_i e_{i+1}$ pour tout $i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$, et les autres arêtes sont colorées comme suit. $c(e_4v_4) = c(e_6v_6) = c(e_8v_8) = 1$, $c(e_5v_5) = c(e_7v_8) = c(v_1e_n) = 2$, $c(e_1e_n) = c(e_6v_7) = c(e_8v_9) = 3$, $c(e_2v_3) = c(e_7v_7) = 4$, $c(e_1v_2) = c(e_3v_3) = c(e_8e_9) = 5$, $c(e_2v_2) = c(e_4v_5) = 6$, $c(e_1v_1) = c(e_3v_4) = c(e_5v_6) = 7$. Notons que les b-arêtes de c sont $\{e_i e_{i+1} : i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}\}$. En conséquence, $b'(M(C_n)) \geq 7$.

Vu que $m'(\mathrm{M}(\mathrm{C}_n)) = 7$, alors $b'(\mathrm{M}(\mathrm{C}_n)) = 7$.

ii) Pour $n = 3$, la Figure 3.28 présente une b-coloration d'arêtes de $\mathrm{T}(\mathrm{C}_3)$ avec 6 couleurs. Alors, $b'(\mathrm{T}(\mathrm{C}_n)) \geq 6$.

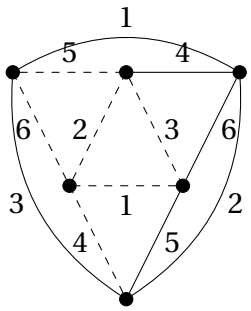


FIGURE 3.28 – b-coloration d'arêtes de $\mathrm{T}(\mathrm{C}_3)$ avec 6 couleurs.

Montrons maintenant que $b'(\mathrm{T}(\mathrm{C}_3)) \leq 6$. Supposons, au contraire, que pour $b'(\mathrm{T}(\mathrm{C}_3)) \geq 7$. Comme $m'(\mathrm{T}(\mathrm{C}_3)) = 7$, alors d'après (2.1), on a $b'(\mathrm{T}(\mathrm{C}_3)) = 7$. Soit c une b-coloration de $\mathrm{T}(\mathrm{C}_3)$ avec 7 couleurs, et soit C_i une classe de couleur i, pour $i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Puisque $\mathrm{T}(\mathrm{C}_3)$ possède 12 arêtes, alors il existe au moins deux classes de couleur, disons C_1 de couleur 1 et C_2 de couleur 2, telles que $|\mathrm{C}_1| = |\mathrm{C}_2| = 1$. Clairement les arêtes de C_1 et de C_2 sont des b-arêtes de couleurs non répétées 1 et 2 respectivement, donc elle sont adjacentes. De plus, toutes les autres b-arêtes de couleurs $3,4,5,6$ et 7 sont adjacentes à ses deux arêtes. Par conséquent, les 7 b-arêtes de couleurs distinctes ont une extrémité commune de degré 7, contradiction car $\Delta(\mathrm{T}(\mathrm{C}_3)) = 4$. Alors, $b'(\mathrm{T}(\mathrm{C}_3)) = 6$.

Pour $n = 4$, la Figure 3.29 présente une b-coloration d'arêtes de $\mathrm{T}(\mathrm{C}_4)$ avec 6 couleurs. Par conséquent, $b'(\mathrm{T}(\mathrm{C}_4)) \geq 6$.

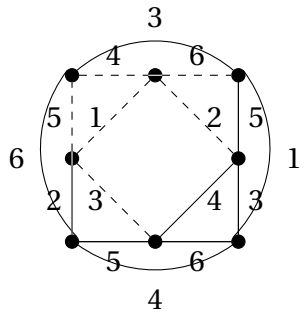


FIGURE 3.29 – b-coloration d'arêtes de $\mathrm{T}(\mathrm{C}_4)$ avec 6 couleurs.

