Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr.Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques & Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention

du

Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Recherche Opérationnelle

Par

HAISSAM Nesrine & LAISSAOUI Marwa

Thème

LA b-COLORATION DE CERTAINS GRAPHES

Composition du Jury :

Mr.	N. IKHLEF ESCHOUF	Professeur	UYF Médéa	Président
Mr.	R. LEMDANI	Maître de Conférences	UYF Médéa	Examinateur
Mr.	M. ZEMIR	Maître Assistant	UYF Médéa	Examinateur
Mlle.	A. BENDALI BRAHAM	Maître de Conférences	UYF Médéa	Promotrice

Date de soutenance: *23/06/2022*

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse principalement à la notion de la b-coloration dans les graphes, et plus précisément, le nombre b-chromatique de certains graphes.

Une coloration propre des sommets d'un graphe $G = (V, E)$ est une fonction qui attribue une couleur à chaque sommet de sorte que deux sommets adjacents sont colorés différemment. Le nombre minimum de couleurs d'une coloration propre des sommets de G est appelé nombre chromatique de G noté $\chi(G)$. Une b-coloration d'un graphe G est une coloration propre des sommets, telle que chaque classe de couleur contient au moins un sommet ayant au moins un voisin dans chacune des autres classes de couleurs. Un tel sommet est appelé b-sommet. Le nombre b-chromatique, noté $b(G)$, est le plus grand entier k pour lequel G admet une b-coloration en k couleurs.

Dans ce mémoire, on débute par les définitions essentielles de la théorie des graphes. Puis, on passe à quelques résultat existant sur la b-coloration. Enfin, on détermine des valeurs exactes du nombre b-chromatique de quelques graphes.

Abstract

In this memory, we are mainly interested in the concept of b-coloring in graphs, more precisely, the b-chromatic number in some graphe.

A proper vertex coloring of a graph $G = (V, E)$ is an assignment of colors to the vertices of G such that adjacent vertices are colored differently. The minimum number of colors of proper vertex coloring of G is called chromatic number $\chi(G)$. A b-coloring of a graph G is a proper coloring of the vertices of G such that each color class has at least one vertex which has at least one neighbor in every other color classes. Such a vertex is called b-vertex. The b-chromatic number $b(G)$ of a graph G is the largest integer k such that G admits a b-coloring with k colors.

In this memory, we start with the essential definitions of graph theory. Then, we move on to some result of b-coloring. Finally, we determine with values exact exact values of the b-chromatic number of some graphs.

ملخص

في هذه المذكرة نركزعلى دراسة مفهوم ب-تلوين في البيانات.
بيان معين. التلوين الأجود لرؤوس البيان هو توزيع الألوان على الرؤوس G= (E,V) ليكن بحيث أن كل رأسين متجاورين لهما لونين مختلفين. يسمى الحد الأدنى لعدد الألوان المطلوبة هو تلوين أجود G التلوين ب-لوني لبيان .χ(G)العدد اللوني و يرمز لها ب G لتلوين البيان لرؤوس هذا البيان بحيث أن كل فئة لونية تحتوي على الأقل على رأس مجاور لرأس أخر على لبيان هو أكبر عدد صحيح ك بحيث b(G) الأقل من جميع الفئات اللونية. العدد ب-لوني .يقبل ب-تلوين ب ك- لون G البيان
في هذه المذكرة، نبدأ بالتعريفات الأساسية لنظرية الرسم البياني. ثم ننتقل إلى بعض النتائج .الموجودة على ب-تلوين. أخيرا، نحدد القيم الدقيقة للعدد اللوني ب لبعض الرسوم البيانية

Remerciements

Avant tout je remercie Allah tout puissant de m'avoir donné le courage et la patience pour terminer ce travail.

Ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de Madame **Amel BENDALI-BRAHAM**, Maître de Conférences à l'université **Dr. YAHIA FARES** de Médéa, on la remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel pour sa patience, sa rigueur , ses conseils précieuses et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à Monsieur **Noureddine Ikhlef Eschouf**, Maître de Conférences à l'université Dr. Yahia Farès de Médéa, pour son aide, sa disponibilité, et ses bons conseils. Je lui témoigne ma gratitude pour avoir pu prendre part à ce jury.

Nous tenons à remercier **Noureddine Ikhlef Eschouf** à l'université Dr. Yahia Farés de Médéa qui nous a fait l'honneur de présider ce jury.

Nous tenons à remercier également les membre de jury Monsieur **R. LEMDANI**, maître de conférence et Monsieur **M. ZEMIR**, maître assistant à l'université Dr. Yahia Farés de Médéa, de nous avoir fait le plaisir d'être les examinateurs de notre travail.

Notre plus sincère gratitude vont à nos très chers parents pour leur aide, leur soutien et leurs accompagnement.

Un merci spécial aux professeurs qui nous ont enseigné tout au long de notre parcours académique et ont illuminé nos vies avec la lumière du savoir.

Enfin, merci d'avance à ceux ou celles qui voudront bien me lire ou m'écouter et surtout m'aider à progresser.

Dédicace

J*e dédie ce mémoire*

A *ma mère qui m'a soutenu et encouragé*
durant ces années d'études, qu'elle trouve ici le témoignage de ma profonde reconnaissance.

Q*ui a souffert sans me laisser souffrir, qui n'a jamais dit non à mes exigences et qui n'a épargné aucun effort pour me rendre heureuse.*

A *ma soeur Chahrazed qui m'a chaleuresement supporté et encouragé tout au long de mon parcours, ses soutiens moral et leurs conseils précieux.*

A *mon oncle Diffallah , qui n'a jamais cessé de me supporter, me soutenir et m'encourager durant mes années d'études et ses conseils d'or.*
A *tous ceux qui m'ont aidé -de prés ou de loin- et ceux qui ont partagé avec moi les moments d'émotions lors de la réalisation de ce travail.*
S*ans oublier tous les professeurs que ce soit du*

primaire, du moyen, du secondaire ou de l'enseignement supérieur.

Marwa

Dédicace

Avec l'expression de ma reconnaissance, je dédie ce modeste travail à ceux qui, quels que soient les terme embrassés, je n'arriverais jamais à leur exprimer mon amour sincére.

- A mon cher père "Sahraoui" et ma adorable mère "Fatiha", qui m'ont comblés d'amour et d'affection, qui m'ont toujours encourager pour achever mes études tout en espérant voir le fruit de leur sacrifices. J'implore Dieu le tout puissant de vous accorder bonne santé et longue vie. Maman je t'adore, Papa je t'adore.

- A mes frères "Mohamed", "Raidh" et ma soeur "Zineb" qui m'avez toujours soutenu et encouragé durant ces années d'études, que Dieu les protège et leurs offer la chance et le bonheur.

- A mes grands-mères, mon grand-père, mes oncles, mes tantes, mes cousins, et à toutes la famille "HAISSAM" et "SAIDANI", merci pour votre amour inconditionnel.

- A toutes mes chères amies "Hadjer", "Roufaida", "Hakima", "Sara", "Imane", "Siham", "Yousra" et "Insaf".

- A la personne qui a été ma compagne dans mes études, qui a raisan de ma réussite au master, qui m'a aidé et supporté dans les moments difficiles. Que Dieu le garde à ta famille, merci infinément.

- Sans oublier mon binôme "Marwa" et sa famille, pour son soutien moral, sa patience et sa compéhension tout au long de ce travail, je t'aime ma belle.

Nesrine

Table des matières

Résumé i

Abstract ii

Résumé en arabe iv

Remerciements iv

Introduction 1

1 TERMINOLOGIES FONDAMENTALES ET QUELQUES RESULTATS DE BASES 4

1.1 Notions sur les graphes 4

1.1.1 Graphes 4

1.1.2 Voisinages et degrés 5

1.1.3 Sous-graphes et graphe partiels 6

1.1.4 Chaînes et cycles 6

1.1.5 Distances, excentricité, diamètres, rayons et centres 8

1.1.6 Ensemble minimal (resp.maximal) / minimum (resp.maximum) . . . 8

1.1.7 Graphes particuliers 8

1.1.8 Quelques paramètres de graphes 12

1.1.9 Quelques opérations sur les graphes 12

1.2 Compléxité algorithmique 13

1.2.1 Problème de décision 13

1.2.2 Classes de complexité 14
1.3 Coloration propre, a-coloration et b-coloration 16
1.3.1 Coloration propre 16
1.3.2 Notion de a-coloration 17
1.3.3 La b-coloration dans les graphes 18

2 ETAT DE L'ART SUR LA b-COLORATION 20
2.1 Quelque résultat existant sur la b-coloration 20
2.1.1 Encadrement du nombre b-chromatique 21
2.1.2 Le nombre b-chromatique de quelques graphes 22
2.2 La b-coloration de graphe de Mycielski de certains graphes 24

3 DETERMINATION DU NOMBRE b-CHROMATIQUE DE CERTAINS GRAPHES 26
3.1 La b-coloration de graphe de Mycielski de certains graphes 26
3.1.1 Nombre b-chromatique du Mycieleski de la chaîne P_n 27
3.1.2 Nombre b-chromatique du Mycieleski d'une étoile $K_{1,n}$ 28
3.2 La b-coloration de la couronne de deux graphes 30
3.2.1 Nombre b-chromatique du couronne $C_n \odot P_r$ 30
3.2.2 Nombre b-chromatique du couronne $K_n \odot P_r$ 33
3.3 La b-coloration de la couronne voisinage de deux graphes 34
3.3.1 Nombre b-chromatique de la couronne voisinage de $K_n \star P_r$ 35
3.3.2 Nombre b-chromatique de la couronne voisinage de $K_{1,n} \star P_r$ 36
3.4 Graphe de Friendship généralisé 41

Bibliographie 44

Liste des Figures

1.1.1 H est un graphe partiel de G. 6
1.1.2 la chaîne P_5 7
1.1.3 Le cycle C_4 7
1.1.4 G est connexe, H est non connexe avec deux composantes connexe. 9
1.1.5 Le graphe complet (K_4) et le graphe discret $(\overline{K_4})$. 9
1.1.6 Un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$ 9
1.1.7 Le graphe biparti complet $K_{2,3}$ 10
1.1.8 Un exemple d'un arbre T 10
1.1.9 L'étoile $K_{1,n}$ 11
1.1.10 Double étoile $S_{r,s}$ 11
1.1.11 La couronne d'un C_4 11
1.1.12 Le graphe joint de G_1 et G_2. 13

2.2.1 Graphe Mycielski de C_n. 24
2.2.2 Une b-coloration de graphe Mycielski de C_8. 25

3.1.1 Graphe Mycielski de P_n.. 27
3.1.2 Une b-coloration de graphe Mycielski de P_8. 28
3.1.3 Graphe Mycielski de $K_{1,n}$. 28
3.1.4 Une b-coloration de graphe de Mycielski de $K_{1,n}$. 29
3.2.1 Couronne de $C_3 \odot P_2$. 30
3.2.2 Une b-coloration du couronne de $C_3 \odot P_2$. 31
3.2.3 Une b-coloration du couronne de $C_3 \odot P_3$. 32

3.2.4 Une b-coloration du Couronne de $C_4 \odot P_r$. 32
3.2.5 Couronne de $K_n \odot P_r$. 33
3.2.6 Une b-coloration du Couronne de $K_n \odot P_r$. 34
3.3.1 Une b-coloration de la couronne voisinage de $K_3 \star P_2$. 35
3.3.2 Une b-coloration de la couronne voisinage de $K_4 \star P_3$. 36
3.3.3 Une b-coloration de la couronne voisinage de $K_{1,n} \star P_2$. 38
3.3.4 Une b-coloration de la couronne voisinage de $K_{1,n} \star P_r$. 41
3.4.1 Une b-coloration de graphe de Friendship Généralisé $F_{5,4}$. 42

Introduction

La recherche opérationnelle est la discipline des mathématiques appliquées qui traite des questions d'utilisation optimale des ressources dans l'industrie et dans le secteur public. Depuis une dizaine d'année, le champ d'application de la recherche opérationnelle s'est élargi à des domaines comme l'économie, la finance, le marketing et la planification d'entreprise. Plus récemment, la recherche opérationnelle a été utilisée pour la gestion des systèmes de santé et d'éducation, pour la résolution de problèmes environnementaux et dans d'autres domaines d'intérît public.

Confronté à un problème donné et pour en faciliter la compréhension, on recourt souvent au schéma. Ce dernier est composé exclusivement de points et de traits les reliant. Les points représentent les différents objets du problème. Quant aux traits, ils représentent les relations existant entre ces différents objets.

Ce schéma est conventionnellement nommé graphe. Les points et les traits sont appelés respectivement "sommets" et "arêtes". Si les traits sont orientés, on parlera d'arcs, au lieu d'arêtes.

Ce type de problème appartient à un très vaste domaine s'appelle "*la théorie des graphes*", qui s'est developpée dans des divers disciplines telles que la chimie, la sociologie, l'économie,.... L'histoire de la théorie des graphes débute avec les traveaux du mathématicien suisse *Leonhard Euler* au 18^e siècle, et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tel que celui des ponts de Königsberg, quand il se demandait s'il est possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et revenir à son point de départ. Dès le début du 20^e siècle, elle constitue une branche à part

entière des mathématiques, grâce aux traveaux de König, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdös.

En 1852, un jeune englais Francis Guthrie s'est demandé s'il est possible de colorer toute carte géographique avec quatre couleurs sous la contrainte que deux pays voisins sont colorés différemment. Ce n'est qu'en 1976, que deux chercheurs K. Appel et W. Haken ont pu répondre affirmativement à la conjoncture des quatre couleurs. La recherches d'une réponse à ce problème est à l'origine de nombreux résultats relatifs à la coloration dans les graphes.

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, avec V (resp. E) ensemble de sommets (resp. arêtes). Une coloration propre des sommets est une application c de V dans $\mathbb{N}$ qui affecte une couleur (nombre entier positif) à chaque sommet, telle que deux sommets voisins n'ont pas la même couleur. Une classe de couleur i est un ensemble de sommets stable qui sont colorés avec la couleur i. Le nombre minimum de couleurs utilisés dans la coloration c est le nombre chromatique, noté $\chi(G)$. Beaucoup de variantes de coloration propre sont dérivés de la coloration classique, la plupart de ces colorations minimisent le nombre de couleurs nécessaires pour colorer un graphe. Il existe d'autres qui ont l'objet de maximiser le nombre de couleurs. Parmi eux, on cite la b-coloration qui fait l'objet de ce mémoire.

Une b-coloration est une coloration propre telle que toute classe de couleur i contient au moins un sommet adjacent à au moins un sommet de chaque classe de couleur $j \neq i$. Ce sommet est dit b-sommet pour la couleur i. Le nombre b-chromatique, noté $b(G)$, est le plus grand entier k pour lequel G admet une b-coloration avec k couleurs. Ce type de coloration a été introduit par Irving et Manlove [15, 21], en 1999.

Ce mémoire comporte trois chapitres développés dans l'ordre suivant :

Dans le premier chapitre, nous rappelons d'abord les définitions de théorie des graphes nécéssaires à la compréhension de ce mémoire. Nous donnons également un aperçu rapide de quelques notions élémentaires de complexité algorithmique. Puis, précisons notamment les défnitions de la coloration classique, la a-coloration et la b-coloration.

Le deuxième chapitre, Nous donnons ensuite un recueil des principaux résultats de la littérature liés à la notion de la b-coloration.

Le troisième chapitre nous donnons des valeurs exactes du nombre b-chromatique pour certains graphes comme le graphe du Mycieleski, courounne de deux graphes G et H, courounne voisinage de deux graphes G et H et graphe de freindship généralisé.

Ce mémoire s'achève par une conclusion et quelques perspectives.

Chapitre 1

TERMINOLOGIES FONDAMENTALES ET QUELQUES RESULTATS DE BASES

Dans la première partie de ce chapitre, on présente des notions classiques de la théorie des graphes ainsi que des notations usuelles, dont on aura besoin durant la réalisation de ce travail. Dans la deuxième partie, on donne un petit aperçu sur la complexité algorithmique, dans le but de savoir la classification des problèmes rencontrés en théorie des graphes. La dernière partie, est destinée à quelques types de coloration de graphes et leurs paramètres associés. Où, on donnera un rappel sur les définitions de la coloration classique et de la a-coloration puis nous aborderons la notion de la b-coloration et le nombre b-chromatique.

1.1 Notions sur les graphes

1.1.1 Graphes

- Un graphe $G = (V, E)$ est constitué d'un ensemble fini et non vide V d'éléments appelés *sommets,* et d'un ensemble E de paires de divers sommets, appelées *arêtes.*

- On appelle *ordre,* noté n, de G le nombre de ses sommets et qui est égal au cardinal de V, et taille de G, noté m, le cardinal de E. Les sommets sont notés de manière usuelle par des lettres miniscules : u, v, x, y, a, b,etc... Pour $u, v \in V$, on note par uv (ou vu) une arête entre u et v.

- Deux sommets peuvent être liés par plusieurs arêtes : on les appelle arêtes *multiples.*

- Une arête peut avoir ses extrémités confondues : on parle de *boucle.*

- Un graphe est dit *simple* s'il est sans boucles et sans arêtes multiples.

- Deux graphes G et $G^{'}$ sont isomorphes s'il existe une bijection $f : V(G) \longrightarrow V(G^{'})$ telle que pour tous $u, v \in V$, on a $uv \in E(G)$ si et seulement si $f(u)f(v) \in E(G')$.

1.1.2 Voisinages et degrés

- Deux sommets u et v sont *adjacents* si l'arête uv existe dans E. Les sommets u et v sont alors dits *voisins.*

- Deux arêtes sont dites adjacentes si elles ont une extrémité commune.

- Une arête est *incidente* à un sommet v, si v est l'une de ses extrémités.

- Le *voisinage ouvert* d'un sommet v de G, noté par $N_G(v)$, est défini par l'ensemble

$$N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E\}$$

et le *voisinage fermé* de v, noté par $N_G[v]$, est défini par

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$$

L'ensemble $N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G(v)$ (resp. $N_G[S] = \cup_{v \in S} N_G(v) \cup S$) est le voisinage ouvert (resp. fermé) du sous ensemble $S \subseteq V$. Parfois pour alléger les notation et s'il n'y a aucune confusion sur le graphe G, les voisinages ouvert et fermé d'un sommet v seront notés par $N(v)$ et $N[v]$ respectivement. De même, nous utiliserons les notations $N(S)$ et $N[S]$ au lieu de $N_G(S)$ et $N_G[S]$ respectivement.

- Le *degré* d'un sommet v de G, noté par $d_G(v)$, est le nombre d'arêtes incidentes à u. Dans un graphe simple, $d_G(v) = |N(v)|$. Un sommet de degré nul est dit sommet *isolé* et un sommet de degré un est dit sommet *pendant*, et un sommet qui est adjacent à un sommet pendant est dit *support.* On note par $\Delta(G)$ et $\delta(G)$ le degré maximum et le degré minimum de G respectivement. S'il n'y a aucun risque de confusion, on écrira $d(v)$, Δ, et δ pour désigner $d_G(v)$, $\Delta(G)$ et $\delta(G)$ respectivement.

1.1.3 Sous-graphes et graphe partiels

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

Un graphe partiel de G est un graphe $H = (V, F)$ tel que F est un sous ensemble de E.

Pour un sous-ensemble $S \subseteq V$, le *sous-graphe* induit par S, noté par $G[S]$, est le graphe $G' = (S, E(S))$, dont l'ensemble des sommets est S et l'ensemble des arêtes $E(S)$ est formé de toutes les arêtes de G ayant leurs deux extrémités dans S. Autrement dit, on obtient G' en enlevant un ou plusieurs sommets au graphe G, ainsi que toutes les arêtes incidentes à ces sommets.

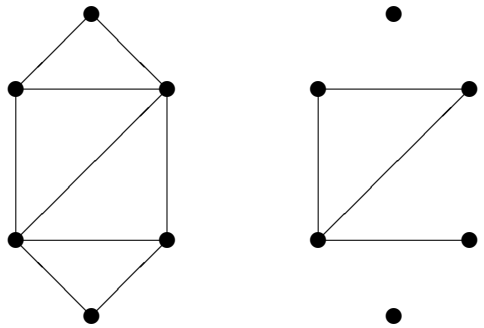


Figure 1.1.1 : H est un graphe partiel de G.

1.1.4 Chaînes et cycles

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

- Une *chaîne* P de G est une séquence finie de sommets $v_1, v_2, \ldots, v_k$, où pour tout $i = 1, ..., k-1$ (v_i, v_{i+1}) est une arête de G pour tout $i \neq j$. Les sommets v_1 et v_k

sont les *extrémités* de la chaîne P, et les sommets $v_2, v_3, \ldots, v_{k-1}$ sont les *sommets interieurs* de P.

- Une chaîne P est *simple* si chaque arête de P est emprunté une seule fois.
- Une chaîne P est *élémentaire* si elle ne passe pas deux fois par le même sommet.
- Dans une chaîne P, une arête qui relie deux sommets non consicutifs est dite une *corde*.
  Une chaîne minimale induite par n sommets, notée par P_n, est une chaîne élémentaire sans corde.



Figure 1.1.2 : la chaîne P_5

- Un *cycle* est une chaîne dont ses deux extémités sont confondues. On note par C_n le cycle induit par n sommets. De la même manière, on définit *cycle simple* et *cycle élémentaire*.
- La *longueur* d'un cycle est le nombre de ses arêtes.
- La *maille* d'un graphe G, notée $g(G)$, est la longueur du plus petit cycle dans G.

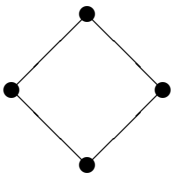


Figure 1.1.3 : Le cycle C_4

1.1.5 Distances, excentricité, diamètres, rayons et centres

Soit $G = (V, E)$ un graphe et u, v deux sommets de V.

- La *distance* entre u et v, notée $d(u, v)$, est la longueur de la plus courte chaîne joignant u et v.
- *L'excentricité* de v, noté $e(v)$, est définie $e(v) = \max\{d(v, w) : w \in V\}$.
- Le *diamètre* de G est $diam(G) = \max\{e(v) : v \in V\}$.
- Le *rayon* de G est $r(G) = \min\{e(v) : v \in V\}$.
- Un sommet de G ayant une excentricité minimale est appelé *centre*.

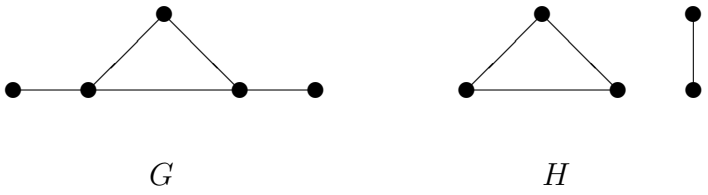
1.1.6 Ensemble minimal (resp.maximal) / minimum (resp.maximum)

- Un sous-ensemble A de V est dit *minimal* (resp. *maximal*) par rapport à une propriété $\mathcal{P}$, s'il n'existe pas d'un sous-ensemble $B \subseteq A$ (resp. $B \supseteq A$) tel que $G[B]$ vérifie $\mathcal{P}$.
- Un sous-ensemble A de V est dit *minimum* ou de *taille minimale* (resp. *maximum* ou de *taille maximale*) par rapport à une propriété $\mathcal{P}$, s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq V$ tel que $G[B]$ vérifie $\mathcal{P}$ et $|B| < |A|$ (resp.$|A| < |B|$) où $|A|$ est le cardinal de l'ensemble A, c'est-à-dire le nombre de ses éléments.

1.1.7 Graphes particuliers

- Un graphe $G = (V, E)$ est *connexe* si pour toute paire de sommets distincts du graphe il existe une chaîne les reliant. Une *composante connexe* d'un graphe est un sous-graphe maximal connexe. Une arête $e \in E$ est dit *isthme* si le graphe $G' = (V, E - \{e\})$ n'est pas connexe. Un sommet $v \in V$ est dit *sommet d'articulation* si le graphe $G' = (V - \{v\}, E)$ n'est pas connexe.

- Un graphe *complet* est un graphe simple où chaque sommet est relié à tous les autres du graphe. Le graphe complet d'ordre n est noté K_n. Dans ce graphe chaque sommet est de degré $n - 1$.