D'autre part, il est clair que $b'(\mathrm{T}(\mathrm{C}_4)) \leq m'(\mathrm{T}(\mathrm{C}_4)) = 7$. Nous allons montrer que $b'(\mathrm{T}(\mathrm{C}_4)) =$

6. Supposons au contraire que $b'(T(C_4)) = 7$. De ce fait, puisque $T(C_4)$ est un graphe 6-arête-régulier, alors

toutes les arêtes adjacentes à une b-arête sont colorées différemment. (3.2)

Soit c une b-coloration des arêtes de $T(C_4)$ avec 7 couleurs. Alors c partitionne l'ensemble des arêtes de $T(C_4)$ en couplages où chaque couplage est une classe de couleur. On peut voir facilement que chaque classe de couleur (couplage) contient au moins deux arêtes car sinon on aura une b-arête qui contient dans son voisinage deux arêtes colorées avec a même couleur, ce qui contredit (3.2). Vu que $\beta(T(C_4)) = 4$ (couplage maximum de $T(C_4)$), alors toute classe contient au plus 4 arêtes. De ce fait, puisque le nombre des arêtes de $T(C_4)$ est égal à 16, alors il y a au moins 5 classes de couleur qui contiennent exactement 2 arêtes. Soit n_i le nombre des arêtes de couleur i pour $i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Il y a deux cas qui se présentent. Sans perte de généralité, soit $n_1 = 4$ et $n_i = 2$ pour $i \in \{2,3,4,5,6,7\}$ ou bien $n_1 = n_2 = 3$ et $n_i = 2$ pour $i \in \{3,4,5,6,7\}$. Dans le premier cas, toute arête de couleur j va être adjacente à deux arêtes de même couleur $i \neq j$. Dans ce cas, c ne peut pas avoir des b-arêtes de couleur j en vertu de (3.2), contradiction. D'où le premier cas est à éliminer. Il ne reste que le deuxième cas. Posons $V(T(C_4)) = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ et soient C_1 et C_2 deux classes de couleurs 1 et 2 respectivement telles que $C_1 = \{A_1, A_1', A_1''\}$ $C_2 = \{A_2, A_2', A_2''\}$. Supposons que A_1 et A_2 sont des b-arêtes.

Cas 1 : A_1 est adjacente à A_2.

Sans perte de généralité, posons $A_1 = ab$ et $A_2 = bc$. Alors (3.2) implique qu'aucune arête de $C_2 \setminus A_2$ est adjacente à A_1 et aucune arêtes de $C_1 \setminus A_1$ est adjacente à A_2. Soit $H = (V', E')$ un sous-graphe partiel de $T(C_4)$ tel que $V' = V(T(C_4)) \setminus \{a,b,c\}$ et $E_1'', A_1'', A_2', A_2''\}$. Puisque $|V(T(C_4))| = 8$, alors il est facile de voir que H est une chaîne alternée ou bien un cycle alterné de couleurs 1 et 2.

Si $H = P_5$, alors sans perte de généralité, supposons que $A_1' = de$, $A_2' = ef$, $A_1'' = fg$ et $A_2'' = gh$ (Voir Figure 3.30). Dans ce cas, (3.2) implique que les arêtes qui peuvent être des b-arêtes de c sont ac, cd, dh et ah (les arêtes candidates sont dessinées en gras dans la Figure 3.30). Par conséquent, il n'existe pas une b-arête pour la septième couleur de c, ce qui contredit le fait que $b'(T(C_4)) = 7$.

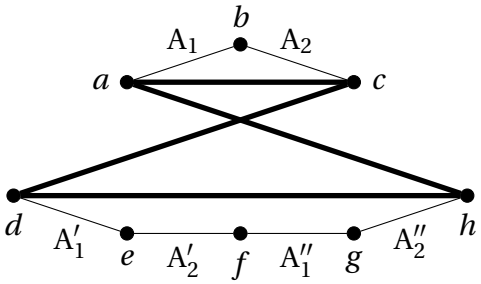


FIGURE 3.30 – b-coloration d'arêtes de $T(C_4)$ avec 7 couleurs.

Si $H = C_4$, alors sans perte de généralité, supposons que $A'_1 = de$, $A'_2 = ef$, $A''_1 = fg$ et $A''_2 = gd$. Dans ce cas, les seules arêtes candidates d'être des b-arêtes de c sont ac et les quatre arêtes incidentes au sommet h. Les sommets a, b et c induisent un triangle, et comme $A_1 = ab$ et $A_2 = bc$ sont des b-arêtes, alors le Théorème 2.2.2 implique que ac ne peut pas être une b-arête. Alors, il n'existe que les quatre arêtes incidentes à h qui peuvent être des b-arêtes (les arêtes candidates sont dessinées en gras dans la Figure 3.31). Par conséquent, il n'existe pas une b-arête pour la septième couleur de c, contradiction.

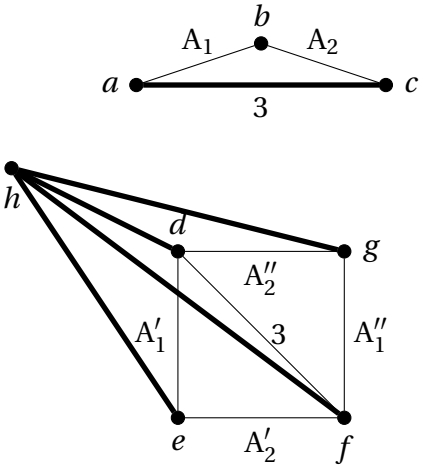


FIGURE 3.31 – Une b-coloration des arêtes de $T(C_4)$ avec 7 couleurs.

Cas 2 : A_1 n'est pas adjacente à A_2.

Comme A_1 et A_2 sont deux b-arêtes de couleurs 1 et 2, alors chacune d'elles a besoin de la couleur de l'autre, alors sans perte de généralité supposons que A_1 est adjacente à A'_2 et A_2 est adjacente à A'_1. On distingue deux sous-cas selon l'adjacence entre les arêtes A''_1 et A''_2.

Cas 2.1 : Si A''_1 n'est pas adjacent à A''_2.

Comme $|V(T(C_4))| = 8$, alors il est clair que l'arête A''_1 est adjacente à A'_2 et l'arête A''_2 est adja-

cente à A'_1. Dans ce cas, (3.2) implique qu'il n'existe que quatre arêtes qui peuvent être des b-arêtes de c (Voir Figure 3.32 les arêtes sont dessinées en gras). Par conséquent, il n'existe pas une b-arête pour la septième couleur de c, ce qui contredit le fait que $b'(T(C_4)) = 7$.

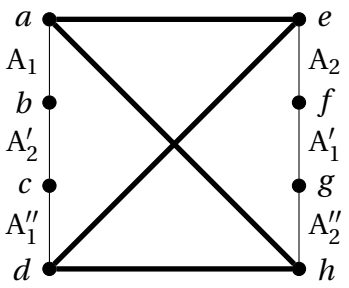


FIGURE 3.32 – b-coloration d'arêtes de $T(C_4)$ avec 7 couleurs.

Cas 2.2 : Si A''_1 est adjacente à A''_2.
Si les arêtes A''_1 et A''_2 ne sont pas adjacentes à A'_2 et A'_1 respectivement, alors (3.2) implique qu'il n'existe que quatre arêtes qui peuvent être des b-arêtes de c (Voir Figure 3.33 où les arêtes candidates sont dessinées en gras). Il en résulte donc qu'il n'existe pas une b-arête pour la septième couleur de c, contradiction avec le fait que $b'(T(C_4)) = 7$.

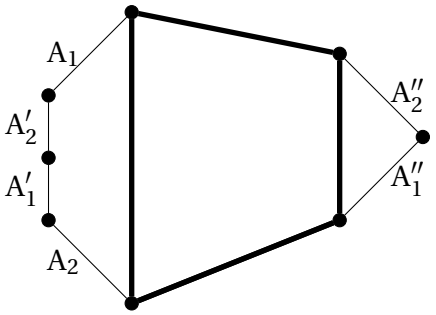


FIGURE 3.33 – b-coloration d'arêtes de $T(C_4)$ avec 7 couleurs.