G H

Figure 1.1.4 : G est connexe, H est non connexe avec deux composantes connexe.

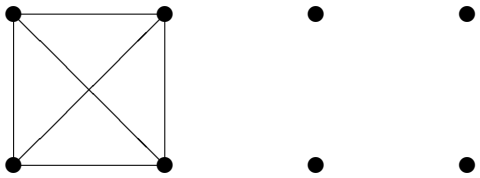


Figure 1.1.5 : Le graphe complet (K_4) et le graphe discret ($\overline{K_4}$).

- Un graphe $G = (V, E)$ est dit *planaire* s'il peut être déssiné dans la plan de sorte que ses arêtes ne se croisent pas.

- Un graphe *discret,* noté D_n, est un graphe sans arêtes.

- *Le graphe complémentaire* d'un graphe simple $G = (V, E)$ noté $\overline{G} = (V, \overline{E})$, est le graphe défini par $V(\overline{G}) = V(G)$ et $\overline{E} = E(\overline{G}) = \{uv : u \in V(G), v \in V(G)$ et $uv \notin E(G)\}$.

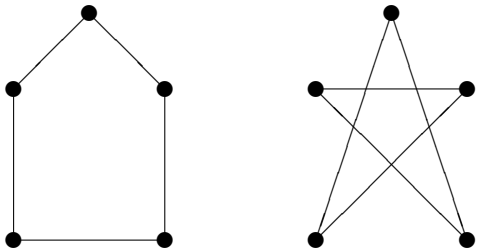


Figure 1.1.6 : Un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$

- Un graphe dont tous les sommets ont le même degré est dit *régulier*. Si le degré commun est d, alors on dit que le graphe est *d-régulier*. Un graphe 3-régulier est aussi appelé cubique.

- Un graphe $G = (V, E)$ est dit *biparti* si V peut se partager en deux sous-ensembles V_1 et V_2, de sorte que toutes les arêtes du graphe relient un sommet de V_1 à un sommet de V_2. *Un graphe biparti complet* est un graphe biparti ayant la propriété supplémentaire suivante : tous les sommets de V_1 sont adjacents à tous les sommets de V_2. Si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$, alors le graphe biparti complet est noté $K_{p,q}$.

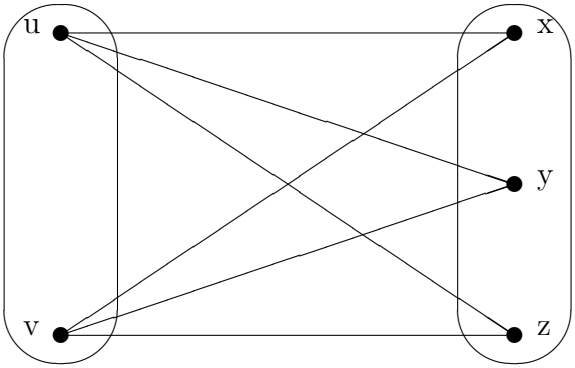


Figure 1.1.7 : Le graphe biparti complet $K_{2,3}$

- On appelle *arbre*, et on note par T, un graphe connexe et sans cycles. Un arbre comporte exactement $(n-1)$ arêtes. Un arbre est dit trivial (resp. non trivial) s'il contient un seul sommet (resp. au moins deux sommets). On appelle *feuille* d'un arbre, un sommet de degré 1 (sommet pendant).

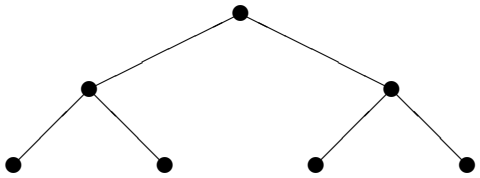


Figure 1.1.8 : Un exemple d'un arbre T

- On appelle *étoile*, et on note par $K_{1,n}$, $(n \geq 3)$, l'arbre à $n+1$ sommets ayant n feuilles. Une *double étoile,* notée $S_{r,s}$ est le graphe obtenu en ajoutant une arête reliant deux centre de deux étoile $K_{1,r}$ et $K_{1,s}$.

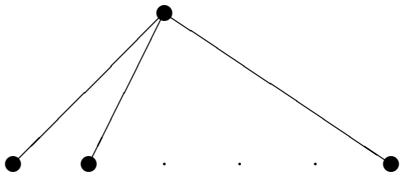


Figure 1.1.9 : L'étoile $K_{1,n}$

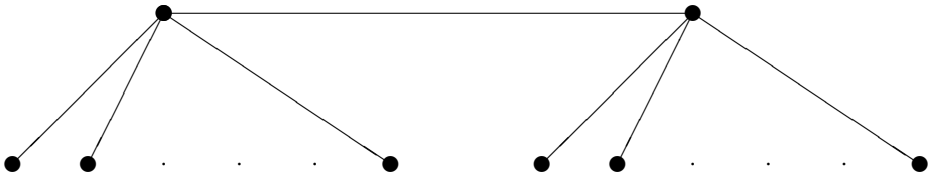


Figure 1.1.10 : Double étoile $S_{r,s}$

- Une chenille, notée $C(t_1, t_2, ..., t_n)$, est un arbre dont la suppression des sommets pendants adjacents aux sommets $t_1, t_2, ..., t_n$ produira une chaîne t_1-t_2-...-t_n .
- Un *cactus* est un graphe où chaque arête appartient à au plus un cycle, de plus un cactus qui contient un seul cycle est dit *unicycle*.
- Un graphe est dit *sans griffe* (ou sans $K_{1,3}$) s'il ne contient pas $K_{1,3}$ comme sous-graphe induit.
- On appelle *couronne d'un graphe* G, notée $Cr(G)$ ou $G \circ K_1$, le graphe obtenu en attachant à chaque sommets de G un sommet pendant, et donc il est évident que l'ordre de $Cr(G)$ est égal à $2|V(G)|$.

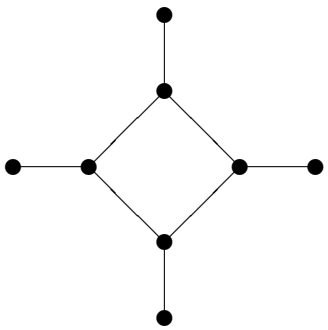


Figure 1.1.11 : La couronne d'un C_4

- Soit $G = (V, E)$ un graphe. Le *graphe adjoint* de G (ou *graphe de ligne*) est le graphe obtenu en associant un sommet à chaque arête de G et en reliant deux sommets par une arête si les arêtes de G correspondant à ces deux sommets sont adjacentes.

1.1.8 Quelques paramètres de graphes

- Une *clique* d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous-graphe complet. La taille d'une clique est le nombre de ses sommets. Une clique de taille p est notée par K_p. Le cardinal d'une clique maximum de G est noté par $\omega(G)$.

- *Un stable* dans un graphe G, appelé aussi, *ensemble indépendant*, est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents. Le cardinal d'un stable maximum de G, noté $\alpha(G)$, est appelé *nombre de stabilité* de G.

- Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un *couplage* M dans un graphe G est un sous-ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes, et on note $\beta(G)$ la taille du couplage maximum dans G. Un sommet x de G est dit *saturé* par le couplage M s'il existe une arête de M incidente à x. Un couplage qui sature tous les sommets de G est appelé un *couplage parfait* dans G, sinon x est dit *insaturé*. Un couplage est dit *parfait* s'il sature tous les sommets du graphe G.

- Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un sous-ensemble $S \subseteq V$ est un dominant de G, si tous sommet de $V - S$ est adjacent à au moins un sommet de S.

1.1.9 Quelques opérations sur les graphes

- Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Et soient v un sommet de G, et e une arête de G. On note $G - v$ le sous-graphe engendré par l'ensemble $V \backslash \{v\}$, c'est-à-dire : $G - v$ est le graphe obtenu à partir de G en supprimant le sommet v et toutes les arêtes incidentes à v. On note $G - e$ le graphe $G' = (V, E \backslash \{e\})$, c'est -à-dire $G - e$ est le graphe obtenu à partir de G en supprimant l'arête e (les sommets incidents à e ne sont pas supprimés). Pour un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$, on note $G - S$ le sous-graphe engendré par $V \diagdown S$.

- La somme cartésienne (ou produit cartésien) de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$, noté $G_1 \square G_2$, est le graphe $G = (V, E)$ tel que $V(G) = \{(u, v) : u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$ et deux sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont adjacents si $u_1 = u_2$ et $v_1 v_2 \in E_2$ ou $v_1 = v_2$ et $u_1 u_2 \in E_1$.

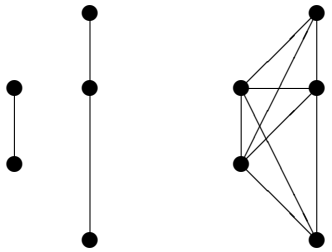


Figure 1.1.12 : Le graphe joint de G_1 et G_2.

- Soient G et H deux graphes. L'union de G et H est le graphe $G + H$ dont l'ensemble des sommets est $V(G) \cup V(H)$ et l'ensemble des arêtes est $E(G) \cup E(H)$. Pour un entier k donné, l'union de k copies de G est notée par kG.

- Le joint de G et H est le graphe noté $G \vee H$ obtenu à partir de $G + H$ en ajoutant toutes les arêtes entre G et H.

Ces définitions peuvent être retrouvées avec plus de détails dans [10].

1.2 Compléxité algorithmique

La théorie de la compléxité s'intéresse à l'étude formelle de la difficulté des problèmes en informatique et plus précisément à leur résolution de façon éfficace, en tenant compte le temps de calcul et les données stoquées en mémoire.

1.2.1 Problème de décision

Chaque problème informatique peut se réduire à un problème de *décision*, c'est-à-dire un problème formulé comme une question dont la réponse est Oui ou Non. Un problème qui n'est pas formulé de cette manière peut être très simplement transformé en un problème de

décision équivalent. Le problème du voyageur de commerce, qui cherche, dans un graphe, à trouver la taille du cycle le plus court passant une fois par chaque sommet, peut s'énoncer en un problème de décision ainsi : Existe-t-il un cycle passant une et une seule fois par chaque sommet tel que la somme des coûts des arcs utilisés soit inférieure à k, avec $k \in \mathbb{N}$. Ce problème est équivalent au problème du voyageur de commerce au sens où si l'on sait résoudre efficacement l'un, on sait aussi résoudre efficacement l'autre.

1.2.2 Classes de complexité

La théorie de la complexité repose sur la définition de classes de complexité qui permettent de classer les problèmes en fonction de la complexité des algorithmes qui existent pour les résoudre.

Classe P:

Un problème p est dit Polynomial (ie. $p \in P$), s'il peut être résolu par un algorithme déterministe en un temps polynomial.

Prenons par exemple le problème de la connexité dans un graphe. Étant donné un graphe à n sommets, il s'agit de savoir si toutes les paires de sommets sont reliées par un chemin. Pour le résoudre, on dispose de l'algorithme de parcours en profondeur qui va construire un arbre couvrant du graphe à partir d'un sommet. Si cet arbre contient tous les sommets du graphe, alors le graphe est connexe. Le temps nécessaire pour construire cet arbre est au plus n^2, donc le problème est bien dans la classe P.

Les problèmes dans P correspondent en fait à tous les problèmes facilement solubles.

Classe NP:

Un problème p est NP, s'il est résoluble par un algorithme Non déterministe en un temps polynomial par rapport à la taille de l'instance.

De façon équivalente, c'est la classe des problèmes qui admettent un algorithme dans P qui, étant donné une solution du problème NP, est capable de répondre oui ou non.

Intuitivement, les problèmes dans NP sont tous les problèmes qui peuvent être résolus en énumérant l'ensemble des solutions possibles et en les testant avec un algorithme polynomial.

Par exemple, la recherche de cycle hamiltonien dans un graphe peut se faire avec deux algorithmes :

- le premier génère l'ensemble des cycles (ce qui est exponentiel).
- le second teste les solutions (en temps polynomial).

On constate, immédiatement, que $P \subset NP$.