Supposons maintenant et sans perte de généralité que A''_1 est adjacente à A'_2 et A''_2 n'est pas adjacente à A'_1. Alors, (3.2) implique qu'il n'existe que quatre arêtes qui peuvent être des b-arêtes de c (Voir Figure 3.34 les arêtes sont dessinées en gras). Alors il n'existe pas une b-arête pour la septième couleur de c, ce qui contredit le fait que $b'(T(C_4)) = 7$.

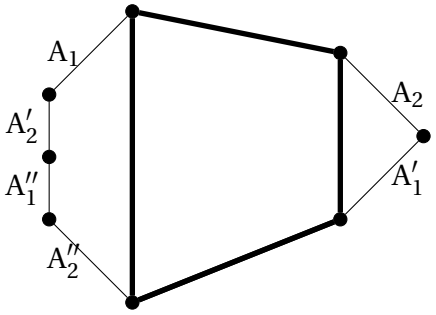


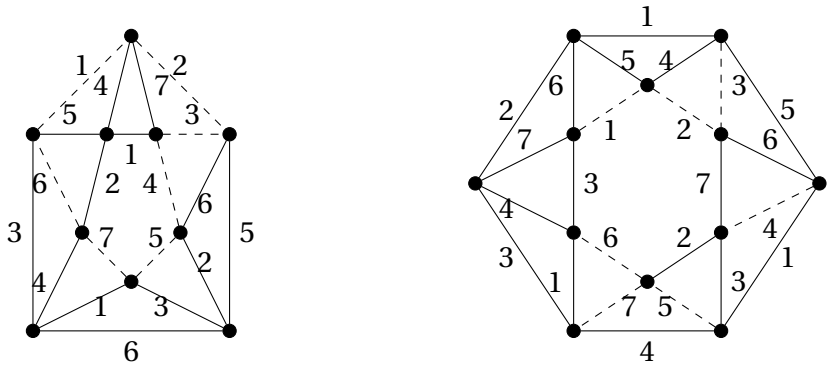
FIGURE 3.34 – b-coloration d'arêtes de $T(C_4)$ avec 7 couleurs.

Supposons maintenant et sans perte de généralité que A''_1 est adjacente à A'_2 et A''_2 est adjacente à A'_1 et que $A_1 = ab$, $A'_2 = bc$, $A''_1 = cd$, $A''_2 = de$, $A'_1 = ef$ et $A_2 = fg$. Puisque $|V(T(C_4))| = 8$, alors h n'est incident à aucune arêtes de $C_1 \cup C_2$. Donc, (3.2) implique qu'il existe cinq arêtes qui peuvent être des b-arêtes de c tel que le sommet h est incident à quatre parmi elles et l'autre arête c'est ag. Sans perte de généralité, supposons que l'arête ag est une b-arête de couleur 3. Comme $n_3 = 2$ et $d_{T(C_4)}(h) = 4$, alors la couleur 3 n'apparait pas dans le voisinage de toutes les arêtes incidentes à h, contradiction car ces dernières sont des b-arêtes.

Dans chaque cas, nous avons obtenu une contradiction, donc $b'(T(C_4)) = 6$.

Pour $n \geq 5$. Afin de prouver que $b'(T(C_n)) \geq 7$, nous donnons une b-coloration de $T(C_n)$ avec 7 couleurs.

Pour $n \in \{5,6\}$, voir Figure 3.35.



$b'(T(C_5)) \geq 7$ $\qquad$ $b'(T(C_6)) \geq 7$

FIGURE 3.35 – Une b-coloration des arêtes de $T(C_5)$ et $T(C_6)$.