Problème NP-Complet:

Un problème est NP-difficile si ce problème est au moins aussi dur que tous les problèmes dans NP. Formellement, on définit une notion de réduction : Soient p et p' deux problèmes. Une réduction de $p^{'}$ à p est un algorithme transformant toute instance de $p^{'}$ en une instance de p. Ainsi, si l'on a un algorithme pour résoudre p, on sait aussi résoudre $p^{'}$. p est donc au moins aussi difficile à résoudre que $p^{'}$. Les problèmes les plus étudiés sont les problèmes NP - complets, parce qu'on ne sait pas les résoudre éfficacement à cause de leur indéterminisme. Il est clair que $P \in NP$, puisqu'un algorithme déterministe est un algorithme non déterministe particulier.

p est alors NP-difficile si pour tout problème $p^{'}$ de NP, $p^{'}$ se réduit à p. Quand on parle de problèmes NP-difficiles on s'autorise uniquement des réductions dans P, c'est-à-dire que l'algorithme qui calcule le passage d'une instance de $p^{'}$ à une instance de p est polynomial.

Classe NP-complet:

Le problème étant dans NP et NP-difficile, il est NP-complet, autrement dit, les problèmes NP-complets sont les plus difficiles de la classe NP.

1.3 Coloration propre, a-coloration et b-coloration

1.3.1 Coloration propre

La coloration de graphes est apparue, en 1852, quand le problème des quatres couleurs est posé pour la première fois, par Francis Guthrie, quand il a observé que tous les comtés de l'Angleterre peuvent se colorer avec seulement quatre couleurs, sous la condition que tous deux comtés voisins sont colorés différement, ce qui l'a incité à réfléchir à la possibilité de colorer une carte de géographie qu'avec quatre couleurs, avec la contrainte que deux pays voisins ne soient pas recouvert par la même couleur. La preuve de ce problème, n'a été donnée qu'en 1976, où deux chercheurs américains, K.Appel et W.Haken[1] ont pu le résoudre, à l'aide d'un calcul par ordinateur.

Le problème des quatres couleurs est l'un des problèmes de colorations de graphes, qui ont suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs, et donc la notion de coloration de graphe fait l'objet de nombreuses études engendrant une littérateure très dense en théorie des graphes. La coloration des sommets est sans doute le concept le plus connu et le plus étudié en théorie des graphes.

Généralement, il s'agit de trouver une coloration optimal des sommets d'un graphe simple de manière que deux sommets adjacents sont de couleurs distinctes.

Définition 1.3.1 *Une coloration propre d'un graphe $G = (V, E)$ est une application $c : V \longrightarrow \mathbb{N}$ qui affecte une couleur à chaque sommet de G, et qui est telle que deux sommets voisins n'ont pas la même couleur. Si le graphe est coloré en k couleurs, on dit qu'il est k-coloriable.*

Définition 1.3.2 *Une classe de couleur i est un sous-ensemble stable de sommets de V qui ont la couleur i.*

Une condition naturelle est que le nombre de couleurs utilisées soit minimal.

Définition 1.3.3 *Le nombre chromatique d'un graphe $G = (V, E)$, noté $\chi(G)$, est le nombre minimum de couleurs permettant de colorier tous les sommets du graphe sans que deux sommets adjacents soient de la même couleur.*

Déterminer si un graphe est $k-$coloriable ($K \geq 4$) pour chaque k fixé est également NP-complet. Pour cette raison, beaucoup de travaux ont été consacrés à la recherche des bornes du nombre chromatique en fonction d'autres paramètres. Citons l'un de ces résultats, est celui de R. Brooks[7], où il a montré que pour un graphe G, de degé maximum $\Delta(G)$, qui n'admet pas comme composante connexe un graphe complet d'ordre $\Delta(G)+1$ ni, si $\Delta(G)=2$, un cycle d'ordre impaire, on a

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Pour le graphe complet $K_{\Delta(G)+1}$ on a $\chi(K_{\Delta(G)+1}) = \Delta(G)+1$, et pour le cycle impaire C_n on a $\chi(C_n) = \Delta(G)+1 = 3$.

De ce fait, on a toujours le résultat suivant :

Théorème 1.3.1 *[7] Pour tout graphe G de degré maximum*

$$\chi(G) \leq \Delta(G)+1.$$

Dans [2], C. Berge a montré les deux résultats suivants.

Théorème 1.3.2 *[2] Tout graphe G d'ordre n, satisfait*

$$\chi(G)\alpha(G) \geq n \quad et \quad \chi(G)+\alpha(G) \leq n+1.$$

L'inégalité suivante est dûe à Gaddum et Nordhaus [22].

Théorème 1.3.3 *[22] Soit G un graphe d'ordre n et $\overline{G}$ son complémentaire. Alors*

$$\chi(G)+\chi(\overline{G}) \leq n+1.$$

1.3.2 Notion de a-coloration

Plusieurs paramètres de coloration sont découlés du nombre chromatique $\chi(G)$, la majorité de ces paramètres ont pour objet la minimisation du nombre de couleurs requis pour colorer un graphe, tandis que d'autres paramètres cherchent à maximiser le nombre de couleurs, comme le nombre a-chromatique, noté $\psi(G)$, et le nombre b-chromatique, noté $b(G)$, qu'on va le voir dans le chapitre suivant.

Une façon de minimiser le nombre de couleurs d'un graphe consiste, à partir d'une coloration propre donnée, de réduire le nombre de classes de couleurs en fisionnant des classes de couleurs différentes. Cette technique de coloration est impossible s'il existe une arête entre toute paire de stabes, d'où l'introduction de la a-coloration et du nombre a-chromatique par Harary, Hedetniemi et Prins en 1967 [13].

Définition 1.3.4 *Une a-coloration est une coloration propre telle que pour toute paire de couleurs différentes i et j, le sous-graphe engendré par les deux classes de couleur i et j, contient au moins une arête. Le nombre a-chromatique, noté $\psi(G)$, est le nombre maximum de classes de couleur dans une a-coloration.*

1.3.3 La b-coloration dans les graphes

En 1999, la notion de la a-coloration a inspiré Irving et Manlove [15] à introduire un autre type de coloration, d'où une autre manière de réduire le nombre de couleurs dans un graphe a été introduite. Elle consiste à essayer, à partir d'une coloration propre donnée du graphe, de réduire le nombre de couleurs en transférant les sommets de la même classe vers les autres classes de couleur, d'où la définition de la b-coloration.

Définition 1.3.5 *Une b-coloration, dite aussi coloration dominante, est une coloration propre telle que toute classe de couleur i contient un sommet adjacent à au moins un sommet de chaque classe de couleur $j \neq i$. Ce sommet est dit sommet b-dominant de couleur i (ou en bref b-sommet). Le nombre b-chromatique est le nombre maximum de classes de couleur dans une b-coloration.*

Toute $\chi(G)$-coloration satisfait la définition de la b-coloration, et cette dernière vérifie la définition de la a-coloration, alors le résultat suivant est immédiat.

$$\chi(G) \leq b(G) \leq \psi(G).$$

Définition 1.3.6 *Soient G un graphe et c une b-coloration de G avec $b(G)$ couleurs. Un b-système est un ensemble S de $b-$sommets de c, satisfait les deux conditions suivantes :*

- $|S| = b(G)$
- $\forall\ x, y \in S,\ c(x) \neq c(y)$.

Chapitre 2

ETAT DE L'ART SUR LA b-COLORATION

2.1 Quelque résultat existant sur la b-coloration

Nous présentons dans ce chapitre quelques résultats existants, ensuite on définira d'autres types de graphes dits b-continus, b-parfaits. Dans ce contexte, on donnera nombre b-chromatique de quelques graphes existant.

Le concept de la b-coloration a été amplement étudié récemment, par de nombreux chercheurs, qui sont parvenus à établir quelques résultats. Parmi eux, on cite Irving et Manlove [15, 21], qui ont prouvé, en 1999, que la détermination du nombre b-chromatique est en général NP-complet, même restreint aux graphes bipartis [18]. Par contre, ce problème sera polynomial pour les arbres [15, 21], pour les cactus dont le m-degré est au moins 7 [8], pour les graphes planaires extérieurs dont la maille est au moins 8 [23] et pour les co-graphes (graphes sans P_4) [4] et les P_4-sparses [6].

Dans le cas général, la détermination du nombre b-chromatique est assez difficile, et puisqu'il n'existe pas d'algorithme polynomial déterminant ce paramètre, les chercheurs ont été incité à établir des bornes qui l'encadrent, dans le but de chercher sa valeur exacte ou approximative pour certaines classes de graphes.

2.1.1 Encadrement du nombre b-chromatique

Plusieurs travaux ont été consacrés pour délimiter le nombre b-chromatique d'un graphes. Mentionnons quelques résulats atteints, dans ce cadre, et commançons par la proposition suivante qui est dû à Irving et Manlove [15, 21], où ils sont pavenus à démontrer que le nombre b-chromatique d'un garphe est toujours majoré par $\Delta(G)+1$.

Proposition 2.1.0 *[15, 21] Tout graphe G satisfait*

$$b(G) \leq \Delta(G)+1.$$

où $\Delta(G)$ est le degré maximum de G.

Irving et Manlove ont observé que pour un graphe G admet une b-coloration avec k couleurs, il doit avoir au moins k sommets de degré au moins $k-1$, dans [15, 21].

À partir de cette constatation ils ont défini le m-degré d'un graphe comme suit :

Définition 2.1.1 *Soit les sommets $v_1, v_2, ..., v_n$ d'un graphe G ordonnés tels que : $d(v_1) \geq d(v_2) \geq ... \geq d(v_n)$, où $d(v_i)$ est le degré de v_i. Le m-degré de G, noté $m(G)$ est défini par*

$$m(G) = max\{i : d(v_i) \geq i-1\}.$$

Tout sommet v vérifiant $d(v) \geq m(G)-1$ est dit sommet *dense*.

Les mêmes auteurs ont également prouvé que $m(G)$ est une borne supérieure du nombre b-chromatique.

Proposition 2.1.0 *[15, 21] Pour tout graphe G,*

$$b(G) \leq m(G).$$

La différence entre $m-$degré et le nombre $b-$chromatique peut être très large pour quelques graphes, par exemple, pour $G = K_{n,n}$ on a $m(K_{n,n}) = n+1$ et $b(K_{n,n}) = 2$, tandis que ces deux pramètres peuvent être égaux pour d'autres graphes, par exemple, si $G = K_n$, alors $m(K_n) = b(K_n) = n$, (on va voir le nombre $b-$chromatique de ces graphes ultérieurement).

D'autres bornes ont été déterminés par M. Kouider et M. Mahéo [19].

Proposition 2.1.0 *[19] Soient G un graphe d'ordre n, et $\overline{G}$ son complémentaire. Alors*

$$b(G) + b(\overline{G}) \leq n + 1$$

et

$$b(G)b(\overline{G}) \geq n$$

Par analogie avec les résultats obtenus dans la coloration classique, M. Kouider et M. Mahéo [19] ont pu borner le nombre b-chromatique par d'autres pramètres.

Proposition 2.1.0 *[19] Pour tout graphe G d'ordre n et de taille m, on a :*

$$\frac{n}{\alpha(G)} \leq b(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2m}$$

où $\alpha(G)$ est le nombre de stabilité de G.

Proposition 2.1.0 *[19] Si G est un graphe non connexe avec des composantes connexes $C_1, C_2, ..., C_p$, $p \geq 2$ alors*

$$b(G) \geq \max\{b(C_i), 1 \leq i \leq p\}.$$

2.1.2 Le nombre b-chromatique de quelques graphes

On a vu que $\Delta(G) + 1$ est une borne supérieure pour le nombre b-chromatique d'un graphe G, donc il semble assez naturel de réfléchir aux graphes vérifient une égalité entre $b(G)$ et $\Delta(G) + 1$. Les premières investigations concernant ce problème sont dûes à A. El Sahili et M. Kouider [10].

Théorème 2.1.1 *[10] Soit G un graphe d-régulier sans cycles d'ordre 6 et de maille au moins 5. Alors*

$$b(G) = d + 1.$$

Les mêmes auteurs de [10] ont conjecturé que le nombre b-chromatique d'un graphe G d-régulier est $d+1$. Mais, dans [3], M. Blidia et al. ont contredit ce résultat, prenant comme un contre exemple le graphe de Petersen (on le note par P) qui est de maille 5, et ils ont montré que le nombre b-chromatique de ce graphe est égal à 3, tandis qu'il est 3-régulier. De ce fait, les auteurs de [3], ont refomulé cette conjecture de la manière suivante :

Conjecture 2.1.1 *[3] Soit G un graphe d-régulier de maille au moins cinq différent du graphe de Petersen. Alors*

$$b(G) = d + 1.$$

Ils ont montré aussi que la conjecture citée dans [3] est vraie pour $d \leq 6$.

D'autres résultats sur le même sujet ont été fournis par J. Kratochvıl1 et al. [18].

Théorème 2.1.2 *[18] Soit G un graphe contenant $\Delta(G)+1$ sommets $v_1, ..., v_{\Delta+1}$ de degré $\Delta(G)$ et $dist(v_i, v_j) \geq 4$ pour tout $i \neq j$. Alors*

$$b(G) = \Delta(G) + 1.$$

Corollaire 2.1.1 *[18] Soit G un graphe d-régulier ($d \geq 2$) d'ordre au moins d^4, alors on a,*

$$b(G) = d + 1.$$

Jakovac et Klavzar [16] sont arrivés à montrer que les graphes cubiques (ie., 3-régulier), différents

Théorème 2.1.3 *[16] Soit G un graphe connexe 3-régulier, alors $b(G) = 4$, sauf si $G \neq P$, $K_3 \square K_2$, $K_{3,3}$, G_1. Dans ce cas, $b(P) = b(K_3 \square K_2) = b(G_1) = 3$ et $b(K_{3,3}) = 2$.*

Dans [19], Kouider et Mahéo ont donné les valeurs exactes du nombre b-chromatique pour des graphes simples.

Proposition 2.1.0 *[19] Soient P_n et C_n respectivement une chaîne et un cycle d'ordre n avec $n \geq 5$. Alors*

$$b(P_n) = b(C_n) = 3.$$

Proposition 2.1.0 *[19] Pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, $b(K_{n,p}) = 2$, où $K_{n,p}$ est un graphe biparti complet.*

Dans [14], les auteurs ont montré que le nombre b-chromatique du joint de deux graphes est égal à la somme de leurs nombres b-chromatiques.

Théorème 2.1.4 *[14] Soit G un graphe. Si G est le joint de deux graphes G_1 et G_2 de sommets disjoints, alors $b(G) = b(G_1) + b(G_2)$.*

Ils ont montré également que le nombre b-chromatique d'un stable S_n et d'un graphe complet K_n (les deux sont d'ordre n) est egal à 1 et n respectivement.

2.2 La b-coloration de graphe de Mycielski de certains graphes

Définition 2.2.1 *Le graphe de Mycielski d'un graphe G, noté $\mu(G)$, est un graphe simple dont l'ensemble de sommets est $V'(\mu(G)) = V \cup U \cup \{w\}$ où*

$$V = V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \qquad et \qquad U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$$

qui est disjoint de l'ensemble V et son ensemble d'arêtes est

$$E'(\mu(G)) = E(G) \cup \{u_i v : v \in NG(v_i) \cup \{w\}, i = 1, 2, ..., n\}$$

où les sommets v_i et u_i sont appelés les jumeaux l'un de l'autre, et w est dit la racine de G.

Autrement dit, V induit un sous graphe isomorphe à G, tandis que l'autre ensemble U n'a aucune arête. chaque sommet u_j de U est adjacent à tout voisin de v_j, enfin le sommet w est adjacent à tout U. (Voir la Figure 2.2.1)

Exemple 2.2.1

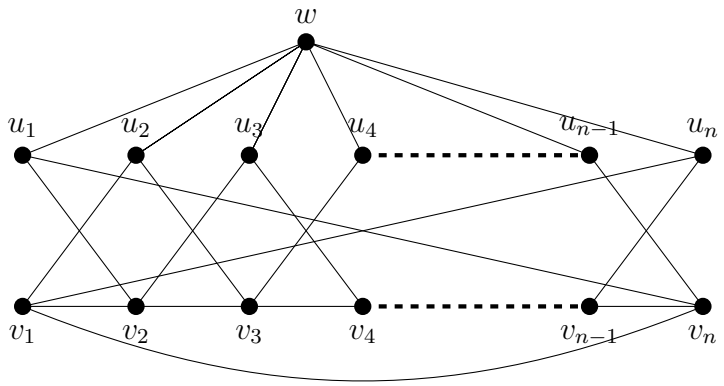


Figure 2.2.1 : Graphe Mycielski de C_n.

Remarque 2.2.1 *Soit C_n un cycle d'ordre $n = 8$, alors*

$$b(\mu(C_8)) = 4.$$

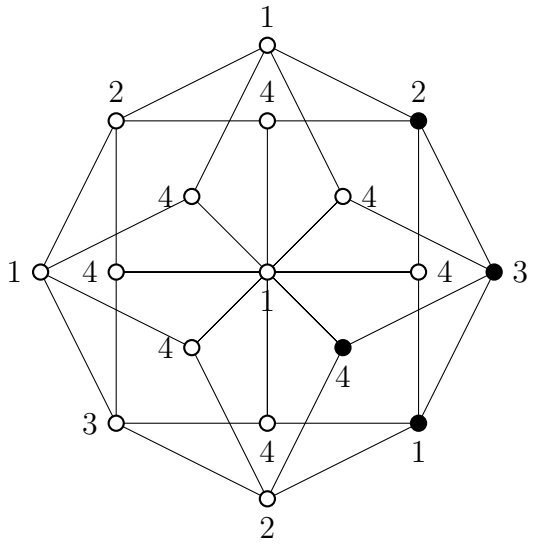


Figure 2.2.2 : Une b-coloration de graphe Mycielski de C_8.

Chapitre 3

DETERMINATION DU NOMBRE b-CHROMATIQUE DE CERTAINS GRAPHES

Dans la première section de ce chapitre, nous étudions le nombre b-chromatique du graphe de Mycieleski, comme celui de la chaîne $n \geq 8$ et d'une étoile. Nous donnons les valeurs exactes de ce paramètre de la couronne de deux graphes seront présentées dans la deuxième section. En outre, nous nous intéressons dans la dernière section à la détermination de la b-coloration de la couronne voisinage de deux graphes.

3.1 La b-coloration de graphe de Mycielski de certains graphes

Dans cette section, nous donnons les valeurs exactes du nombre b-chromatique de Mycieleski de certains graphes particuliers telque la chaîne d'ordre $n \geq 8$ et l'étoile.

Remarque 3.1.1 *Il est à noter que M.Kalpana,Ph.D Research scholar, Kongunadu[17], ont donné une valeur du nombre b-chromatique de P_n pour $n \geq 5$, mais durant notre étude nous avons trouvé un résultat différent à celui qui l'ont trouvé. D'où ils ont montrer que $b((\mu(P_n)) = \Delta(P_n)+2 = 4$ pour tout $n \geq 5$ tandis que nous avons une b-coloration de $\mu(P_n)$ pour $n \geq 8$, avec 5 couleurs.*

Exemple 3.1.1 *(Voir la figure).*

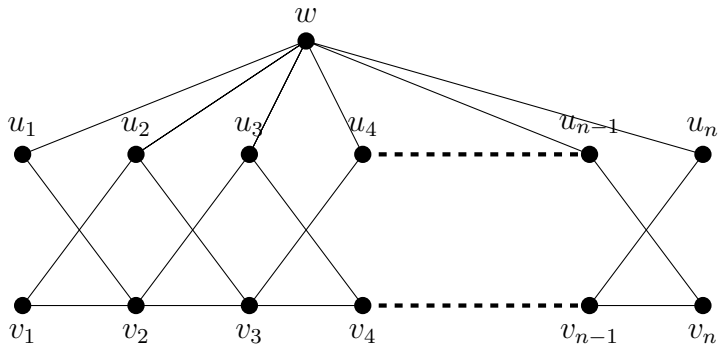


Figure 3.1.1 : Graphe Mycielski de P_n..

Remarque 3.1.2 *Dans toute la suite de ce chapitre, les sommets dessinés en gras représentent les b-sommets d'une b-coloration du graphe.*

3.1.1 Nombre b-chromatique du Mycieleski de la chaîne P_n

Théorème 3.1.1 *Pour tout $n \geq 8$. Alors :*

$$b(\mu(P_n)) = 5.$$

Preuve. Soit P_n une chaîne d'ordre $n \geq 8$, et soit c une b-coloration de $\mu(P_n)$ avec k couleurs avec $k = b(G)$. Comme $m(\mu(P_8)) = 5$ alors $k \leq 5$.

Il reste de monter que $k \geq 5$, pour cela il suffit de donner une b-coloration à $\mu(P_8)$ avec 5 couleurs comme suit :

$$c(v_1) = c(v_{j+3}) = c(v_{j+7}) = 1 \ ,$$

$$c(v_2) = 2,\ c(v_3) = c(v_{j+3}) = 3,\ c(v_5) = 4,\ c(v_7) = 5 \text{ tel que } j = 1..8.$$

Pour les sommets u_j on a :

$$c(v_1) = c(u_{j+1}) = c(u_{j+6}) = c(u_{j+7}) = 4 \ ,\ c(v_3) = c(v_4) = 5 \ ,\ c(v_5) = c(v_6) = 2 \text{ telque } j = 1..8.$$

Et on colore le sommet w par la couleur 1. Donc les b-sommets de c sont v_2, v_3, v_4, v_5 et v_7 de couleurs $2, 3, 1, 4$ et 5 respectivement.

Alors : $k \geq 5$. On conclut que

$$k = 5.$$

On va faire même technique pour $n \geq 9$. On va prendre la copie de la coloration de $V(\mu(P_8))$ ensuite on fait l'étendre à une b-coloration de $\mu(P_n)$, nous colorons les sommets de $V(\mu(P_n))$ de telle sorte que tous les sommets de $V(\mu(P_8))$. (Voir la Figure3.1.2). ■

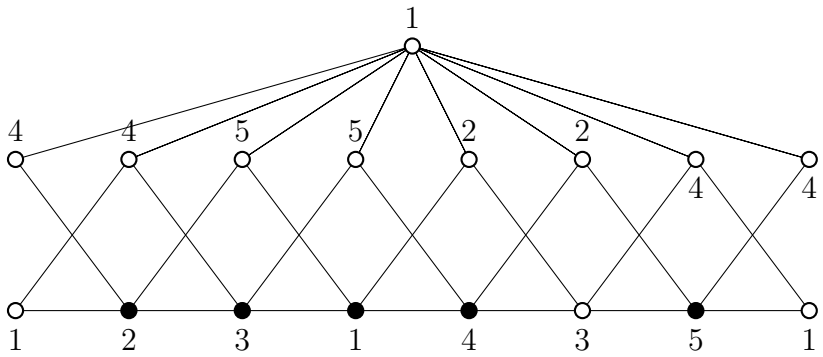


Figure 3.1.2 : Une b-coloration de graphe Mycielski de P_8.

3.1.2 Nombre b-chromatique du Mycieleski d'une étoile $K_{1,n}$

Exemple 3.1.2

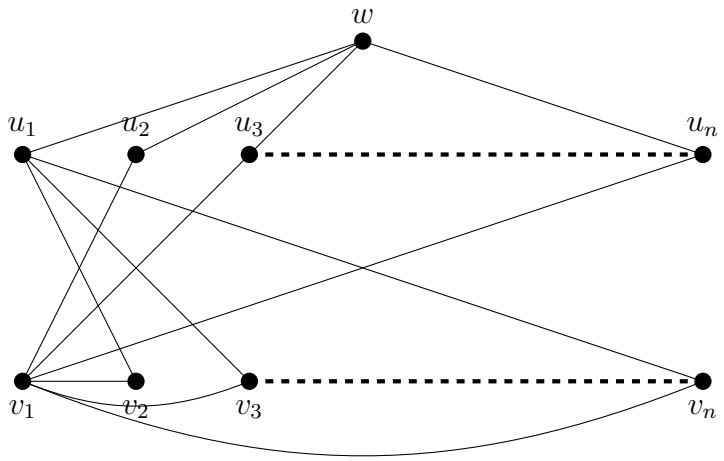


Figure 3.1.3 : Graphe Mycielski de $K_{1,n}$.