Pour $n \geq 7$, on a $V(M(C_n)) = V(T(C_n))$ et $T(C_n)$ peut être obtenu à partir de $M(C_n)$ en ajoutant

les arêtes $\cup_{i=1}^{n-1}\{v_i v_{i+1}\} \cup \{v_1 v_n\}$. Soit π une b-coloration d'arêtes de $M(C_n)$ avec 7 couleurs. Clairement π est une coloration partielle de $T(C_n)$. Puisque le degré maximum de $T(C_n)$ est égal à 6, alors on peut étendre π aux autres arêtes de $T(C_n)$. D'où $b'(T(C_n)) \geq 7$. Sachant que $m'(T(C_n)) = 7$, on conclut que $b'(T(C_n)) \leq 7$, et par conséquent, $b'(T(C_n)) = 7$. ■

3.6 Graphe avec $b'(G) = 2$

Dans cette section, nous caractérisons le graphe ayant pour indice b-chromatique égal à 2.

Il est à observer que si $\Delta(G) > 2$ ou G est un cycle d'ordre $n \geq 3$ ($n \neq 4$) ou une chaîne d'ordre $n \geq 6$, alors $b'(G) > 2$. Par ailleurs, si $\Delta(G) = 1$, alors clairement $b'(G) = 1$. De ce fait le résultat suivant est immédiat.

Proposition 3.6.1 *Si* $b'(G) = 2$, *alors* $\Delta(G) = 2$; *de plus toute composante connexe de* G *est différente de* C_n ($n \neq 4$) *et de* P_n ($n \geq 6$).

Soit $\mathscr{F}$ une famille de graphes définie comme suit. Soit $G' = H + k_1P_2 + k_1P_3$ où $H = P_5$ ou $2P_4$ ou $2C_4$ ou $P_4 + C_4$; et k_1, k_2 sont deux entiers naturels vérifiant $k_1 > k_2 \geq 0$ ou $k_2 > k_1 \geq 0$.

$$\mathscr{F} = \{P_3, P_4, P_5, C_4\} \cup G'.$$

Théorème 3.6.1 *Soit* G *un graphe avec* $b'(G) = 2$ *si et seulement si* $G \in \mathscr{F}$.

Preuve. Il est facile de montrer que tout graphe G de $\mathscr{F}$ vérifie $b'(G) = 2$. Il reste de prouver la condition nécessaire. Considérons une b-coloration des arêtes c de G avec 2 couleurs. On distingue deux cas.

Cas 1 : G est connexe.

D'après la Proposition 3.6.1, $\Delta(G) = 2$. Ce qui implique G est soit une chaîne ou bien un cycle. Encore, en vertu de la Proposition 3.6.1, $G \in \{P_3, P_4, P_5, C_4\}$.

Cas 2 : G non connexe.

Soient $G_1, G_2, ..., G_p$ les composantes connexes de G. D'après la Proposition 3.6.1, G est l'union chaînes d'ordre p, $2 \leq p \leq 5$ et de cycles d'ordre 4. Vu que $\Delta(G) = 2$, alors au moins une composante de G est d'ordre 3.

D'après la Figure 3.36, G est différent de $3P_4, 3C_4, 2P_5, 2P_4 + C_4, 2C_4 + P_4, P_5 + P_4, P_5 + C_4$. De ce fait, si $G_1 = P_5$, alors $G_i = P_2$ ou P_3 pour tout $i > 2$. Egalement si $G_1 + G_2$ est $2P_4$ ou $2C_4$ ou $P_4 + C_4$, alors $G_i = P_2$ ou P_3 pour tout $i > 2$. D'où $G = H + k_1P_2 + k_1P_3$ où $H = P_5$ ou $2P_4$ ou $2C_4$ ou $P_4 + C_4$; et k_1, k_2 sont deux entiers naturels vérifiant $k_1 > k_2 \geq 0$ ou $k_2 > k_1 \geq 0$. Donc $G \in \mathscr{F}$.