Proposition 3.1.0 *Pour tout $n \in N$, alors :*

$$b(\mu(K_{1,n})) = 3.$$

Preuve. *Soit $K_{1,n}$ une étoile et soit c une b-coloration de $\mu(K_{1,n})$ avec k couleurs avec $k = b(G)$. il est facile de vérifier que $m(\mu(K_{1,n})) = 3$, alors $k \leq 3$.*
Il reste de prouver que $k \geq 3$, pour cela il suffit de donner une b-coloration de $\mu(K_{1,n})$ avec 3 couleurs comme suit :

- *Nous assiggnons les couleurs de c aux sommets de $\mu(K_{1,n})$ de la manière suivante :*

  $c(v_1) = c(u_1) = 3$, $c(w) = 2$.

- *On colore le reste des sommets de l'ensemble V et l'ensemble U par la couleur 1 .*

Donc, il existe 3 sommets u_1, u_2 et w sont des b-sommets de c de couleurs $3, 1$ et 2 respectivement.
D'où : $k \geq 3$.
On conclut que : $k = 3$.

■

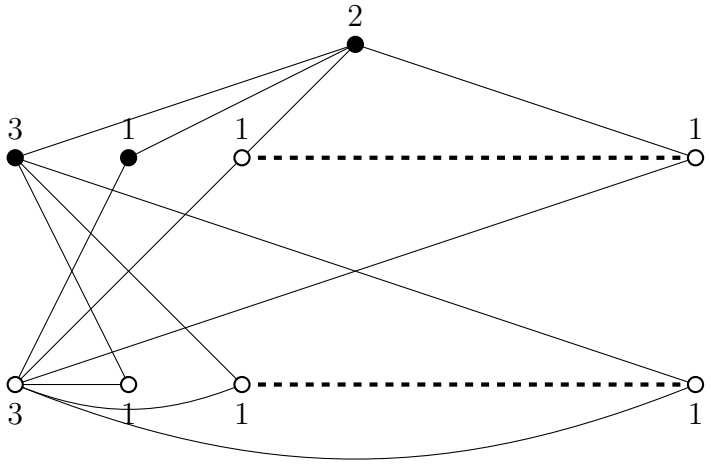


Figure 3.1.4 : Une b-coloration de graphe de Mycielski de $K_{1,n}$.

3.2 La b-coloration de la couronne de deux graphes

Dans cette section, nous nous intéressons à la b-coloration de la couronne de deux graphes.

Définition 3.2.1 *La couronne de deux graphes G et H, noté par $G \odot H$, de deux graphes G (avec n sommets et m arêtes) et H (avec r sommets et e arêtes) est défini comme le graphe obtenu en prenant une copie de G et n copies de H, puis en joignant le ième sommet de G avec une arête à chaque sommet de la ième copie de H.*

3.2.1 Nombre b-chromatique du couronne $C_n \odot P_r$

Dans cette partie, nous donnons la b-coloration de couroune $C_n \odot P_r$.

Exemple 3.2.1

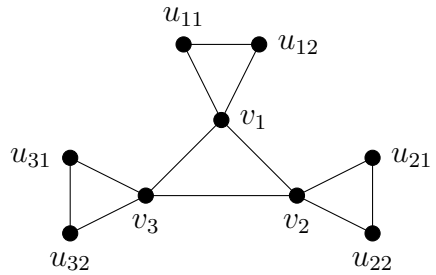


Figure 3.2.1 : Couronne de $C_3 \odot P_2$.

Théorème 3.2.1 *Pour tout $n \geq 3$, et $r \geq 2$, alors :*

$$b(C_n \odot P_r) = \begin{cases} 3 & si \quad n = 3 \text{ et } r = 2. \\ 4 & si \quad (n = 3 \text{ et } r \geq 3) \text{ et } (n = 4, \forall r \geq 2). \\ r+3 & si \quad n \geq 5 \text{ pour } n > r+3. \\ n & si \quad n \geq 5 \text{ et } n \leq r+3. \end{cases}$$

Preuve. Posons $G = C_n \odot P_r$. Soit c une b-coloration à G avec k couleurs avec $k = b(G)$. Nous distinguons quatre cas:

Cas 3.2.1 *Pour $n = 3$ et $r = 2$.*

Il est facile pour déterminer le nombre b-coloration à G car :

- *On sait que :* $w(G) \leq b(G) \leq m(G)$.
- *On a comme borne infèrieure la taille d'une clique maximum* w *de* G *est égale à* 3.

  On a comme borne supèrieure le m*-degré de* G*est égale à* 3.

Donc : les b-sommets sont v_1, v_2, v_3 *avec des couleurs* $1, 2$ *et* 3 *respectivement.*
D'où : $k = 3$.

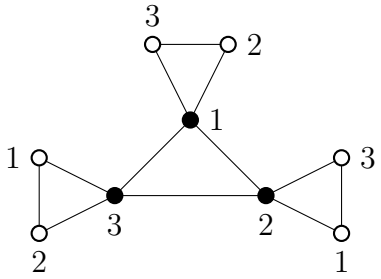


Figure 3.2.2 : Une b-coloration du couronne de $C_3 \odot P_2$.

Cas 3.2.2 *Pour* $n = 3$ *et* $r \geq 3$.

- *On a :* $m(G) = 4$, *alors* $k \leq 4$.
- *En effet, il suffit maintenant de trouver la borne infèrieure pour montrer l'égalité, nous donnons une b-coloration* c *de* G *avec* 4 *couleurs comme suit :* $c(v_i) = i$, $1 \leq i \leq n$;
- *On colore le graphe* C_3 *par* 3 *couleurs distinctes.*
- *On affecte la couleur* $i + 1$ *au n'importe qu'elle sommet de* u_{ij}, *telque* $1 \leq i \leq 3$; $1 \leq j \leq r$; *à condition que* $\Delta(u_{ij}) = 2$, *et les autres sommets par les couleurs de* c *qui sont défférents aux couleurs de sommet* v_i *avec* $1 \leq i \leq 3$.
- *On sait que le degré de la chaîne* P_r *est encadré entre* 2 *et* 3, *alors il existe un seul sommet qui était un b-sommet.*

De ce fait, les b-sommets sont v_1, v_2, v_3 *et* u_{32} *avec des couleurs* $1, 2, 3$ *et* 4 *respectivement.*
Donc : $k \geq 4$.
Ce qui implique que : $k = 4$.

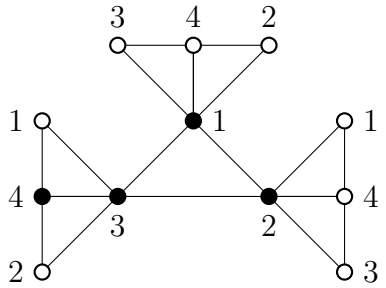


Figure 3.2.3 : Une b-coloration du couronne de $C_3 \odot P_3$.

Cas 3.2.3 *Pour* $n = 4$ *;* $\forall r \geq 2$:

On a $m(G) = 4$*, donc* $k \leq 4$.

Puis, on construit une b-coloration c *de* G *avec* 4 *couleurs de la façon suivante :*

- *On assigne la couleur* i *aux sommets de* v_i *telque* $1 \leq i \leq 4$.
- *On colore les sommets de* u_{ij} *par des couleurs différents au couleur de sommet* v_i *telque* $1 \leq i \leq 4; 1 \leq j \leq r$.

Alors : k ≥ 4. *Donc : k* $= 4$.

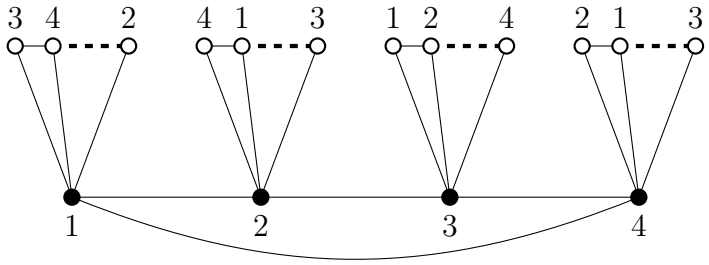


Figure 3.2.4 : Une b-coloration du Couronne de $C_4 \odot P_r$.

Cas 3.2.4 *Quand* $n \geq 5$ *et* $n > r + 3$:

On a $\Delta(G) = r + 2$*. Donc,* $k \leq \Delta + 1$.

D'où : $k \leq r + 3$.

Il reste de montrer la borne infèrieure, pour cela il suffit de donner la b-coloration c *à* G *en utilisant* $r + 3$ *couleurs de la manière suivante :*

- *Affectons la couleur* i *au sommet* v_i *telque* $i = 1, ..., r + 3$.

- *Assignons la couleur j au sommet u_{ij} avec : $j = 1, .., r$. À condition que : $c(u_{ij}) \neq c(v_i) \neq c(v_{i-1}) \neq c(v_{i+1})$ avec $i = 1, ..., r+3$. Et comme on a tous sommets de v_i ont $r+2$ voisins et les sommets de u_{ij} aurons 2 ou bien 3 voisins seulement.*

Dans ce cas, tous les v_i sont des b-sommets avec $r+3$ couleurs. Donc $k \geq r+3$. On conclut que :

$$k = r + 3.$$

Cas 3.2.5 *Pour $n \geq 5$ et $n \leq r+3$. On a $m(G) = n$, alors $k \leq n$. Maintenant, il suffit de donner la b-coloration c à G avec n couleurs de la manière suivante :*

- *Affectons la couleur i aux sommets v_i, telque $i = 1, ..., n$.*
- *Affectons la couleur j aux sommets u_{ij} avec $j = 1, ..., r$ et $i = 1, ..., n.$, à condition que $c(u_{ij}) \neq c(v_i) \neq c(v_{i-1}) \neq c(vi+1)$. Et comme on a tous sommets de v_i ayant $n-1$ voisins et les sommets de u_{ij} ont 2 ou bien 3 voisins seulement.*

De ce fait, tous les v_i sont des b-sommets avec n couleurs telque $1 \leq i \leq n$. Alors $k \geq n$, par conséquent $k = n$.

3.2.2 Nombre b-chromatique du couronne $K_n \odot P_r$

Exemple 3.2.2

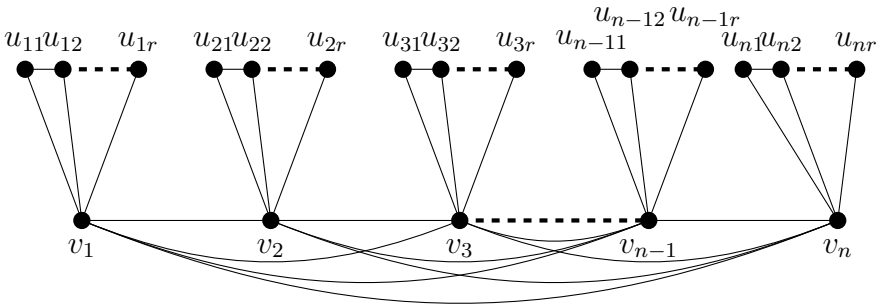


Figure 3.2.5 : Couronne de $K_n \odot P_r$.

Théorème 3.2.2 *Pour tout $n \geq 3$ et $r \geq 2$. Donc*

$$b(K_n \odot P_r) = n.$$

Preuve. *Posons $G = K_n \odot P_r$, soit c une b-coloration à G avec k couleurs avec $k = b(G)$.*

- *On sait que : $m(G) = n$, alors : $k \leq n$.*
- *Comme K_n un graphe complet alors tous les sommets sont deux à deux adjacents, ce qui implique que les sommets ne doivent pas porter la même couleur, donc $b(K_n) = n$.*
- *On a les sommets denses sont les sommets v_i, telque $1 \leq i \leq n$ qui sont appartiennent au graphe complet K_n.*

Puisque, K_n est un sous graphe de $K_n \odot P_r$,. De ce fait, les b-sommets sont tous v_i avec n couleurs, alors : $k \geq n$.
Par conséquent : $k = n$. ■

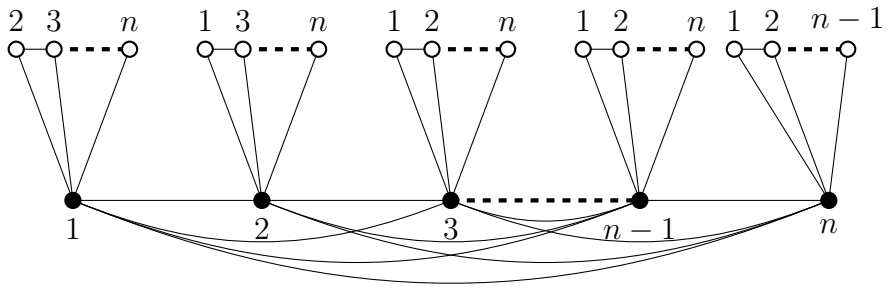


Figure 3.2.6 : Une b-coloration du Couronne de $K_n \odot P_r$.

Remarque 3.2.1 *$b(C_3 \odot P_r) = 4$, pour $r \geq 3$.(la démonstration est trouvée dans la preuve de $C_n \odot P_r$ deuxième cas)*

3.3 La b-coloration de la couronne voisinage de deux graphes

Dans cette section, nous nous intéressons à la b-coloration de la couronne voisinage de deux graphes.

Définition 3.3.1 *Soient G et H deux graphes simples, la couronne voisinage de deux graphes G et H noté par $G \star H$, est le graphe obtenu en prenant une copie de G et $|V(G)|$ copie de H, et joignant les voisins du ième sommet de G à chaque sommet de la ième copie de H.*

3.3.1 Nombre b-chromatique de la couronne voisinage de $K_n \star P_r$

Dans cette partie, nous nous intéressons de trouver la b-coloration de la couroune voisinage $K_n \star P_r$.

Théorème 3.3.1 *Pour $n \geq 3$, et $r \geq 2$. Alors :*

$$b(K_n \star P_r) = \begin{cases} n+1 & si \quad r = 2. \\ n+2 & si \quad r \geq 3. \end{cases}$$

Preuve. *Posons $G = K_n \star P_r$. Soit c une b-coloration de G avec k couleurs avec $k = b(G)$, nous distinguons deux cas :*

Cas 3.3.1 *Pour $r = 2$, on a le graphe G possède au moins $n+1$ sommets de degré au moins n, mais il n'a pas $n+2$ sommets de degré au moins $n+1$ alors, $m(G) = n+1$. Donc : $k \leq n+1$.*
Puisque, le graphe K_n est complet alors $G(K_n) = n$. Et comme on a chaque sommet de u_{ij} est adjacent à tous voisins de v_i, alors tous les sommets u_{ij} ont n voisins.($1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$). Donnons une b-coloration à G avec k couleurs :

- *On affecte les couleurs de i au v_i telque : $1 \leq i \leq n$.*
- *On colore un sommet de u_{ij} par la couleur $n+1$ et l'autre sommet par la couleur v_i.*

Dans ce cas, les b-sommets sont tous les sommets de v_i et une seule sommet de u_{ij}.
Donc : $k \geq n+1$. D'où : $k = n+1$.

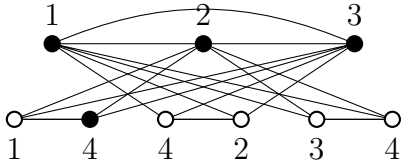


Figure 3.3.1 : Une b-coloration de la couronne voisinage de $K_3 \star P_2$.

Cas 3.3.2 *Pour $r \geq 3$:*

Lorsque $r = 3$, on a le graphe G aura au moins $n+2$ sommets de degré au moins $n+1$, mais il n'a pas $n+3$ sommets de degré au moins $n+2$. Donc, $m(G) = n+2$ alors, $k \leq n+2$. D'un autre côté, on sait que $b(K_n) = n$ et on a un sommet de u_{ij} aura $n+1$ voisins. Pour montrer l'égalité nous considérons une b-coloration c à G avec $n+2$ couleurs de la manière suivante :

- *Assignons la couleur i aux sommets de v_i comme : $1 \leq i \leq n$.*
- *Colorons les sommets de u_{ij} ($1 \leq i \leq n$; $1 \leq j \leq r$) comme suit :*
  1. *Le sommet qui a $n+1$ voisins par la couleur $n+1$.*
  2. *Les deux voisins par les couleurs : $n+2$ et $c(v_i)$.*

Mais, dans ce cas le sommet qui porte la couleur $n+2$ a une couleur manquante car(aura n voisins).

Maintenant, on fait comme ça :

On va colorer les sommets de u_{i+1j} ($1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq r$) comme suit :

Affectons la couleur $n+2$ au sommet qui a $n+1$ voisins et son voisins par la couleur $n+1$ et la couleur de sommet v_{i+1}.

De ce fait, les b-sommets de G sont tous les sommets de v_i et deux autres sommets appartiennent à l'ensemble de sommets $V(P_r)$.

On conclut que : $k \geq n+2$. D'ou : $k = n+2$. On fait la même chose pour $r > 3$.

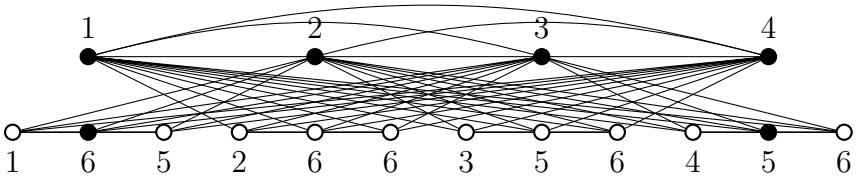


Figure 3.3.2 : Une b-coloration de la couronne voisinage de $K_4 \star P_3$.

■

3.3.2 Nombre b-chromatique de la couronne voisinage de $K_{1,n} \star P_r$

Dans cette partie, nous donnons la b-coloration de la couronne de voisinage $K_{1,n} \star P_r$.

Théorème 3.3.2 *Pour tout $n \geq 2$, et $r \geq 2$. Alors :*

$$b(K_{1,n} \star P_r) = \begin{cases} 3 & si\ r = 2. \\ 4 & si\ r \geq 3. \end{cases}$$

Preuve. *Posons $G = K_{1,n} \star P_r$. Soit c une b-coloration de G avec k couleurs avec $k = b(G)$.*

Pour $r = 2$ et n quelconque, le graphe G a au moins 4 sommets de degré au moins 3, mais il n'a pas 5 sommets de degré au moins 4, donc $m(G) = 4$, d'où : $k \leq 4$.

D'un autre côté, il suffit de trouver la borne infèrieure de k. On a l'ensemble de sommets denses D est tous les sommets de V_i et les sommets u_{11} et u_{12}, telque $1 \leq i \leq n$, Montrons que chaque sommet de D doit être un condidat d'être b-sommet de c .

- *Si les b-sommets sont v_1, v_2, v_3 et u_{11} ou u_{12}, sans perte de généralité supposons u_{11}, de couleurs $1, 2, 3$ et 4 respectivement, alors v_2 et v_3 sont stable entre eux et aussi ont une couleur manquante dans son voisinage 3 et 2 respectivement. Donc, v_2 peut dominer la couleur 3 à partir de son voisin u_{12}, mais u_{12} est adjacent à v_3, contradiction. De même, pour v_3 (la couleur 2 peut être dominer à partir de sommet u_{12}, mais u_{12} est le voisin de v_2), contradiction avec le fait que les sommets v_2 et v_3 sont b-sommets de c.*

- *Si les b-sommets v_1, v_2, u_{11} et u_{12} avec les couleurs $1, 2, 3$ et 4 respectivement. On a les sommets u_{11} et u_{12} ont une couleur manquante 1 dans leurs voisinage, les sommets u_{11} et u_{12} peuvent dominer la couleur 1 à partir de ses voisins v_i, $3 \leq i \leq n$ mais il est impossible car tous v_i, $2 \leq i \leq n$ sont des voisins de v_1, ce qui contredit le fait avec u_{11} et u_{12} sont des b-sommets de c.*

- *Si v_2, v_3, v_4 et v_5 sont b-sommets avec les couleurs $1, 2, 3$ et 4 respectivement. On a tous ces sommets sont stable entre eux alors, chaque sommet ne domine pas les autres couleurs de c et aussi ils ont les même voisins donc, contradiction.*

- *Si les b-sommets sont v_2, v_3, u_{11} et u_{12} avec des couleurs $1, 2, 3$ et 4 respectivement. On a les sommets v_2 et v_3 sont stable entre eux alors ils ont une couleur manquante dans leur voisinage 2 et 1 respectivement. Les couleurs précédentes 2 et 1 peuvent être dominer à partir de sommet v_1 seulement qui est adjacent à v_2 et v_3 et toujours porte*

une couleur diffèrente de v_i, $2 \leq i \leq n$ pour une coloration propre, contradiction avec le fait que v_2 et v_3 sont b-sommets de c.

- *Si les b-sommets sont v_1, v_2, v_3 et v_4 avec des couleurs $1, 2, 3$ et 4 respectivement. On a les sommets v_2, v_3 et v_4 ont deux couleurs manquantes dans leur voisinage, par exemple v_2 ne domine pas les couleurs 3 et 4. On a tous les sommets de v_i, $2 \leq i \leq n$ sont stable entre eux et ayant les même voisins, contradiction avec le fait que v_2, v_3 et v_4 sont les b-sommets.*

De ce fait, $k \leq 3$. Alors, pour prouver l'égalité nous exposons une b-coloration c à G avec 3 couleurs comme suit :
$c(v_1) = 1$, $c(v_2) = 2$, $c(u_{11}) = 3$, et les autres couleurs affectent par des couleurs de c à condition que la coloration est propre.
Donc, les sommets v_1, v_2 et u_{11} sont des b-sommets de c avec des couleurs $1, 2$ et 3 respectivement. D'où: $k \geq 3$. Par conséquent, $k = 3$.

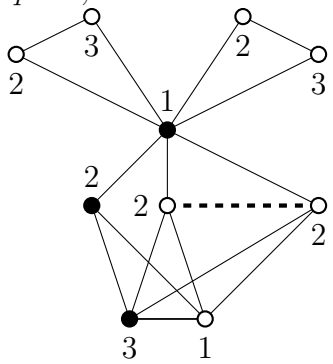


Figure 3.3.3 : Une b-coloration de la couronne voisinage de $K_{1,n} \star P_2$.

Quand $r \geq 3$, nous distinguons deux cas selon la valeur de n.

Cas 3.3.3 *pour $n = 2$*
Lorsque $r = 3$, on trouve que $m(G) = 4$, alors $k \leq 4$. Nous donnons une b-coloration à G utilisant 4 couleurs de la manière suivante :
$c(v_1) = 1$, $c(v_2) = 2$, $c(u_{12}) = 4$,$c(u_{32}) = 3$.
Donc les b-sommets sont v_1, v_2, u_{12} et u_{32} des couleurs $1, 2, 4$ et 3 respectivement. Et les autres couleurs affectent par des couleurs de c à condition que la coloration est propre. Alors, $k \geq 4$, d'où $k = 4$.

Lorsque $r \geq 4$, *sachant que* $m(G) = 5$ *avec un ensemble de sommets denses* $D = \{v_i, u_{ij} : 1 \leq i \leq 3,\ 2 \leq j \leq r-1\}$ *ce qui est signifie que* $k \leq 5$.
Prouvons que $k \leq 4$, *on va supposer le contraire que* $k > 4$. *Montrons que chaque sommet de* D *est un condidat d'être un b-sommet de* c.