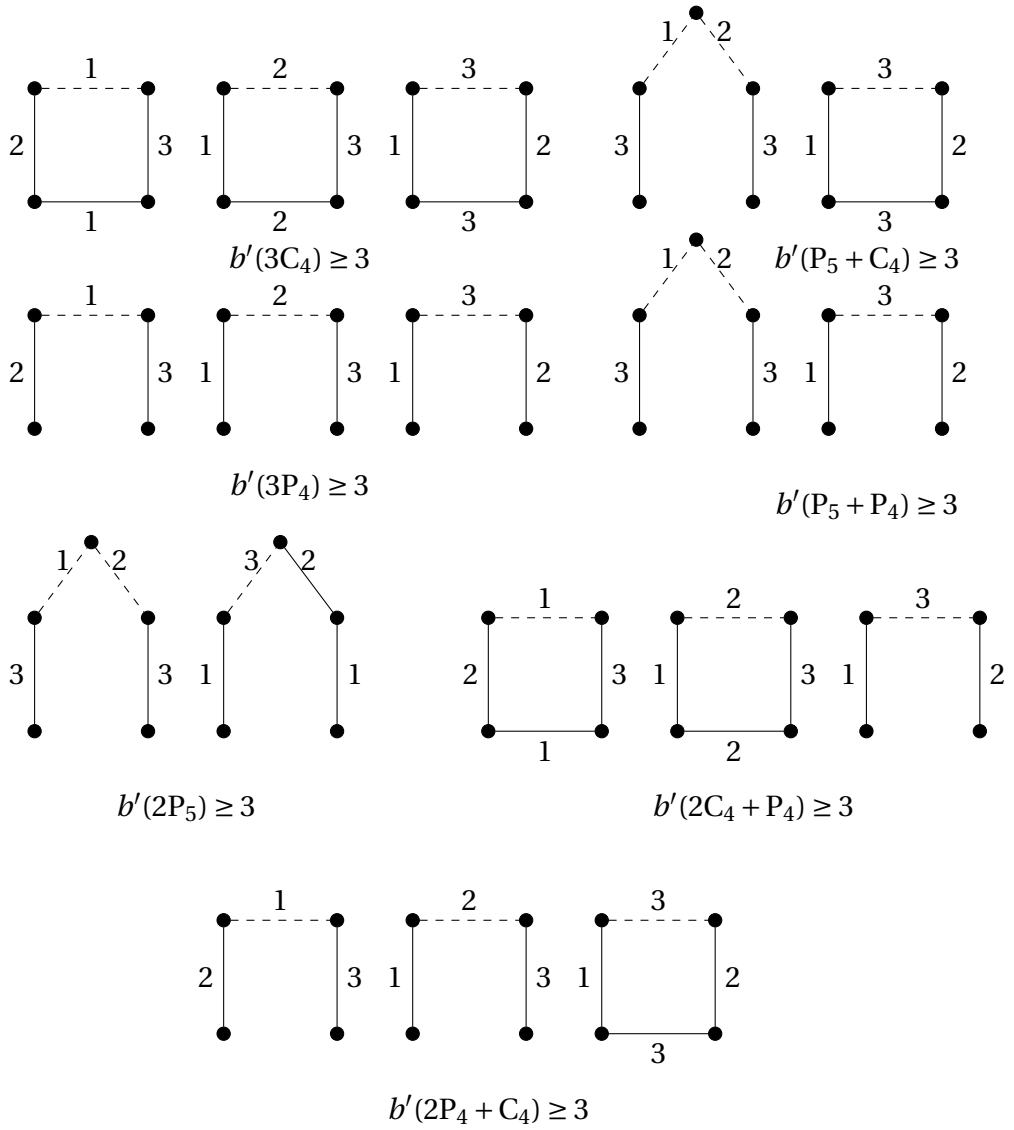


FIGURE 3.36 – Une b-coloration des arêtes de certains graphes

■

Conclusion et Perspectives

Dans ce mémoire, nous nous sommes focalisés sur la b-coloration des arêtes d'un graphe et l'indice b-chromatique. La détermination de l'indice b-chromatique est NP-complet pour un graphe quelconque. De ce fait, nous avons déterminé sa valeur exacte ou bien des bornes de ce paramètre pour des classes particulières des graphes, à savoir, la chaîne, le cycle, la roue, double étoile, la couronne d'une chaîne et d'un cycle, le prisme d'une chaîne et d'un cycle et du graphe milieu et total d'une chaîne et d'un cycle. En outre, nous avons donné une caractérisation des graphes ayant pour indice b-chromatique égal à 2.