- *Si les b-sommets sont* v_1, v_2, v_3, u_{12} *et* u_{13} *qui sont portés les couleurs* $1, 2, 3, 4$ *et* 5 *respectivement. Et comme on sait que* v_2, v_3 *sont des stables entre eux, alors ils ont une couleur manquante dans leurs voisinage* 3 *et* 2 *respectivement. Donc, peuvent dominer les couleurs manquantes (*3 *et* 2 *resp) à partir de ses voisins* u_{11} *où bien* u_{14}, *mais* u_{11} *et* u_{14} *sont des adjacents de* v_2 *et* v_3, *ce qui contredit le fait que* v_2 *et* v_3 *sont des b-sommets (car sinon* c *ne sera plus une coloration propre).*

- *Si les b-sommets sont* v_2, v_3, u_{12}, u_{13} *et* u_{14} *qui sont portés les couleurs* $1, 2, 3, 4$ *et* 5 *respectivement, qui a la méme démonstration précédente.*

- *Si les b-sommets sont* u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{15} *et* u_{16} *qui sont portés les couleurs* $1, 2, 3, 4$ *et* 5 *respectivement. On a chaque sommet de* u_{1j} *avec* $2 \leq j \leq 6$ *a au moins deux couleurs manquantes dans son voisinage, par exemple* u_{13} *ne domine pas les couleurs* 4 *et* 5. *Donc, peuvent dominer les couleurs manquantes à partir de ces voisins* v_2 *et* v_3, *mais on a tous* u_{ij} *sont adjacents aux* v_i *avec* $2 \leq i \leq n$ *et* $1 \leq j \leq r$, *contradiction avec le fait que les sommets* u_{1j} *avec* $2 \leq j \leq 6$ *sont des b-sommets de* c.

  De la même manière, on prouve que :

  Si les b-sommets sont v_1, u_{12}, u_{13}, u_{14} *et* u_{15} *ou bien sont* v_2, u_{12}, u_{13}, u_{14} *et* u_{15} *ou bien sont* v_1, v_2, u_{12}, u_{13} *et* u_{14}.

  Donc, $k \leq 4$. *Pour prouver l'égalité, nous considérons une b-coloration à* G *avec* 4 *couleurs de la façon suivante :*

  - *Affectons la couleur* 1 *à* v_1 *; la couleur* 2 *à* v_2, v_3 *; la couleur* 3 *à* u_{12} *; la couleur* 4 *à* u_{13} *et les autres sommets par des couleurs de* c *à condition que la coloration est propre.*

    Donc, les sommets v_1, v_2, u_{12} *et* u_{13} *sont des b-sommets de* c *avec des couleurs* 1, 2, 3 *et* 4 *respectivement. D'où :* $k \geq 3$.

On conclut que, $k = 4$.

Cas 3.3.4 *pour* $n \geq 3$ *et* $r \geq 3$:

- *On a le graphe* G *a au moins* $r + 2$ *sommets de degré au moins* $r + 1$ *pour* $n \geq r - 1$, *mais il n'a pas* $r + 3$ *sommets de degré au moins* $r + 2$. *Alors,* $k \leq r + 2$.
- *En autre, on vu que l'ensemble de sommets denses* D *est toujours comme ça : tous les sommets de* v_i *et les sommets de* u_{1j} *avec* $1 \leq i \leq n$ *et* $1 \leq j \leq r$, *prouvons que chaque sommet qui appartienne au* D *est un condidat d'être une b-sommet de* c. *On va supposer que* $k \geq 5$, *nous distinguons ce cas en deux sous cas suivant :*

1. *Si les b-sommets sont* v_1, v_2 *et* u_{1j} *(telque* $2 \leq j \leq 4$*) des couleurs* $1, 2, 3, 4$ *et* 5 *respectivement. Donc chaque sommet de* u_{1j} *a au moins* 2 *couleurs manquantes dans son voisinage. Alors chaque sommet de* u_{1j} *peut dominer les couleurs manquantes à partir de ses voisins* v_i *(telque* $2 \leq i \leq n$*). Mais les sommets de* u_{1j} *ont les même voisins. Contradiction avec le fait que les sommets de* u_{1j} *sont des b-sommets.*

   De la même manière, on prouve que :

   Si les b-sommets sont v_2, u_{12}, u_{13}, u_{14} *et* u_{15} *ou bien* u_{12}, u_{13}, u_{14}, u_{15} *et* u_{16}.

2. *Si les b-sommets sont* v_2, v_3, v_4, v_5 *et* v_6 *avec des couleurs* $1, 2, 3, 4$ *et* 5 *respectivement. On a tous les sommets de* v_i *avec* $2 \leq i \leq n$ *sont stable entre eux et ayant les même voisins. Ce qui contredit le fait que* v_i *telque* $1 \leq i \leq 5$ *sont des b-sommets .*

   La même manère, on prouve que : Si les b-sommets sont v_1, v_2, v_3, v_4 *et* v_5 *;* v_2, v_3, v_4, v_5 *et* u_{12} *;* v_1, v_2, v_3, v_4 *et* u_{12} *;* v_2, v_3, v_4, u_{12} *et* u_{13} *;* v_1, v_2, v_3, u_{12} *et* u_{13} *ou bien* v_2, v_3, u_{12}, u_{13} *et* u_{14}.

   D'où : $k < 5$. *Alors, nous donnons une b-coloration* c *à* G *avec* 4 *couleurs comme suit:*

- *Affectons la couleur* 1 *aux sommets* v_1.
- *Affectons la couleur* 2 *aux sommets* v_i *telque* $2 \leq i \leq n$.
- *Assignons la couleur* 3 *aux sommets* u_{12}.
- *Assignons la couleur* 4 *aux sommets* u_{13}.
- *Affectons des couleurs quelconques de* c *aux sommets restants à condition que la coloration est propre.*

Donc, les b-sommets de G sont v_1, v_2, u_{12} *et* u_{13}*, avec des couleurs* 1,2,3 *et* 4.
De ce fait : $k = 4$.

■

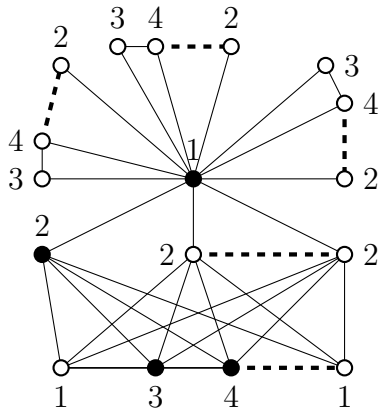


Figure 3.3.4 : Une b-coloration de la couronne voisinage de $K_{1,n} \star P_r$.

3.4 Graphe de Friendship généralisé

Définition 3.4.1 *Le graphe Friendship généralisé, noté* $F_{n,p}$*, est un graphe planaire avec* $p(n-1)+1$ *sommets en np arêtes, il peut être construit en joignant des p copies de* C_n *avec un sommet commun .*

Théorème 3.4.1 *Pour tout* $n \geq 2$ *, on a :*

$$b(F_{n,p}) = 3 \ .$$

Preuve. Soit $F_{n,p}$ un graphe de Friendship généralisé, soit c une b-coloration de $F_{n,p}$ avec k couleurs avec $k = b(G)$ est obtenue de la manière suivante :
On coloré une copie C_n avec 3 couleurs, vu que le degré maximum des sommets restant est égale à 2, alors on peut étendre cette coloration à $F_{n,p}$. Dans ce cas, les sommets v_1,v_2 et v_3 sont des b-sommets de c de couleurs 1, 2 et 3 respectivement.
D'où : $k \geq 4$. Et puisque $m(G) = 3$, alors $k \leq 3$.
Ceci implique que $k = 4$. ■

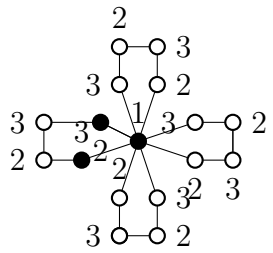


Figure 3.4.1 : Une b-coloration de graphe de Friendship Généralisé $F_{5,4}$.

Conclusion et perspectives

Au cours de ce mémoire , nous nous sommes intéressés à la notion de la b-coloration de certains graphes .

La détermination du nombre b-chromatique est un problème NP-complet pour un graphe quelconque. De ce fait et après avoir un recueil des notions élémentaires utilisées dans ce travail nous avons présenté quelques résultats sur la b-coloration de certains graphes .

Notre objectif essentiel était de déterminer la valeur exacte du nombre b-chromatique pour les graphes de Mycieleski, couronne de deux graphes G et H, couronne voisinage de deux graphes G et H et graphe de Friendship généralisé.

Le travail réalisé durant ce mémoire ouvre plusieurs perspectives de travaux futurs, à titre d'exemple :

- Prouver que $b(\mu(C_8)) = 4$.
- Concernant la b-coloration, elle serait intèressant de déterminer la valeur exacte ou bien les bornes de ce paramètre pour le graphe de la couronne $K_{1,n} \odot P_r$ et même le graphe de la couronne voisinage de $C_n \star P_r$.

Bibliographie

[1] K. Appel et W. Haken. Every planar map is four colorable: Part 1, discharging.Illinois. J. Maths., 21 : 429 - 490,1977.

[2] C. Berge. Graphs. North Holland, 1985.

[3] M. Blidia, F. Maffray, Z. Zemir. On b-colorings in regular graphs. Discrete Applied Mathematics 157 : 1787-1793, 2009.

[4] M. Blidia, N. Ikhlef Eschouf, F. Maffray. Characterization of b-gamma perfect graphs. Prépublier dans les cahiers de Leibniz, n°171; Juillet 2008 et soumis à AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics.

[5] M. Blidia, N. Ikhlef Eschouf, F. Maffray. On adge b-critical graphs. Soumis à Discrete Applied Mathematics.

[6] F. Bonomo, G. Duran, F. Maffray, J. Marenco, M. Valencia-Pabon. On the b-coloring of cographs and P_4-sparse graphs. Graphs and Combinatorics 25 : 153-167, 2009.

[7] R. Brooks. On coloring the nodes of a network. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 37 : 194-197; 1941.

[8] V. Compos, C. Linhares, F. Ma§ray, A. Sliva. b-chromatic number of Cacti. Electronic Notes In Discrete Mathematics, 35 : 281-286; 2009.

[9] G. A. Dirac. Note on the colouring of graphs. Math. Z.54 : 347-353, 1951.

[10] El Sahili, M. Kouider. About b-colorings of regular graphs, Res. Rep. 1432, LRI, Univ. Orsay, France, 2006.

[11] T. Faik. La b-continuitè des b-colorations: complexitè, propriètès structurelles et algorithmes. Thèse de Doctorat, UniversitÈ Paris XI Orsay, 2005.

[12] D. Gaceb, V. Eglin, F. lebourgeos, H. Emptoz. Implication de la b-coloration de graphes pour la reconnaissance automatique du type de document. Colloque internationam Francophone sur l'Ecrit et le document. Oct 2008, Rouen, France. pp.31-36.

[13] F. Harary, S. Hedetniemi and G. Prins. An Interpolation theorem for graphical homomorphisms, Port. Math. 26 : 453-462,1967.

[14] C.T. Hoàng, M. Kouider. On the b-dominating coloring of graphs. Discrete Appl.Math. 152 : 176-186, 2005.

[15] R.W. Irving, D.F. Manlove. The b-chromatic number of graphs. Discrete Appl. Math.91, 127 - 141, 1999.

[16] M. Jakovac, S. Klavμzar. The b-Chromatic Number of Cubic Graphs. Graphs and Combinatorics 26: 107-118; 2010.

[17] M.Kalpana,Ph.D Research scholar, Kongunadu arts and science college, Coimbatore_29, Tamil nadu, India.on b-coloring of mycielskian graphs.15- 2018.

[18] J. KratochvÌl, Z. Tuza, M. Voigt. On the b-chromatic number of graphs. Lecture Notes in Computer Science 2573, 310-320; 2002.

[19] M. Kouider, M. Mahèo. Some bounds for the b-chromatic number of a graph. Discrete Math. 256 : 267-277; 2002.

[20] P.C.Lisna. , M.S.Sunitha.The b-chromatic number of mycielskian of cycles , September-2014.

[21] D.F. Manlove. Minimaximal and maximinimal optimization problems: a partial order-based approach. PhD thesis, technical report tr-1998 27 of the Computing Science Department of Glasgow University, 1998.

[22] E. A. Nordhaus, J. W. Gaddum. On complementary graphs. Ann. Math. Monthly,63 : 175-177,1956.

[23] A. Silva, F. Maffray. b-colouring outerplanar graphs with large girth. Discrete Mathematics. 1202.4032v1. [math.CO 17 fevrier 2012.

[24] J.Vernold Vivin and Venkatachalam.M,The b-chromatic Graphs, Utilitas Mathematica, Vol. 88(2012),pp.299-3.