Nos différents travaux de recherche dans ce mémoire, nous ont amené à envisager quelques perspectives de recherche. À titre d'exemple, il serait intéressant de déterminer la valeur exacte ou bien des bornes de ce paramètre pour d'autres graphes notamment le graphe milieu et le graphe total d'une étoile et d'un graphe complet, etc. Aussi, il est intéressant d'étudier les graphes critique par rapport l'indice b-chromatique en utilisant l'une des opérations sur les sommets ou les arêtes que nous les avons défini dans le premier chapitre.

Bibliographie

[1] R.W. Irving, D.F. Manlove. The b-chromatic number of graphs. Discrete Appl. Math. 91, 127 – 141, 1999.

[2] D.F. Manlove. Minimaximal and maximinimal optimization problems : a partial order-based approach. PhD thesis, technical report tr-1998 – 27 of the Computing Science Department of Glasgow University, 1998.

[3] K. Appel et W. Haken. Every planar map is four colorable : Part 1, discharging. Illinois. J. Maths., 21 : 429 – 490, 1977.

[4] K. Appel et W. Haken. Every planar map is four colorable : Part 2, reducibility. Illinois. J. Maths., 21 : 491 – 567, 1977.

[5] R. Brooks. On coloring the nodes of a network. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 37 : 194 – 197, 1941.

[6] F. Harary, S. Hedetniemi and G. Prins. An Interpolation theorem for graphical homomorphisms, Port. Math. 26 : 453 – 462, 1967.

[7] H. Elghazel, K. Benabdeslem, A.Dussauchoy. Constrained Graph b-Coloring Based Clustering Approach. I.Y. Song, J. Eder, and T.M. Nguyen (Eds.) : DaWaK, LNCS 4654, pp. 262 – 271, 2007.

[8] H. Elghazel, V. Deslandres, M. S. Hacid, A. Dussauchoy, H. Kheddouci. A New Clustering Approach for Symbolic Data and Its Validation : Application to the Healthcare Data. F. Esposito et al. (Eds.) : ISMIS, LNAI 4203, pp. 473 – 482, 200.

[9] H. Elghazel, H. Kheddouci, V. Deslandres, A. Dussauchoy. A Partially Dynamic Clustering Algorithm for Data Insertion and Removal. V. Corruble, M. Takeda, and E. Suzuki (Eds.) : DS 2007, LNAI 4755, pp. 78 – 90, 2007.

[10] J. Kratochvíl, Z. Tuza, M. Voigt. On the b-chromatic number of graphs. Lecture Notes in Computer Science (Graph-Theoretic Concepts in Computer Science : 28th International Workshop, WG 2002) 2573, 310 – 320, 2002.

[11] F. Bonomo, G. Duràn, F. Maffray, J. Marenco, M. Valencia-Pabon. On the b-coloring of cographs and P_4-sparse graphs. Graphs and Combinatorics 25 : 153 – 167, 2009.

[12] S. Cabello, M. Jakovac. On the b-chromatic number of regular graphs. Discrete applied mathematics, vol. 159, no 13, pp. 1303 – 1310, 2011.

[13] B. Jamison, S. Olarui. A tree representation for P_4-sparse graphs. Discrete Appl. Math. 35 : 115 – 129, 1992.

[14] V. Giakoumakis, F. Roussel, H. Thuillier. On P4-tidy graphs. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 1 : 17 – 41, 1997.

[15] M. Kouider, M. Mahéo. Some bounds for the b-chromatic number of a graph. Discrete Math. 256 : 267 – 277, 2002.

[16] M. Kouider, M. Zaker. Bounds for the b-chromatic number of some families of graphs. Discrete mathematics, vol. 306, no 7, pp. 617 – 623, 2006.

[17] F. Maffray, A. Silva. A b-colouring the cartesian product of trees and some other graphs. A paraître dans Discrete Applied Mathematics.

[18] R. Javadi, B. Omoomi. On b-coloring of cartesian product of graphs. A paraître dans Ars Combinatoria, 2010.

[19] M. Jakovac, I. Peterin. On the b-chromatic number of some graph products. A paraître dans Stud. Sci. Math. Hung.

[20] C.T. Hoàng, M. Kouider. On the b-dominating coloring of graphs. Discrete Appl. Math. 152 : 176 – 186, 2005.

[21] B. Effantin, H. Kheddouci. Exact values for the b-chromatic number of a power complete k-ary tree. Journal of Discrete Mathematical Science and Criptography 8 (1) (2005) 117 – 129.

[22] R. Javadi, B. Omoomi. On b-coloring of the Kneser graphs. Discrete Mathematics 309 : 4399 – 4408, 2009.

[23] C.T. Hoàng, C. Linhares Sales, F. Maffray. On minimally b-imperfect graphs. Discrete Applied Mathematics 157 : 3519 – 3530, 2009.

[24] C.T. Hoàng, F. Maffray, M. Mechebbek. A characterization of b-perfect graphs. A paraître dans Journal of Graph Theory.

[25] T. Faik. La b-continuité des b-colorations : complexité, propriétés structurelles et algorithmes. Thèse de Doctorat, Université Paris XI Orsay, 2005.

[26] G. A. Dirac. Property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs. J. London, Math. Soc. 27 : 85 – 92, 1952.

[27] N. Ikhlef Eschouf. Characterization of some b-chromatic edge critical graphs. Australasian Journal of Combinatorics 47 : 21 – 35, 2010.

[28] V. Campos, C. Linhares Sales, F. Maffray, A. Silva. b-chromatic number of cacti. Electronic Notes in Discrete Mathematics 35 (2009) 281–286.

[29] A. Silva. Le nombre b-chromatique de quelques classes de graphes généralisant les arbres. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2010.

[30] M. Jakovac, I. Peterin. The b-chromatic number and related topics-a survey. Priprint.

[31] C. V. G. C. Lima, N. A. Martins, L. Sampaio, M. C. Santos, A. Silva, b-chromatic index of graphs. Discrete Mathematics. 338 (2015) 2072-2079.

[32] M. Jakovac, I. Peterin. The b-chromatic index of a graph. Bulletin of the Malaysian Math. Sc. Society 38 (4) (2014) 1375–1392.

[33] V. Campos. A. Silva. Edge-b-Coloring Trees. Algorithmica DOI 10.1007/s00453-016-0240-x. Springer Science+Business Media New York 2016.

[34] A. Silva. Trees with small b-cromatic index. arXiv :1511.05847v1 [cs.DM] 18 Nov 2015.

[35] I. Koch, I. Peterin. The b-chromatic index of direct product of graphs. Discrete Applied Mathematics 190–191 (2015) 109–117.

[36] T. Hamada, I. Yoshimura : Traversability and connectivity of the middle graph of a graph. Discrete Math. 14 : 247 – 256 ; 1976.

[37] M. Behzad : A criterion for the planarity of the total graph of a graph. Proc. Camb.Philos. Soc. 63 : 679 - 681 ; 1967.

[38] V.G. Vizing. On an estimate of the chromatic class of a graph, Diskret. Anal.,pp. 25-30, 3 (1964).

[39] I. Holyer. The NP-completeness of edge-coloring, SIAM J. Comput, pp. 718-720, 10 (1981)

[40] P.G. Tait. On the coloring of maps. Proc. Royal Soc. Edinburgh, 10 : 501 – 503, (1880).